Corso di Idrologia A.A. 2011-2012

Teoria delle probabilità

Prof. Ing. A. Cancelliere

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Università di Catania

Definizione classica di probabilità

- Il concetto di probabilità ha trovato formalizzazione a partire dal XVII° secolo, nell'ambito della teoria dei giochi di azzardo
  - *Ars conjectandi*, James Bernoulli (1713)
  - *Doctrines of chance*, Abraham De Moivre (1718)
  - *Theorie analytique des probabilites*, Laplace (1812)

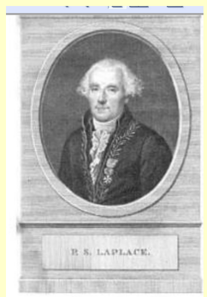
Siamo nani sulle spalle di giganti….

James Bernoulli (1654–1705)

Ars conjectandi, James Bernoulli (1713)

Abraham de Moivre (1667–1754)

Doctrines of chance, Abraham De Moivre (1718)



Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Theorie analytique des probabilites, Laplace (1812)

Definizione classica di probabilità

- Gioco di azzardo: esito incerto ma che presenta una qualche regolarità sul lungo periodo
- Definizione classica di probabilità basata sui concetti di esperimento casuale i cui esiti sono equiprobabili e mutuamente esclusivi
- Definizione classica o a priori:

  Se un esperimento casuale ha n esiti e se n_A di questi esiti posseggono l'attributo A, allora la probabilità di A è

$$P=n_A/n$$

Definizione classica secondo De Moivre

THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES OF SCIENCES *of* Berlin *and* Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand.*
MDCCLVI.

THE

DOCTRINE

OF

CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or leſs, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we conſtitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper deſignation of the Probability

B

Definizione classica secondo De Moivre

2 *The* DOCTRINE *of* CHANCES.

bability of happening. Thus if an Event has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the Fraction $\frac{3}{5}$ will fitly repreſent the Probability of its happening, and may be taken to be the meaſure of it.

The ſame thing may be ſaid of the Probability of failing, which will likewiſe be meaſured by a Fraction whoſe Numerator is the number of Chances whereby it may fail, and the Denominator the whole number of Chances, both for its happening and failing; thus the Probability of the failing of that Event which has 2 Chances to fail and 3 to happen will be meaſured by the Fraction $\frac{2}{5}$.

3. The Fractions which repreſent the Probabilities of happening and failing, being added together, their Sum will always be equal to Unity, ſince the Sum of their Numerators will be equal to their common Denominator: now it being a certainty that an Event will either happen or fail, it follows that Certainty, which may be conceived under the notion of an infinitely great degree of Probability, is fitly repreſented by Unity.

Theſe things will eaſily be apprehended, if it be conſidered, that the word Probability includes a double Idea; firſt, of the number of Chances whereby an Event may happen; ſecondly, of the number of Chances whereby it may either happen or fail.

If I ſay that I have three Chances to win any Sum of Money, it is impoſſible from that bare aſſertion to judge whether I am like to obtain it; but if I add that the number of Chances either to obtain it, or to miſs it, is five in all, from hence will enſue a compariſon between the Chances that favour me, and the whole number of Chances that are for or againſt me, whereby a true judgment will be formed of my Probability of ſucceſs: from whence it neceſſarily follows, that it is the comparative magnitude of the number of Chances to happen, in reſpect to the whole number of Chances either to happen or to fail, which is the true meaſure of Probability.

4. If upon the happening of an Event, I be intitled to a Sum of Money, my Expectation of obtaining that Sum has a determinate value before the happening of the Event.

Thus, if I am to have 10 *L.* in caſe of the happening of an Event which has an equal Probability of happening and failing, my Expectation before the happening of the Event is worth 5 *L.*: for I am preciſely in the ſame circumſtances as he who at an equal Play ventures 5 *L.* either to have 10, or to loſe his 5. Now he who ventures 5 *L.* at an equal Play, is poſſeſſor of 5 *L.* before the deciſion of the Play;

The DOCTRINE *of* CHANCES. 3

Play; therefore my Expectation in the caſe above-mentioned muſt alſo be worth 5 *L.*

5. In all caſes, the Expectation of obtaining any Sum is eſtimated by multiplying the value of the Sum expected by the Fraction which repreſents the Probability of obtaining it.

Thus, if I have 3 Chances in 5 to obtain 100 *L.* I ſay that the preſent value of my Expectation is the product of 100 *L.* by the fraction $\frac{3}{5}$, and conſequently that my expectation is worth 60 *L.*

For ſuppoſing that an Event may equally happen to any one of 5 different Perſons, and that the Perſon to whom it happens ſhould in conſequence of it obtain the Sum of 100 *L.* it is plain that the right which each of them in particular has upon the Sum expected is $\frac{1}{5}$ of 100 *L.* which right is founded in this, that if the five Perſons concerned in the happening of the Event, ſhould agree not to ſtand the Chance of it, but to divide the Sum expected among themſelves, then each of them muſt have $\frac{1}{5}$ of 100 *L.* for his pretenſion. Now whether they agree to divide that ſum equally among themſelves, or rather chuſe to ſtand the Chance of the Event, no one has thereby any advantage or diſadvantage, ſince they are all upon an equal foot, and conſequently each Perſon's expectation is worth $\frac{1}{5}$ of 100 *L.* Let us ſuppoſe farther, that two of the five Perſons concerned in the happening of the Event, ſhould be willing to reſign their Chance to one of the other three; then the Perſon to whom thoſe two Chances are thus reſigned has now three Chances that favour him, and conſequently has now a right triple of that which he had before, and therefore his expectation is now worth $\frac{3}{5}$ of 100 *L.*

Now if we conſider that the fraction $\frac{3}{5}$ expreſſes the Probability of obtaining the Sum of 100 *L.*, and that $\frac{3}{5}$ of 100, is the ſame thing as $\frac{3}{5}$ multiplied by 100, we muſt naturally fall into this concluſion, which has been laid down as a principle, that the value of the Expectation of any Sum, is determined by multiplying the Sum expected by the Probability of obtaining it.

This manner of reaſoning, tho' deduced from a particular caſe, will eaſily be perceived to be general, and applicable to any other caſe.

B 2 COROL-

Definizione classica di probabilità

- Esempio: lancio di una moneta non truccata:
  - –2 esiti (Testa o Croce), equiprobabili (la moneta non è truccata) e mutuamente esclusivi (non possono apparire due facce contemporaneamente)
  - –Probabilità di avere una T in un lancio
    - esiti possibili {T,C} -> n=2
    - Esiti con l'attributo richiesto {T} -> nA=1
    - P[{T}]=1/2
- Esempio: lancio di un dado non truccato
  - –6 esiti equiprobabili e mutuamente esclusivi {1,2,3,4,5,6}
  - –Probabilità di avere 5 -> 1/6
- Esempio: mazzo di 52 carte
  - –Probabilità di estrarre un carta di picche

    P=13/52
  - –Probabilità di estrarre un numero compreso tra 5 e 10 (incluso)

    P=(6x4)/52

Esempi di calcolo di probabilità (De Moivre)

The DOCTRINE *of* CHANCES. 9

fuppofing it has failed, then my Expectation will be 40; wherefore $\frac{2}{5}$ being the meafure of the Probability of my obtaining an Expectation worth 40 *L.*, it follows that this Expectation (to eftimate it before the time of the firft's being determined) will be worth $40 \times \frac{2}{5} = 16$, and therefore my Expectation upon the whole is worth $54^{L.} + 16^{L.} = 70^{L.}$

If that which was called the fecond Event be now confidered as the firft, and that which was called the firft be now confidered as the fecond, the conclufion will be the fame as before.

In order to make the preceding Rules familiar, it will be convenient to apply them to the Solution of fome eafy cafes, fuch as are the following.

CASE I[st].

To find the Probability of throwing an Ace in two throws of one Die.

SOLUTION.

The Probability of throwing an Ace the firft time is $\frac{1}{6}$; wherefore $\frac{1}{6}$ is the firft part of the Probability required.

If the Ace be miffed the firft time, ftill it may be thrown on the fecond, but the Probability of miffing it the firft time is $\frac{5}{6}$, and the Probability of throwing it the fecond time is $\frac{1}{6}$; wherefore the Probability of miffing it the firft time and throwing it the fecond, is $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$: and this is the fecond part of the Probability required, and therefore the Probability required is in all $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

To this cafe is analogous a queftion commonly propofed about throwing with two Dice either fix or feven in two throws; which will be eafily folved, provided it be known that Seven has 6 Chances to come up, and Six 5 Chances, and that the whole number of Chances in two Dice is 36: for the number of Chances for throwing fix or feven being 11, it follows that the Probability of throwing either Chance the firft time is $\frac{11}{36}$; but if both are miffed the firft time, ftill either may be thrown the fecond time; now the Proba-

C bility

10 *The* DOCTRINE *of* CHANCES.

bility of miffing both the firft time is $\frac{25}{36}$, and the Probability of throwing either of them the fecond time is $\frac{11}{36}$; wherefore the Probability of miffing both of them the firft time, and throwing either of them the fecond time, is $\frac{25}{36} \times \frac{11}{36} = \frac{275}{1296}$, and therefore the Probability required is $\frac{11}{36} + \frac{275}{1296} = \frac{671}{1296}$, and the Probability of the contrary is $\frac{625}{1296}$.

CASE II[d].

To find the Probability of throwing an Ace in three throws.

SOLUTION.

The Probability of throwing an Ace the firft time is $\frac{1}{6}$, which is the firft part of the Probability required.

If the Ace be miffed the firft time, ftill it may be thrown in the two remaining throws; but the Probability of miffing it the firft time is $\frac{5}{6}$, and the Probability of throwing it in the two remaining times is (by Cafe 1[st]) $= \frac{11}{36}$. And therefore the Probability of miffing it the firft time, and throwing it in the two remaining times is $\frac{5}{6} \times \frac{11}{36} = \frac{55}{216}$, which is the fecond part of the Probability required; wherefore the Probability required will be $\frac{1}{6} + \frac{55}{216} = \frac{91}{216}$.

CASE III[d].

To find the Probability of throwing an Ace in four throws.

SOLUTION.

The Probability of throwing an Ace the firft time is $\frac{1}{6}$, which is the firft part of the Probability required.

If the Ace be miffed the firft time, of which the Probability is $\frac{5}{6}$, there remains the Probability of throwing it in three times, which (by Cafe 2[d]) is $\frac{91}{216}$; wherefore the Probability of miffing the Ace the firft time, and throwing it in the three remaining times, is $= \frac{5}{6} \times \frac{91}{216} = \frac{455}{1296}$, which is the fecond part of the Probability

bility

Definizione classica di probabilità

- La definizione classica può essere applicata facilmente a molti problemi a patto che siano attentamente conteggiati tutti i possibili esiti e quelli aventi l'attributo richiesto
- Esempio sbagliato:
  - Probabilità di avere due T in due lanci di una moneta non truccata

    Possibili esiti: {TT,CC,TC}

    P=1/3

    …o no?

- <u>Esempio corretto:</u>

  Probabilità di avere due T in due lanci di una moneta non truccata

  Possibili esiti: {TT,CC,TC, CT}

  P=1/4

Definizione classica di probabilità

- Esempio sbagliato:
  - Probabilità di estrarre da un mazzo di carte un asso o una carta di picche
    - Possibili esiti 52
    - Esiti con l'attributo richiesto 4+13=17
    - P=17/52 ???

<u>Esempio corretto:</u>

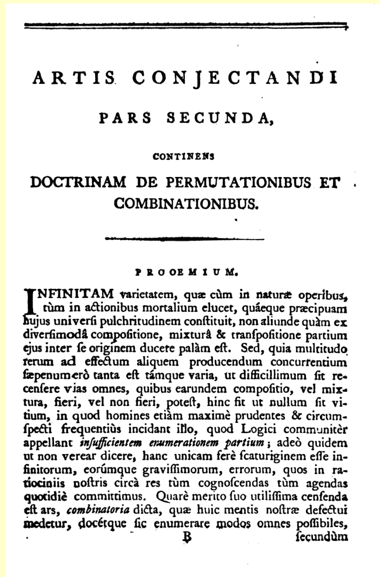
Probabilità di estrarre da un mazzo di carte un asso o una carta di picche

Possibili esiti 52

Esiti con l'attributo richiesto 4+13-1=16

P=16/52

Bernoulli, 1713



ARTIS CONJECTANDI

PARS SECUNDA,

CONTINENS

DOCTRINAM DE PERMUTATIONIBUS ET COMBINATIONIBUS.

PROOEMIUM.

INFINITAM varietatem, quæ cùm in naturæ operibus, tùm in actionibus mortalium elucet, quǽque præcipuam hujus universi pulchritudinem constituit, non aliunde quàm ex diversimodâ compositione, mixturâ & transpositione partium ejus inter se originem ducere palàm est. Sed, quia multitudo rerum ad effectum aliquem producendum concurrentium sæpenumerò tanta est támque varia, ut difficillimum sit recensere vias omnes, quibus earundem compositio, vel mixtura, fieri, vel non fieri, potest, hinc fit ut nullum sit vitium, in quod homines etiàm maximè prudentes & circumspecti frequentiùs incidant illo, quod Logici communitèr appellant *insufficientem enumerationem partium*; adeò quidem ut non verear dicere, hanc unicam ferè scaturiginem esse infinitorum, eorúmque gravissimorum, errorum, quos in ratiociniis nostris circà res tùm cognoscendas tùm agendas quotidiè committimus. Quarè merito suo utilissima censenda est ars, *combinatoria* dicta, quæ huic mentis nostræ defectui medetur, docétque sic enumerare modos omnes possibiles,

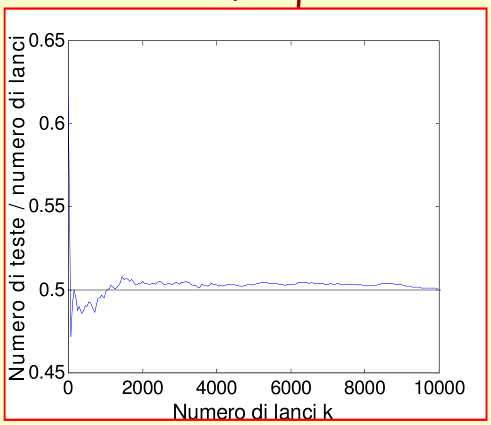
B secundùm

Limiti della definizione classica

- La definizione di probabilità è basata sul concetto di equiprobabilità
- Non applicabile se i possibili esiti sono infiniti
- Esempio:
  - Probabilità di estrarre a caso un numero intero pari
    - Considero i primi 10 numeri P=5/10=1/2
    - Considero i primi 100 numeri P=50/100=1/2
    - ….
  - Se però ordino gli interi in modo differente:
    1,3,2, 5,7,4, 9,11,6, 13,15,8
    - Considero i primi tre numeri P=1/3
    - Considero i primi sei numeri P=2/6=1/3
    - ….

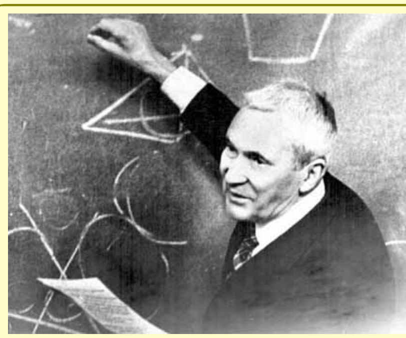
Definizione di probabilità frequentista

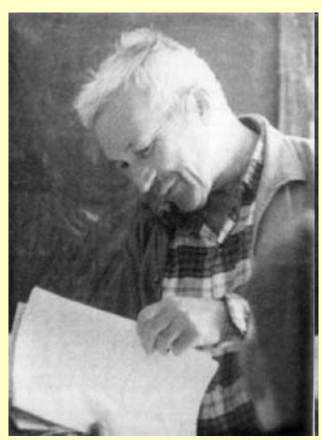
- Consideriamo il lancio di una moneta k volte
- Posso contare quante volte appare T o C e calcolare la frequenza



- Probabilità: limite al quale tende la frequenza al crescere del numero di osservazioni in un esperimento casuale

E infine arrivò Kolmogorov….





Probabilità assiomatica

- Definizione astratta che comprende come casi particolari le definizioni precedenti
- Definiamo:
  - Ω spazio campionario: collezione o totalità di tutti i possibili risultati di un esperimento concettuale
  - *A* evento: sottoinsieme dello spazio campionario
  - ***A*** collezione di tutti i sottoinsiemi di Ω

$$A \in \boldsymbol{A}, \quad \Omega \in \boldsymbol{A}$$

- Esempio: lancio di un dado
  - $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
  - Numero pari $A=\{2, 4, 6\}$
  - Numero dispari $A=\{1, 3, 5\}$

Probabilità assiomatica: definizione

- Funzione di probabilità P[•]

$$P[\bullet]: \quad \boldsymbol{A} \to [0,1] \in \mathbf{R}$$

tale che soddisfi gli assiomi:

1. $P[\Omega]=1$
2. $P[A]\geq 0$
3. Se A1, A2,… è una successione di eventi a due a due incompatibili ($A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$)

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

Probabilità assiomatica: teoremi

- P [∅]=0
  - Prendiamo A1= ∅, A2= ∅,… Evidentemente

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi = \phi$$

Dall'assioma 3

$$P[\phi] = P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[\phi]$$

Probabilità assiomatica: teoremi

- Se A_1, A_2,…A_n è una successione di eventi a due a due incompatibili ($A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$) allora:

$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n]=P[A_1]+P[A_2]+\ldots P[A_n]$

  - Prendiamo $A_{n+1}= A_{n+2}=\ldots= \varnothing$ allora

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i + \phi + \phi \ldots = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i] + P[\phi] + P[\phi] \ldots = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$$

Probabilità assiomatica: teoremi

- $P[A]=1-P[A^c]$
  - $A \cup A^c = \Omega$; $A \cap A^c = \emptyset$ allora:

$$P[\Omega]=P[A \cup A^c]=P[A]+P[A^c]=1$$

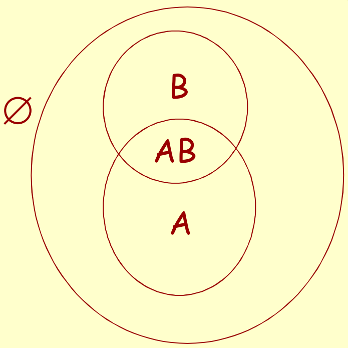
Notazione

- In quel che segue, a meno che particolari esigenze lo richiedano, ometteremo il simbolo intersezione $\cap$

$$A \cap B \equiv AB$$

Probabilità assiomatica: teoremi

- $P[A]=P[AB]+P[AB^c]$
  - $A=AB \cup AB^c$ e $AB \cap AB^c = \varnothing$



ovviamente..

$P[A^cB]=P[B]- P[AB]$

Probabilità assiomatica: teoremi

- $P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[AB]$
  - $A\cup B= A\cup A^c B$ e $A\cap A^c B = \varnothing$

  segue:

  $P[A\cup B]=P[A\cup A^c B]=P[A]+P[A^c B]=$
  $=P[A]+P[B]-P[A\ B]$

Spazi campionari finiti

- In alcune tipologie di problemi (per es. i giochi di azzardo) lo spazio campionario è costituito da un numero finito di punti

  $n = \#[\Omega]$

- Se è lecito assumere che ciascun elemento dello spazio campionario sia equiprobabile:

  $P[\omega_1]=P[\omega_2]=\ldots=P[\omega_n]$

  …e se inoltre:
  - $P[A]=\#[A]/n$

  allora si dimostra che tale funzione di probabilità soddisfa i tre assiomi

- Segue che la definizione assiomatica comprende al suo interno la definizione classica !!

Probabilità condizionata

- Probabilità condizionata:

  $P[A \mid B]=P[A\ B] / P[B]= P[A\ B] / P[B]$

- Esempio: lancio di due monete
  - Ω={TT, TC, CT, CC}
  - P[due teste | una testa sulla prima] ?
  - Sia A1={testa sulla prima}, A2={testa sulla seconda}
  - P[A1 A2 | A1]= P[A1 A2 A1]/P[A1] = P[A1 A2] / P[A1]=

    = (1/4)/(1/2) = 1/2

Indipendenza

- Due eventi A, B sono indipendenti se e solo se:
  - P[A | B]=P[A] se P[B]>0
  - P[A B]=P[A] P[B]
- In pratica l'indipendenza tra due eventi implica che il verificarsi dell'uno non influenza la probabilità che si verifichi l'altro

Variabile casuale

- Variabile casuale X è una funzione:

  Ω -> R
- In pratica qualsiasi grandezza misurabile che presenta variabilità ed imprevedibilità
- Esempio: lancio di una moneta
  - Associo X=1 se T, X=0 se C
- Esempio lancio di due dadi
  - Esito i,j; variabile casuale X=i+j
- Esempio temperatura media del mese di Gennaio a Catania

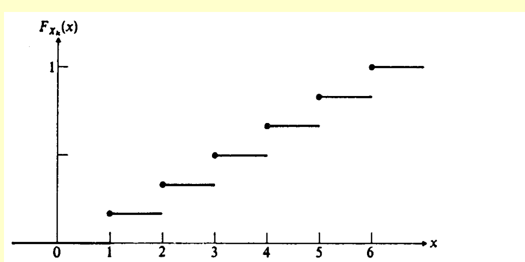
Funzione di ripartizione

- Funzione R -> [0,1] tale che $F_X(x)=P[X \leq x]$
- Proprietà:
  - $F_X(x)$ -> 0 per x -> $-\infty$
    Dimostrazione: $P[X \leq -\infty]=P[\varnothing]=0$
  - $F_X(x)$ -> 1 per x -> $+\infty$
    Dimostrazione: $P[X \leq +\infty]=P[\Omega]=1$
  - $F_X(x)$ è monotona non decrescente
  - $F_X(x)$ è continua a destra

Qualsiasi funzione che soddisfa le precedenti proprietà è una funzione di ripartizione

Esempio di funzione di ripartizione discreta

- Lancio di un dado:
  - $F_X(x)=x/6$ per x=1,2,3,4,5,6



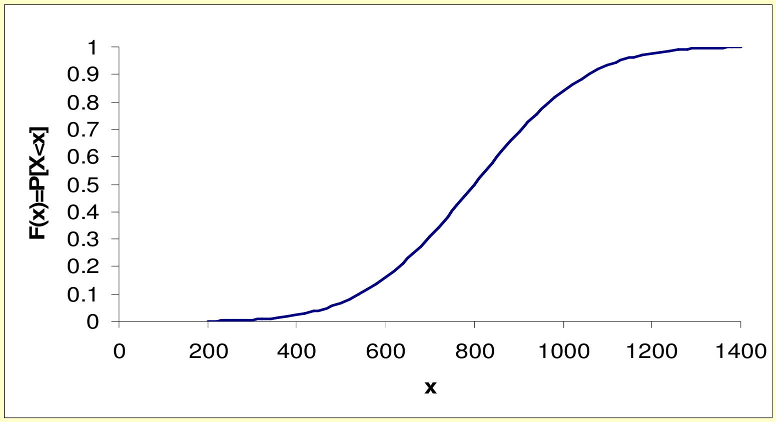
-$F_X(x)$ -> 0 per x -> $-\infty$

-$F_X(x)$ -> 1 per x -> $+\infty$

-$F_X(x)$ è monotona non decrescente

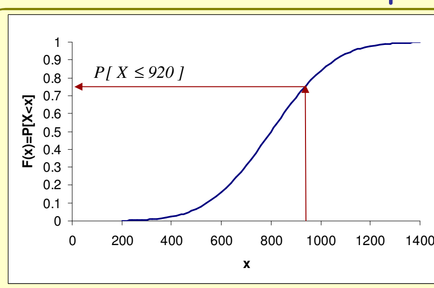
-$F_X(x)$ è continua a destra

Esempio di funzione di ripartizione continua



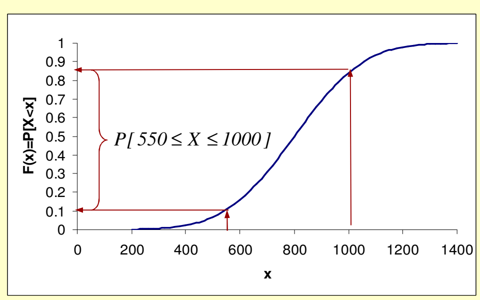
- $F_X(x)$ -> 0 per x -> -∞
- $F_X(x)$ -> 1 per x -> +∞
- $F_X(x)$ è monotona non decrescente
- $F_X(x)$ è continua a destra

Funzioni di ripartizione continue



Nota la funzione di ripartizione è immediato calcolare la probabilità di non superamento

E' possibile calcolare la probabilità che la la v.c. X sia compresa in un intervallo



Funzioni densità di probabilità discrete

- Data una variabile casuale discreta, si definisce funzione densità di probabilità la funzione:

$$f_X(x)=P[X=x]$$

- Esempio: lancio di un dado
  - $f_X(x)=1/6$ per $x=1,2,3,4,5,6$
- Esempio lancio di tre monete
  - Definiamo X= numero di teste nei tre lanci

Proprietà della funzione densità di probabilità discreta

$$f_X(x) \geq 0$$

P[X=x]≥0 sempre

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{x} f_X(i)$$

P[X≤x]=P[X=0]+P[X=1]+…+P[X=x] poiché X=0, X=1, …. sono eventi disgiunti

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) = P[X \leq \infty] = 1$$

Funzioni densità di probabilità discrete

- Esempio lancio di tre monete
  - Definiamo X= numero di teste nei tre lanci

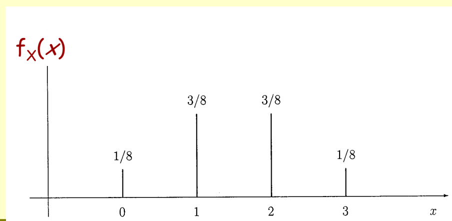
$f_X(0)$= P[X=0]=P[CCC]=1/8

$f_X(1)$=P[X=1]=P[CCT $\cup$ TCC $\cup$ CTC]= P[CCT]+ P[TCC] + P[CTC]=3/8

$f_X(2)$=P[X=2]=P[CTT $\cup$ TTC $\cup$ TCT]= P[CTT]+ P[TTC] + P[TCT]=3/8

$f_X(3)$=P[X=3]=P[TTT]=1/8

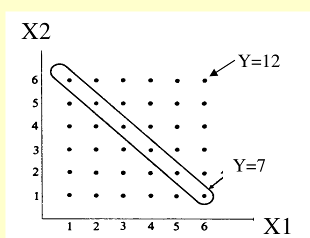
	x	$f_X(x)$
T T T	3	1/8
T T C	2	1/8
T C T	2	1/8
T C C	1	1/8
C T T	2	1/8
C T C	1	1/8
C C T	1	1/8
C C C	0	1/8

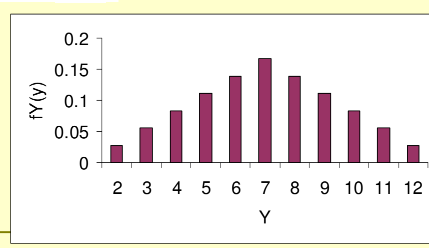


Funzioni di densità di probabilità discrete

- Esempio: lancio di due dadi con esiti X1 e X2. Sia Y=X1+X2. Qual è la $f_Y(y)$?

Y	fy(y)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36





Funzioni densità di probabilità continue

- Se la variabile X è continua non è possibile definire la funzione di densità come $f_X(x)=P[X=x]$ poiché $P[X=x]=0$
- La funzione densità è definita come :

$$P[X \leq x] = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

- Segue che (sotto opportune condizioni):

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

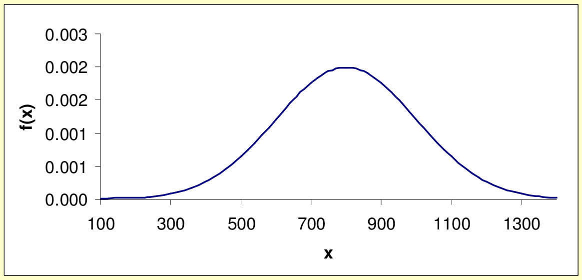
Funzioni densità di probabilità continue

- Proprietà della funzione di densità continua:

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$
  - Altrimenti la Fx(x) non sarebbe monotona non descrescente
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = P[X \leq \infty] = P[\Omega] = 1$$

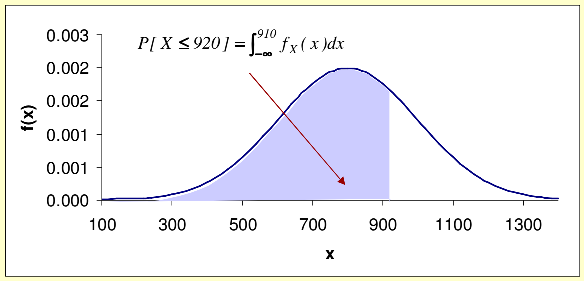
Funzione di densità continua



Una funzione di densità deve essere tale che l'area sottesa sia unitaria

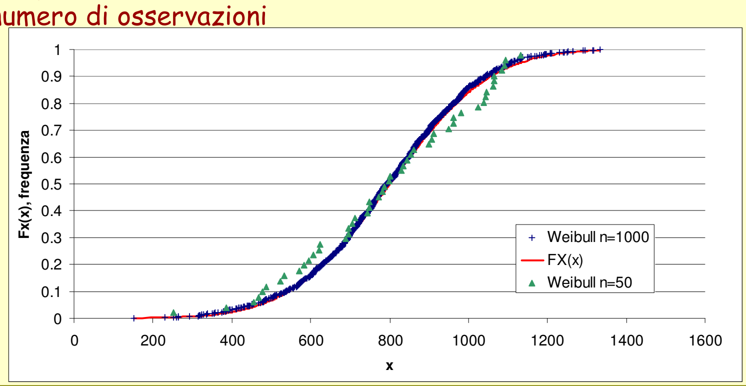
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

La probabilità di non superamento del valore 920 è data dall'integrale esteso a 920 e quindi dall'area della regione azzurra



Interpretazione frequenziale della densità di probabilità e della funzione di ripartizione

- La densità di probabilità di una variabile continua può essere vista come il limite dell'istogramma di frequenza al tendere all'infinito del numero di osservazioni, ovvero al tendere a zero dell'ampiezza di classe
- La funzione di ripartizione può essere vista come il limite della frequenza cumulata (ad es. Weibull) al tendere all'infinito del numero di osservazioni



Momenti di una distribuzione

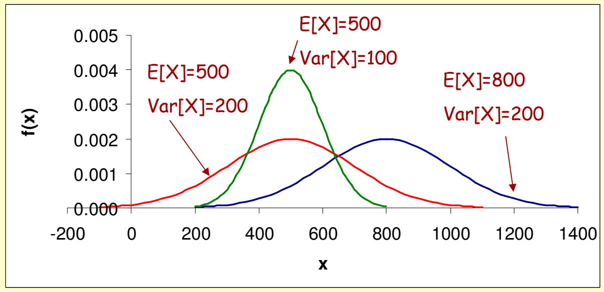
- I momenti di una distribuzione sono degli indici sintetici della forma della densità di probabilità
- Valore atteso o momento del primo ordine:
  - X discreta $E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_X(x_i)$
  - X continua $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$
- Il valore atteso rappresenta la media della variabile casuale poiché è la somma (integrale) di tutti i possibili valori della X pesati per la rispettiva probabilità

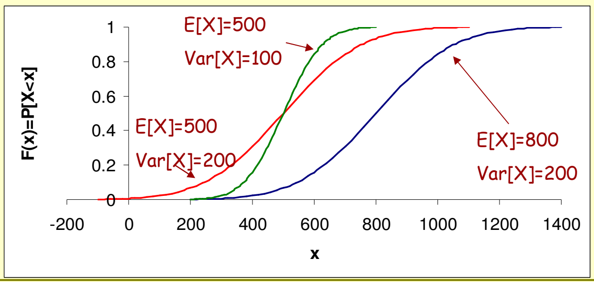
Momenti di una distribuzione

- Varianza o momento del secondo ordine:
  - X discreta $Var[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i - E[X]\right)^2 f_X(x_i)$
  - X continua $Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E[X]\right)^2 f_X(x)dx$
- La varianza di una variabile casuale è rappresentativa della sua variabilità

Valore atteso e varianza

Densità di probabilità





Funzione di ripartizione

Proprietà del valore atteso e della varianza

- E[aX]=aE[X]
- E[X1+X2]=E[X1]+E[X2]
- Var[aX]=a^2Var[X]
- Var [X1+X2]=Var[X1]+Var[X2] se e solo se X1, X2 sono indipendenti

Funzioni di probabilità parametriche discrete

- Per risolvere molti problemi pratici è opportuno fare ricorso a funzioni di ripartizione (o densità) "preconfezionate" dette parametriche, funzione di parametri che di volta in volta vengono adattati al caso in esame
- Tra le funzioni parametriche discrete più interessanti dal punto di vista pratico:
  - Geometrica
  - Binomiale
  - Poisson

Funzione densità di probabilità geometrica

- Una variabile casuale X discreta è distribuita secondo una distribuzione geometrica con parametro p, se la sua densità di probabilità è:

$$f_X(x)=p(1-p)^{x-1} \qquad x=1,2,\ldots$$

La "storia" dietro la geometrica è:

- supponiamo di avere un esperimento casuale i cui possibili esiti sono "successo" con probabilità p e "insuccesso" con probabilità 1-p
- La funzione di densità geometrica rappresenta la probabilità del numero di insuccessi prima di avere un successo

- Una v.c. distribuita secondo una geometrica ha valore atteso e varianza:

$$E[\,X\,]=\frac{1}{p}; \qquad Var[\,X\,]=\frac{1-p}{p^2}$$

Funzione densità di probabilità geometrica

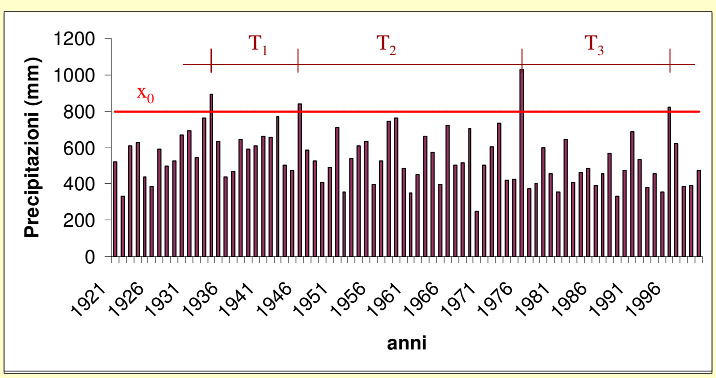
- Esempio: lancio ripetuto di una moneta
  - Successo T
  - Insuccesso C
  - Probabilità di successo p=1/2

Qual è la probabilità che io debba lanciare la moneta 3 volte prima di avere una testa (successo)?

$f_X(3)=p(1-p)^{3-1}=.5*.5^2=.125$

Funzione densità di probabilità geometrica

- Esempio: tempo di ritorno
  - Sia X una variabile casuale con funzione di ripartizione Fx(x)
  - Definiamo tempo di ritorno Tr di un valore x_o il tempo che intercorre in media tra due eventi $X > x_o$



Tr=E[T]

Funzione densità di probabilità geometrica

- Tempo di ritorno
  - Definiamo
    - Successo l'evento $X > x_o$ con probabilità $p=1-Fx(x_o)$
    - Insuccesso l'evento $X \leq x_o$
- Il tempo di ritorno sarà il valore atteso della variabile geometrica Y che esprime il numero di insuccessi prima di un successo

$$Tr = E[\,Y\,] = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - F_X(\,x_o\,)}$$

Funzione densità di probabilità binomiale

- Una variabile casuale X discreta è distribuita secondo una distribuzione binomiale con parametri *n*,p, se la sua densità di probabilità è:

$$f_X(\,x\,) = \binom{n}{x} p^x (\,1 - p\,)^{n-x} \qquad \text{per } x = 0,1,2,\ldots,n$$

La "storia" dietro la binomiale è:

- supponiamo di ripetere *n* volte un esperimento casuale i cui possibili esiti sono "successo" con probabilità p e "insuccesso" con probabilità 1-p
- La funzione di densità binomiale rappresenta la probabilità del numero di successi in *n* ripetizioni

- Una v.c. distribuita secondo una binomiale ha valore atteso e varianza:

$$E[\,X\,] = np\,; \qquad Var[\,X\,] = np(\,1 - p\,)$$

Funzione densità di probabilità binomiale

- Esempio: rischio
  - Sia X una variabile casuale con funzione di ripartizione Fx(x)
  - Definiamo **rischio** di un valore x_o in *n* tentativi la probabilità di avere almeno un valore $X > x_o$ in *n* tentativi
  - Ad esempio sia X la portata massima annuale in una sezione di un corso d'acqua. Il rischio $R(x_o,n)$ rappresenta la probabilità di osservare in *n* anni almeno un anno con un valore di portata massima maggiore di x_o
  - Definiamo:
    - Successo l'evento $X > x_o$ con probabilità $p=1-Fx(x_o)$
    - Insuccesso l'evento $X \leq x_o$
    - S il numero di successi in *n* anni
  - $R(x_o,n)= P[S\geq 1]=1-P[S=0]$
  - Applicando la distribuzione binomiale:

$$P[S=0]=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n$$

  - Il **rischio** è quindi:

$$R(x_o,n)=1-Fx(x_o)^n$$

Funzione densità di probabilità di Poisson

- Una variabile casuale X discreta è distribuita secondo una distribuzione di Poisson con parametro λ, se la sua densità di probabilità è:

$$f_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \text{per } x=0,1,2,...$$

- $E[X]=\lambda$
- $Var[X]= \lambda$

- La distribuzione di Poisson rappresenta il limite di una distribuzione binomiale al crescere di *n* all'infinito

Funzioni densità di probabilità continue

- Tra le funzioni parametriche continue di interesse nel campo delle risorse idriche:
  - Normale (erroneamente attribuita a Gauss)
  - Log-normale
  - Gumbel

Funzione di densità di probabilità Normale

- Una variabile casuale X continua è distribuita secondo una distribuzione Normale con parametri μ e σ, se la sua densità di probabilità è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La distribuzione Normale o gaussiana è la distribuzione che più di ogni altra trova applicazione in statistica a causa del fatto che approssima altre distribuzioni e che possiede notevoli proprietà matematiche
- E[X]= μ
- Var[X]= σ^2

Proprietà della distribuzione Normale

- Siano $X_1, X_2, \ldots, X_k \ldots, X_n$ n variabili casuali indipendenti distribuite Normalmente con parametri (μ_k, σ_k)
- La variabile casuale $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_k + \ldots + X_n$ segue una distribuzione Normale con parametri:

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k ; \qquad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

Teorema del limite centrale

- Siano $X_1, X_2, \ldots, X_k \ldots, X_n$ n variabili casuali indipendenti identicamente distribuite con valore atteso e varianza μ e σ^2
- La distribuzione della variabile casuale

$$Y = (X_1 + X_2 + \ldots + X_k + \ldots + X_n)/n$$

tende asintoticamente ad una distribuzione Normale con parametri μ e σ^2/n

Stima dei parametri μ e σ della distribuzione Normale

- Con riferimento ad un campione osservato x_1, x_2, …x_n stimare i parametri significa trovare i valori di μ e σ tale che la corrispondente distribuzione Normale si adatti "al meglio" ai miei dati
- Due metodi:
  - Metodo dei momenti
  - Metodo della massima verosimiglianza
- Il metodo dei momenti consiste nell'eguagliare i momenti teorici della distribuzione con quelli calcolati sul campione:
  - $E[\,X\,] = \mu = \overline{x}$
  - $Var[\,X\,] = \sigma^2 = S^2$

And then came R.A. Fisher…

Metodo della massima verosimiglianza (Fisher)

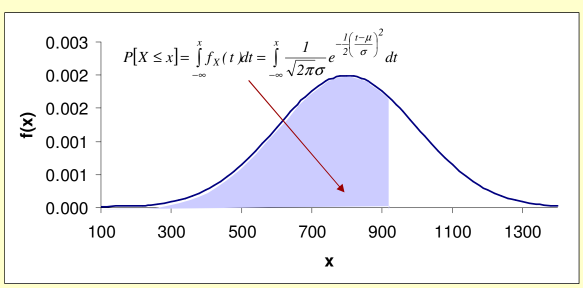
- Il metodo della massima verosimiglianza consiste nel trovare i valori dei parametri in corrispondenza dei quali risulta massima la probabilità (approssimata) di osservare il campione
- $P[X = x] \approx P[x < X \leq x+dx] = f_X(x)dx$
- $P[X1=x_1, X2=x_2,\dots Xn=x_n] =$
  $P[X1=x_1]\, P[X2=x_2] \dots P[Xn=x_n] \approx$
  $f_X(x_1)\, f_X(x_2)\, f_X(x_n)\, dxdx\dots dx = \prod f_X(x_i)$

$$L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\mu,\sigma)$$

Calcolo della probabilità di non superamento

- Sia X distribuita normalmente con parametri μ e σ

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Calcolo della probabilità di non superamento

- L'integrale non può essere risolto in forma chiusa
- Possibili soluzioni
  - Integrazione numerica
    - EXCEL -> DISTRIB.NORM(x, μ, σ,1)
    - Matlab -> normcdf(x, μ, σ)
  - Valori tabellati
    - Calcolare la variabile ridotta $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

Tab. 1.1. Funzione di probabilità della distribuzione di Gauss: valori della variabile ridotta *u* in funzione di quelli della probabilità di non superamento *P*. (A causa della simmetria della distribuzione non sono tabulati i valori negativi della variabile ridotta; la virgola decimale è sostituita dal punto.)

P	.5000	.5050	.5100	.5150	.5200	.5250	.5300	.5350	.5400	.5450
u	.0000	.0125	.0250	.0375	.0500	.0625	.0751	.0876	.1002	.1128
P	.5500	.5550	.5600	.5650	.5700	.5750	.5800	.5850	.5900	.5950
u	.1254	.1380	.1507	.1633	.1760	.1888	.2015	.2143	.2271	.2400
P	.6000	.6050	.6100	.6150	.6200	.6250	.6300	.6350	.6400	.6450
u	.2529	.2659	.2789	.2919	.3050	.3182	.3314	.3447	.3580	.3714
P	.6500	.6550	.6600	.6650	.6700	.6750	.6800	.6850	.6900	.6950
u	.3849	.3984	.4120	.4257	.4395	.4533	.4673	.4813	.4954	.5097

Funzione di densità di probabilità log-Normale

- Una variabile casuale X continua è distribuita secondo una distribuzione log-Normale con parametri μ_y e σ_y, se la variabile Y=lnX è distribuita normalmente
- La densità di probabilità log-Normale è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2}$$

$$E[X] = e^{\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2}$$

$$Var[X] = E[X] * e^{\sigma_y^2 - 1}$$

Stima dei parametri della distribuzione log-Normale

I parametri μ_y e σ_y possono essere stimati come:

- Metodo dei momenti

$$\mu_y = \ln \bar{x} - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{S^2}{\bar{x}^2}\right]$$

$$\sigma_y^2 = \ln\left(1 + \frac{S^2}{\bar{x}^2}\right)$$

- Metodo della massima verosimiglianza

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i / n$$

$$\sigma_y = \left[\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \mu_y)^2 / n\right]^{1/2}$$

Calcolo della probabilità di non superamento

- La probabilità di non superamento è data dall'integrale:

$$P[X \le x] = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2} dt$$

- L'integrale non può essere risolto in forma chiusa
  - Integrazione numerica
    - EXCEL ->.DISTRIB.LOGNORM(x, μ_y, σ_y)
  - Calcolare la variabile ridotta:

$$u = \frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}$$

    - Utilizzare la tabella della distribuzione normale
    - MATLAB normcdf(u,0,1)

Distribuzione di probabilità di Gumbel

- La distribuzione di probabilità di Gumbel rappresenta il limite della distribuzione del massimo di n variabili casuali al tendere di *n* all'infinito
- Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$$

- Densità di probabilità:

$$f_X(x) = \alpha e^{\left[-\alpha(x-\beta) - e^{-\alpha(x-\beta)}\right]}$$

- Momenti:

$$E[X] = \beta + \frac{n_e}{\alpha} = \beta + \frac{.5772}{\alpha}$$

$$Var[X] = \frac{\pi}{6\alpha^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{6}S} = \frac{1.282}{S}$$

$$\hat{\beta} = \bar{x} - \frac{n_e}{\hat{\alpha}} = \bar{x} - \frac{.5772}{\hat{\alpha}}$$

Adattamento di una distribuzione di probabilità

Esempio: serie di precipitazione annue osservate nella stazione di Caltanissetta nel periodo 1971-2000 (30 anni)

Anno	Precipitazione (mm)
1971	501.8
1972	604.4
1973	735
1974	421.6
1975	426
1976	1028.2
1977	373.3
1978	399.8
1979	594.2
1980	454.0
1981	356.2
1982	645.4
1983	409.8
1984	458.6
1985	487.2
1986	387.6
1987	452.6
1988	565.8
1989	332.8
1990	475.0
1991	687.6
1992	533.2
1993	376.2
1994	335.8
1995	357.2
1996	822.2
1997	618.4
1998	385.0
1999	390.2
2000	473.6

media	503.0
mediana	456.3
std	159.31
var	25379.10
Cv	0.317

<u>Distribuzione normale</u>

μ=media=503.0

σ=scarto q. medio=159.3

Qual è la P[X≤600]?

$P[X\leq600]=F_X(600)$=distrib.norm(600;503;159.3;1)=.73

Qual è la P[400≤ X≤700]?

$P[400\leq X \leq 700]=F_X(700) - F_X(400)=$
=distrib.norm(700;503;159.3;1)- distrib.norm(400;503;159.3;1)
=.64

Adattamento di una distribuzione di probabilità

Esempio: serie di precipitazione annue osservate nella stazione di Caltanissetta nel periodo 1971-2000 (30 anni)

media	503.0
mediana	456.3
std	159.31
var	25379.10
Cv	0.317

Distribuzione log-Normale (metodo della max. verosimiglianza)

μ_y=media dei logaritmi=6.18

σ_y=scarto q. medio dei logaritmi=.280

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i / n$$

$$\sigma_y = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\ln x_i - \mu_y \right)^2 / n \right]^{1/2}$$

Qual è la P[X≤600]?

P[X≤600]=F_X(600)=distrib.norm((ln(600)-6.18)/.280;0;1;1)=.78

P[X≤600]=FX(600)=distrib.lognorm(600;6.18;.280;1)=.78

Adattamento di una distribuzione di probabilità

Esempio: serie di precipitazione annue osservate nella stazione di Caltanissetta nel periodo 1971-2000 (30 anni)

media	503.0
mediana	456.3
std	159.31
var	25379.10
Cv	0.317

Distribuzione di Gumbel

α=.008047

β=431.27

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{6}S} = \frac{1.282}{S}$$

$$\hat{\beta} = \bar{x} - \frac{n_e}{\hat{\alpha}} = \bar{x} - \frac{.5772}{\hat{\alpha}}$$

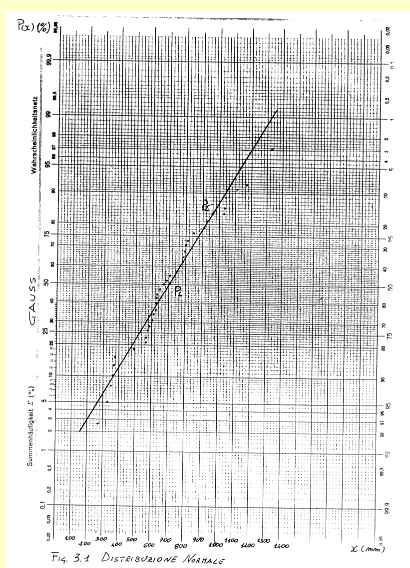
Qual è la P[X≤600]?

$$P[X \le 600] = F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} = .77$$

Verifica della bontà di adattamento di una distribuzione

- Una volta stimati i parametri sulla base di un campione osservato di dati, è opportuno verificare l'adattamento della distribuzione ai dati stessi
- Tale verifica può essere condotta in due modi:
  - Controllo grafico
  - Applicazione dei test statistici di adattamento
- Il controllo grafico consiste nel confrontare l'andamento della funzione di ripartizione con quello della frequenza cumulata (ad es. Weibull)

Cartogrammi probabilistici



Probability plot

- In alternativa al cartogramma probabilistico, si può ricorrere al cosidetto "probability plot" che consiste nel riportare in ordinate le osservazioni in ordine crescente ed in ascisse il quantile calcolato (tramite la distribuzione) in corrispondenza alle frequenze di Weibull
- Se la distribuzione si adatta ai dati, i punti si allineeranno attorno ad una retta

Numero d'ordine	xi (mm)	Fi Weibull	X(Fi)
1	251.8	0.020	341.6
2	386.6	0.039	407.0
3	456.2	0.059	449.3
4	468.4	0.078	481.5
5	476.6	0.098	508.2
6	486.0	0.118	531.1
7	523.9	0.137	551.5
8	533.6	0.157	569.9
9	571.1	0.176	586.9
10	582.8	0.196	602.8
...	...	...	...

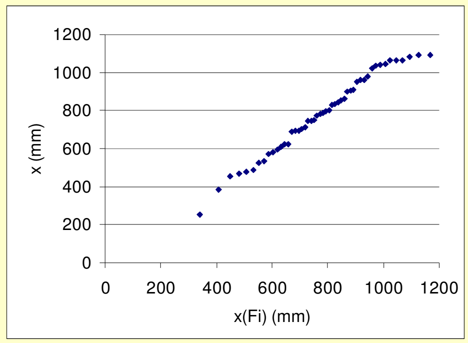
$F_i = i/(n+1)$

$x(F_i)$: $P[X \le x(F_i)] = F_i$

Per es. se la distribuzione è normale:

•Calcolare (o leggere dalle tabelle) il valore della variabile ridotta $u(F_i)$

•$x(F_i) = \sigma\, u(F_i) + \mu$



Probability plot correlation test

- Test che consente di verificare la bontà di adattamento in maniera oggettiva
- Basato sul calcolo della statistica:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x(Fi) - \bar{x}(Fi))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(x(Fi) - \bar{x}(Fi))^2}}$$

- Tanto più elevato è r, tanto migliore è l'adattamento