

# Progettazione strutturale e nuove normative

Corso di aggiornamento

Ordine degli ingegneri  
della provincia di Catanzaro

Progetto/verifica  
agli stati limite  
di sezioni in c.a.

Catanzaro, 16 e 23 febbraio 2007

Aurelio Ghersi

# Argomento delle lezioni

Dalle tensioni ammissibili agli stati limite:

- Che scelte "filosofiche" ci stanno sotto?
- Come si opera?  
Modo di procedere e formule completamente nuove oppure simili a quelle vecchie?
- Come cambiano i risultati:  
in assenza di sisma?  
e in presenza di sisma?

# Dalle tensioni ammissibili agli stati limite

Catanzaro, 16 febbraio 2007

Aurelio Ghersi

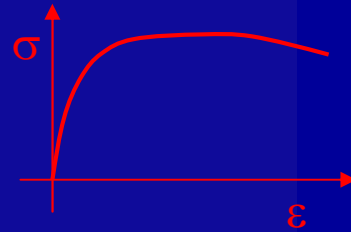
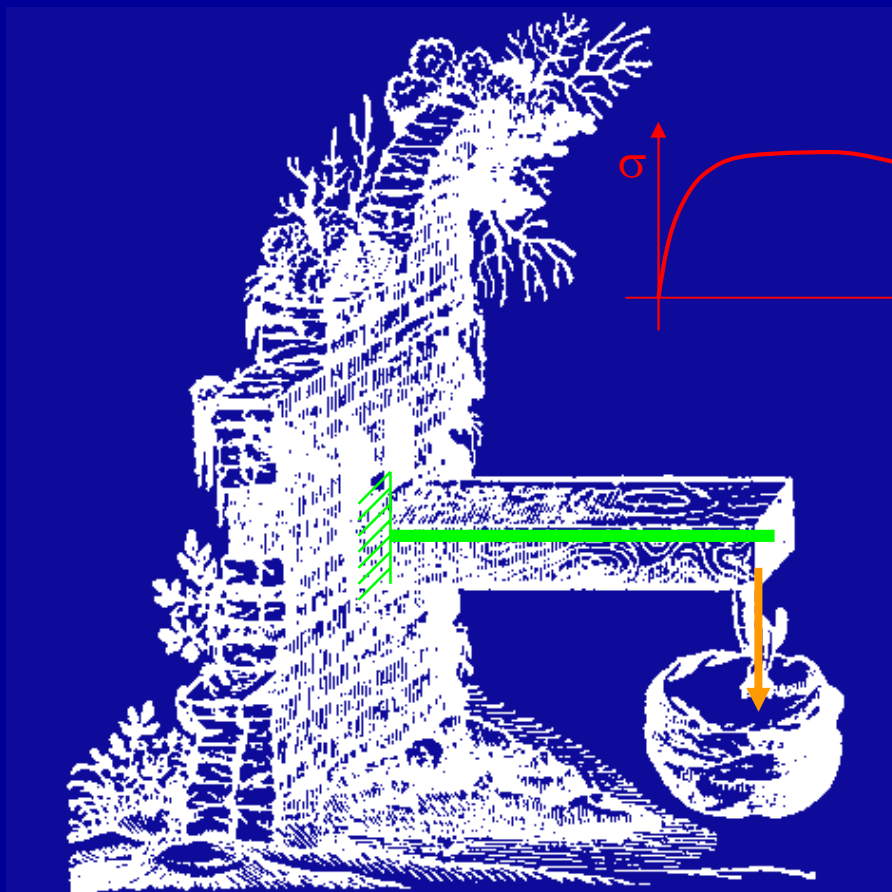
# Verifica delle sezioni e sicurezza strutturale

# Quali sono gli obiettivi della progettazione strutturale?

Una struttura deve essere progettata e costruita in modo che:

- Con accettabile probabilità rimanga adatta all'uso per il quale è prevista, tenendo nel dovuto conto la sua vita presupposta e **il suo costo**
- Con adeguati livelli di accettabilità sia in grado di sopportare tutte le azioni o influenze, cui possa essere sottoposta durante la sua realizzazione e il suo esercizio, e abbia adeguata durabilità in relazione **ai costi di manutenzione**

Come garantire che  
“la struttura sopporti le azioni ...” ?



Modello del  
materiale

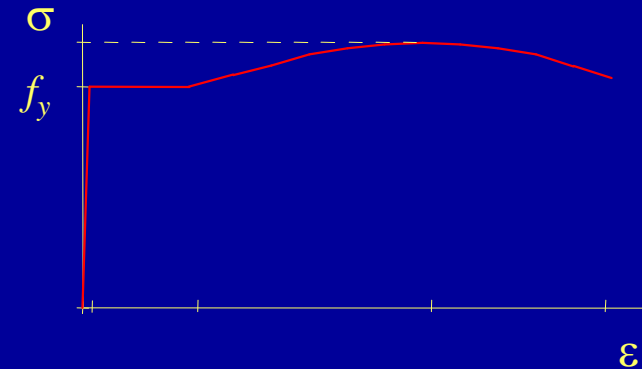
Modello della  
struttura

Modello dei  
carichi

# Materiale

## Problemi:

- Incertezze sul valore della resistenza
- Non linearità del legame costitutivo





# Incertezza sulla resistenza

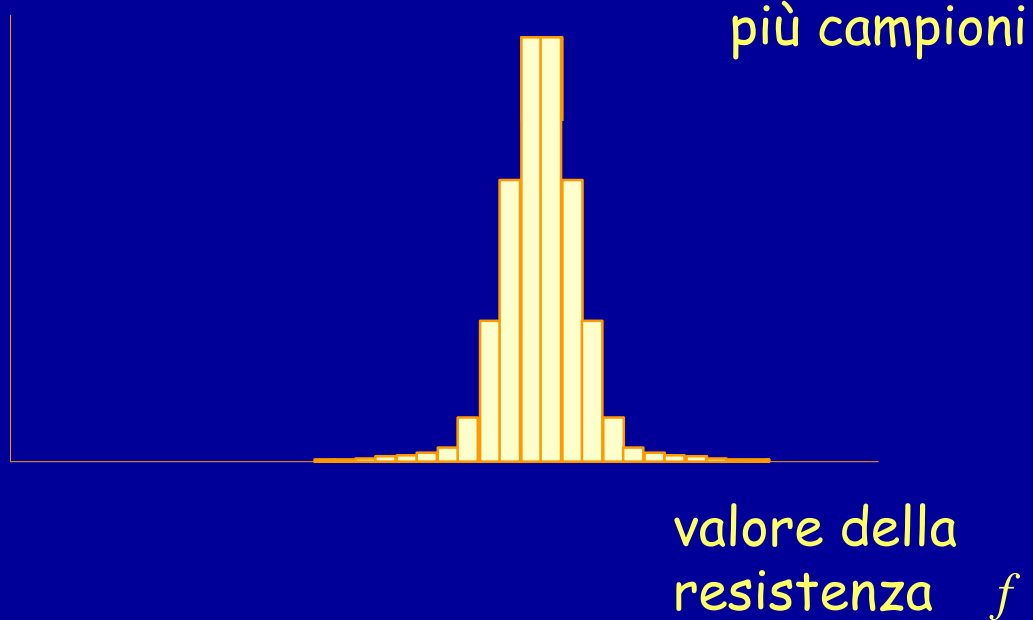
provino	$f_y$ [MPa]
1	387.9
2	395.2
3	403.9
4	421.8
5	429.1
6	430.1
7	430.4
...	...
49	447.2
...	...
99	460.2
100	469.5

Portando a rottura  
100 provini si ottengono  
risultati fortemente diversi

A quale fare riferimento?

# Incertezza sulla resistenza

numero di  
campioni  
(frequenza)

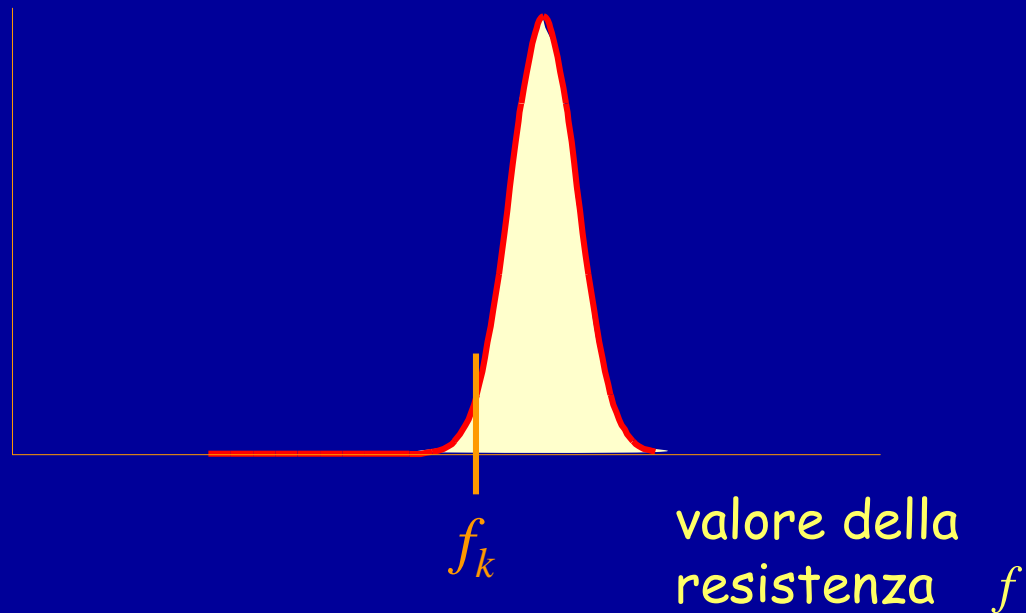


# Incertezza sulla resistenza



# Incertezza sulla resistenza

A quale valore della resistenza ci si deve riferire ?



Il riferimento fondamentale è sempre il valore caratteristico

# Incertezza sulla resistenza

provino	$f_y$ [MPa]
1	387.9
2	395.2
3	403.9
4	421.8
5	429.1
6	430.1
7	430.4
...	...
49	447.2
...	...
99	460.2
100	469.5

Portando a rottura  
100 provini si ottengono  
risultati fortemente diversi

A quale fare riferimento?

430 MPa  $f_{yk}$

Valore caratteristico

frattile 5% = valore al di sotto  
del quale ricade il 5% dei dati  
sperimentali

# Azioni

Azioni permanenti	$G$	peso proprio, altri carichi che non variano nel tempo
Azioni variabili	$Q$	carichi variabili di esercizio, carichi da vento o da neve
Azioni eccezionali	$A$	esplosioni, urti di veicoli, terremoti

# Incertezza sulle azioni

Valori nominali

peso di elementi di dimensioni e caratteristiche ben definite

Esempio: peso proprio della soletta di un solaio

Siamo sicuri che verranno realizzati esattamente come previsto?

# Incertezza sulle azioni

Valori "massimi"

Esempio: massimo carico  
variabile su un solaio (in base  
alla destinazione d'uso)

Siamo sicuri che non saranno mai superati?



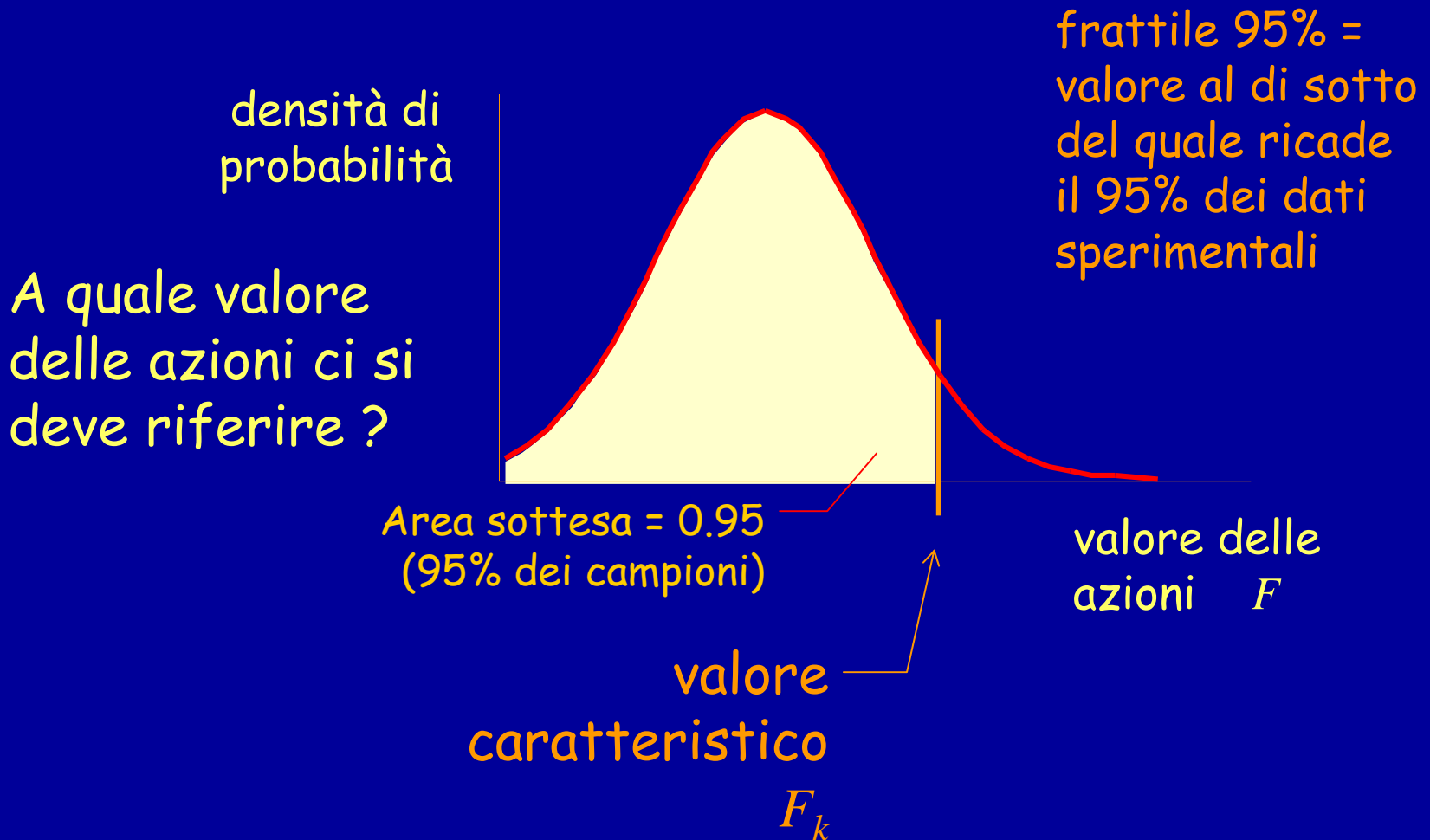
# Incertezza sulle azioni

solaio	q [kN/m <sup>2</sup> ]
1	0.44
2	0.59
...	...
49	1.12
...	...
94	1.92
95	1.97
96	2.08
97	2.19
98	2.35
99	2.51
100	2.94

Esaminando il sovraccarico massimo in 100 solai per abitazione si trovano valori fortemente diversi

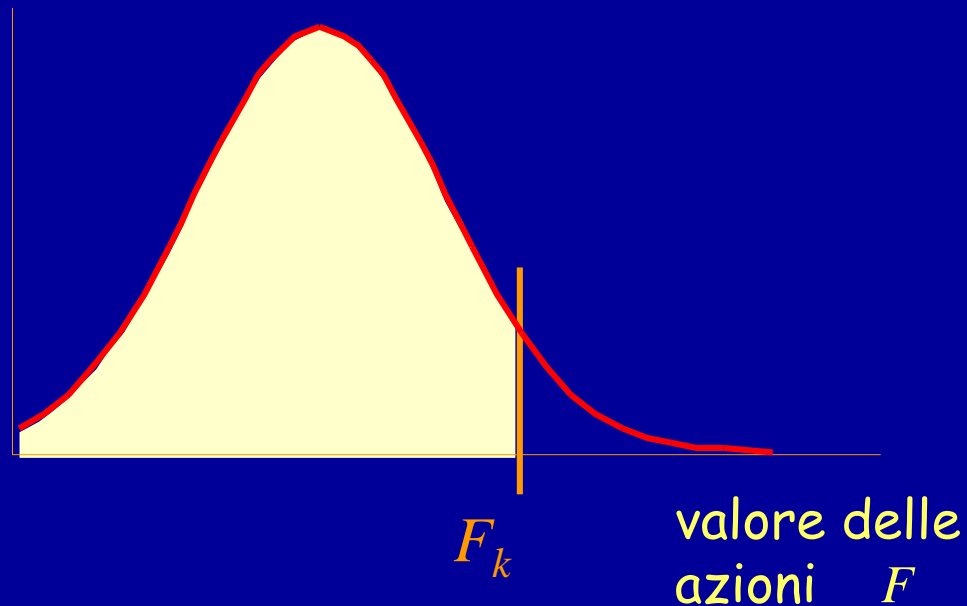
A quale fare riferimento?

# Incertezza sulle azioni



# Incertezza sulle azioni

A quale valore delle azioni ci si deve riferire ?



Il riferimento fondamentale è sempre il valore caratteristico (anche quando non viene indicato esplicitamente)

# Incertezza sulle azioni

solaio	q [kN/m <sup>2</sup> ]
1	0.44
2	0.59
...	...
49	1.12
...	...
94	1.92
95	1.97
96	2.08
97	2.19
98	2.35
99	2.51
100	2.94

Esaminando il sovraccarico massimo in 100 solai per abitazione si trovano valori fortemente diversi

A quale fare riferimento?

2.0 kN/m<sup>2</sup>  $q_k$

Valore caratteristico

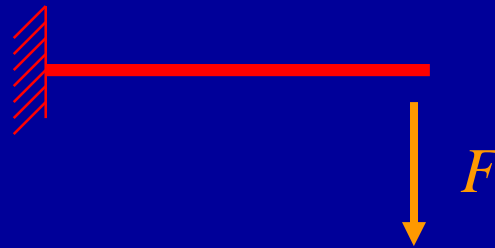
frattile 95% = valore al di sotto del quale ricade il 95% dei dati sperimentali

E' possibile fare il calcolo utilizzando i valori caratteristici della resistenza e delle azioni ?

"A occhio", non sembra abbastanza sicuro.

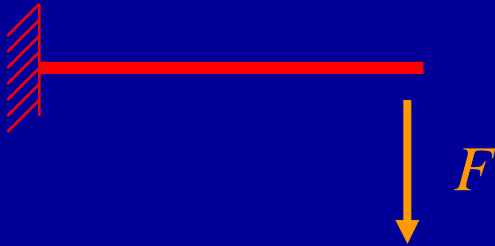
Ma come si può valutare la probabilità di avere un crollo ?

Esempio



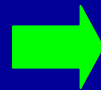
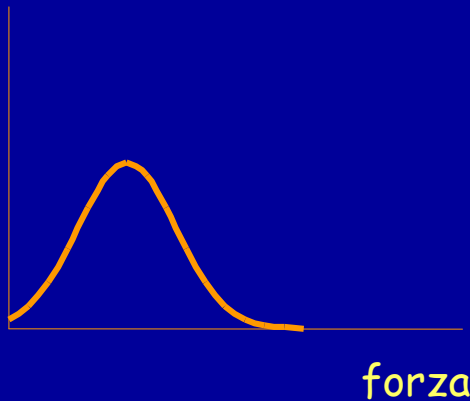
Per esprimere un giudizio dobbiamo confrontare il momento  $M_S$  che sollecita la sezione col momento  $M_R$  che essa può sopportare

# Probabilità di crollo

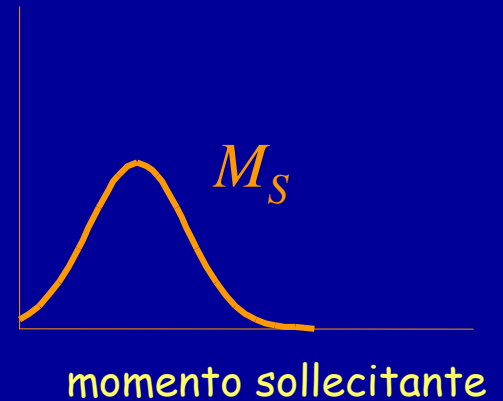


Il momento massimo  $M_S$  che sollecita la sezione dipende dal valore della forza

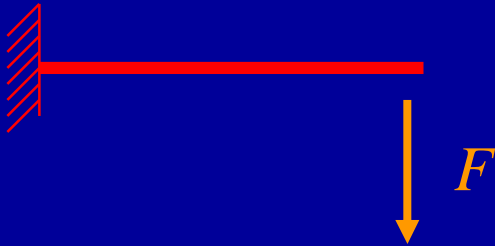
densità di  
probabilità  
della  
forza



densità di  
probabilità  
del  
momento  
sollecitante

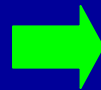
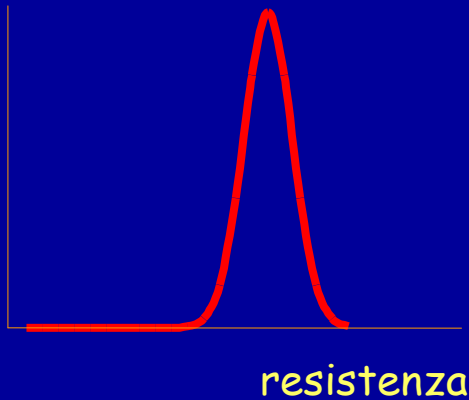


# Probabilità di crollo

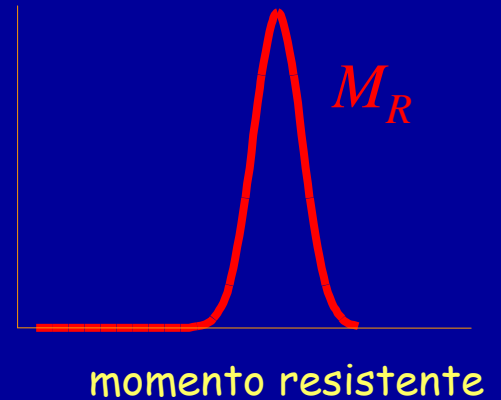


Il momento massimo  $M_R$  che la sezione può sopportare dipende dalla resistenza del materiale

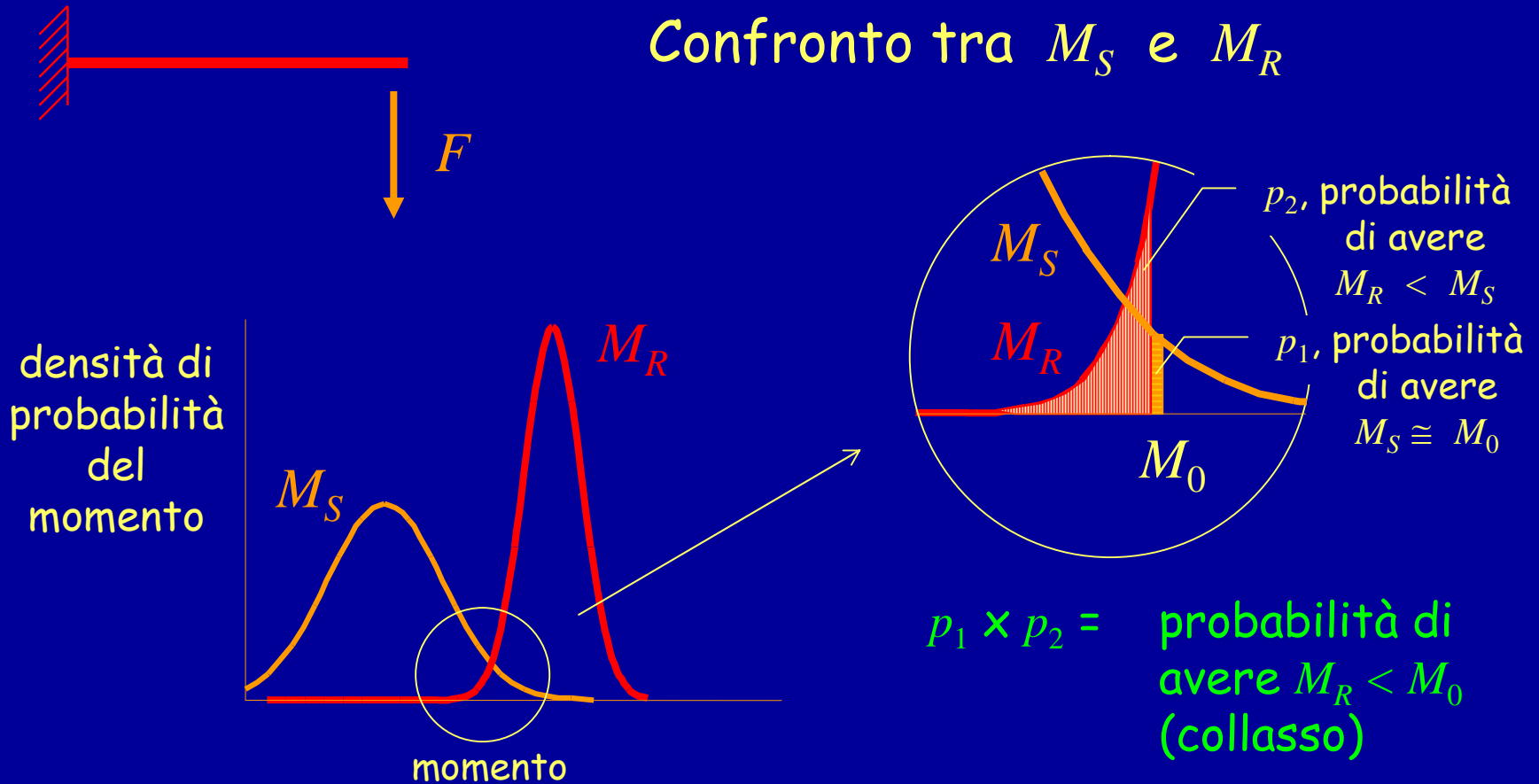
densità di  
probabilità  
della  
resistenza



densità di  
probabilità  
del  
momento  
resistente



# Probabilità di crollo



Ripetendo per tutti i valori di  $M_0$  si trova la probabilità totale di collasso



E' possibile fare il calcolo utilizzando i valori caratteristici della resistenza e delle azioni ?

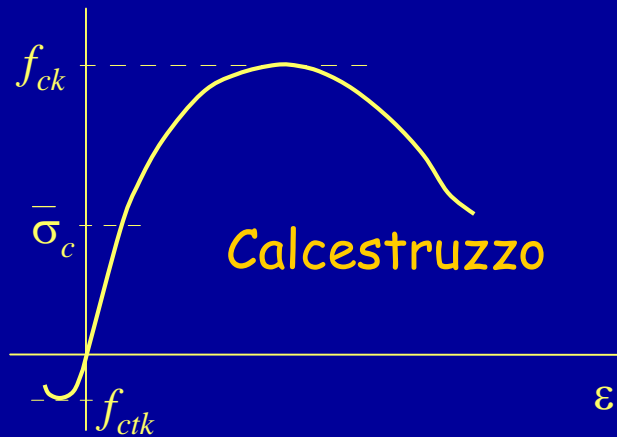
No, perché la possibilità di avere resistenza inferiore o azioni superiori porta ad un rischio di crollo non sufficientemente basso

E' necessario applicare coefficienti di sicurezza

In che modo ?

# Prima possibilità: applicare un coefficiente di sicurezza alla resistenza

## Diagrammi sperimentali



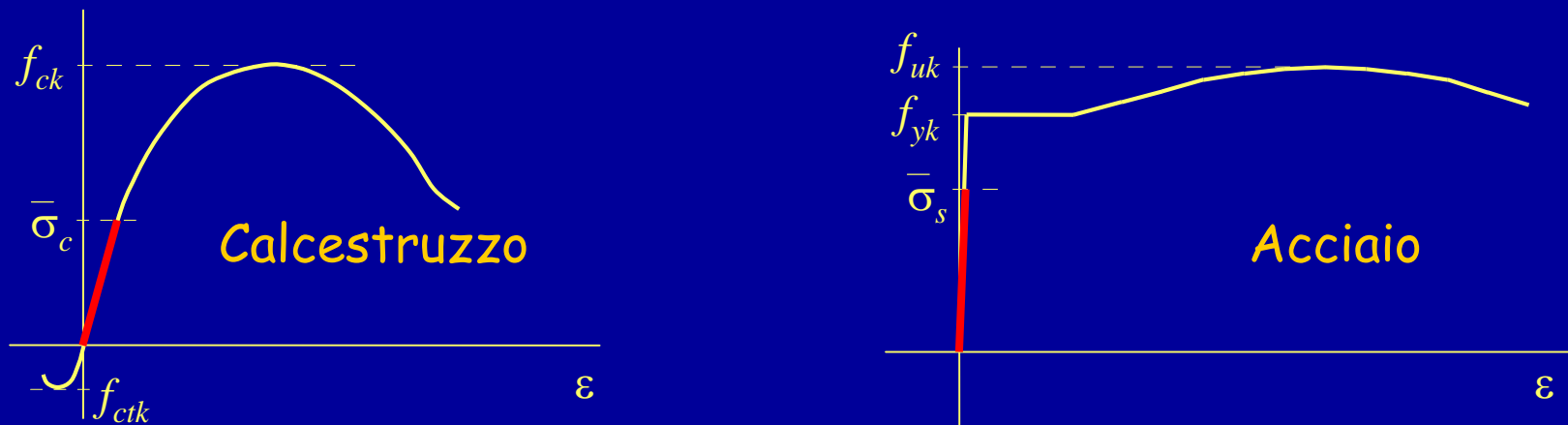
Si considerano "ammissibili" valori delle tensioni molto ridotti rispetto a quelli di rottura

$$\sigma_c \leq \bar{\sigma}_c = \frac{f_{ck}}{\gamma}$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s = \frac{f_{yk}}{\gamma}$$

# Prima possibilità: applicare un coefficiente di sicurezza alla resistenza

## Diagrammi di calcolo



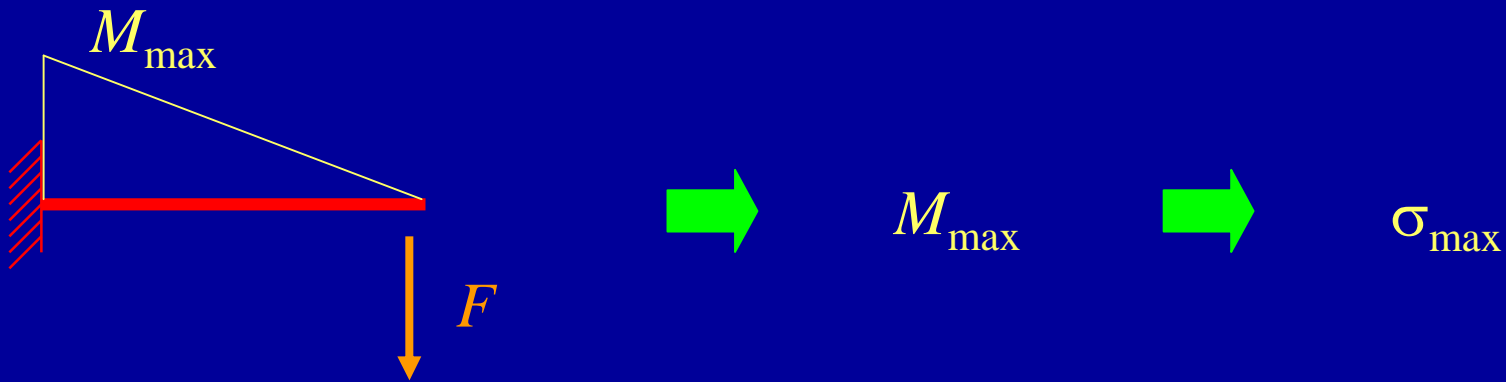
Per valori delle tensioni inferiori a quelli ammissibili il legame tensioni-deformazioni è lineare

E' possibile quindi applicare tutte le formule della teoria di elasticità lineare, il principio di sovrapposizione degli effetti, ecc. ecc.

# Prima possibilità: applicare un coefficiente di sicurezza alla resistenza

## Metodo delle tensioni ammissibili

La verifica consiste nel calcolare la tensione massima (prodotta dalle azioni, prese col valore caratteristico)

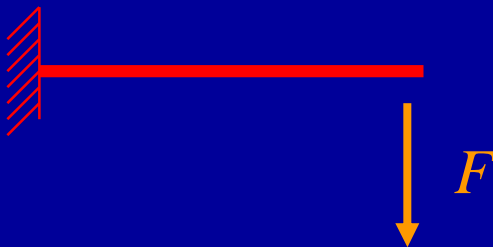
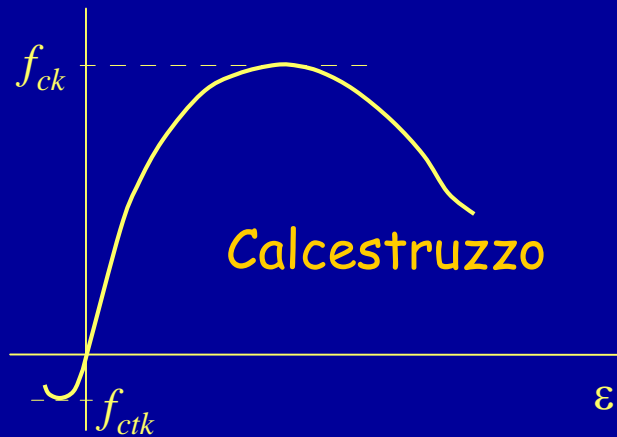


e controllare che sia inferiore a quella ammissibile

$$\sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}$$

# Seconda possibilità: applicare un coefficiente di sicurezza ai carichi

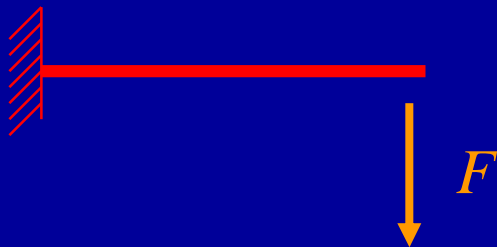
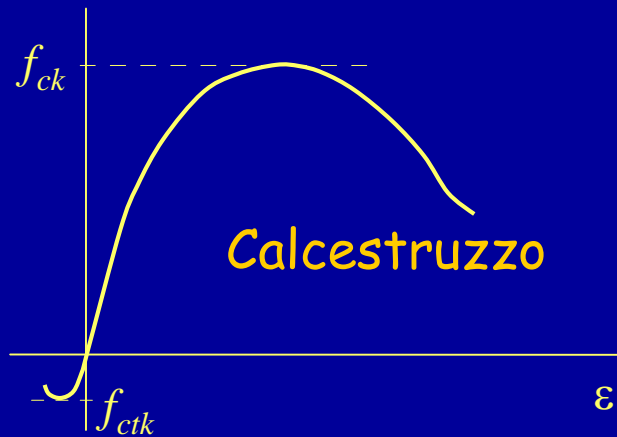
## Diagrammi sperimentali



Usando i legami costitutivi sperimentali, si valuta il carico che porta a collasso la struttura

# Seconda possibilità: applicare un coefficiente di sicurezza ai carichi

## Calcolo a rottura



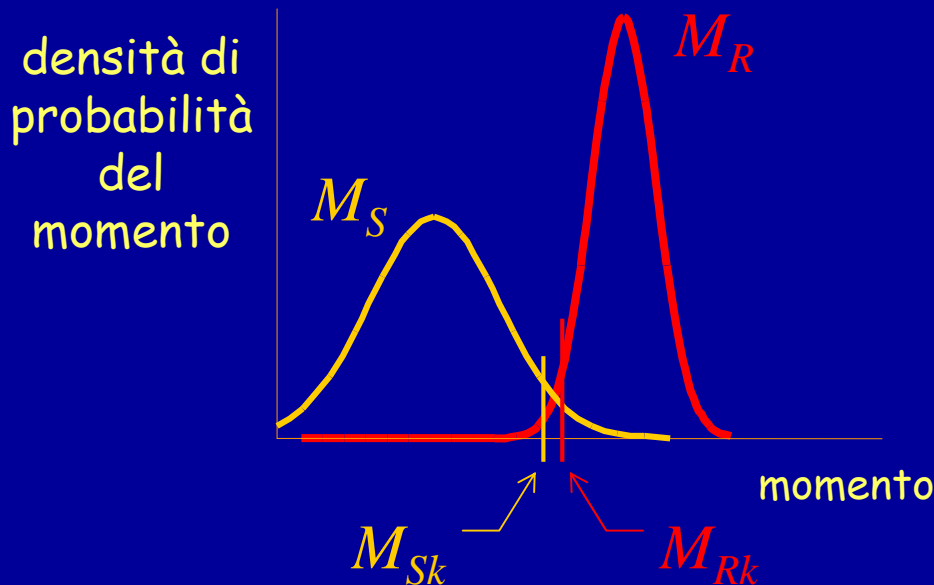
Si considera accettabile un carico ridotto rispetto a quello di collasso

$$F_k \leq \frac{F_u}{\gamma}$$

$$\gamma F_k \leq F_u$$

# Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

Si parte da considerazioni probabilistiche



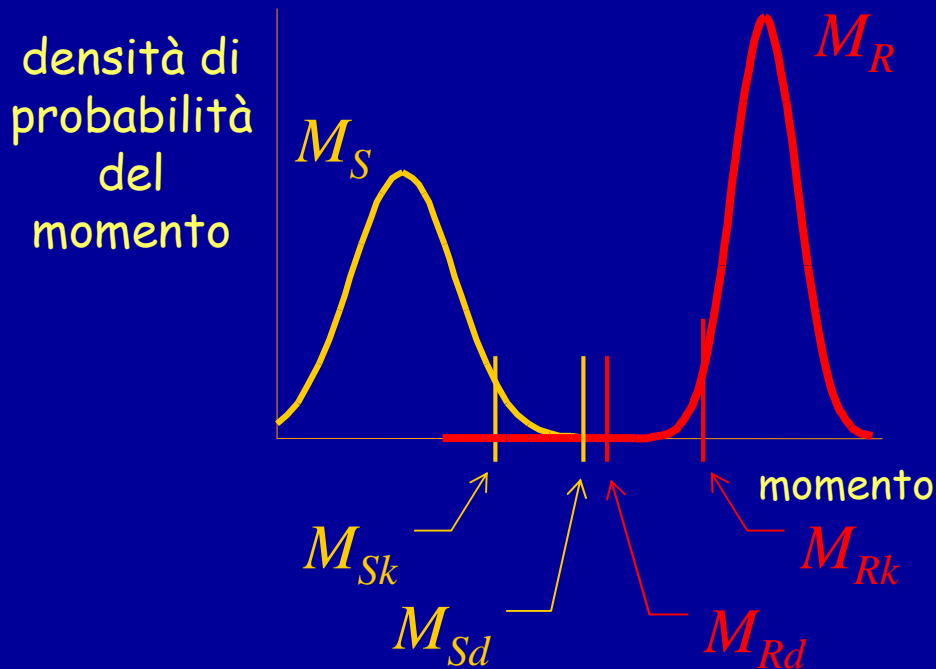
Effettuare i calcoli usando i valori caratteristici, cioè controllare che

$$M_{Sk} \leq M_{Rk}$$

non garantisce una probabilità di crollo sufficientemente bassa

# Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

Si parte da considerazioni probabilistiche



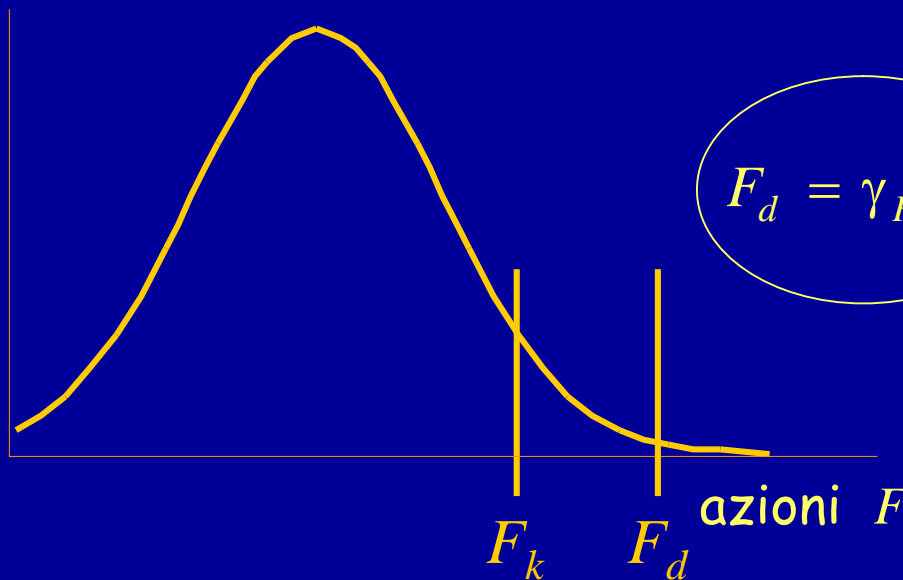
Per avere una bassa probabilità di crollo le due distribuzioni di probabilità devono essere ben distinte

Ciò può essere ottenuto facendo riferimento a valori di carichi e resistenza corrispondenti a differenti probabilità di occorrenza



# Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

## Azioni



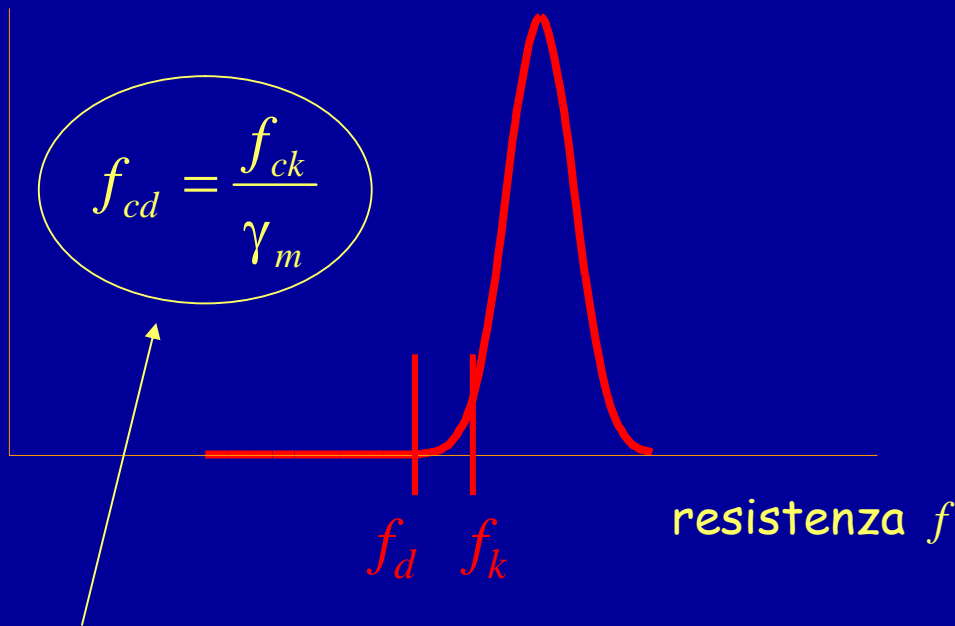
Al posto del valore caratteristico  $F_k$  (frattile 95%)

si usa come valore di calcolo  $F_d$  un frattile più alto (99.5%)

Convenzionalmente, si passa dal valore caratteristico al valore di calcolo applicando un opportuno coefficiente di sicurezza

# Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

## Resistenza



Al posto del valore caratteristico  $f_k$  (frattile 5%)

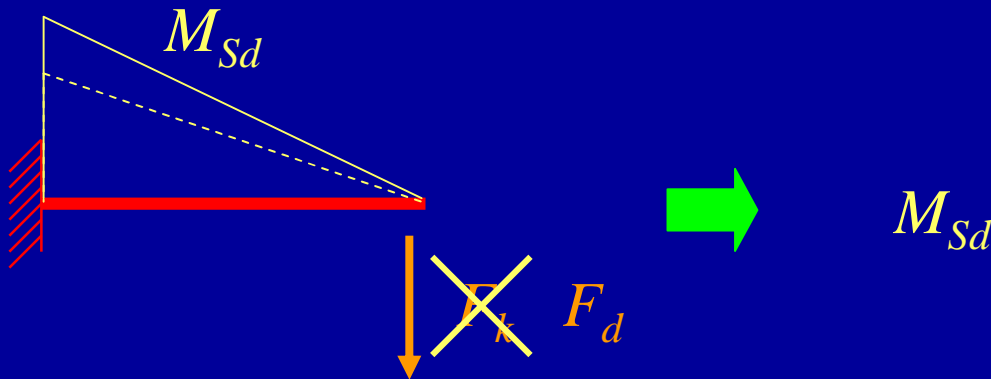
si usa come valore di calcolo  $f_d$  un frattile più basso (0.5%)

Convenzionalmente, si passa dal valore caratteristico al valore di calcolo applicando un opportuno coefficiente di sicurezza

Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

## Verifica allo stato limite ultimo

La verifica consiste nel calcolare le caratteristiche di sollecitazione, prodotta da azioni maggiorate



e controllare che siano inferiore a quelle resistenti, determinate con una resistenza ridotta

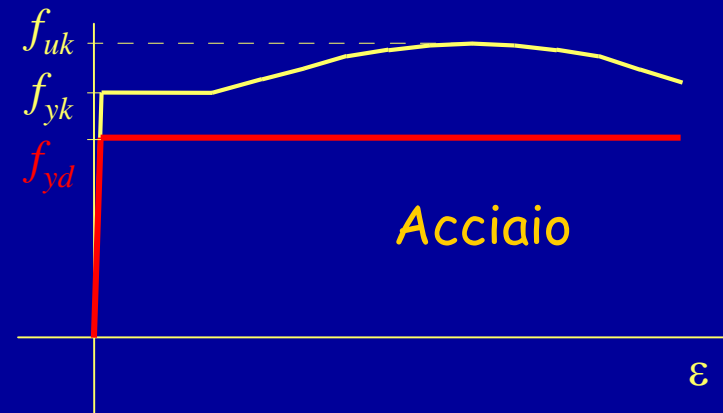
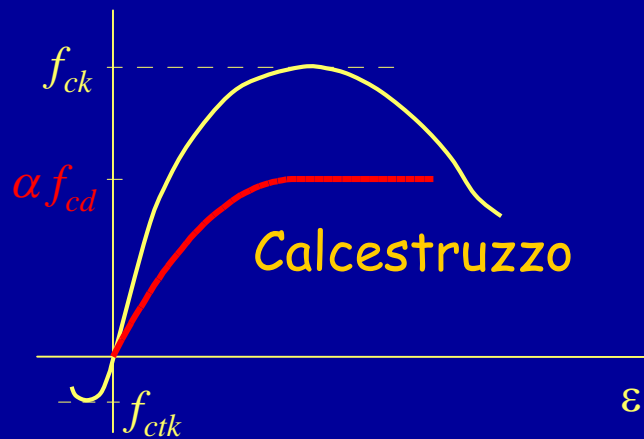
$$M_{Sd} \leq M_{Rd}$$

Terza possibilità: applicare coefficienti di sicurezza sia alla resistenza che ai carichi

## Verifica allo stato limite ultimo

Le caratteristiche di sollecitazione che la sezione può sopportare devono essere valutate tenendo conto della non linearità del legame costitutivo

$M_{Rd}$



Le caratteristiche di sollecitazione prodotte dai carichi possono essere valutate con analisi non lineare, ma più comunemente si usa un'analisi lineare

$M_{Sd}$

# ... Tornando agli obiettivi

## Metodo degli stati limite

- Sopportare tutte le azioni . . .  
cioè evitare il collasso . . .

Verifica allo stato limite ultimo (SLU)

- Rimanere adatta all'uso . . .

ovvero limitare:

- deformazioni
- fessurazione (per c.a.)      ecc.

Verifica allo stato limite di esercizio (SLE)

# E per strutture in zona sismica . . .

- Sopportare tutte le azioni . . .

cioè evitare il collasso nel caso di terremoto  
con periodo di ritorno molto alto

Verifica allo stato limite ultimo (SLU)

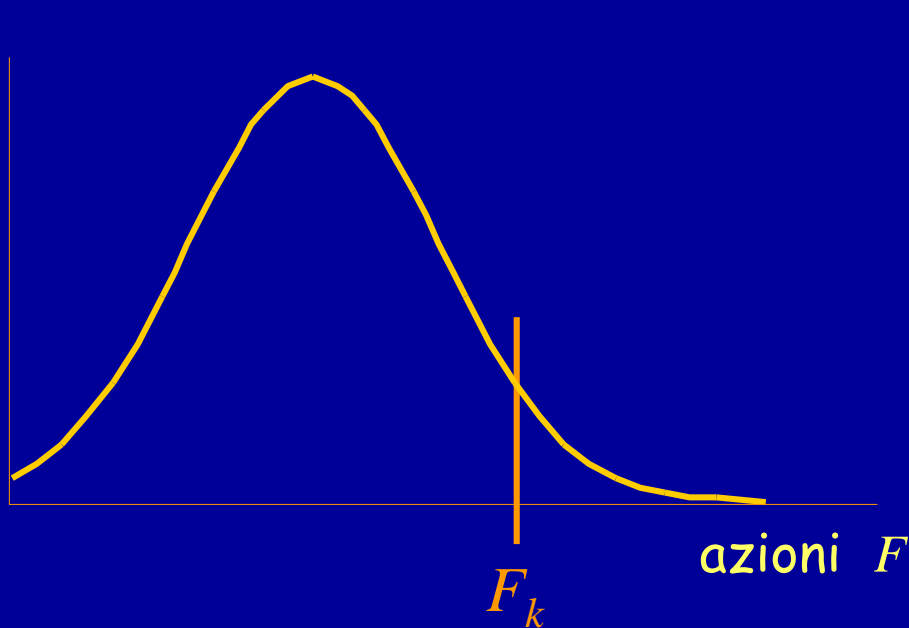
- Rimanere adatta all'uso . . .

ovvero limitare i danni nel caso di terremoto  
con periodo di ritorno più basso

Verifica allo stato limite di danno (SLD)

# Tornando alle azioni . . .

Basandosi su considerazioni probabilistiche



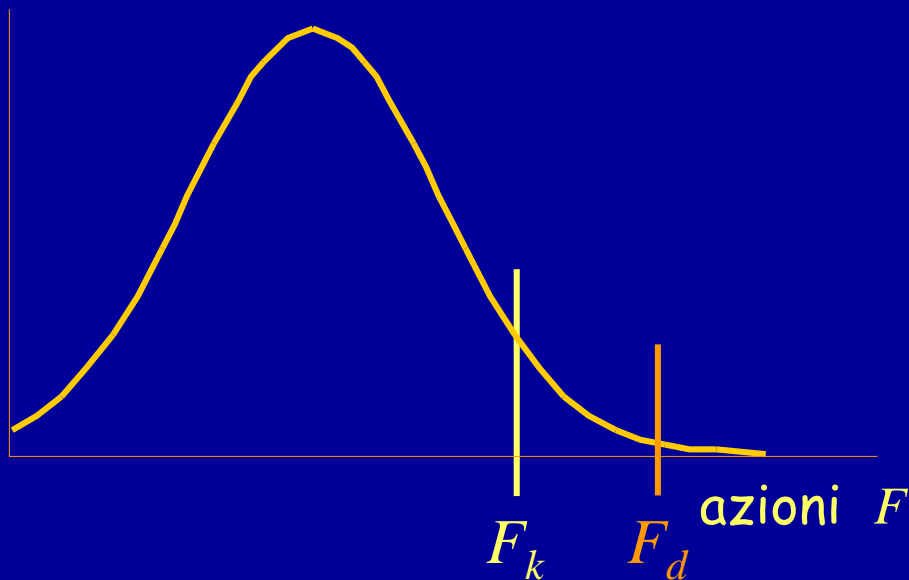
Usato nel metodo  
delle T.A.

Usato per stati limite  
di esercizio

$F_k$  Valore caratteristico (frattile 95%)

# Tornando alle azioni . . .

Basandosi su considerazioni probabilistiche



$$F_k$$

$$F_d = \gamma_F F_k$$

$$\gamma_F = 1.4 \text{ per azioni permanenti}$$
$$1.5 \text{ per azioni variabili}$$

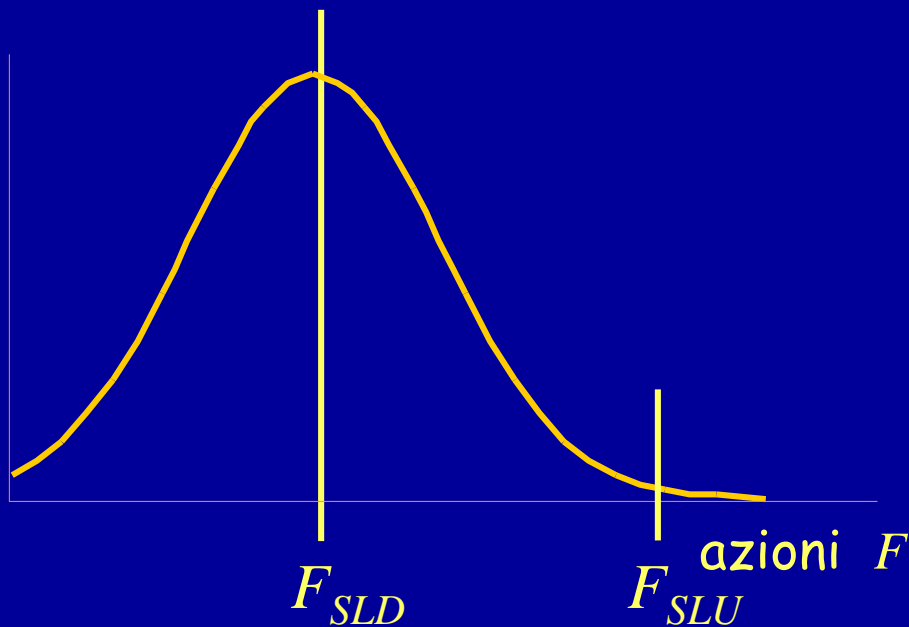
Usato per stato limite  
ultimo

$F_d$  Valore di calcolo (un frattile più alto, 99.5%)



# Tornando alle azioni . . .

o, nel caso del sisma



possibilità di superamento

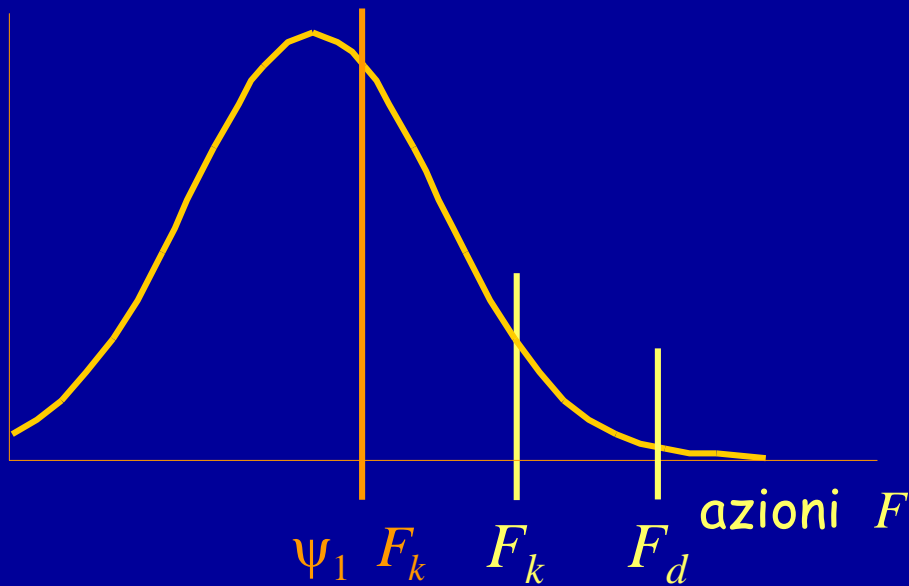
$F_{SLD}$  50% in 50 anni

$F_{SLU}$  10% in 50 anni

Valori corrispondenti a differente probabilità di superamento in un tempo assegnato (50 anni)

# Tornando alle azioni . . .

Inoltre, per azioni variabili



$$F_k$$

$$F_d = \gamma_F F_k$$

$$\Psi_1 F_k$$

$\Psi_1$  dipende dal tipo di carico

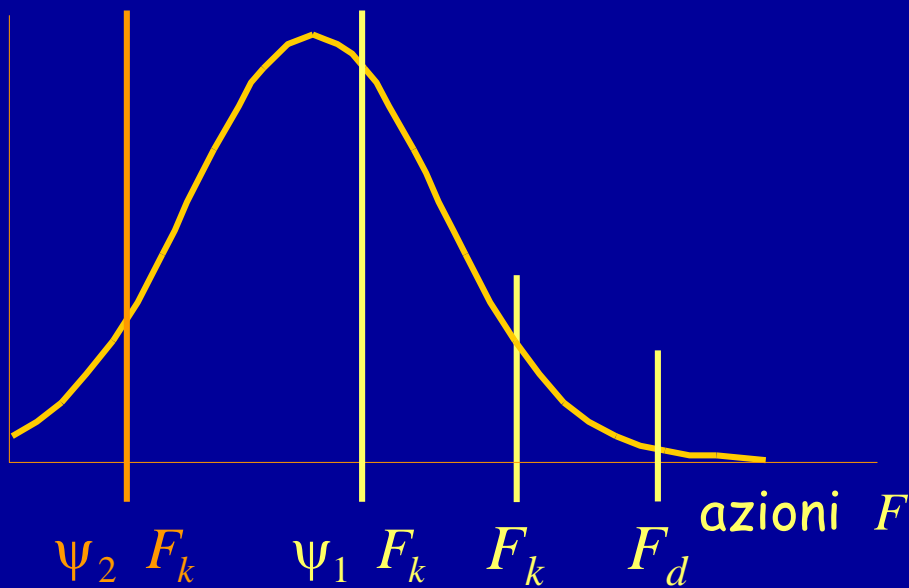
$\Psi_1 = 0.5$  carico variabile per abitazione

0.2 per vento

$\Psi_1 F_k$  Valore frequente (un frattile basso)

# Tornando alle azioni . . .

Inoltre, per azioni variabili



$$F_k$$

$$F_d = \gamma_F F_k$$

$$\psi_1 F_k$$

$$\psi_2 F_k$$

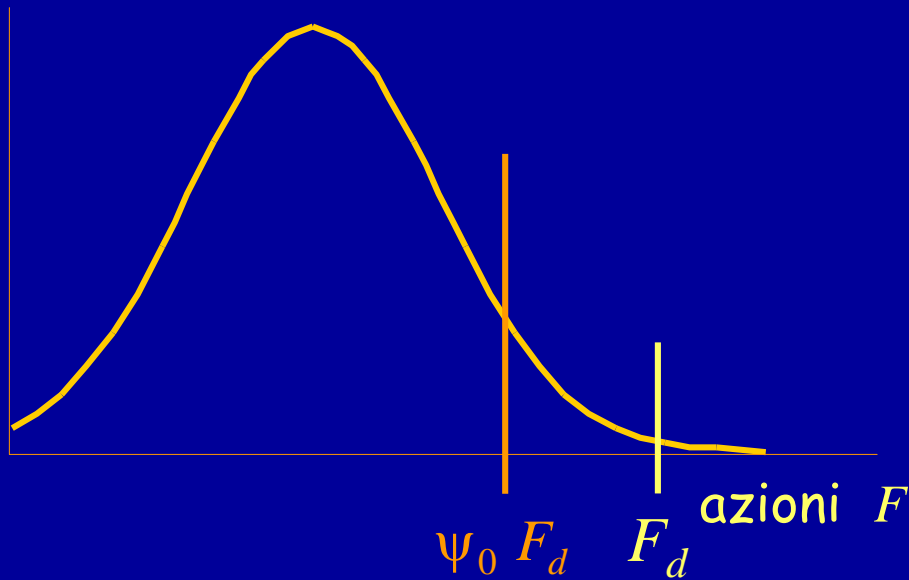
$\psi_2$  dipende dal tipo di carico

$\psi_2 = 0.3$  c. var. per abitazione  
0 per vento

$\psi_2 F_k$  Valore quasi permanente (un frattile ancora più basso)

# Tornando alle azioni . . .

Infine, quando si accoppiano più azioni variabili indipendenti,  
sia per lo stato limite ultimo . . .



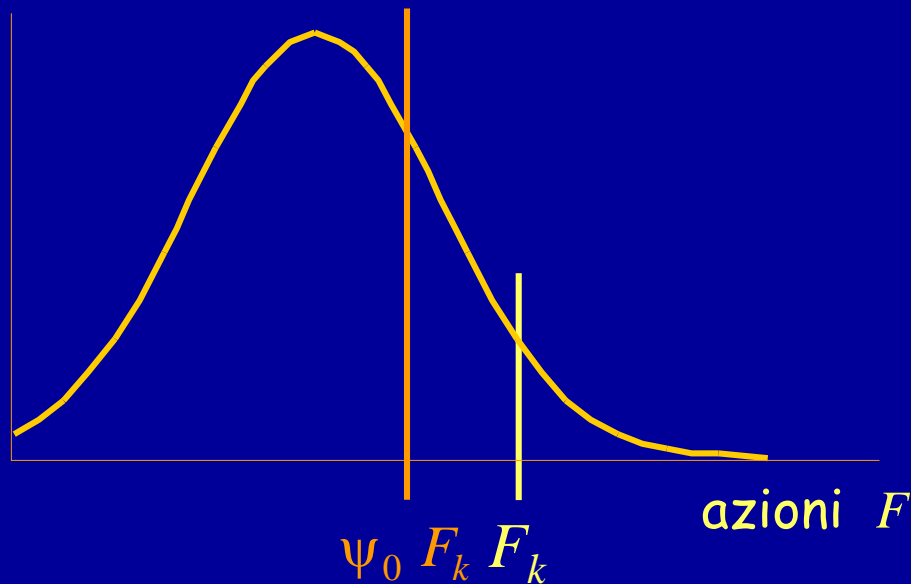
Si usa per l'azione  
meno gravosa  
un frattile più basso

$$\psi_0 F_d$$

$\psi_0 F_d$  Valore di combinazione (un frattile più basso)

# Tornando alle azioni . . .

Infine, quando si accoppiano più azioni variabili indipendenti, sia per lo stato limite ultimo . . . che per gli stati limite di esercizio



Si usa per l'azione meno gravosa un frattile più basso

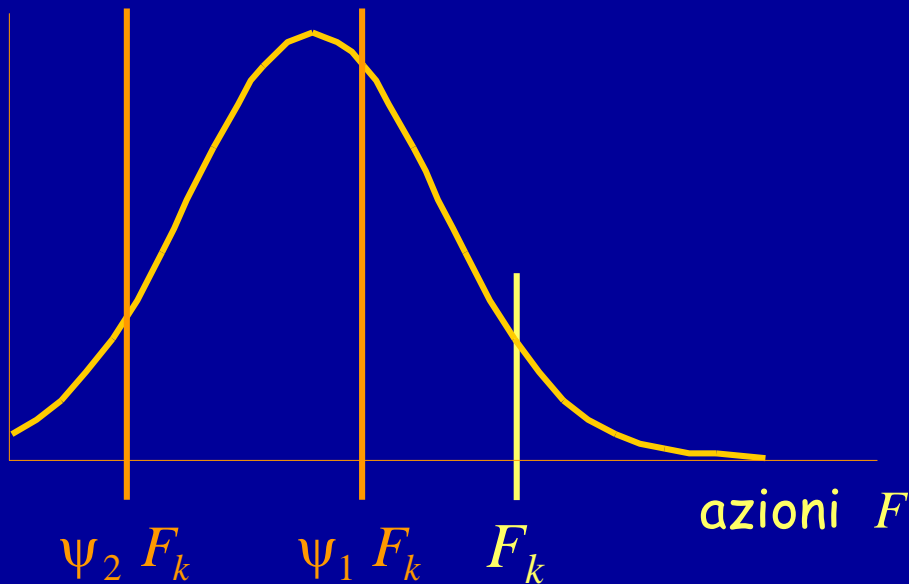
$$\psi_0 F_k$$

$$\psi_0 = 0.7 \text{ c. var. per abitazione}$$
$$0.6 \text{ per vento}$$

$\psi_0 F_k$  Valore di combinazione (un frattile più basso)

# Tornando alle azioni . . .

Infine, quando si accoppiano più azioni variabili indipendenti



Si usa per l'azione  
meno gravosa  
un frattile più basso

$$\psi_0 F_k$$

o frattili ancora minori

$$\psi_1 F_k$$

$$\psi_2 F_k$$

Il cemento armato  
dalle tensioni ammissibili agli stati limite

# Riferimenti normativi

Per il metodo delle tensioni ammissibili:

D.M. 14/2/92

Per il metodo degli stati limite:

~~D.M. 9/1/96~~

~~(include il NAD per EC2:~~

~~sezione III della parte prima del D.M.)~~

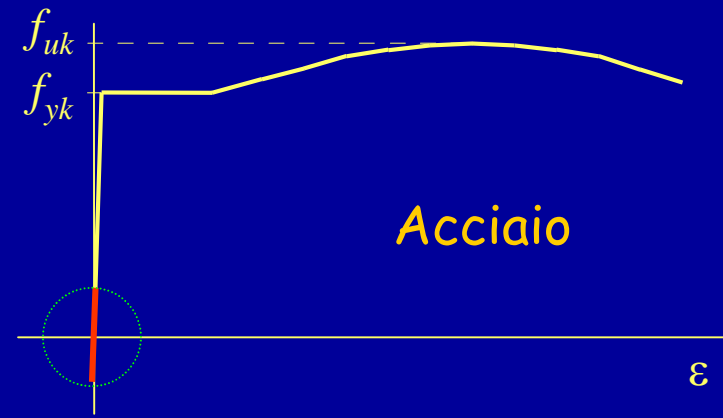
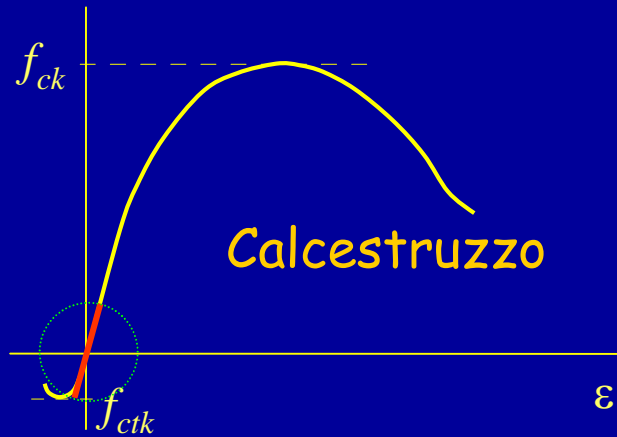
**Eurocodice 2**

D.M. 14/9/05



# Legami costitutivi del materiale

## Legami sperimentali



## Modelli di comportamento

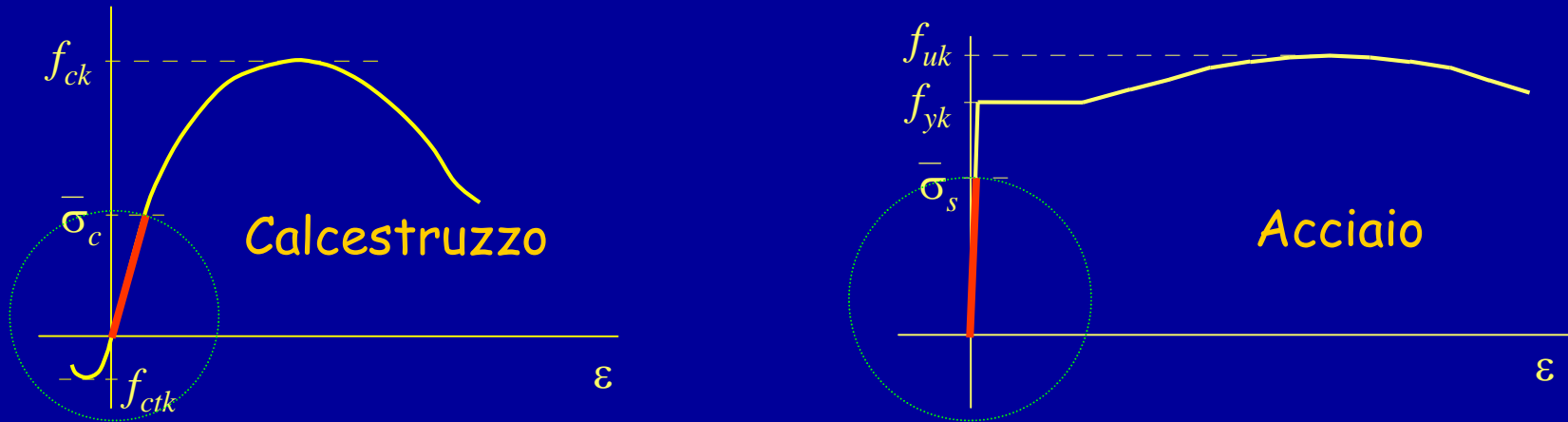
- 1 - per deformazioni e tensioni molto basse:  
comportamento elastico lineare  
calcestruzzo resistente anche a trazione

Usato solo per  
situazioni  
particolari

Ad esempio:  
fessurazione

# Legami costitutivi del materiale

## Legami sperimentali



## Modelli di comportamento

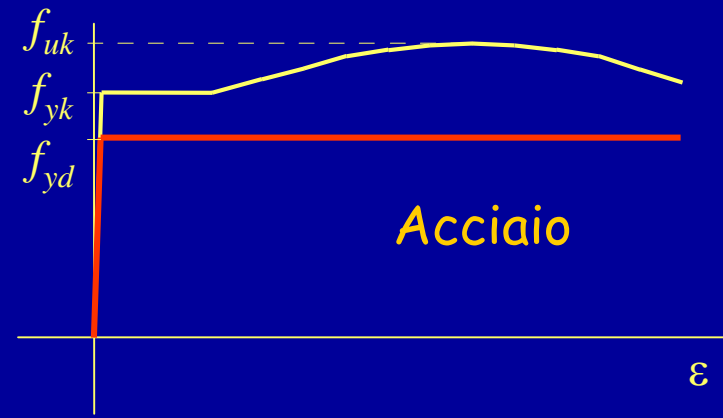
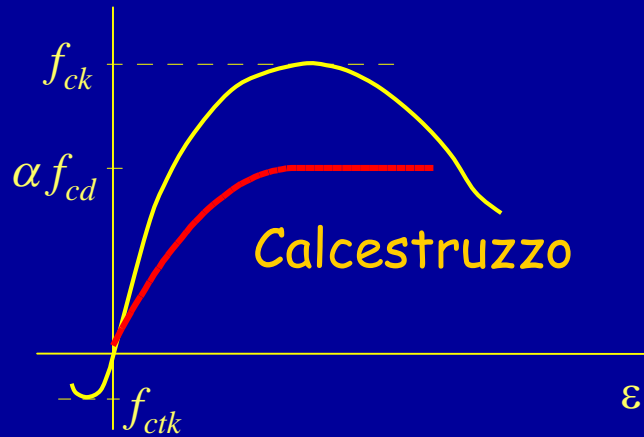
2 - per deformazioni e tensioni maggiori:  
comportamento elastico lineare  
calcestruzzo non resistente a trazione

Usato per il  
metodo delle  
tensioni  
ammissibili

Ma anche per  
verifiche S.L.E.

# Legami costitutivi del materiale

## Legami sperimentali



## Modelli di comportamento

- 3 - per deformazioni e tensioni ancora maggiori:  
comportamento non lineare  
calcestruzzo non resistente a trazione

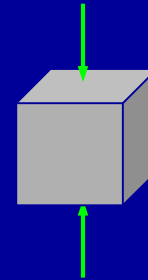
Usato per le verifiche allo stato limite ultimo

# Calcestruzzo - tensione di rottura

Possibili valori di riferimento per la tensione di rottura:

$R_{ck}$  resistenza di provini cubici

usata dalla normativa  
italiana



$f_{ck}$  resistenza di provini cilindrici

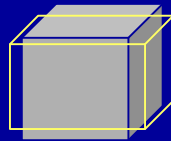
usata dalla normativa  
europea (EC2)



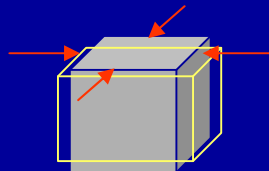
# Relazione tra $R_{ck}$ e $f_{ck}$

Provino cubico

$R_{ck}$



il provino, compresso, si accorcia e si dilata



per attrito tra piatto e provino nascono forze trasversali

La presenza di queste forze riduce il rischio di rottura

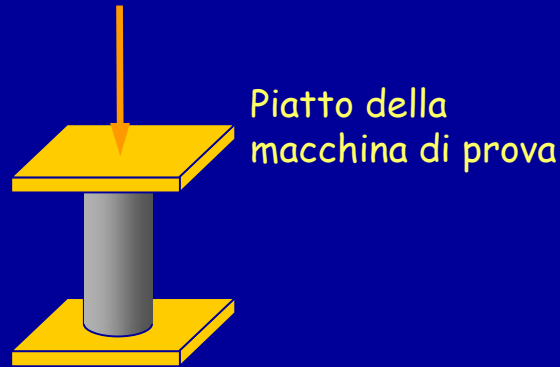


Aumenta la resistenza

# Relazione tra $R_{ck}$ e $f_{ck}$

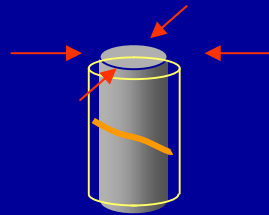
Provino cilindrico

$f_{ck}$



Piatto della  
macchina di prova

$$f_{ck} = 0.83 R_{ck}$$



il provino, compresso,  
si accorcia e si dilata;  
nascono forze trasversali

... ma la rottura avviene  
lontano dagli estremi

$$f_{ck} < R_{ck}$$

La presenza delle forze non  
influisce sul rischio di rottura



La resistenza  
è minore

# Relazione tra $R_{ck}$ e $f_{ck}$

La versione originaria dell'EC2 classifica il calcestruzzo in base a entrambe le resistenze

C20/25 ← Resistenza cubica 25 MPa  
↑ Resistenza cilindrica 20 MPa

Secondo il NAD italiano (DM96), si classifica il calcestruzzo in base alla resistenza cubica e da questa si determina la resistenza cilindrica

$$R_{ck} = 25 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 0.83 \times 25 = 20.75 \text{ MPa}$$

NOTA BENE: per i parametri meccanici del calcestruzzo fare riferimento alla normativa vigente

# Legame costitutivo di calcolo del calcestruzzo

## Legame più realistico

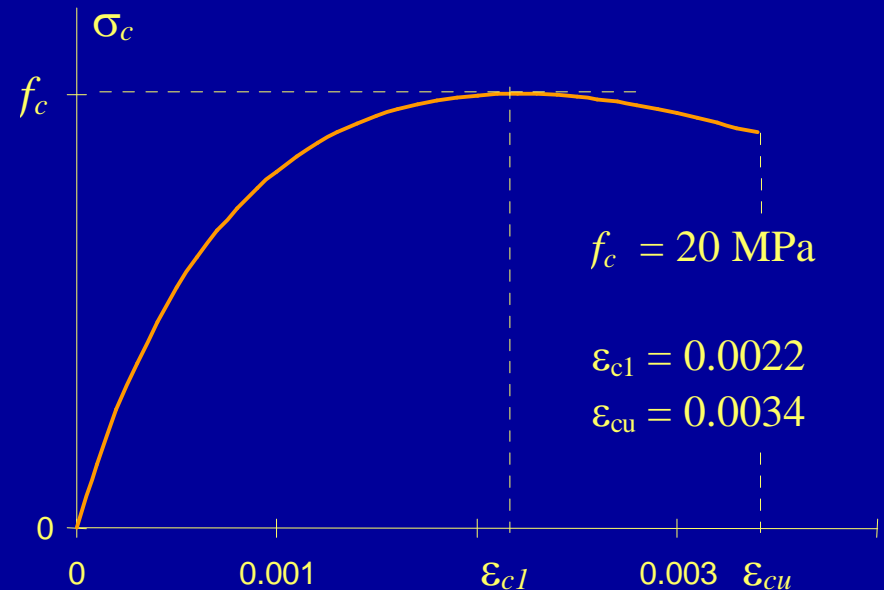
$$\sigma_c = \frac{k \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \eta} f_c$$

con  $\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}$

$$\varepsilon_{c1} = 2.2 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{cu} = \left( 3.7 - 0.8 \frac{f_{cm} - 15}{40} \right) \times 10^{-3}$$

$$k = \frac{E_{c0} \varepsilon_{c1}}{f_c}$$



Si usa solo in casi particolari:  
analisi plastiche;  
determinazione della  
duttilità



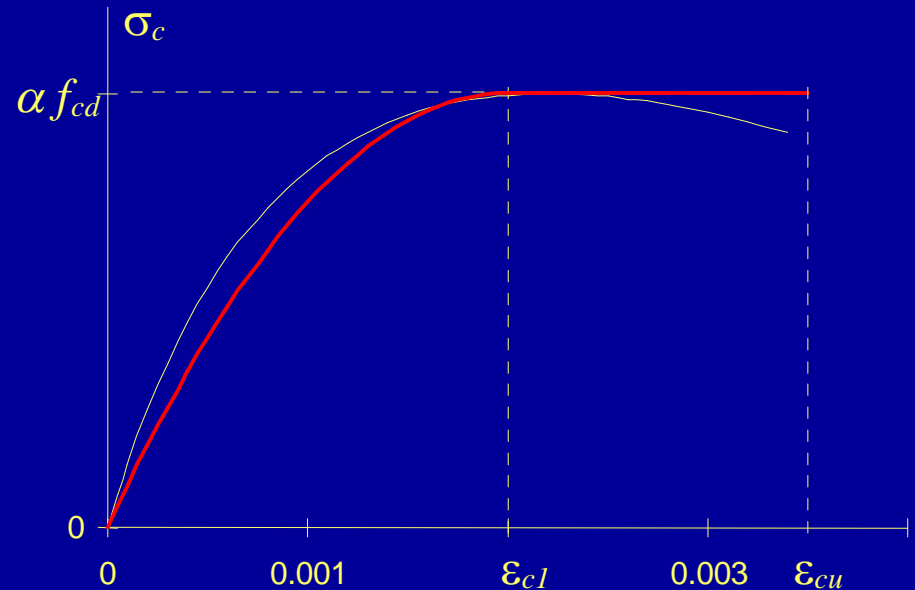
# Legame costitutivo di calcolo del calcestruzzo

## Legame semplificato

$$\sigma_c = (2 \eta - \eta^2) \alpha f_{cd}$$

con  $\varepsilon_{c1} = 2.0 \times 10^{-3}$

$$\varepsilon_{cu} = 3.5 \times 10^{-3}$$



Si usa per valutare la resistenza della sezione

# Legame costitutivo di calcolo del calcestruzzo

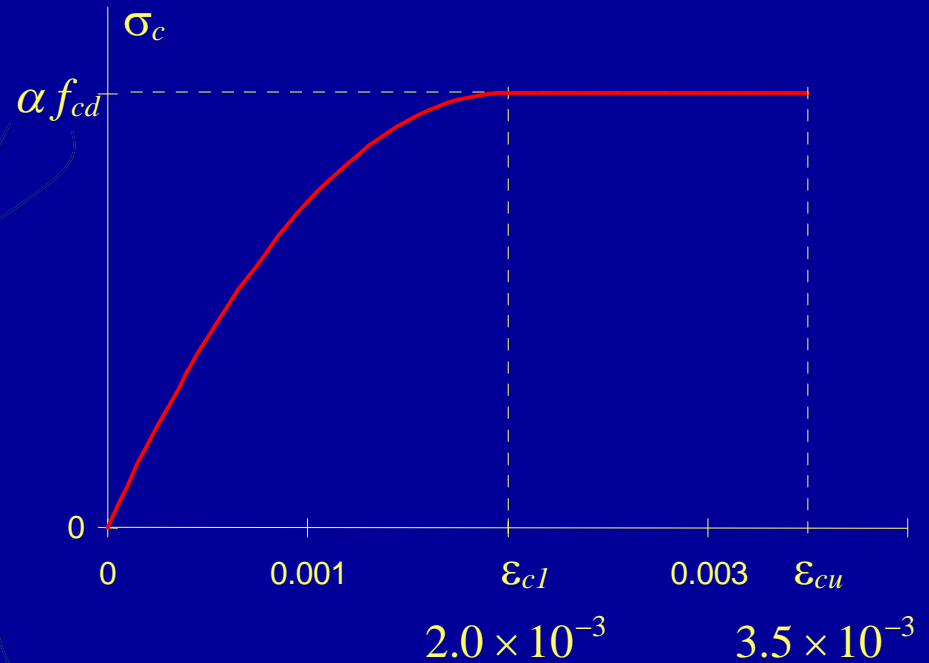
Valore di calcolo della resistenza

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

con

$\gamma_c = 1.6$  per strutture in c.a. ordinario

$\gamma_c = 1.5$  per strutture in c.a.p.



Coefficiente che tiene conto della riduzione di resistenza per carichi di lunga durata

$\alpha = 0.85$  Potrebbe diventare  $\alpha=1$

# Legame costitutivo di calcolo del calcestruzzo

## Esempio

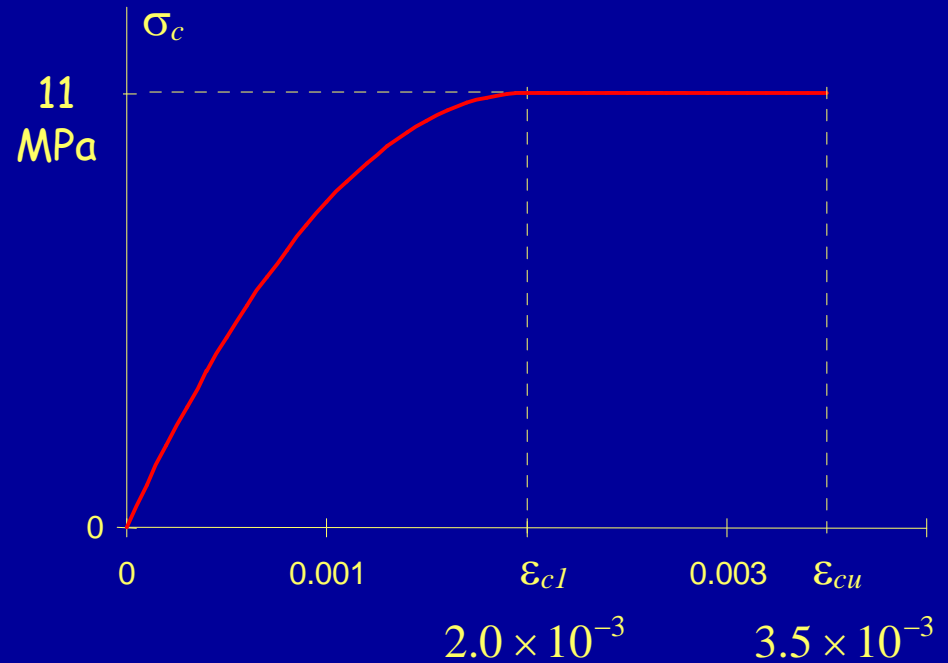
Calcestruzzo di classe

$$R_{ck} = 25 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 20.75 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = \frac{20.75}{1.6} = 13.0 \text{ MPa}$$

$$\alpha f_{cd} = 0.85 \times 13.0 = 11.0 \text{ MPa}$$



Si ricorda che

$$\bar{\sigma}_c = 8.5 \text{ MPa}$$

# Legame costitutivo di calcolo del calcestruzzo

## Esempio

Calcestruzzo di classe

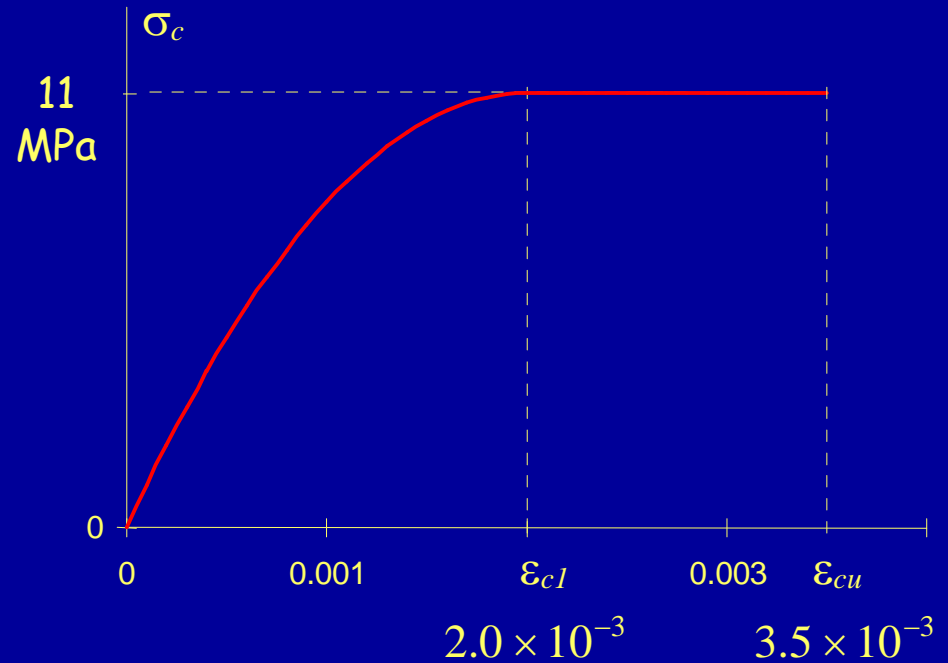
$$R_{ck} = 25 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 20.75 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = \frac{20.75}{1.6} = 13.0 \text{ MPa}$$

$$\alpha f_{cd} = 0.85 \times 13.0 = 11.0 \text{ MPa}$$

Ma che fine ha fatto  $\alpha$  ?

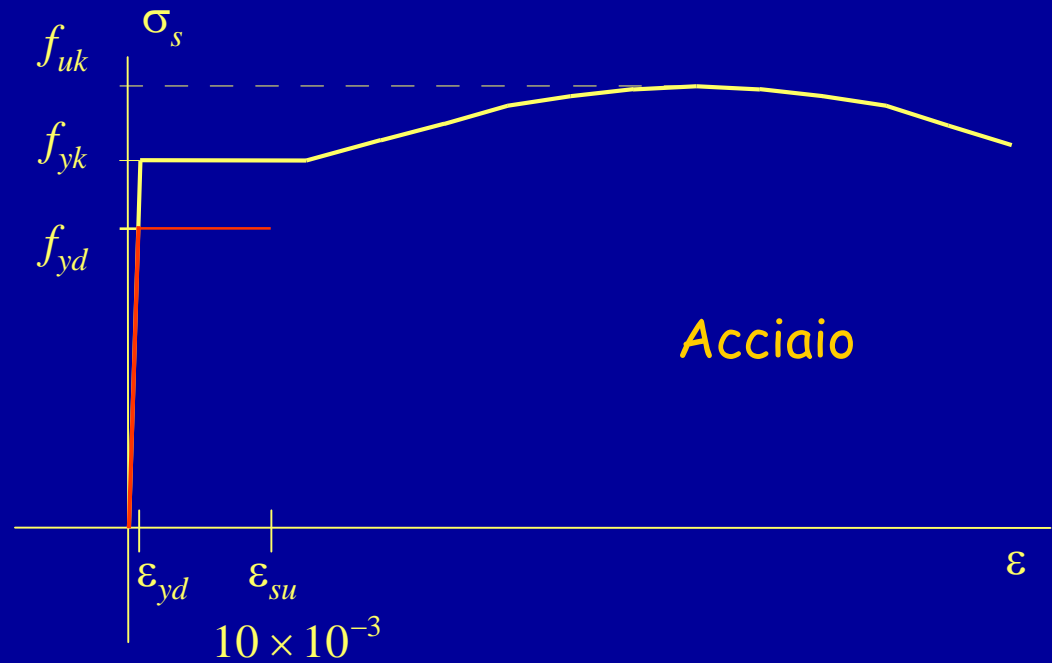


$$\text{DM05: } f_{cd} = \frac{R_{ck}}{1.9}$$
$$f_{cd} = \frac{25}{1.9} = 13.2 \text{ MPa}$$

# Legame costitutivo di calcolo dell'acciaio

Possibili alternative

1 - Legame elastico-perfettamente plastico, con limite  $10 \times 10^{-3}$



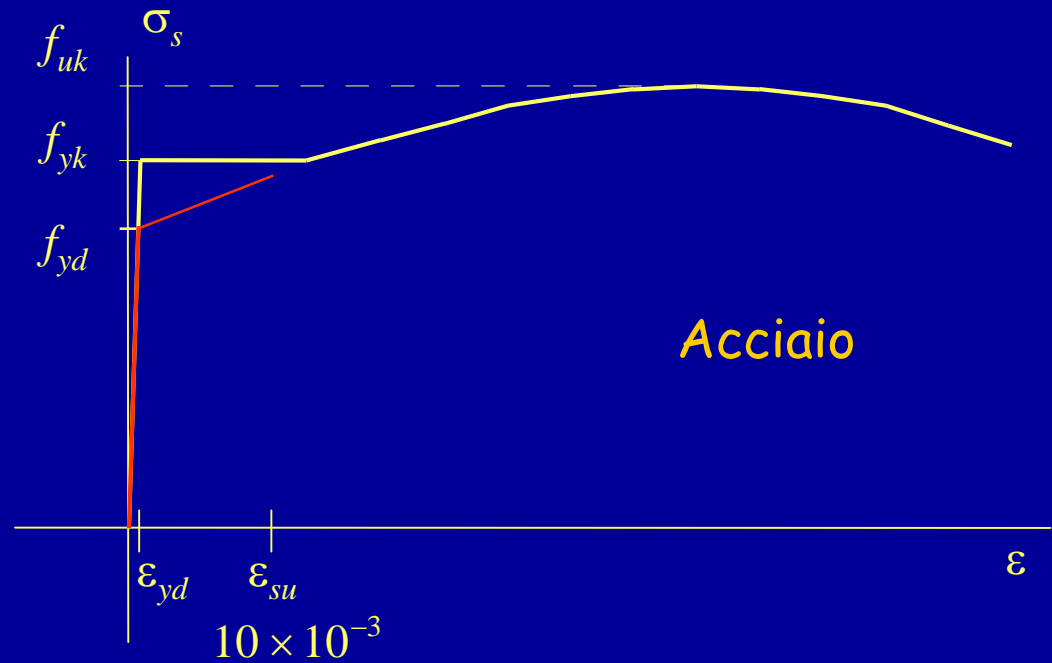
Legame "tradizionale"

# Legame costitutivo di calcolo dell'acciaio

## Possibili alternative

1 - Legame elastico-perfettamente plastico, con limite  $10 \times 10^{-3}$

2 - Legame elasto-plastico con incrudimento, con limite  $10 \times 10^{-3}$



Legame poco usato

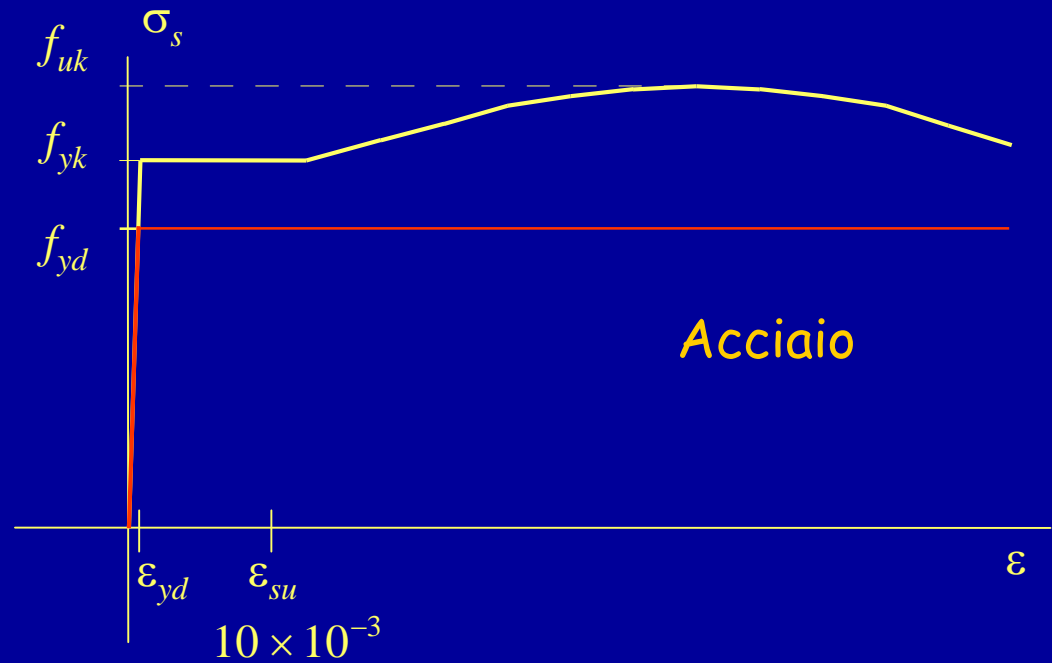
# Legame costitutivo di calcolo dell'acciaio

## Possibili alternative

1 - Legame elastico-perfettamente plastico, con limite  $10 \times 10^{-3}$

2 - Legame elasto-plastico con incrudimento, con limite  $10 \times 10^{-3}$

3 - Legame elastico-perfettamente plastico, senza limiti



In molti casi può semplificare la trattazione

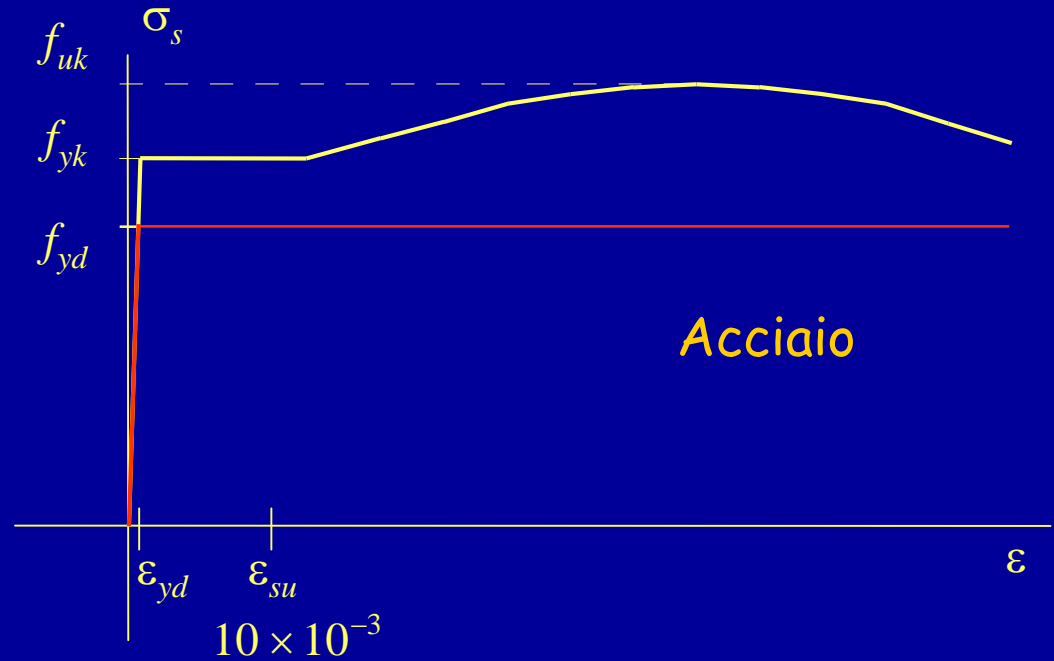
# Legame costitutivo di calcolo dell'acciaio

Valore di calcolo della resistenza

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

con

$$\gamma_s = 1.15$$





# Legame costitutivo di calcolo dell'acciaio

## Esempio

Acciaio Fe B 44 k

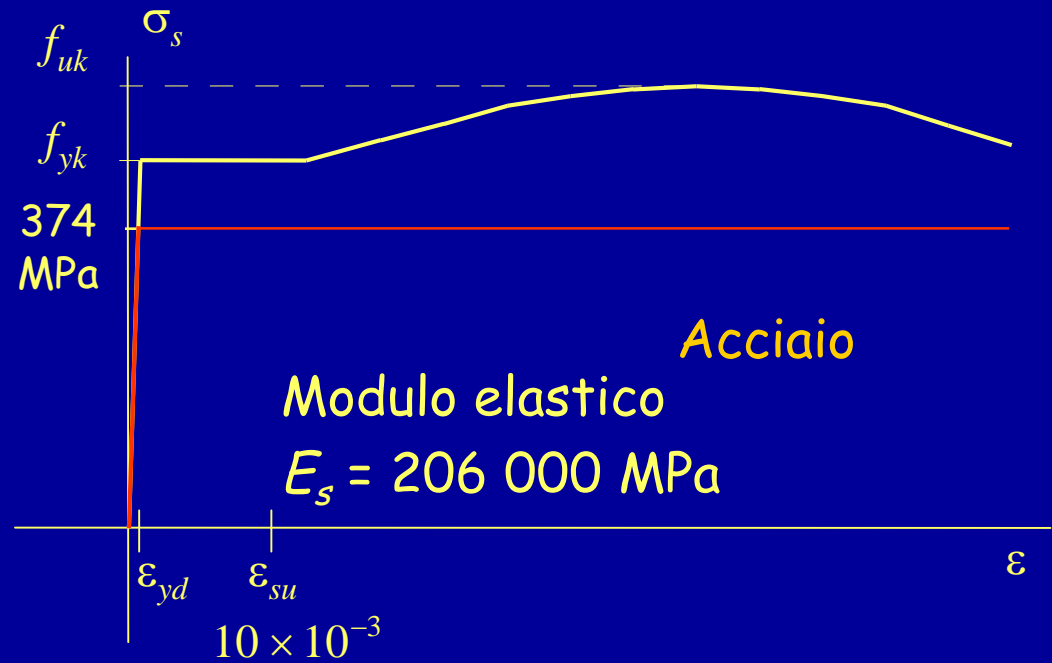
$$f_{yk} = 430 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = \frac{430}{1.15} = 373.9 \text{ MPa}$$

Acciaio Fe B 38 k

$$f_{yk} = 375 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = \frac{375}{1.15} = 326.1 \text{ MPa}$$



Acciaio Fe B 44 k

$$\epsilon_{yd} = \frac{373.9}{206000} = 0.00182$$

Acciaio Fe B 38 k

$$\epsilon_{yd} = \frac{326.1}{206000} = 0.00168$$

# Verifica - tensioni ammissibili

## 1 - Analisi dei carichi

si utilizzano i valori caratteristici

## 2 - Risoluzione (analisi strutturale)

si utilizza sempre un'analisi lineare;

si ottengono le caratteristiche di sollecitazione (es.  $M$ )

## 3 - Verifica della sezione

si determinano le tensioni massime e le si confronta con quelle ammissibili

in alternativa, si determina la massima caratteristica di sollecitazione sopportabile (es  $M_{max}$ ) - che corrisponde al raggiungimento della tensione ammissibile - e la si confronta con quella sollecitante

# Verifica - stato limite ultimo

- 1 - **Analisi dei carichi**  
si utilizzano i valori di calcolo  
circa 1.45 x quelli caratteristici
- 2 - **Risoluzione (analisi strutturale)**  
si utilizza normalmente un'analisi lineare;  
si ottengono le caratteristiche di sollecitazione (es.  $M_{Sd}$ )  
a volte, analisi non lineare
- 3 - **Verifica della sezione**  
si determina la massima caratteristica di sollecitazione sopportabile (es  $M_{Rd}$ ) - che corrisponde al raggiungimento della deformazione limite - e la si confronta con quella sollecitante

# Verifica - confronto

T.A.

S.L.U.

Carichi

valori  
caratteristici

valori di calcolo  
(circa 1.45 maggiori)

Risoluzione

solo analisi  
lineare

di solito analisi lineare  
(car.soll. circa 1.45  
maggiori)

Verifica

controllo delle  
tensioni

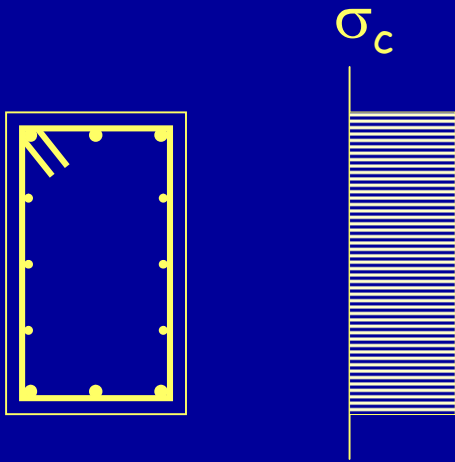
---

valutazione di  
car.soll. massime

valutazione di  
car.soll. resistenti  
(maggiori - di quanto?)

Sforzo normale

# Verifica - tensioni ammissibili



$$\sigma_s = n \sigma_c \quad n = 15$$

~~$$\sigma_c \leq \bar{\sigma}_c$$~~

$$\sigma_c \leq 0.7 \bar{\sigma}_c$$

altrimenti la sezione  
non può portare alcun  
momento flettente

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c (A_c + n A_s)$$

# Verifica - stato limite ultimo

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

$$N = \int \sigma dA$$

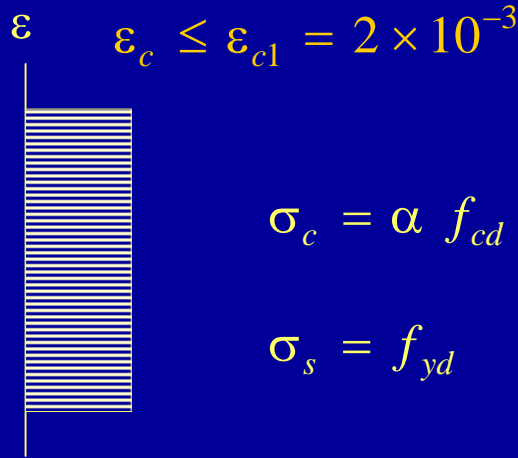
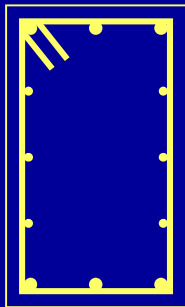
~~$$M_y = \int \sigma z dA$$~~

~~$$M_z = -\int \sigma y dA$$~~

Trazione

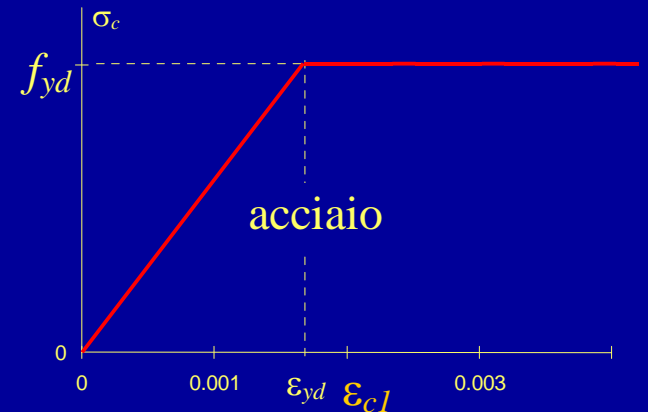
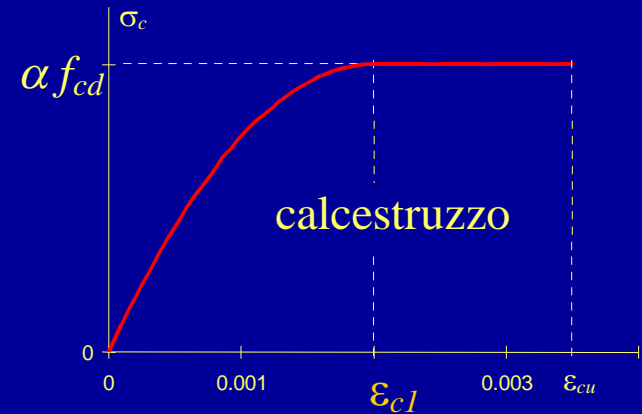
Compressione

# Verifica - stato limite ultimo



$$\sigma_c = \alpha f_{cd}$$

$$\sigma_s = f_{yd}$$



$$N_{Rd} = \cancel{\alpha f_{cd}} A_c + f_{yd} A_s$$

la sezione non può portare alcun momento flettente

$$N_{Rd} = \frac{\alpha f_{cd}}{1.25} A_c + f_{yd} A_s \quad (\text{consigliata})$$



# Verifica - confronto

TA

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c A_c + n 0.7 \bar{\sigma}_c A_s$$

5.9                      89

Stesso rapporto  
dei carichi

$$\frac{8.8}{5.9} \cong 1.5$$

$$\frac{374}{89} \cong 4.2$$

8.8

374

Rapporto  
molto  
maggiore

SLU

$$N_{Rd} = \frac{\alpha f_{cd}}{1.25} A_c + f_{yd} A_s$$

Calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25$  MPa

Acciaio Fe B 44 k

# Verifica - confronto

TA 
$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c A_c + n 0.7 \bar{\sigma}_c A_s$$

5.9 89

Allo stato limite ultimo,  
l'acciaio compresso conta molto di più

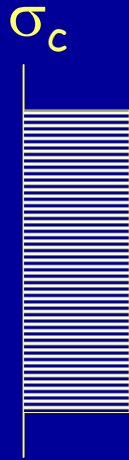
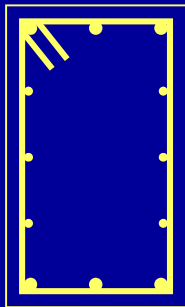
8.8 374

SLU 
$$N_{Rd} = \frac{\alpha f_{cd}}{1.25} A_c + f_{yd} A_s$$

Calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25$  MPa

Acciaio Fe B 44 k

# Progetto - tensioni ammissibili



La norma impone  $\rho = \frac{A_s}{A_c} \geq 0.008$

$$n = 15$$

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c A_c (1 + n \rho)$$

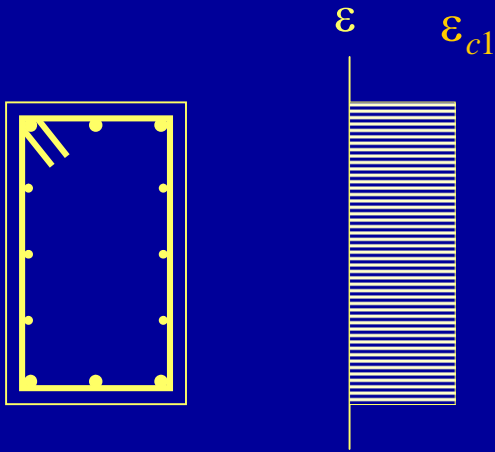
Si determina la sezione  
di calcestruzzo

$$A_c \geq \frac{N}{0.784 \bar{\sigma}_c}$$

e poi l'armatura

$$A_s \geq 0.008 A_c$$

# Progetto - stato limite ultimo



La norma impone che l'armatura porti almeno il 15% dello sforzo normale

$$N_{Rd} = \frac{\alpha f_{cd}}{1.25} A_c + f_{yd} A_s \geq 0.15 N_{Sd}$$

Si determina la sezione di calcestruzzo

$$A_c \geq \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

e l'armatura

$$A_s \geq \frac{0.15 N_{Sd}}{f_{yd}}$$

# Progetto - confronto

Si ipotizza che  $N_{Sd}(SLU) = 1.45 N(TA)$

TA

$$A_c \geq \frac{N}{0.784 \bar{\sigma}_c}$$

1/6.66

$$A_s \geq 0.008 A_c = \frac{0.008 N}{0.784 \bar{\sigma}_c}$$

1/833

La sezione è quasi invariata (7% in meno allo SLU)

$$\frac{1}{6.66} \cong \frac{1.45}{10.4}$$

$$\frac{1}{833} \cong 2 \times \frac{1.45}{2493}$$

L'armatura è molto diversa (circa la metà allo SLU)

SLU

$$A_c \geq \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

1/10.4

$$A_s \geq \frac{0.15 N_{Sd}}{f_{yd}}$$

1/2493

Calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25$  MPa

Acciaio Fe B 44 k

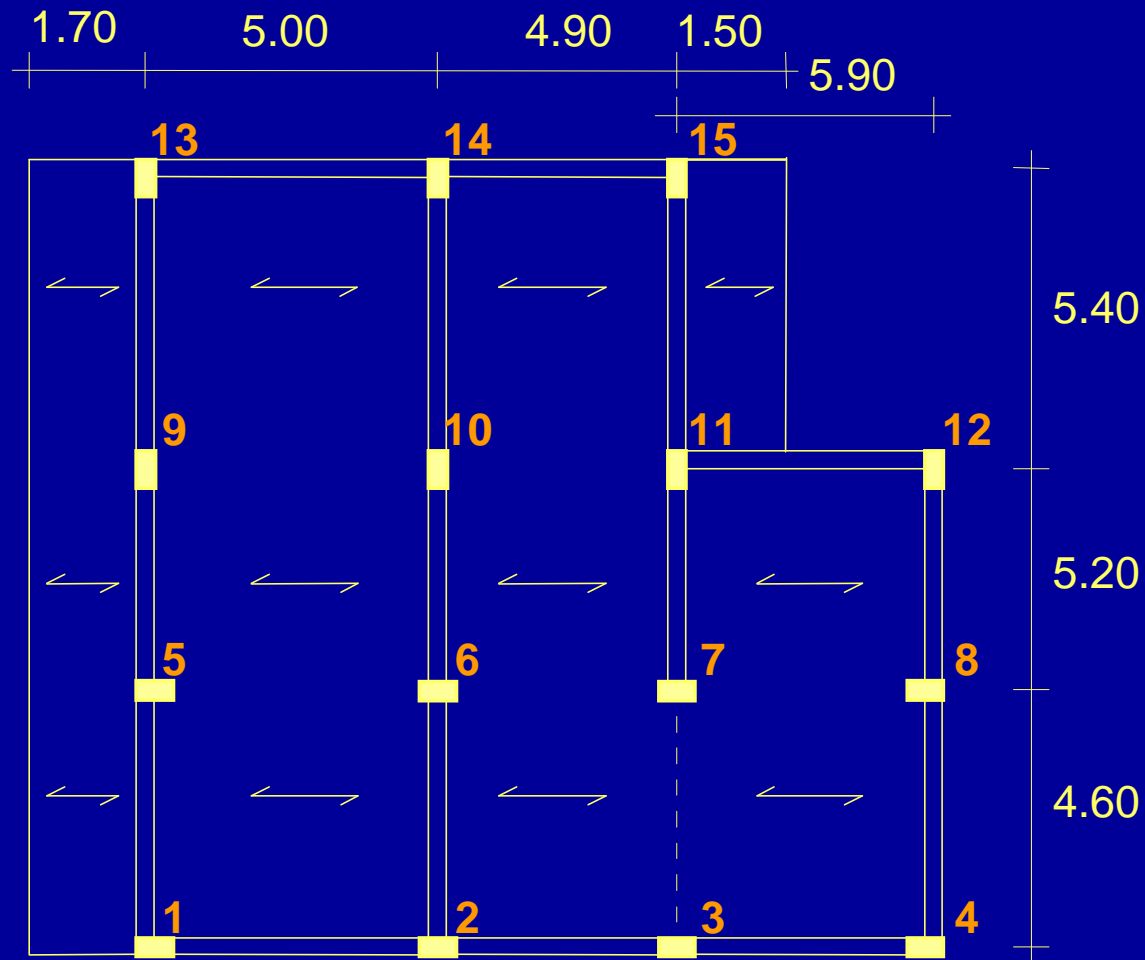
# Progetto - commento

Operando allo stato limite ultimo è possibile ridurre l'armatura nelle sezioni soggette a solo sforzo normale

o - in alternativa - è possibile ridurre la sezione lasciando invariata la percentuale di armatura

Questa affermazione non vale in zona sismica, perché le sezioni sono soggette anche a forte momento flettente e devono essere molto resistenti per garantire un comportamento duttile della struttura

# Esempio - edificio a 6 impalcati



# Materiali utilizzati

Calcestruzzo

$$R_{ck} = 25 \text{ MPa}$$

$$E_c = 5700\sqrt{R_{ck}} = 28500 \text{ MPa}$$

$$f_{ctk} = 0.7 \times 0.27 \sqrt[3]{R_{ck}^2} = 1.62 \text{ MPa}$$

$$\alpha f_{cd} = 11.0 \text{ MPa}$$

Acciaio

Fe B 44 k

$$E_s = 206000 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{373.9}{206000} = 1.82 \times 10^{-3}$$



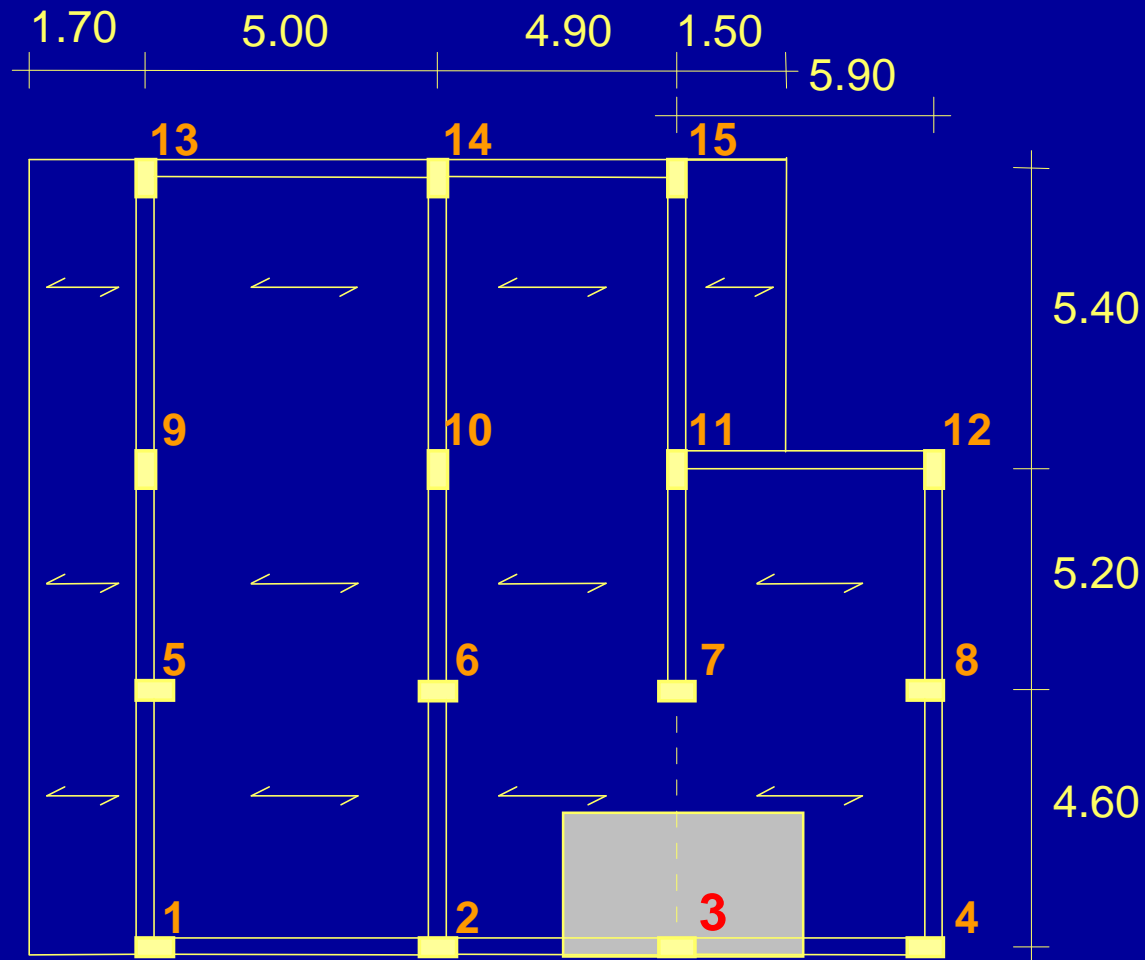
# Carichi unitari

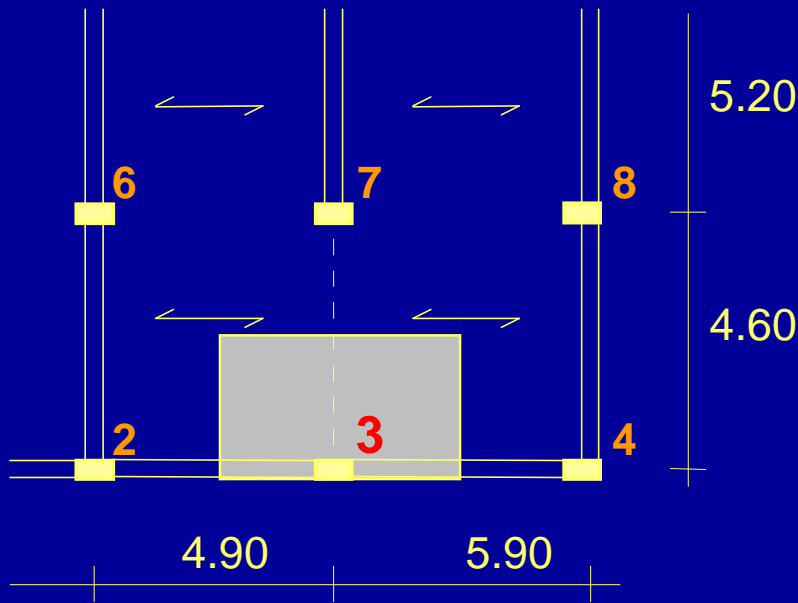
	per TA	per SLU
Solaio	$g_k = 5.3 \text{ kN/m}^2$ $q_k = 2.0 \text{ kN/m}^2$	$g_d = 1.4 \times 5.3 = 7.5 \text{ kN/m}^2$ $q_d = 1.5 \times 2.0 = 3.0 \text{ kN/m}^2$
Balconi	$g_k = 3.9 \text{ kN/m}^2$ $q_k = 4.0 \text{ kN/m}^2$	$g_d = 1.4 \times 3.9 = 5.5 \text{ kN/m}^2$ $q_d = 1.5 \times 4.0 = 6.0 \text{ kN/m}^2$
Tompagno	$g_k = 7.2 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.4 \times 7.2 = 10.1 \text{ kN/m}$
Travi 30x60	$g_k = 3.7 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.4 \times 3.7 = 5.2 \text{ kN/m}$
70x24	$g_k = 2.4 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.4 \times 2.4 = 3.4 \text{ kN/m}$

# Riepilogo carichi (per pilastri)

	per TA	per SLU
Solaio (g+ 0.9 q)	7.1 kN/m <sup>2</sup>	10.2 kN/m <sup>2</sup>
Balconi (g+ 0.9 q)	7.5 kN/m <sup>2</sup>	10.9 kN/m <sup>2</sup>
Tompagno	7.2 kN/m	10.1 kN/m
Travi 30x60	3.7 kN/m	5.2 kN/m
70x24	2.4 kN/m	3.4 kN/m

# Scarico al piano tipo pilastro 3





# Scarico al piano tipo pilastro 3

7.1  
per TA

carico

**solai**  $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} \times \frac{4.60}{2} = 13.78 \text{ m}^2 \times 10.2 = 140.6 \text{ kN}$

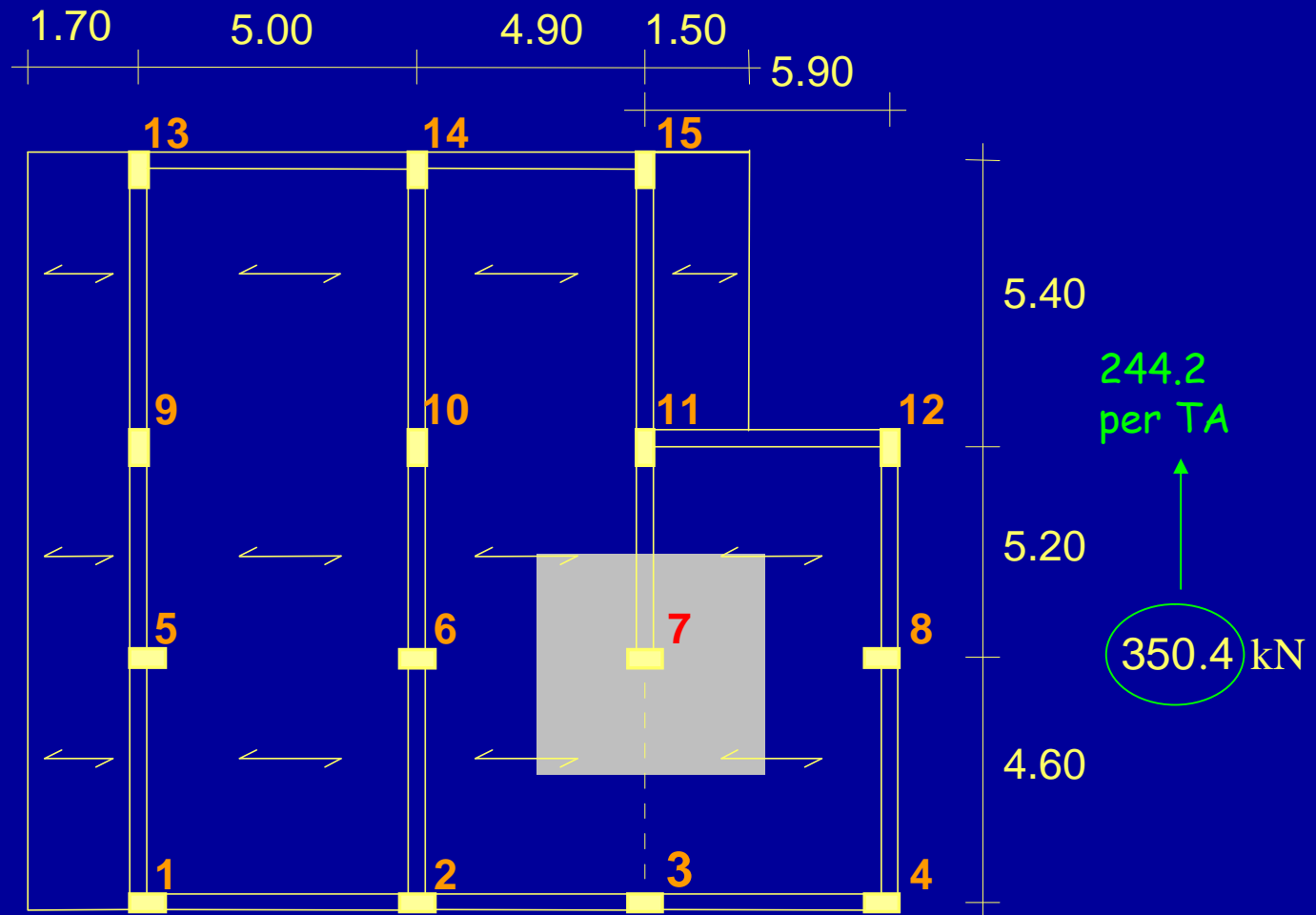
**tompagno**  $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} = 6.0 \text{ m} \times 10.1 = 60.6 \text{ kN}$

**trave em.**  $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} = 6.0 \text{ m} \times 5.2 = 31.2 \text{ kN}$

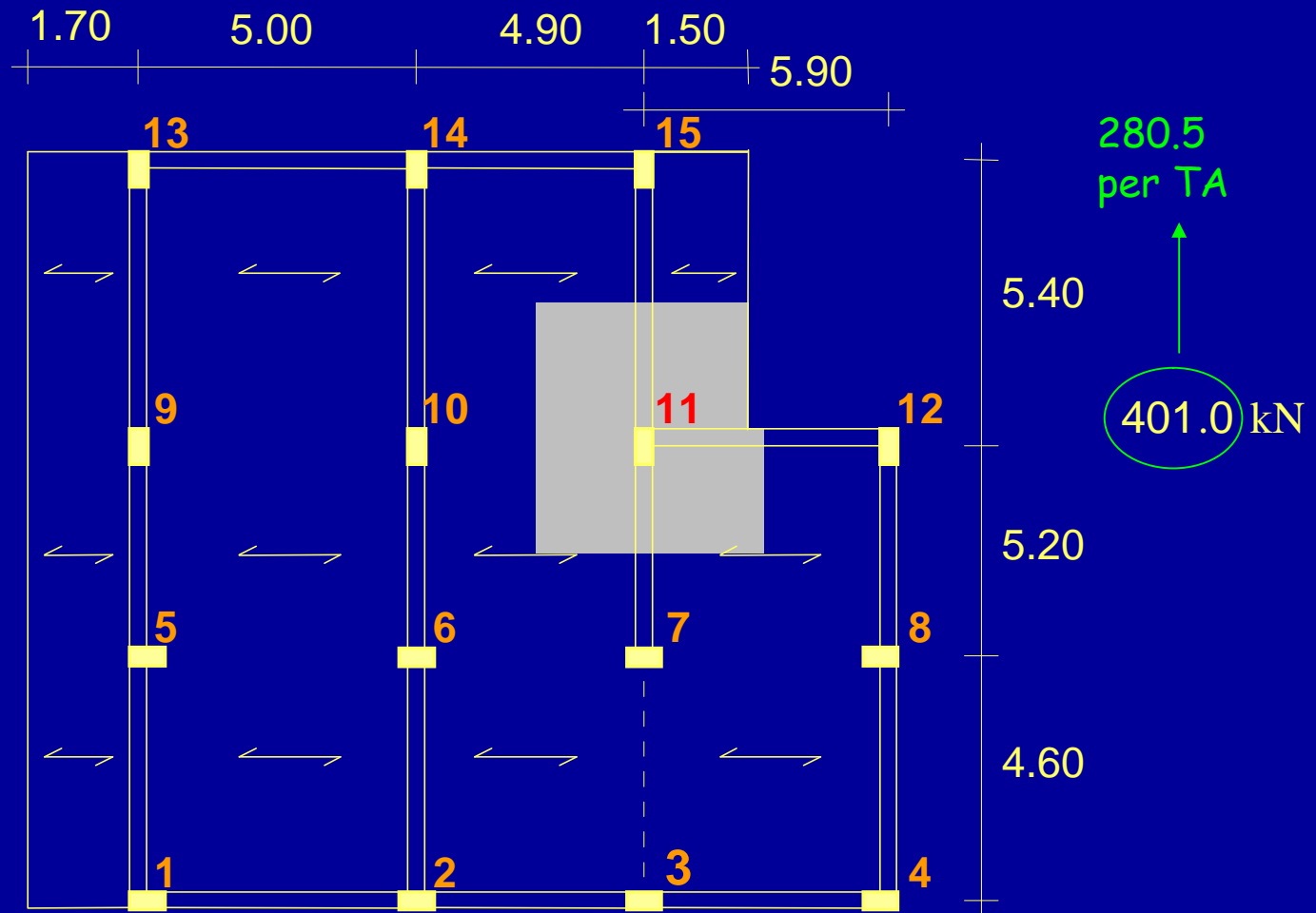
**trave sp.**  $\frac{4.60}{2} = 2.3 \text{ m} \times 3.4 = 7.8 \text{ kN}$

168.8 ← **240.2 kN**  
per TA

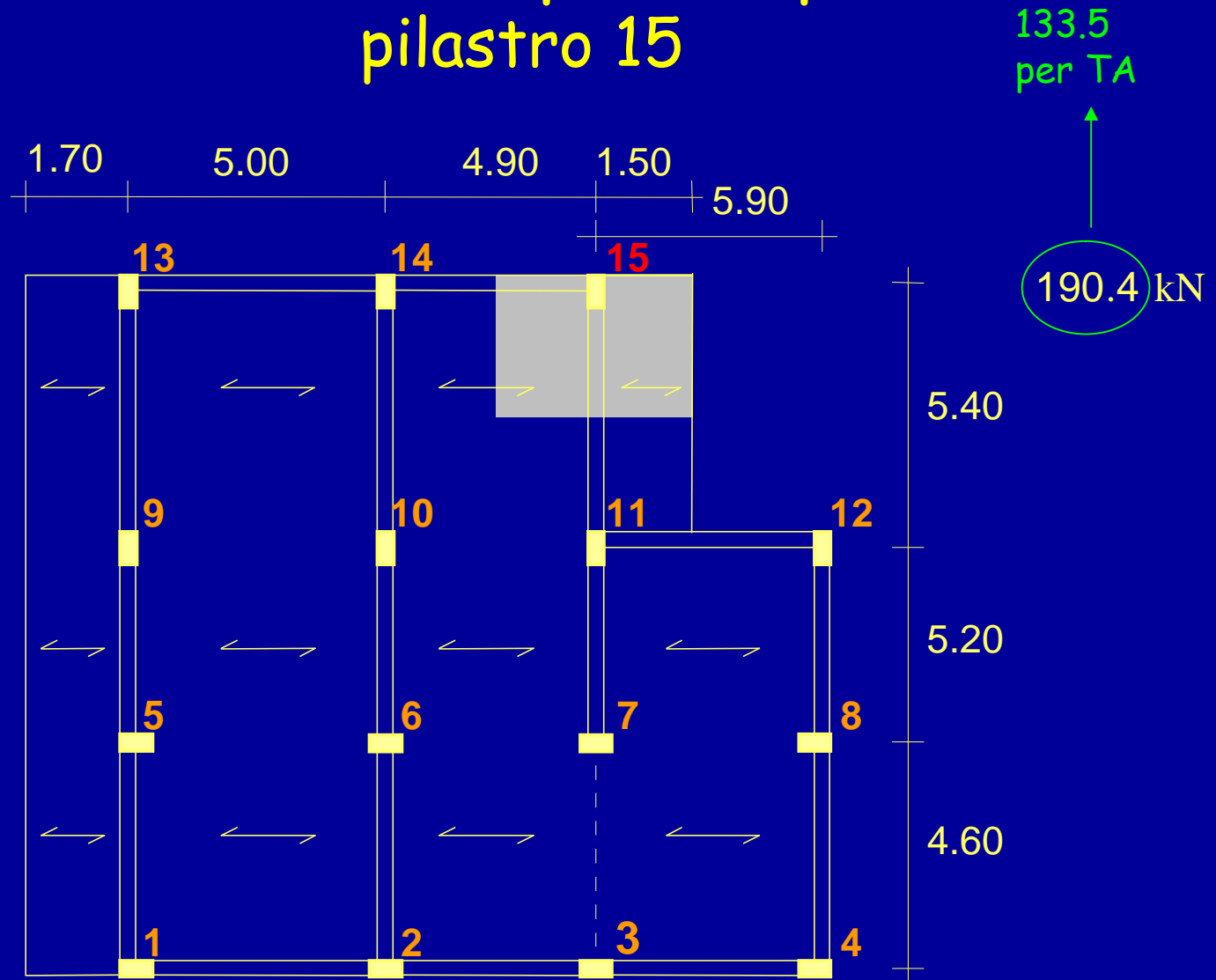
# Scarico al piano tipo pilastro 7



# Scarico al piano tipo pilastro 11



# Scarico al piano tipo pilastro 15



# Dimensionamento - pilastro 3

Scarico al piano	240.2 kN
Peso proprio medio	14.4 kN
	<hr/>
	254.6 kN

$$A_c = \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

piano	N (kN)	$A_c$ (cm <sup>2</sup> )	sezione
6	254.6	245	30×30
5	509.2	491	30×30
4	763.8	736	30×30
3	1018.4	982	40×30
2	1273.0	1227	50×30
1	1527.6	1473	50×30

Con TA, alla base

1073.4

1611

60×30



# Dimensionamento - pilastro 7

Scarico al piano	350.4 kN
Peso proprio medio	21.0 kN
	<hr/>
	371.4 kN

$$A_c = \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

piano	N (kN)	$A_c$ (cm <sup>2</sup> )	sezione
6	371.4	358	30×30
5	742.8	716	30×30
4	1114.2	1074	40×30
3	1485.6	1432	50×30
2	1857.0	1790	60×30
1	2228.4	2149	60×40

Con TA, alla base

1553.4

2331

60×40

# Dimensionamento - pilastro 11

Scarico al piano	401.0 kN
Peso proprio medio	24.1 kN
	<hr/>
	425.1 kN

$$A_c = \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

piano	N (kN)	$A_c$ (cm <sup>2</sup> )	sezione
6	425.1	410	30×30
5	850.2	820	30×30
4	1275.3	1230	30×50
3	1700.4	1639	30×60
2	2125.2	2049	30×70
1	2550.6	2459	40×70

Con TA, alla base

1783.8

2677

40×70

# Dimensionamento - pilastro 15

Scarico al piano	190.4 kN
Peso proprio medio	11.4 kN
	<hr/>
	201.8 kN

$$A_c = \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

piano	N (kN)	$A_c$ (cm <sup>2</sup> )	sezione
6	201.8	195	30×30
5	403.6	389	30×30
4	605.4	584	30×30
3	807.2	778	30×30
2	1009.0	973	30×40
1	1210.8	1167	30×40

Con TA, alla base

849.0

1274

30×50

# Armature longitudinali dei pilastri (EC2 punto 5.4.1.2.1)

- (1) Di regola le barre d'armatura devono avere diametro non minore di 12 mm.
- (2) La quantità minima di armatura longitudinale totale  $A_{s,min}$  deve di regola essere determinata con la seguente equazione:

$$A_{s,min} = \frac{0,15 N_{Sd}}{f_{yd}} \geq \underline{0,003} A_c$$

dove:

$f_{yd}$  è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura;

$N_{Sd}$  è la forza di compressione assiale di calcolo;

$A_c$  è l'area della sezione trasversale del calcestruzzo.

**NOTA BENE:** in zona sismica le armature sono maggiori (min 1%)

# Armatatura minima nei pilastri (EC2 5.4.1.2.1)

$$A_{s,min} = \frac{0,15 N_{Sd}}{f_{yd}}$$

$$A_{c,nec} = \frac{0,85 N_{Sd}}{f_{cd}}$$

$$\frac{A_{s,min}}{A_{c,nec}} = \frac{0,15 N_{Sd} / f_{yd}}{0,85 N_{Sd} / \alpha f_{cd}} = 0.176 \frac{\alpha f_{cd}}{f_{yd}}$$

Ad esempio

Acciaio FeB 44 K:  $f_{yd} = 373.9 \text{ N/mm}^2$

Calcestruzzo  $R_{ck}$  25:  $\alpha f_{cd} = 11.0 \text{ N/mm}^2$

$$\frac{A_{s,min}}{A_{c,nec}} = 0.176 \frac{f_{yd}}{\alpha f_{cd}} = 0.176 \times \frac{373.9}{11.0} = 0.005 = 0.5\%$$

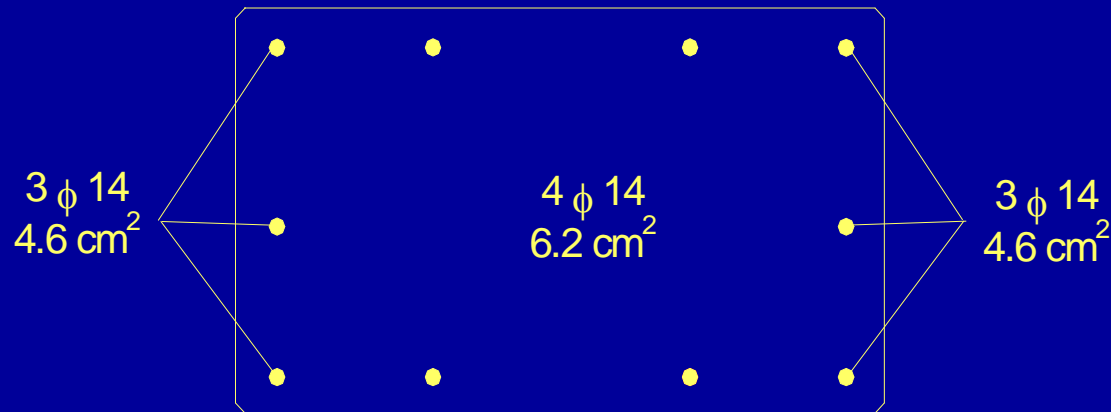
# Armature del pilastro 11 al primo ordine

40x70



Armatura minima (su tutta la sezione):

$$A_{s,min} = 0.5\% A_c = 14.0 \text{ cm}^2$$



$$A_{s,tot} = 15.4 \text{ cm}^2 > A_{s,min}$$

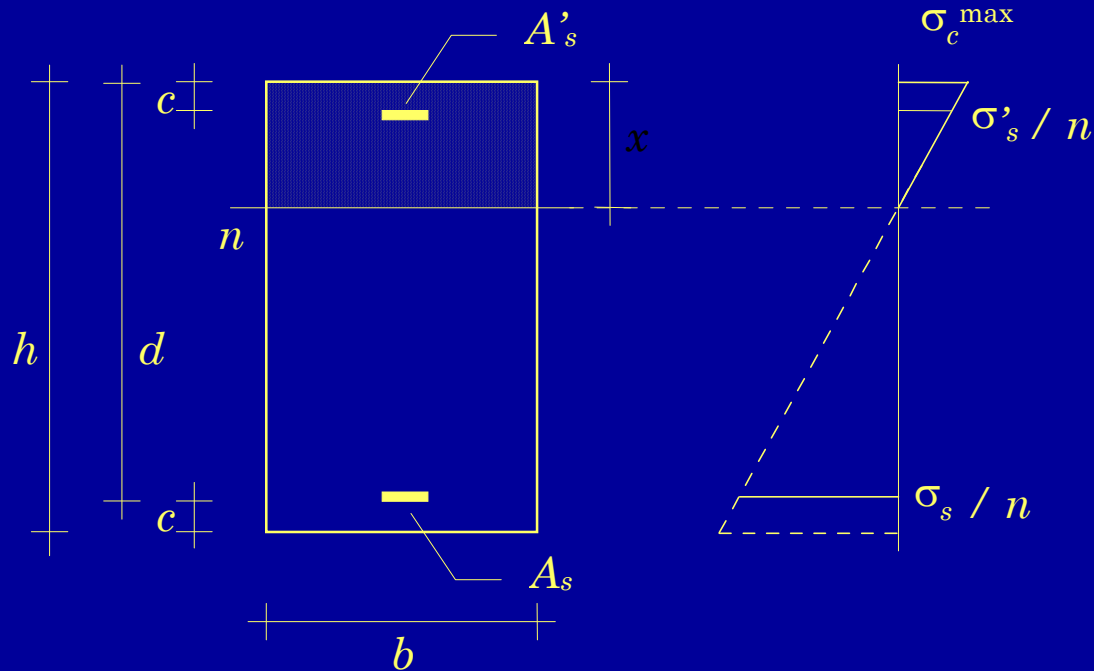
## Armature longitudinali dei pilastri (EC2 punto 5.4.1.2.1)

- (3) Di regola, anche nelle sovrapposizioni, l'area dell'armatura non deve essere maggiore di  $|0,08A_c|$ .
- (4) Le barre longitudinali devono, di regola, essere distribuite lungo il perimetro della sezione. Per pilastri aventi sezione trasversale poligonale, almeno una barra sarà disposta in ogni spigolo. Per pilastri di sezione circolare, il numero minimo di barre è  $|6|$ .

# Verifica di sezioni inflesse



# Verifica - tensioni ammissibili



Dati:

Geometria della sezione

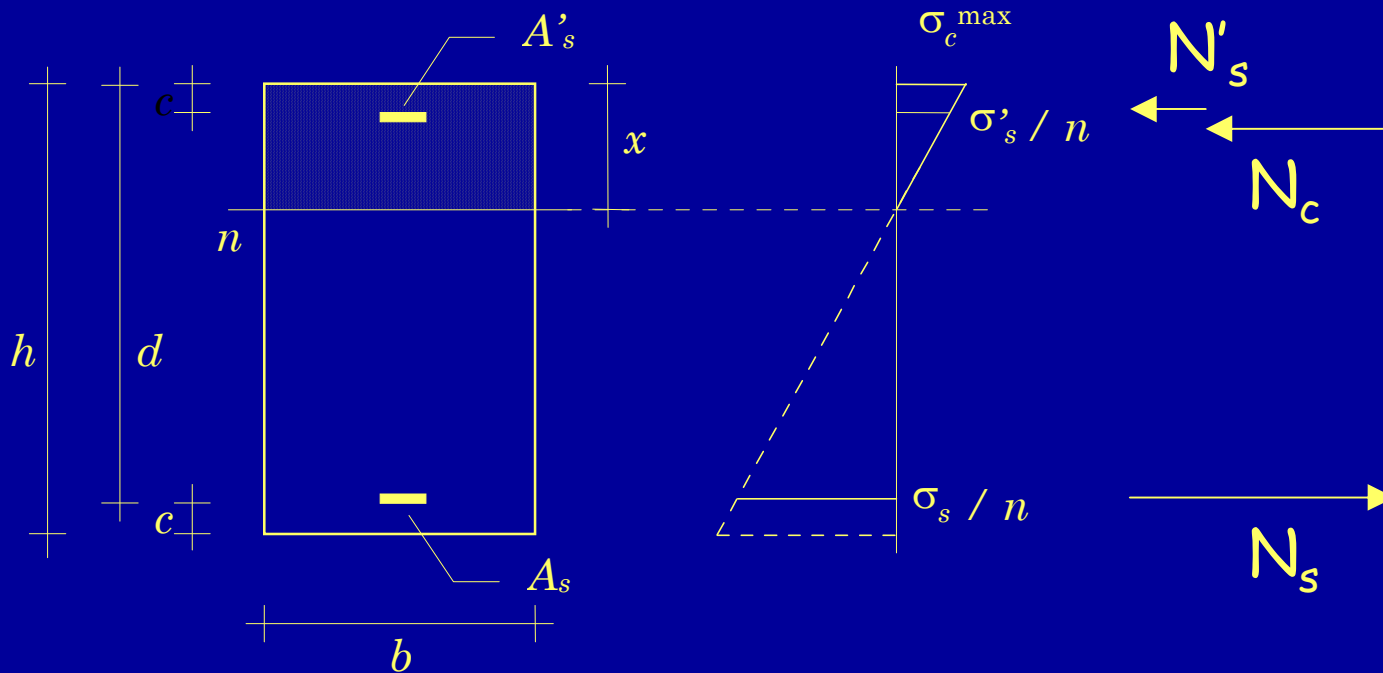
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Tensioni massime

# Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

oppure:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

# Verifica - tensioni ammissibili

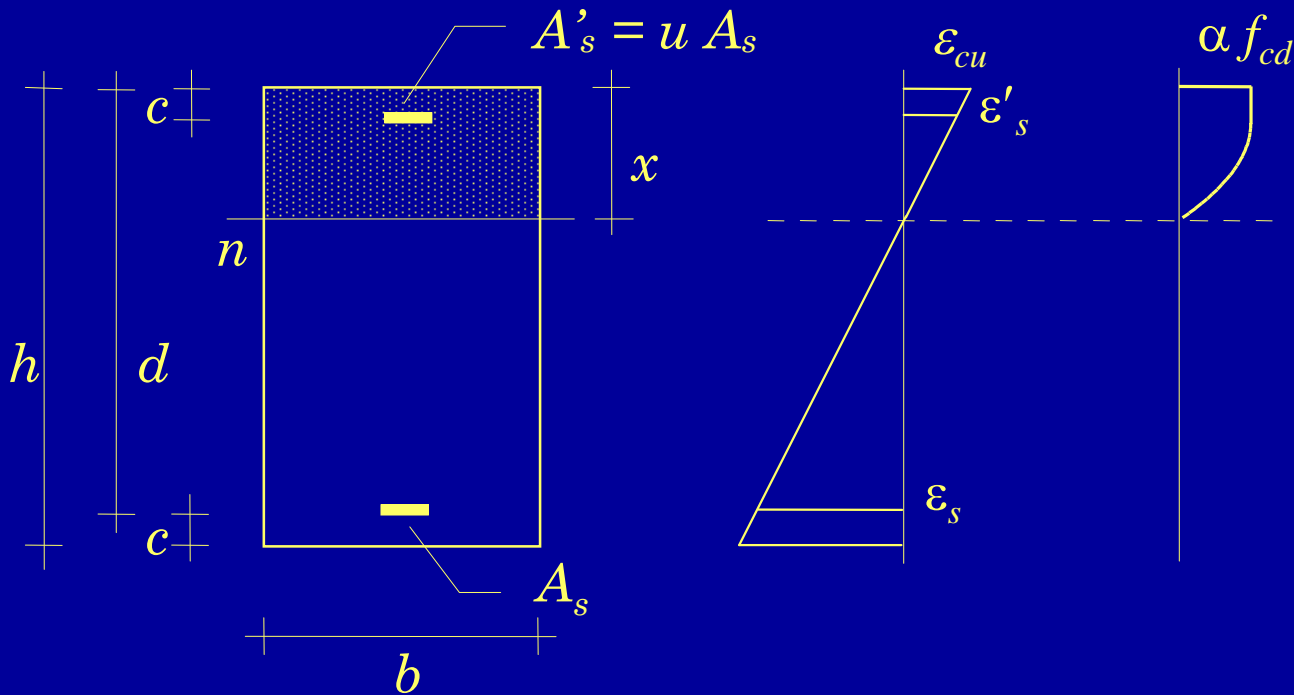
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

E poi:  $\sigma = -\frac{M}{I} y$

con:  $I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$

# Verifica - stato limite ultimo



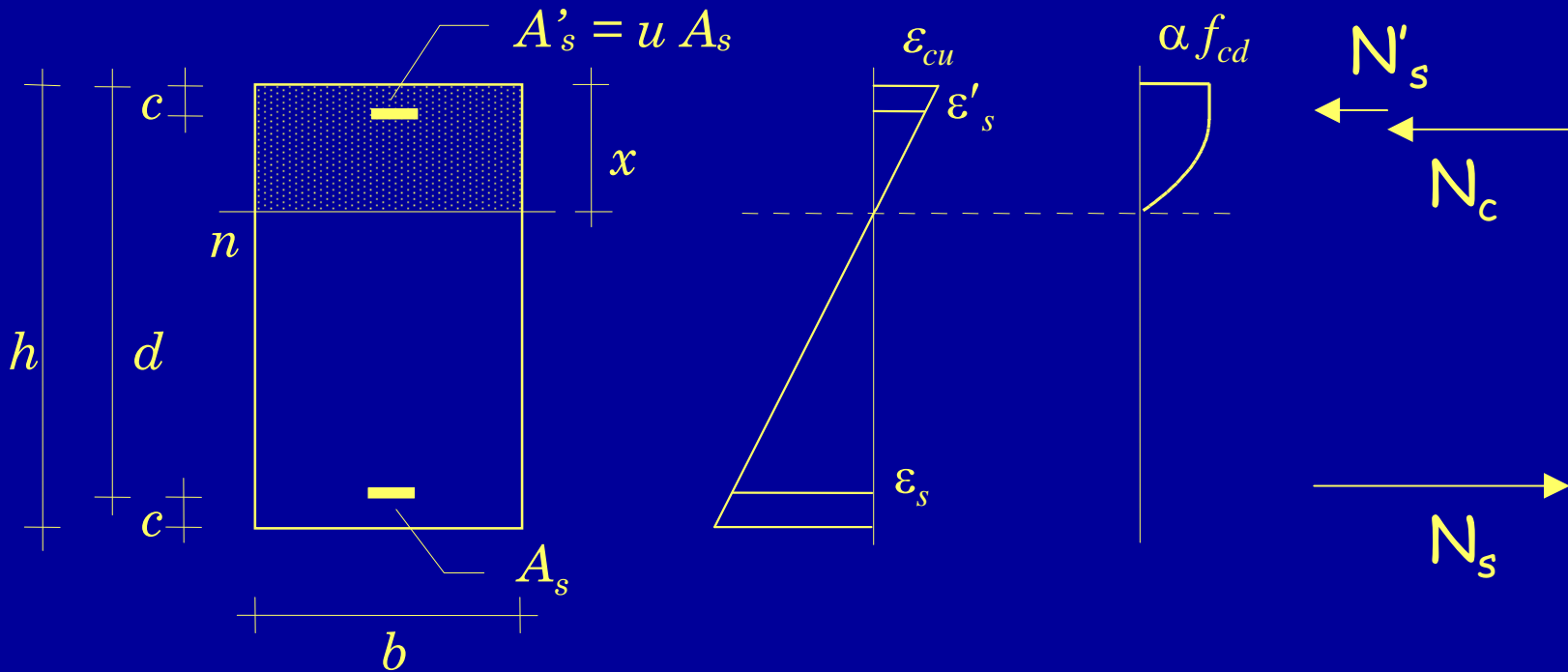
**Dati:**

Geometria della sezione  
Armature

**Incognite:**

Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente

# Verifica - stato limite ultimo

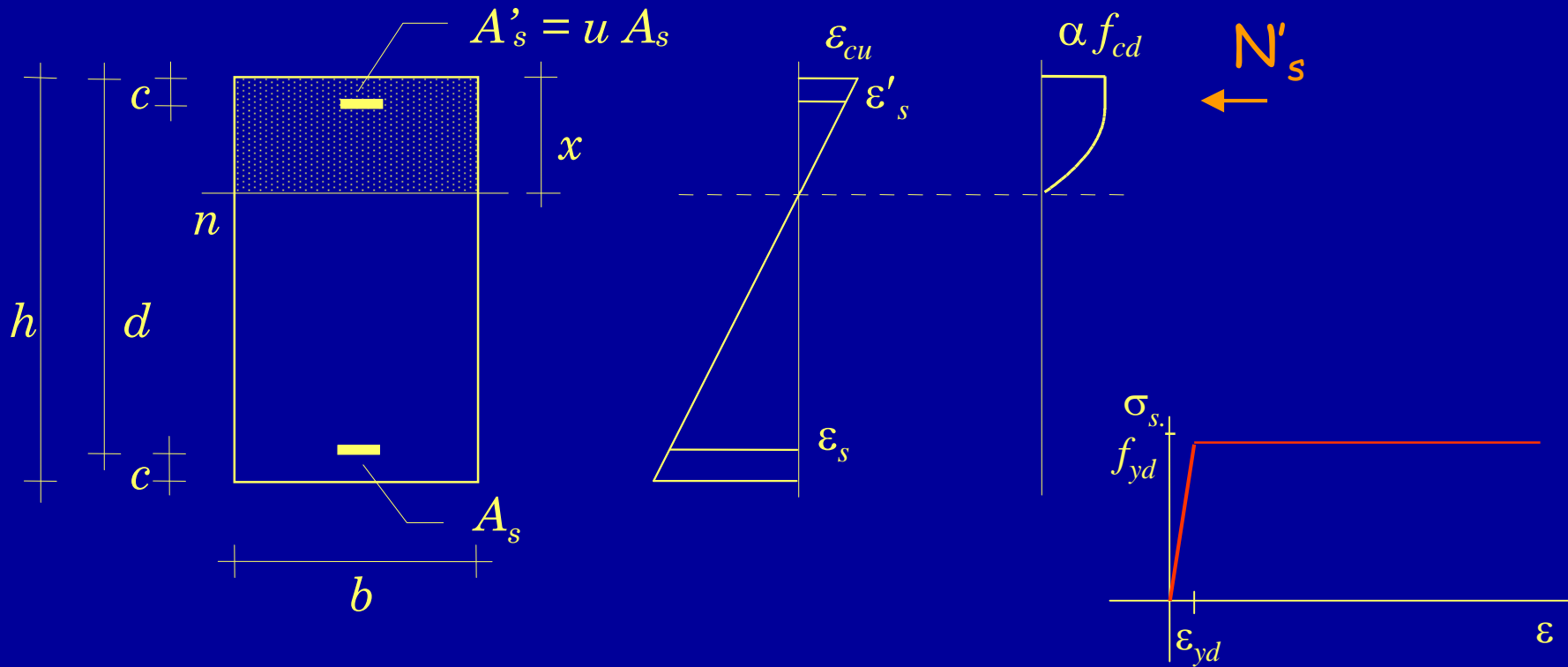


Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

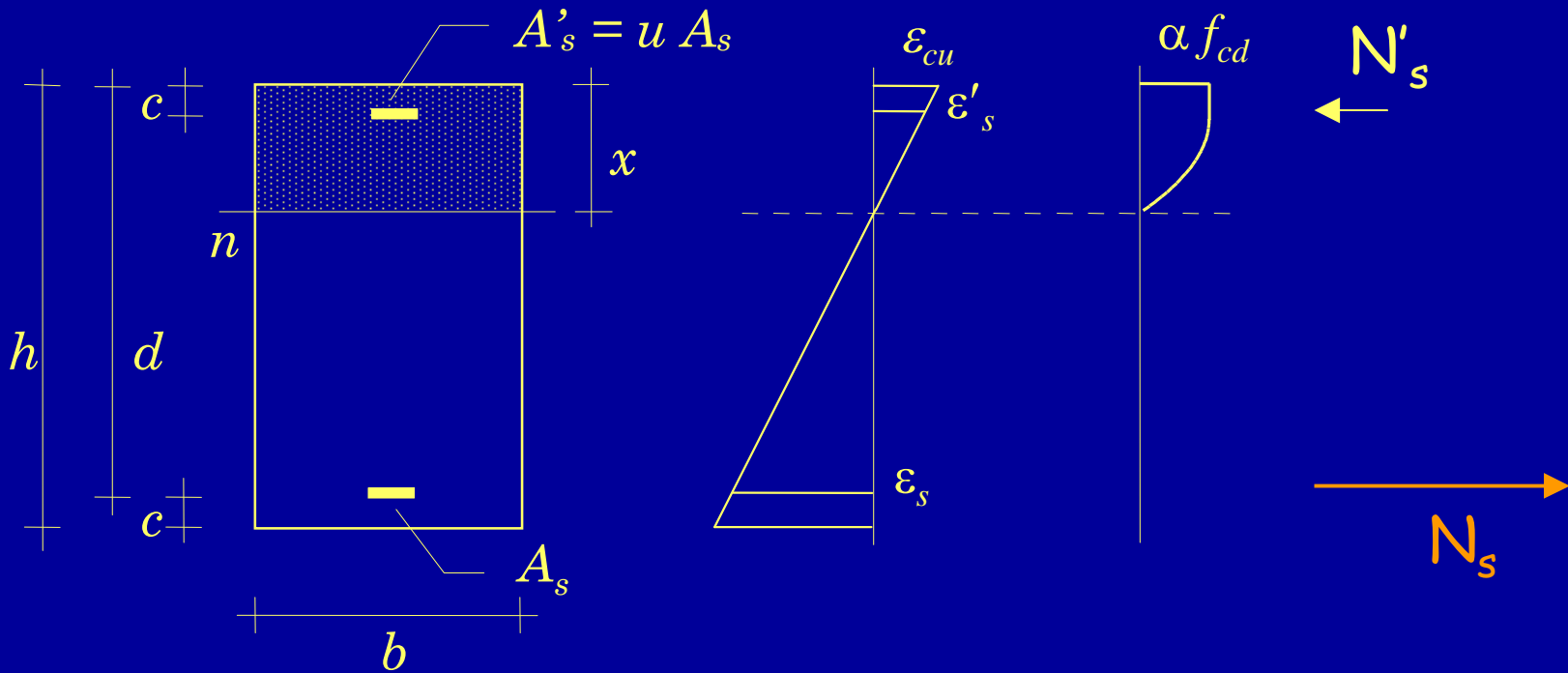


$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu}$$

in molti casi  $\epsilon'_s > \epsilon_{yd}$

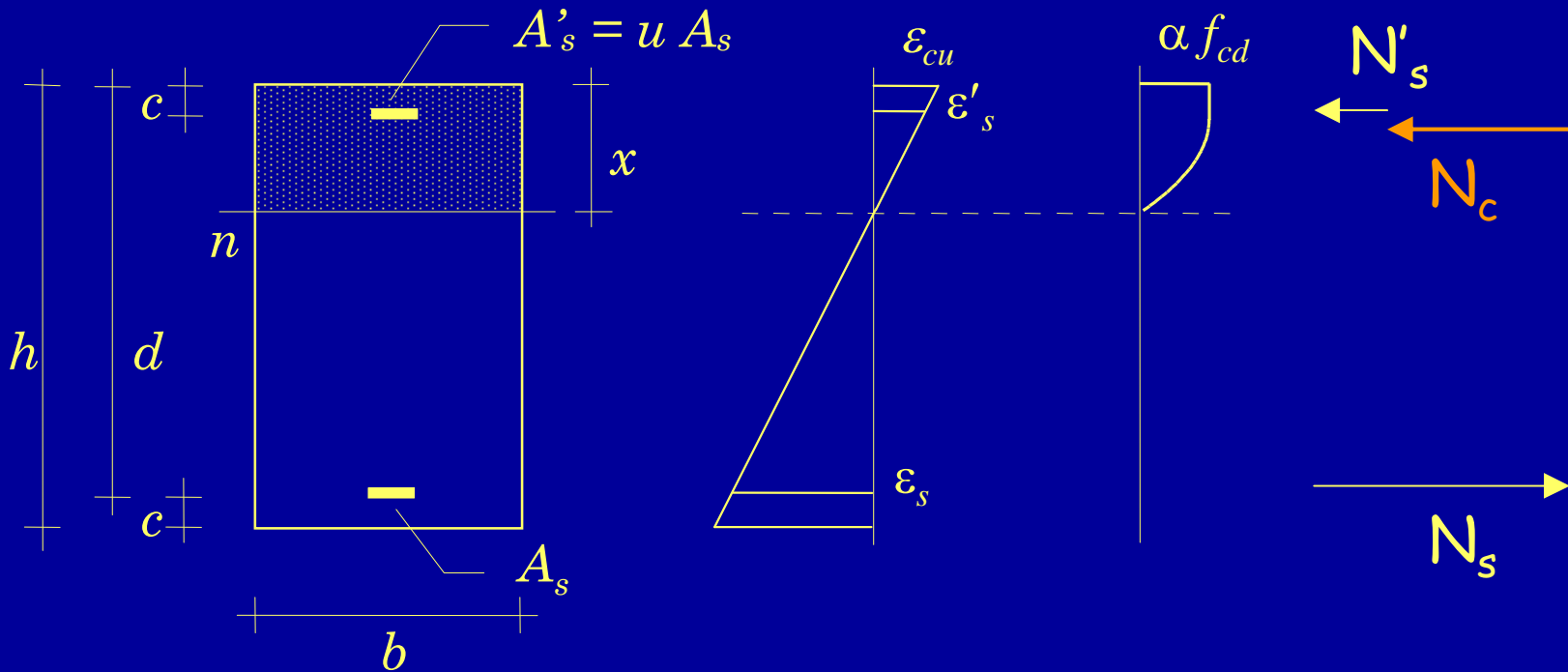
$$\Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre  $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente  $\beta$  tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta b x \alpha f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$



# Individuazione dell'asse neutro

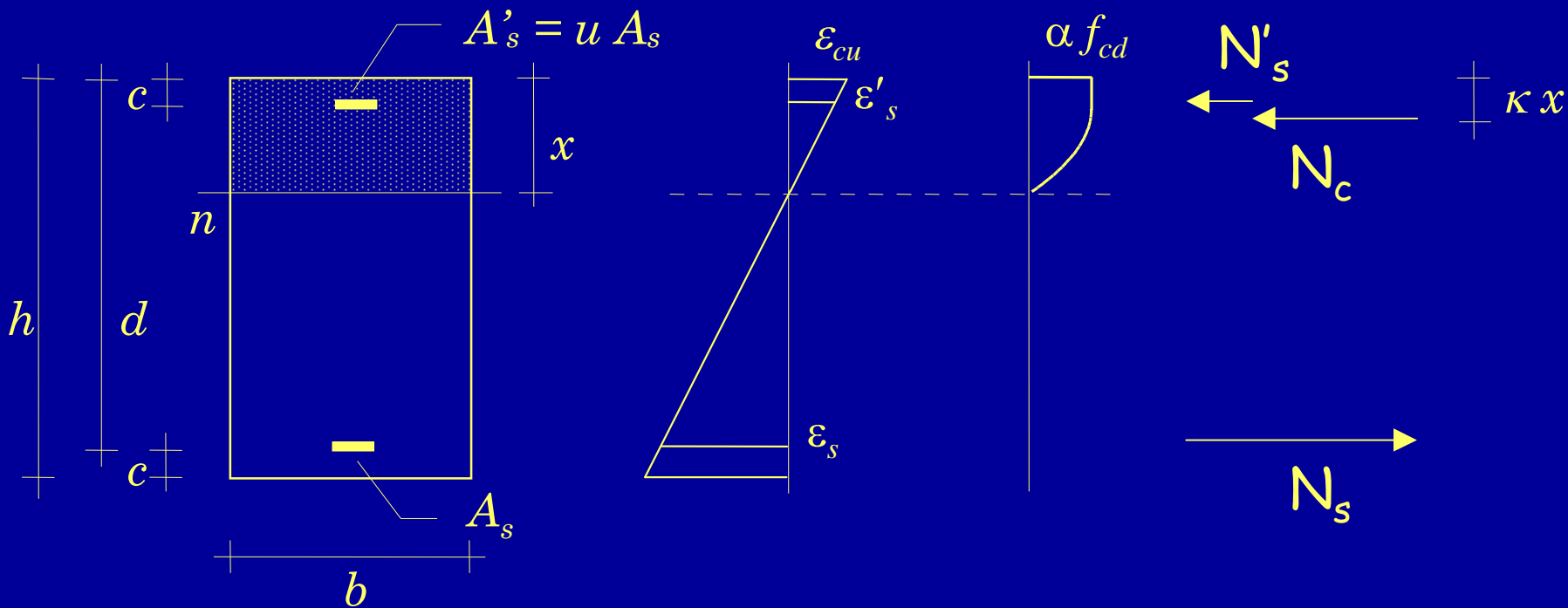
Se  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}}$$

# Momento resistente



Si determina imponendo  
l'equilibrio alla rotazione  
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

# Esempio

## verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Sd} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50

Calcestruzzo  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Armature  $A_s = 4\text{Ø}20$

Acciaio FeB44k

$$A'_s = 4\text{Ø}14$$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Sd}$  e  $M_{Rd}$

## Esempio - individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}} = \frac{(12.56 - 6.16) \times 374}{0.810 \times 30 \times 11.0} = 8.95 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{8.95 - 4}{8.95} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.94 \times 10^{-3}$$

Poiché  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  la posizione trovata è esatta

# Esempio - calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 374 \times 10^{-1} = 469.7 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$N'_s = 6.16 \times 374 \times 10^{-1} = 230.4 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = [469.7 \times (46 - 0.416 \times 8.95) + 230.4 \times (0.416 \times 8.95 - 4)] \times 10^{-2}$$

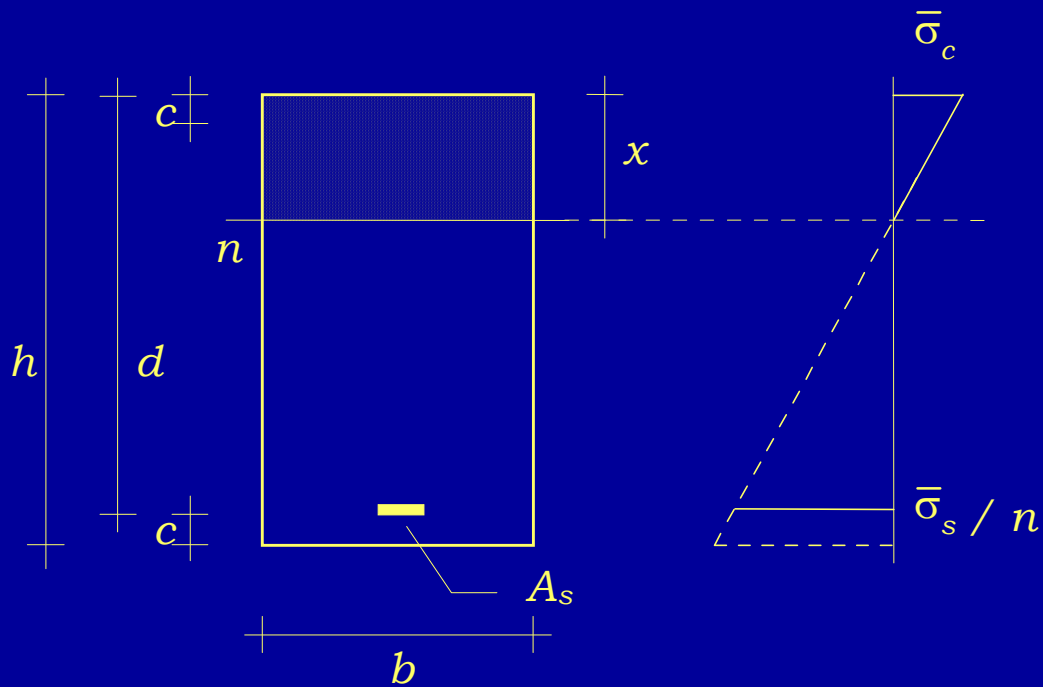
$$M_{Rd} = 197.9 \text{ kNm}$$

Si noti che  
 $\kappa x \cong c$

Poiché  $M_{Sd}$  è minore di  $M_{Rd}$  la sezione è verificata

# Progetto di sezioni inflesse

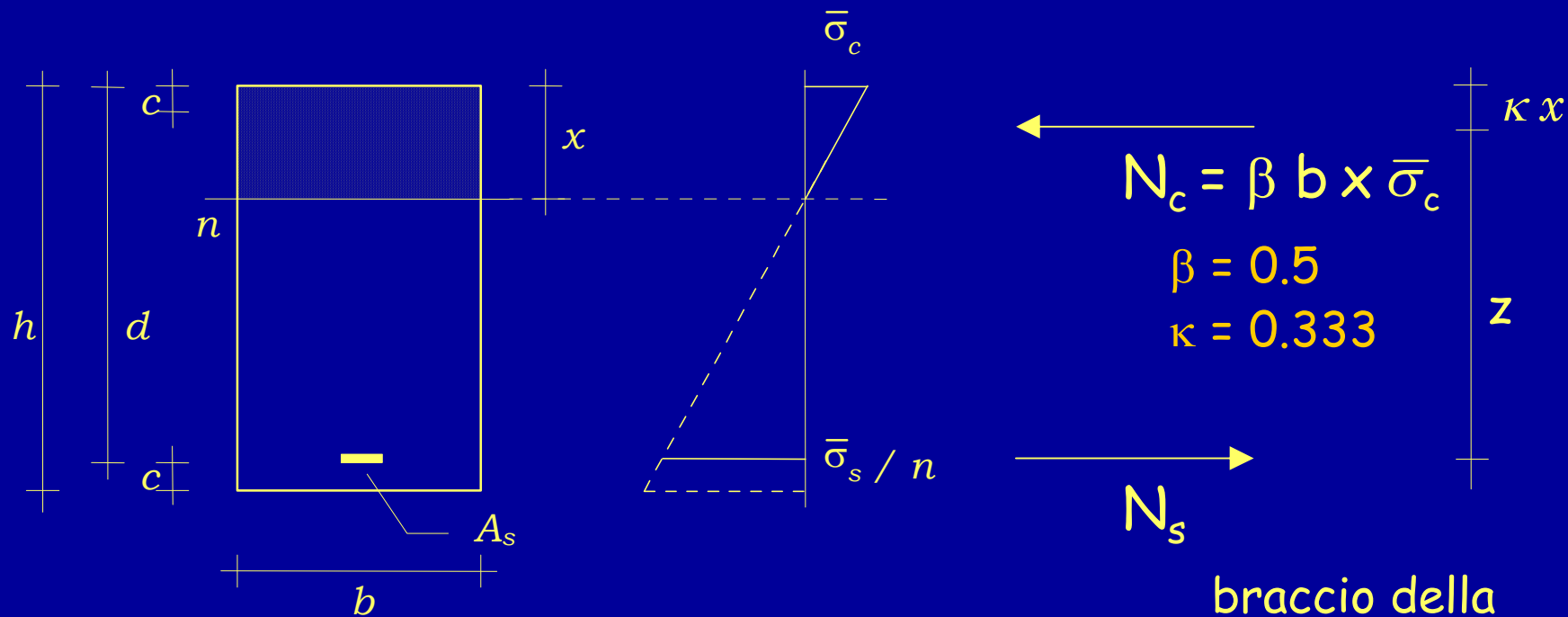
# Progetto - tensioni ammissibili



$$n = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

# Progetto - tensioni ammissibili



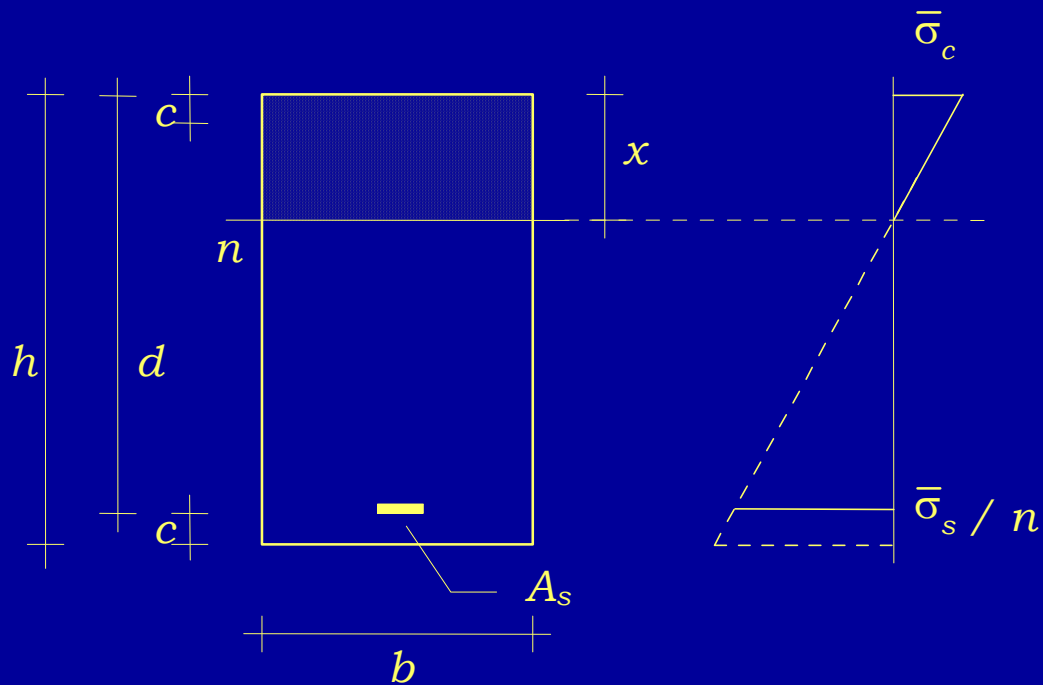
2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$



# Progetto - tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b d^2}{r^2}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:

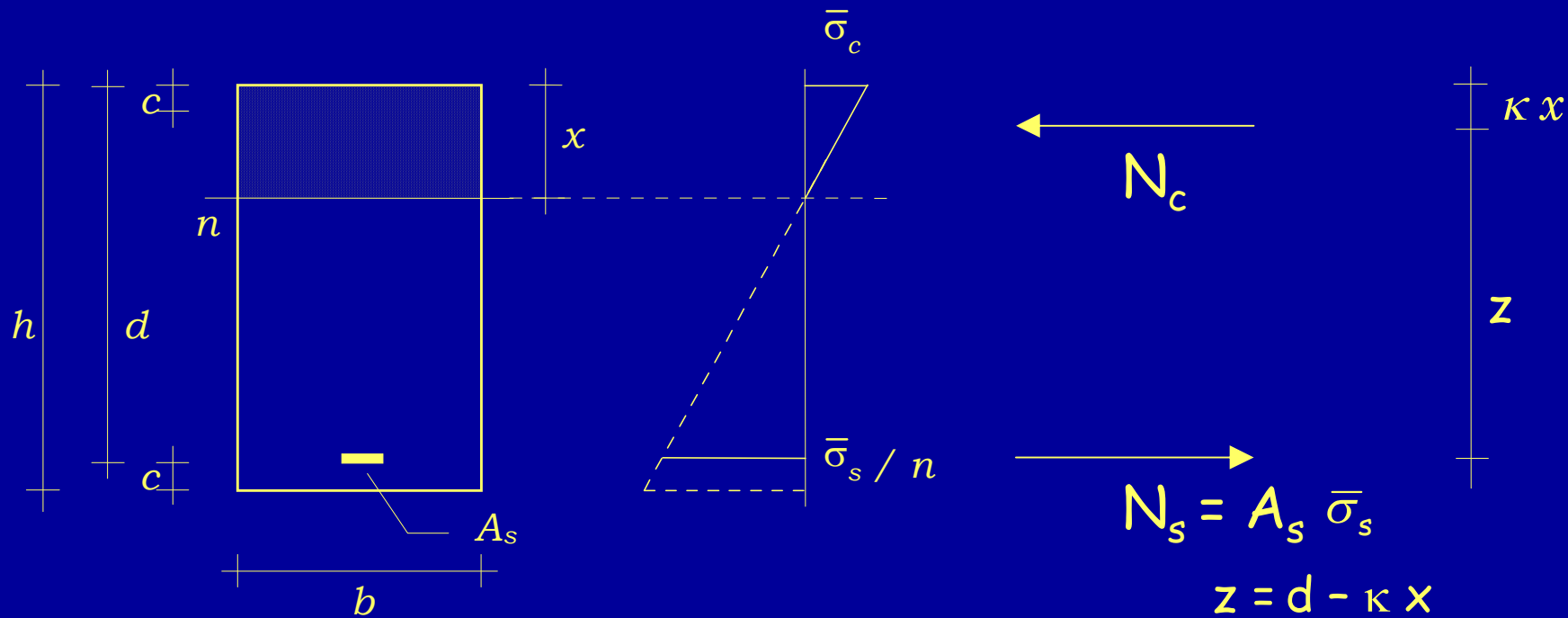
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

# Progetto - tensioni ammissibili



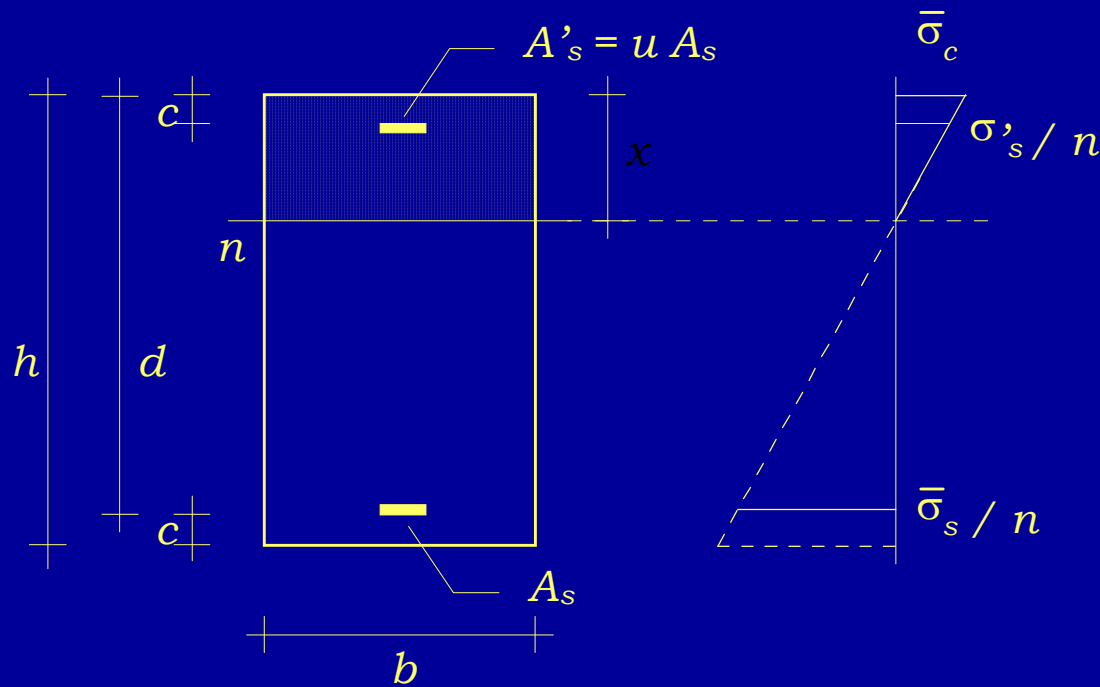
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante  $N_c$

$$M = N_s z$$

$$M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

# Progetto - tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s/n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x - c}{d - x}$$

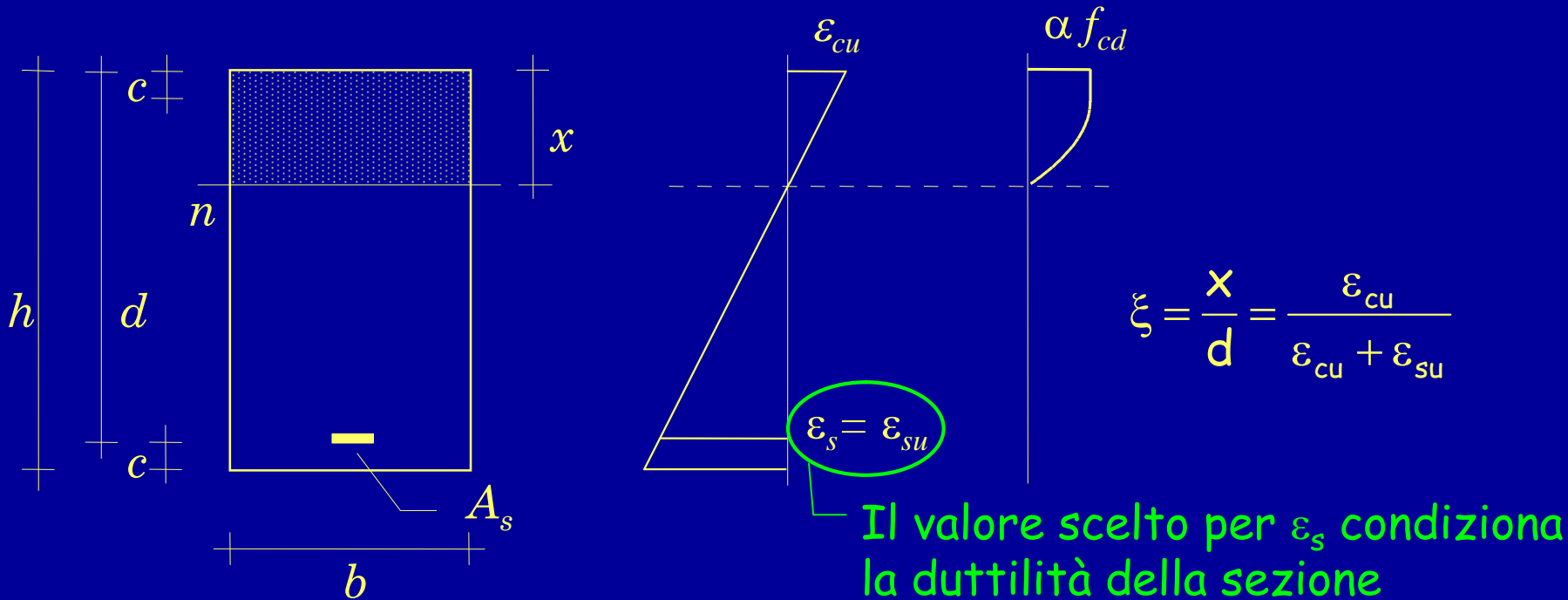
$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Analogamente per sezione  
a doppia armatura

$r'$  dipende da  $u$  (e da  $c/d$ )

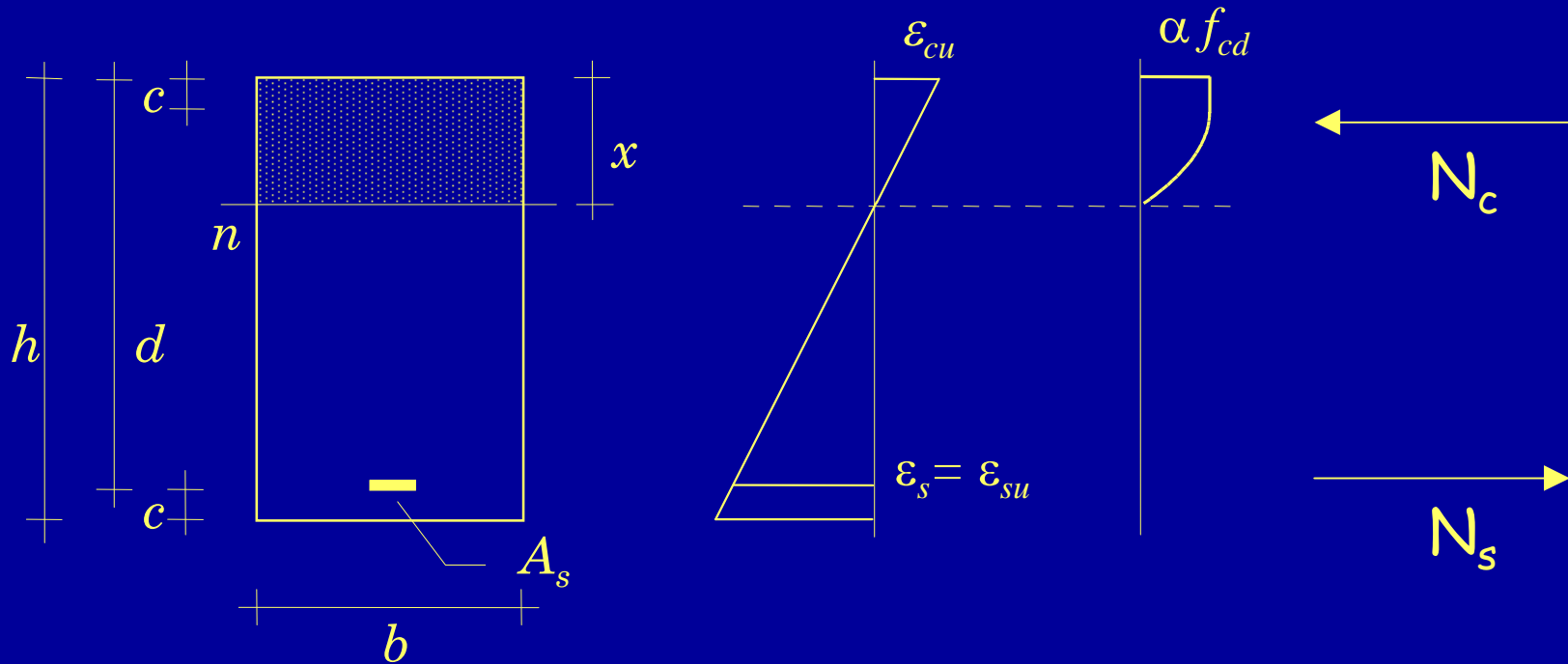
# Progetto - stato limite ultimo



1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona  
duttilità con  
 $\varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$

# Progetto - stato limite ultimo

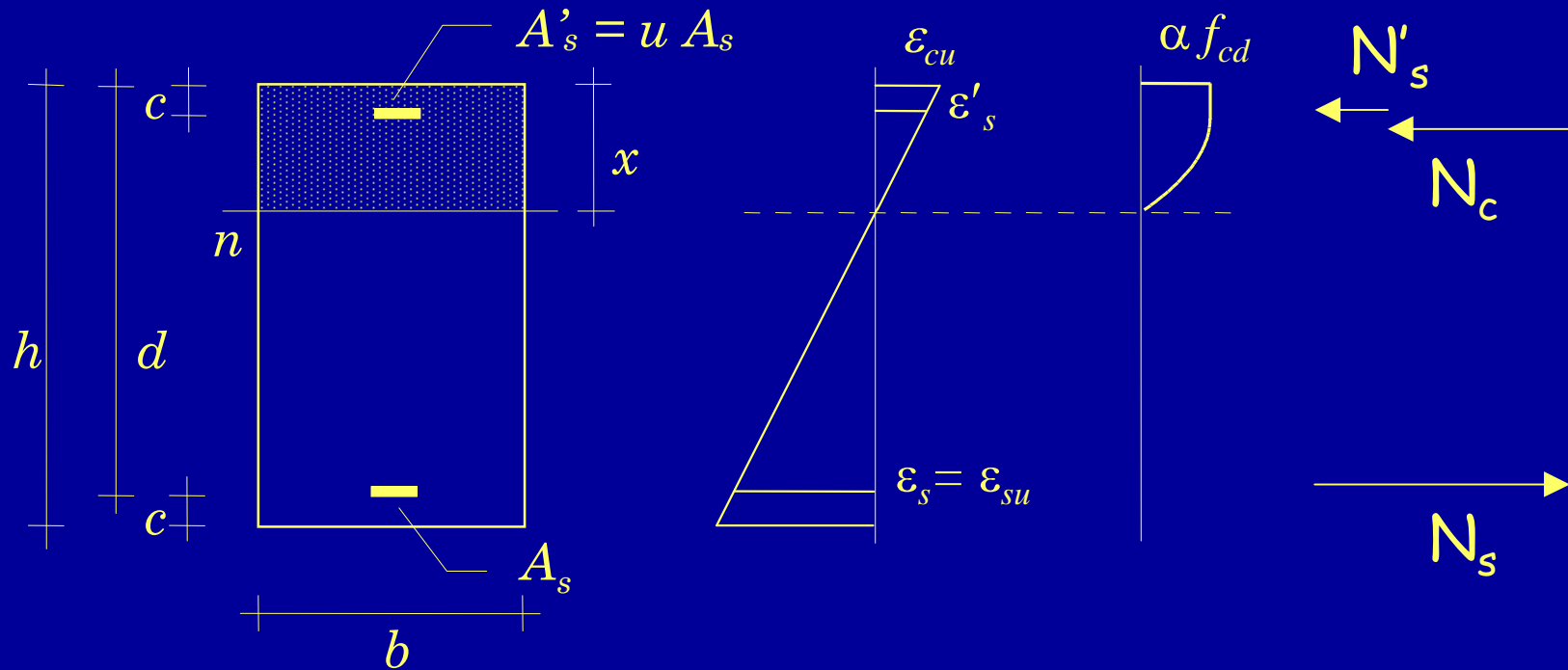


2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con: 
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}}}$$

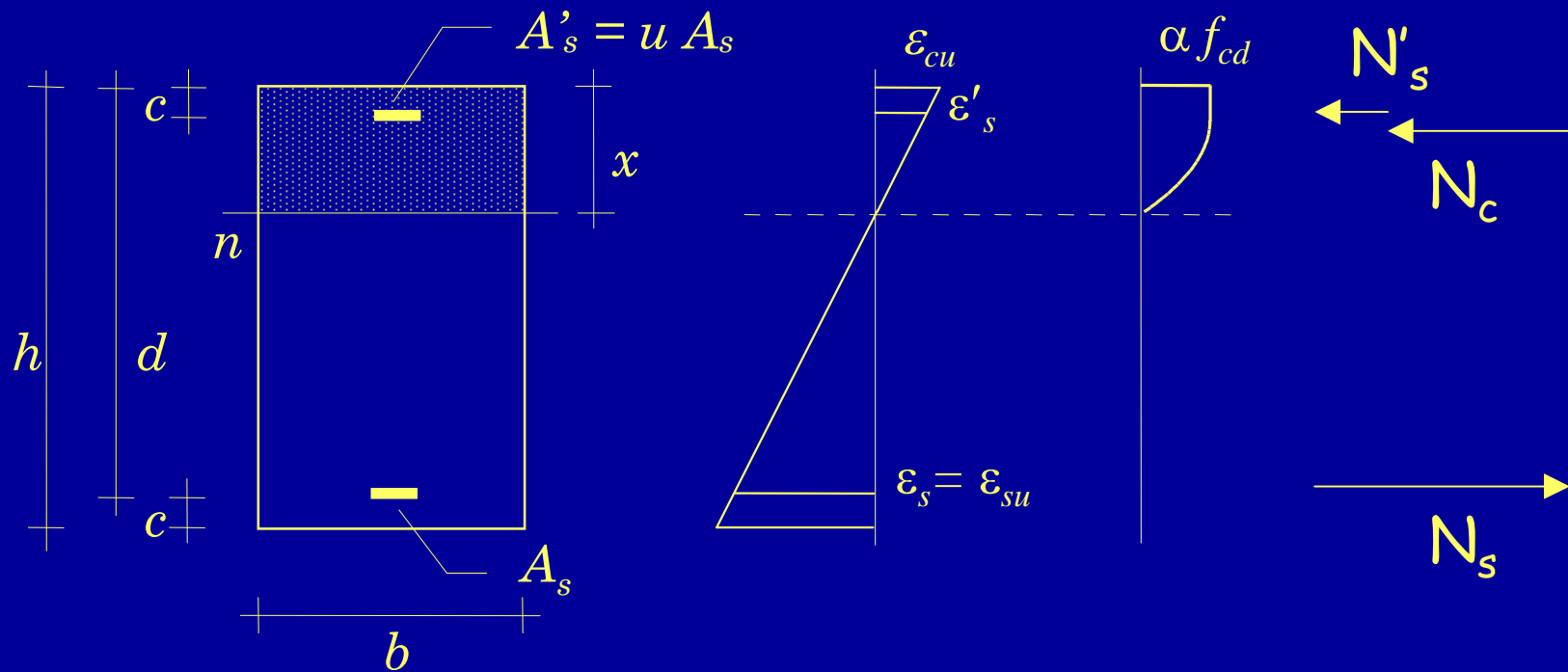
# Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

# Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

# Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici



# Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.6$

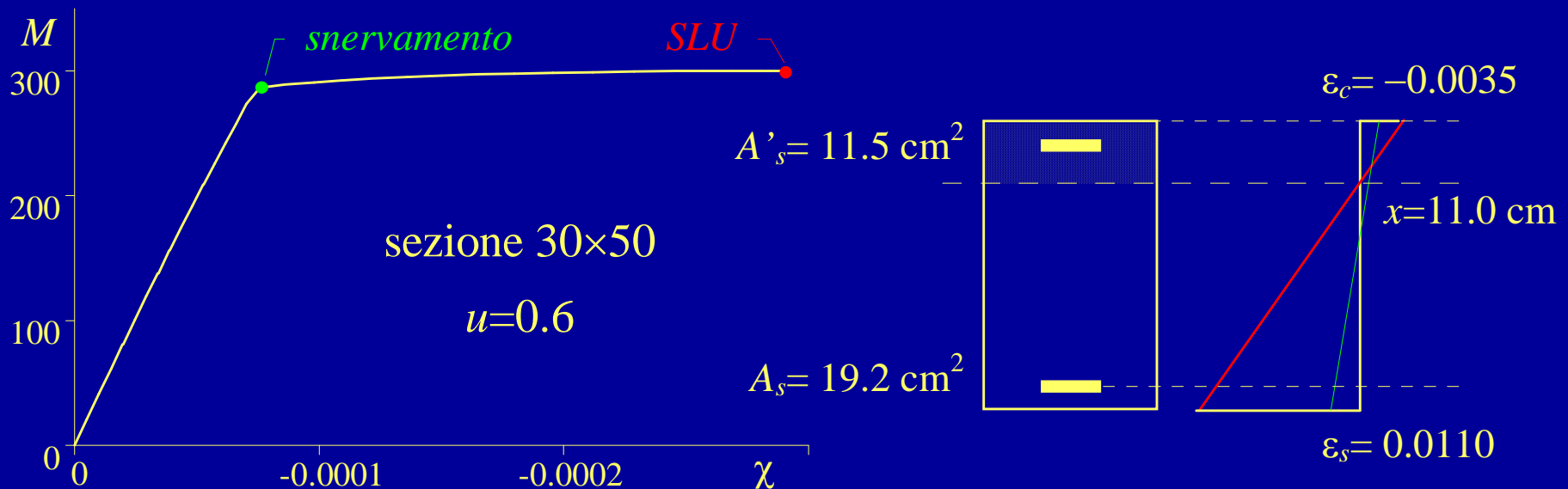
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$

$x=11.0 \text{ cm}$

$\chi=-0.000286$

Buona duttilità



# Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.3$

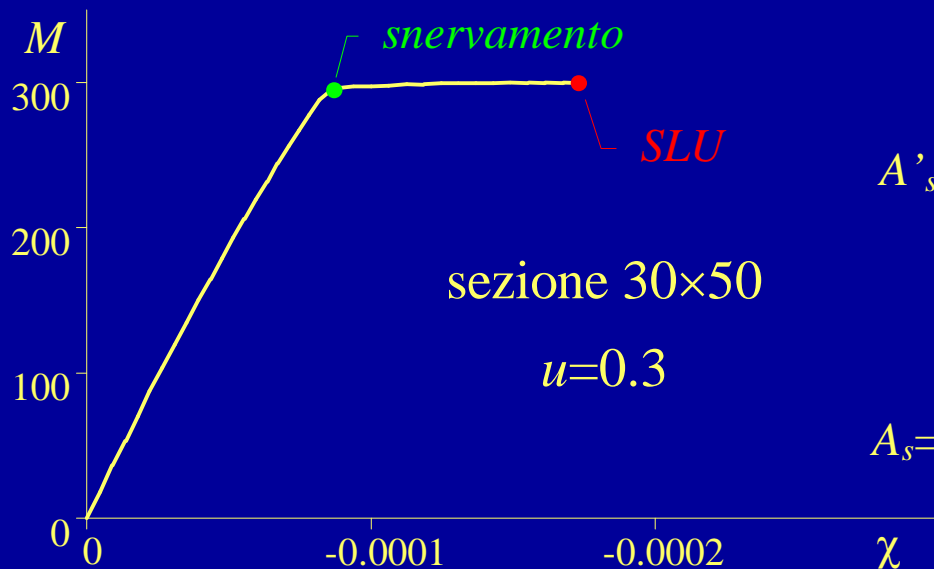
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$

$x=20.2 \text{ cm}$

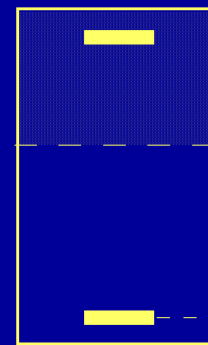
$\chi = -0.000184$

## Duttilità discreta



$A'_s = 6.2 \text{ cm}^2$

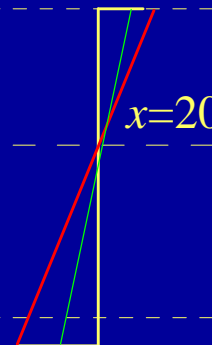
$A_s = 20.6 \text{ cm}^2$



$\varepsilon_c = -0.0035$

$x=20.2 \text{ cm}$

$\varepsilon_s = 0.0045$



# Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.08$

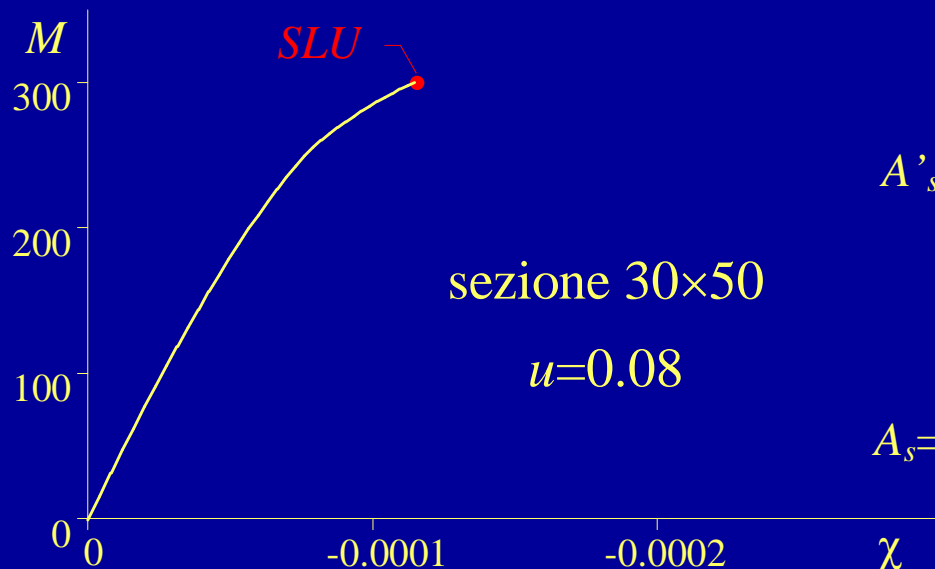
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$

$x=30.3 \text{ cm}$

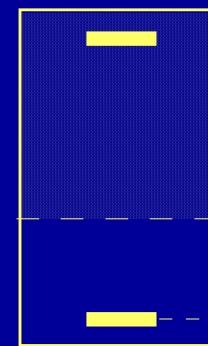
$\chi=-0.000116$

Bassa duttilità



$A'_s = 1.9 \text{ cm}^2$

$A_s = 23.5 \text{ cm}^2$



$\varepsilon_c = -0.0035$

$x=30.3 \text{ cm}$

$\varepsilon_s = 0.0018$

# Quanto vale il coefficiente $r$ ?

Tensioni ammissibili:  
dipende da calcestruzzo e acciaio

per  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$  e FeB44k:  $r = 0.0282$

Stato limite ultimo:  
dipende solo dal calcestruzzo

per  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ :  $r = 0.0220$

# Esempio

## progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0282 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.552 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 255} = 8.95 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0220 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.524 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{170 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 374} = 9.02 \text{ cm}^2$$

# Che relazione c'è tra $r$ ed $r'$ ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che  $s'$  dipende principalmente dal copriferro  $c$  (o meglio, dal rapporto  $\gamma = c/d$ )

Ma per TA  $s'$  è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU  $s'$  è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

# Valori di $r'$ ( $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ , FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
<b>u</b>	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
<b>0</b>	0.0282	0.0282	0.0282
<b>0.25</b>	0.0265	0.0269	0.0275
<b>0.50</b>	0.0248	0.0256	0.0269
<b>0.75</b>	0.0230	0.0242	0.0262
<b>1.00</b>	0.0211	0.0227	0.0255

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
<b>u</b>	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
<b>0</b>	0.0220	0.0220	0.0220
<b>0.25</b>	0.0189	0.0190	0.0209
<b>0.50</b>	0.0153	0.0155	0.0197

# Valori di $r'/r$ ( $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ , FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.940	0.954	0.975
0.50	0.879	0.908	0.954
0.75	0.816	0.858	0.929
1.00	0.748	0.805	0.904

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.859	0.864	0.950
0.50	0.695	0.705	0.895



# Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ( $s' \cong 1$ ) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ( $s' \cong 0.3 \div 0.5$ )

# Esempio

progetto di sezione a doppia armatura ( $u=0.25$ )

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0265 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.519 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

era 0.552 m per  $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0189 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.450 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.524 m per  $u=0$

# Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore  
 $r' = 0.019$  o  $0.020$  (corrisponde a  $u \cong 25\%$ )

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori  
un po' maggiori  
 $r' = 0.021$  (corrisponde a  $u \cong 25\%$ )

# Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a  $0.9 d$

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ( $0.8 d$ )

# Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura compressa determinare la differenza tra  $M_{sd}$  e momento resistente per  $u = 0$

$$M_0 = \frac{bd^2}{r^2}$$

$$\Delta M = M_{sd} - M_0$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d-c)f_{yd}}$$

# Prescrizioni sull'armatura

Armatura minima:

$$A_s \geq \frac{0.6}{f_{yk}} b d \geq 0.15 \% b d$$

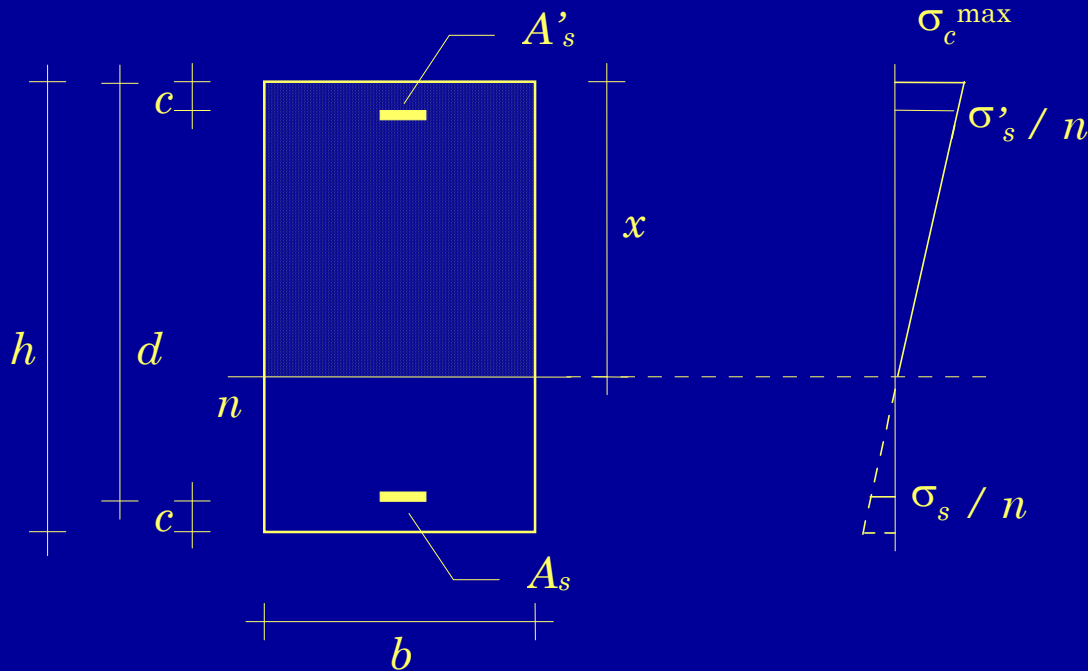
Armatura massima:

$$A_s \leq 3 \% b h$$

$$A'_s \leq 3 \% b h$$

# Verifica di sezioni soggette flessione composta

# Verifica - tensioni ammissibili



Dati:

Geometria della sezione  
Armature

Coppia M-N

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Tensioni massime



# Verifica - tensioni ammissibili

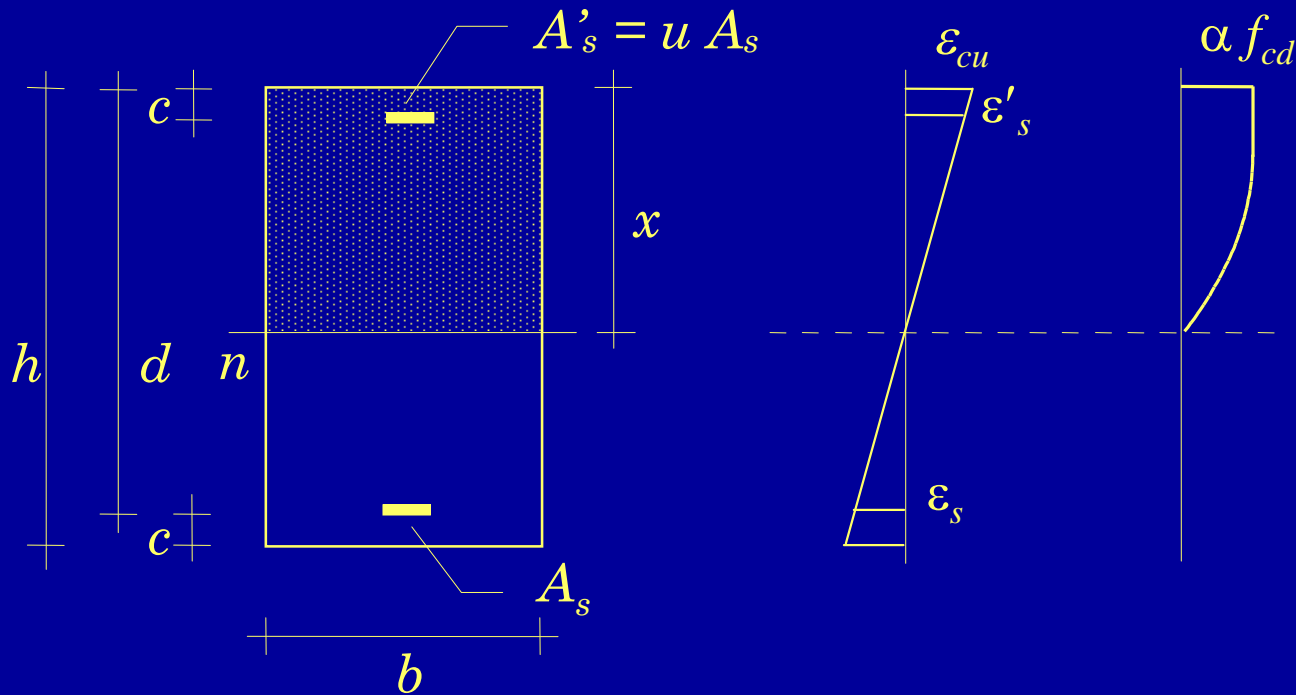
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se  $N$  è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se  $N$  è di compressione)

Imporre la condizione  $I_n = e_n S_n$  se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo  
(equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

# Verifica - stato limite ultimo



Dati:

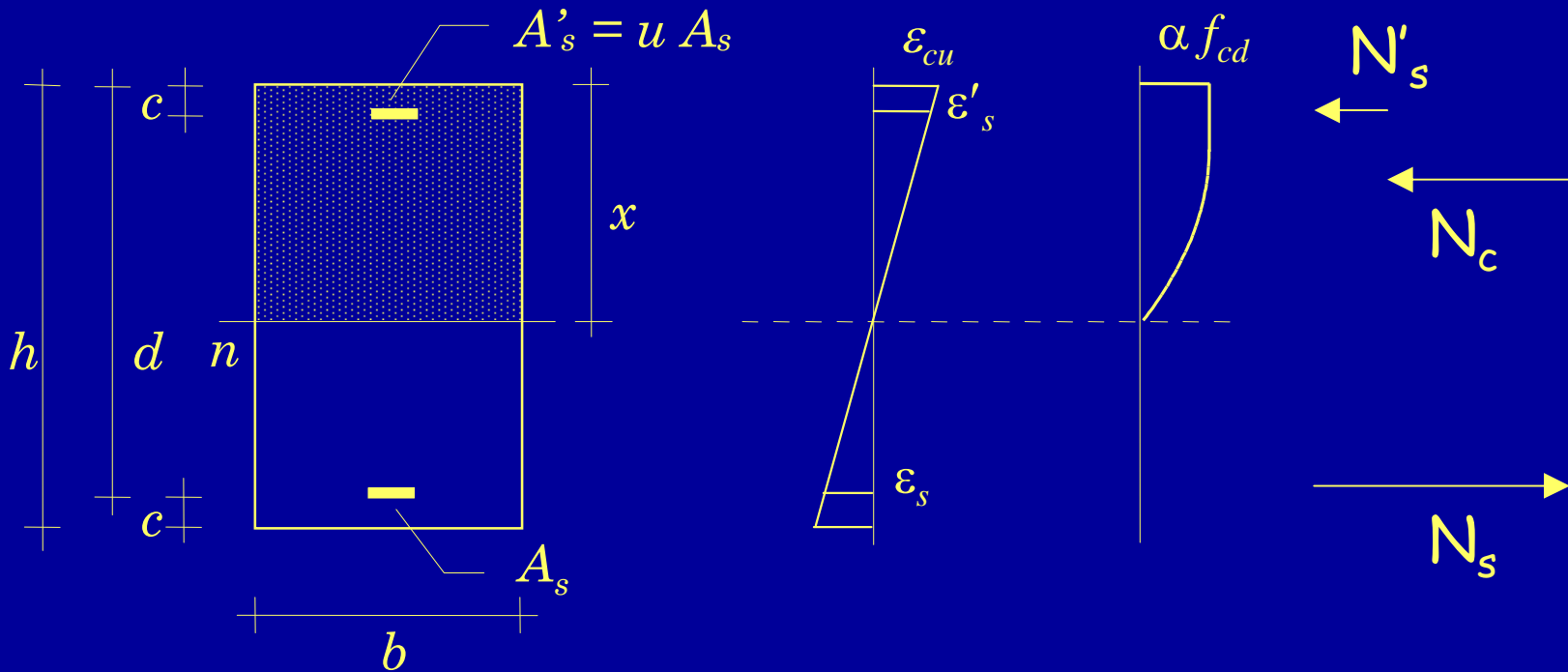
Geometria della sezione  
Armature

Coppia M-N

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente

# Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Sd}$$

(equilibrio alla traslazione)

E poi calcolare  $M_{Rd}$ , con equilibrio alla rotazione

# Verifica - stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{N_{Sd} + (A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}$$

altrimenti si ottiene una equazione di secondo grado

Individuato il diagramma, si calcola facilmente il momento resistente  $M_{Rd}$ , da confrontare con  $M_{Sd}$

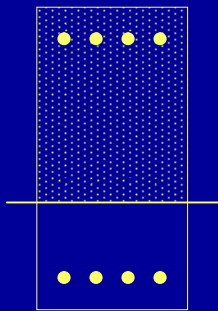
Domini M-N  
per flessione composta retta

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

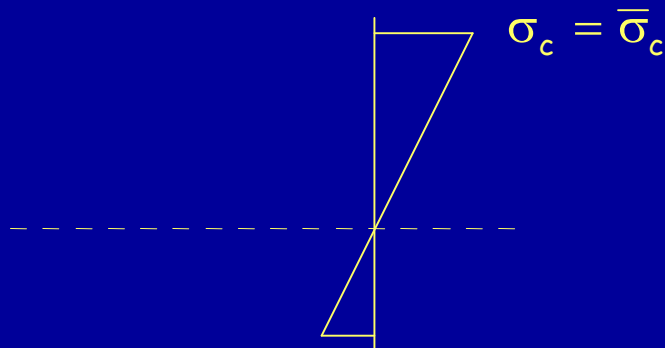
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un diagramma



si calcolano  
M ed N

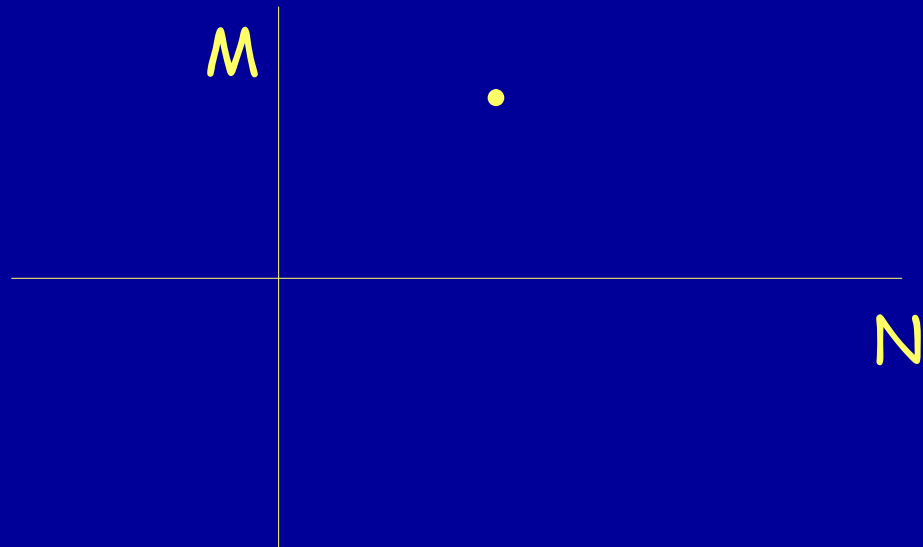
$$N = \int \sigma dA$$

$$M = -\int \sigma y dA$$

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano  
M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

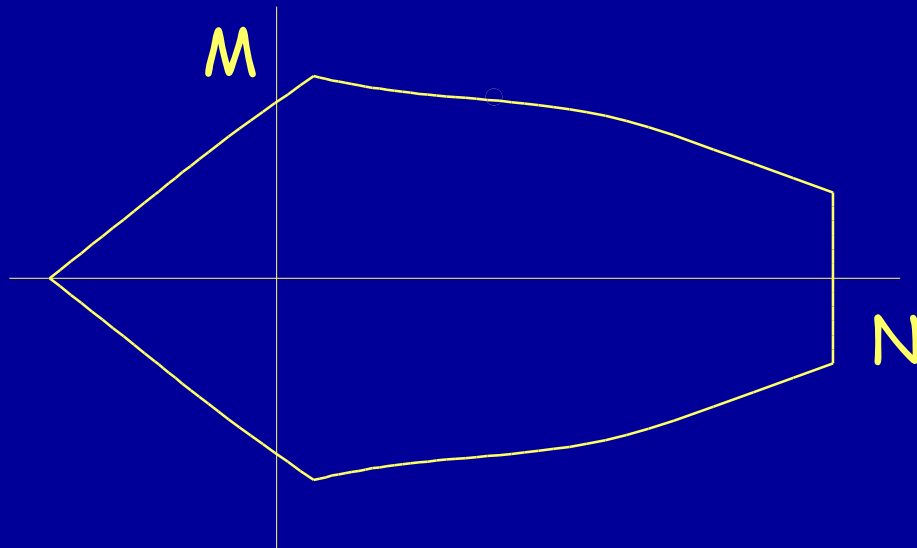
$$M = -\int \sigma y dA$$

e si riporta la coppia  
M - N nel diagramma

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...

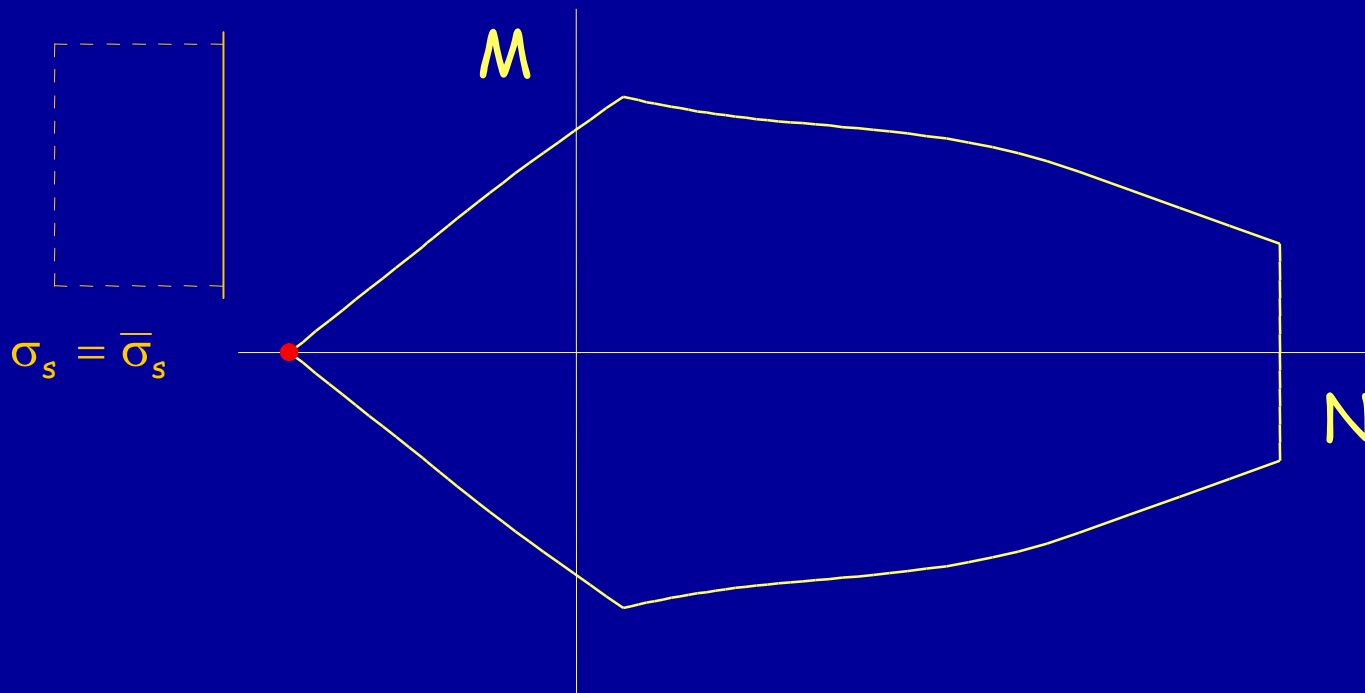


si ottiene il  
dominio  
completo



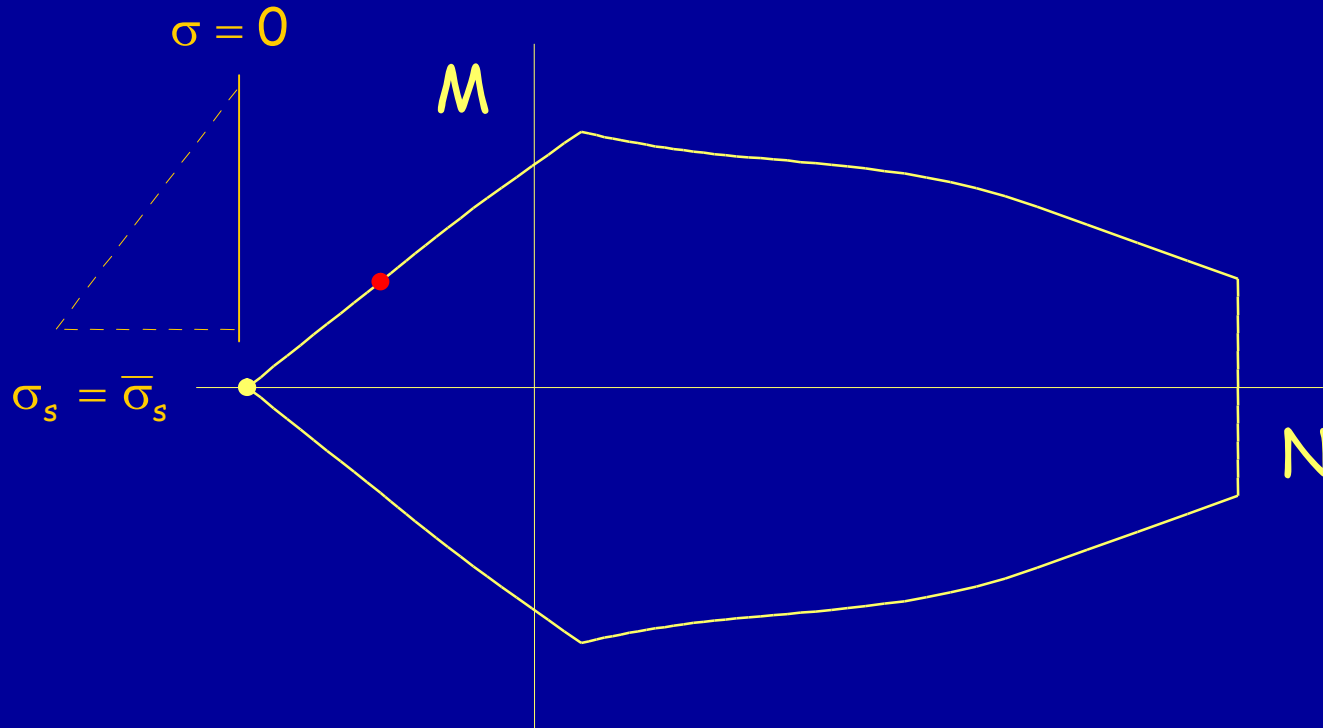
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



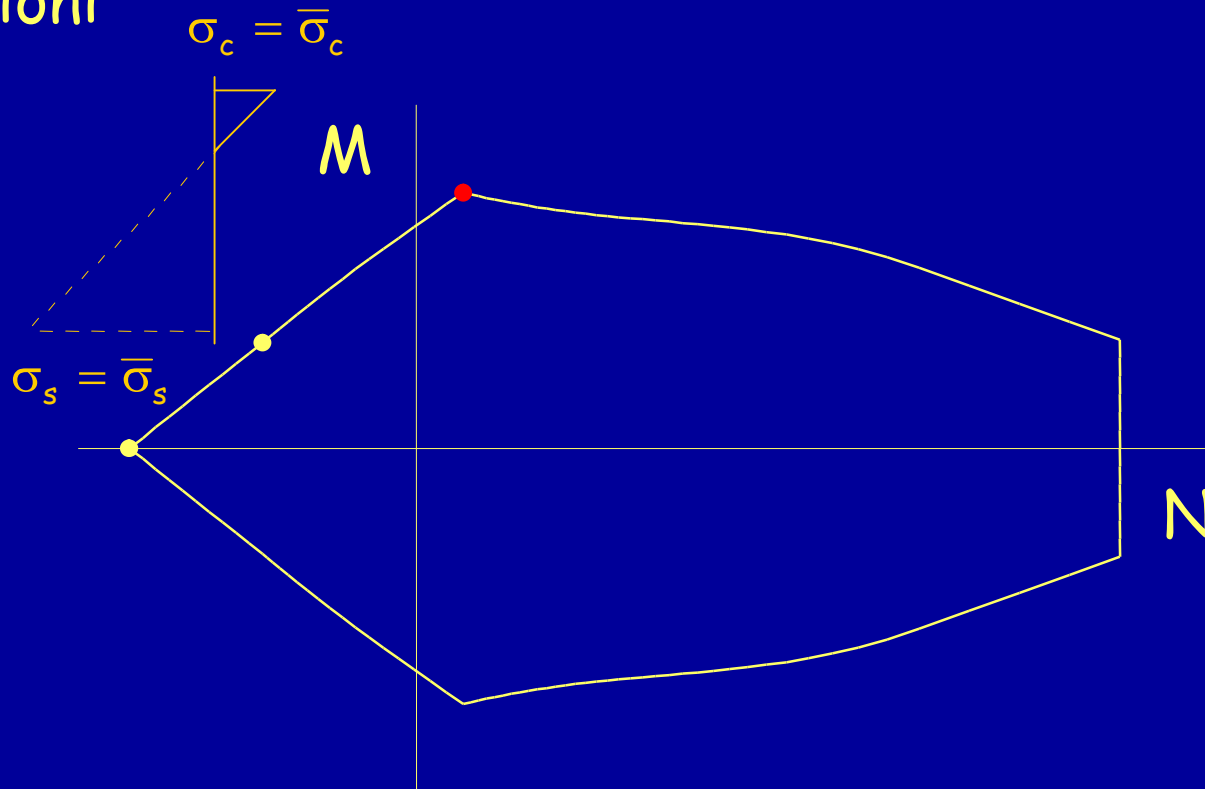
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



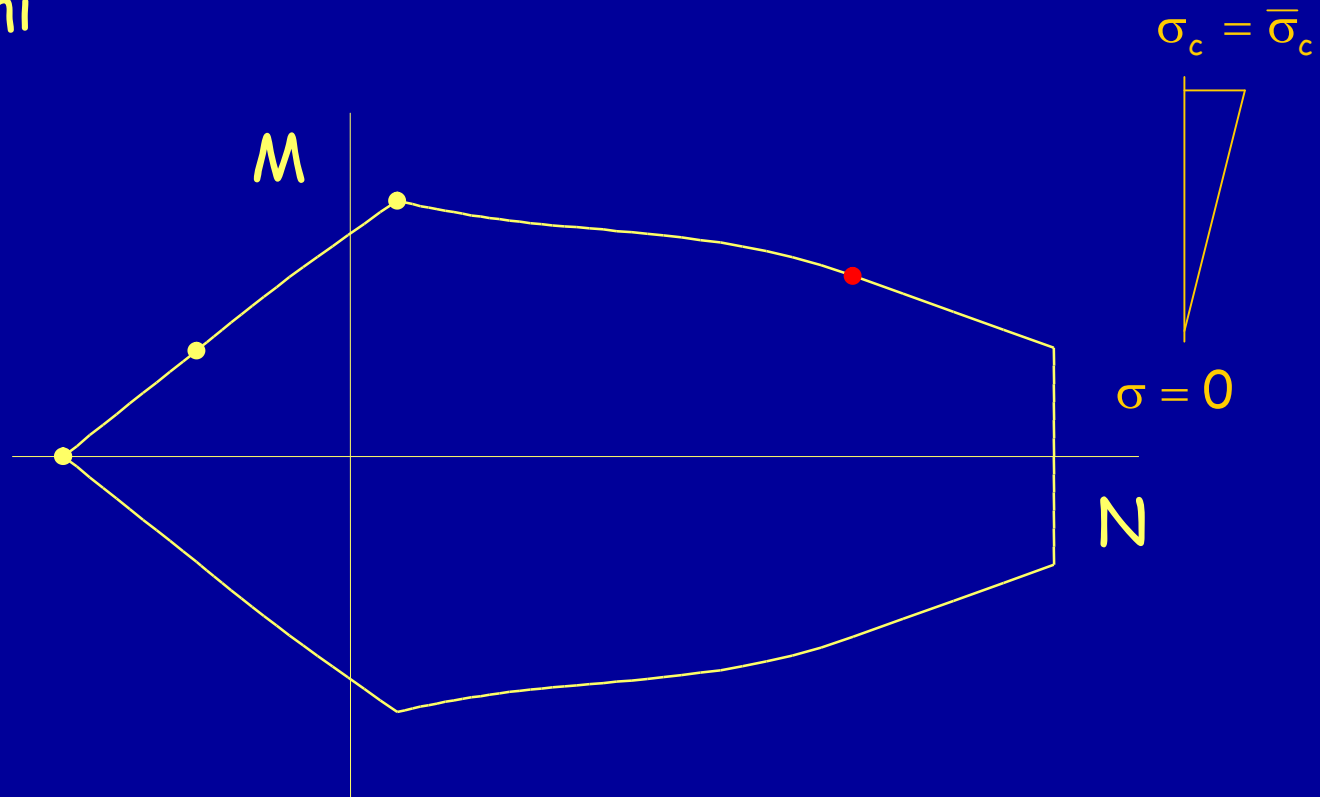
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



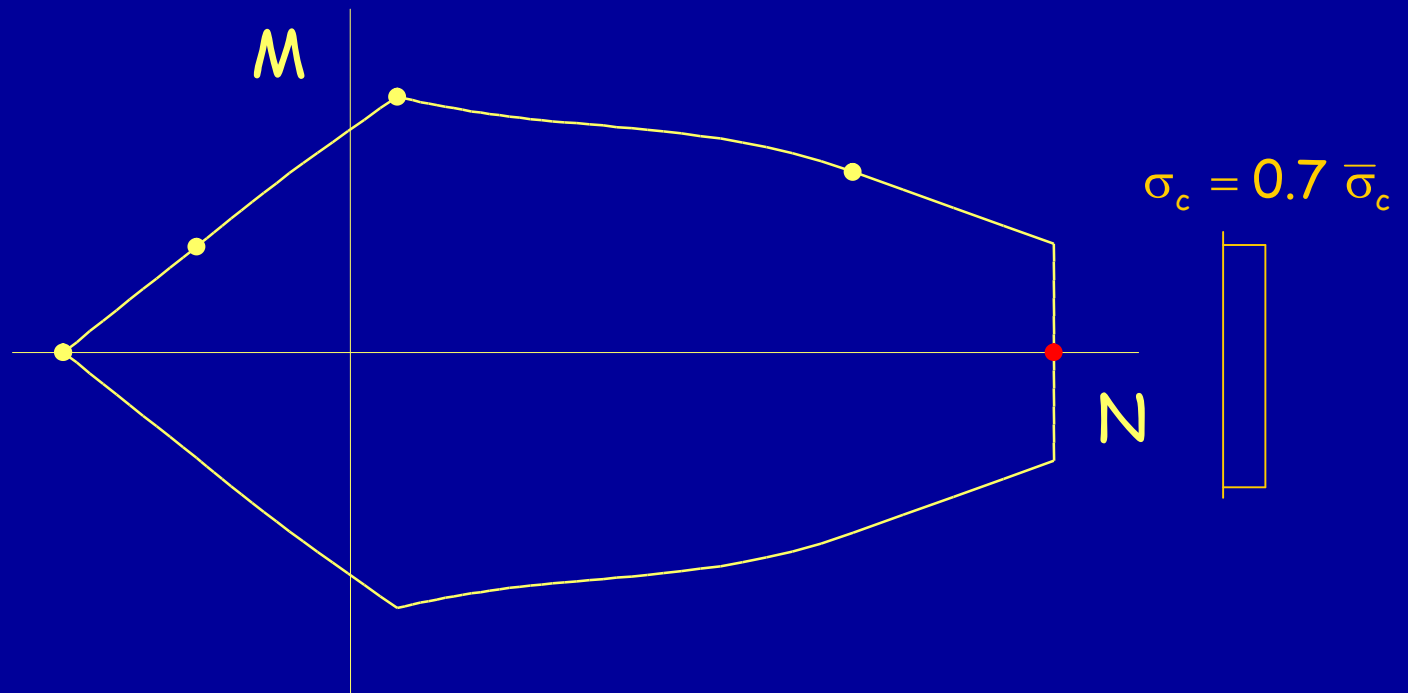
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



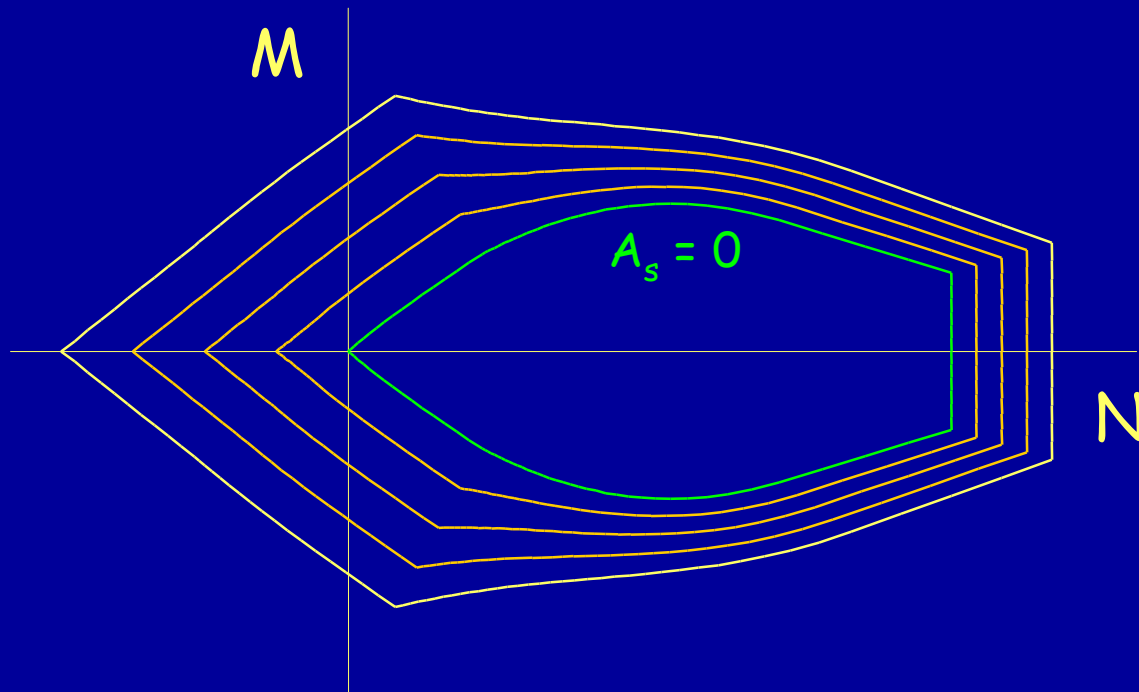
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

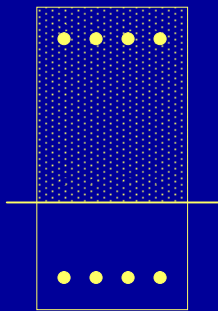


# Domini di resistenza - stato limite ultimo

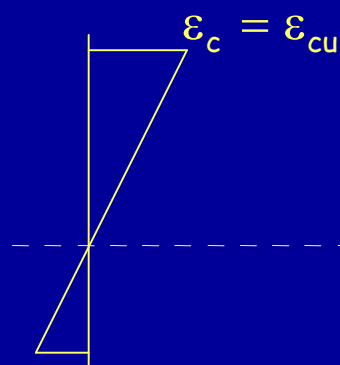
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\varepsilon_{\lim}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

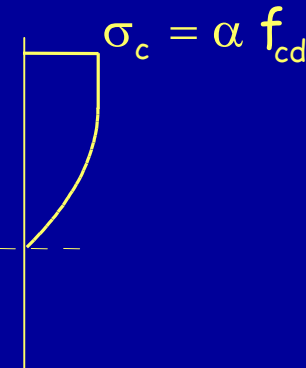
sezione



si assegna un diagramma di  $\varepsilon$



di  $\sigma$



si calcolano M ed N

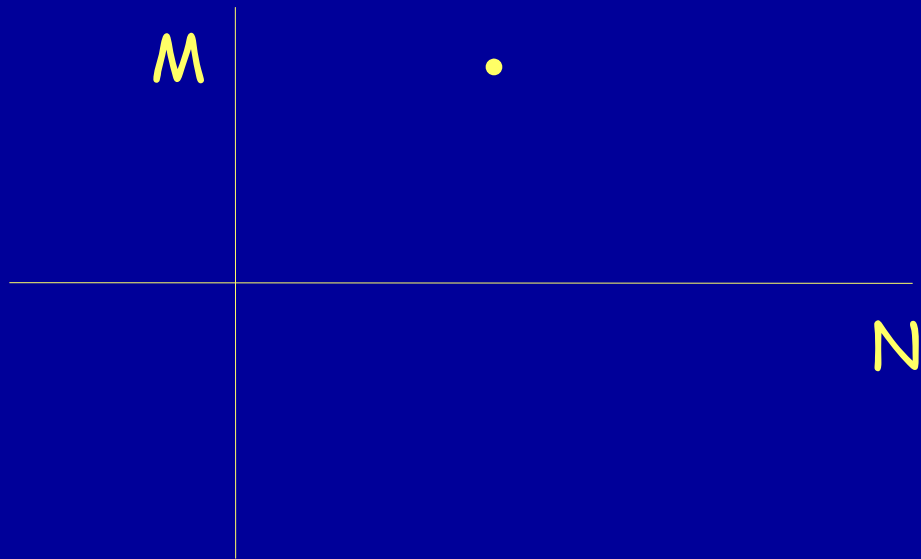
$$N = \int \sigma dA$$

$$M = - \int \sigma y dA$$

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\bar{\varepsilon}_{cu}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano  
M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

$$M = -\int \sigma y dA$$

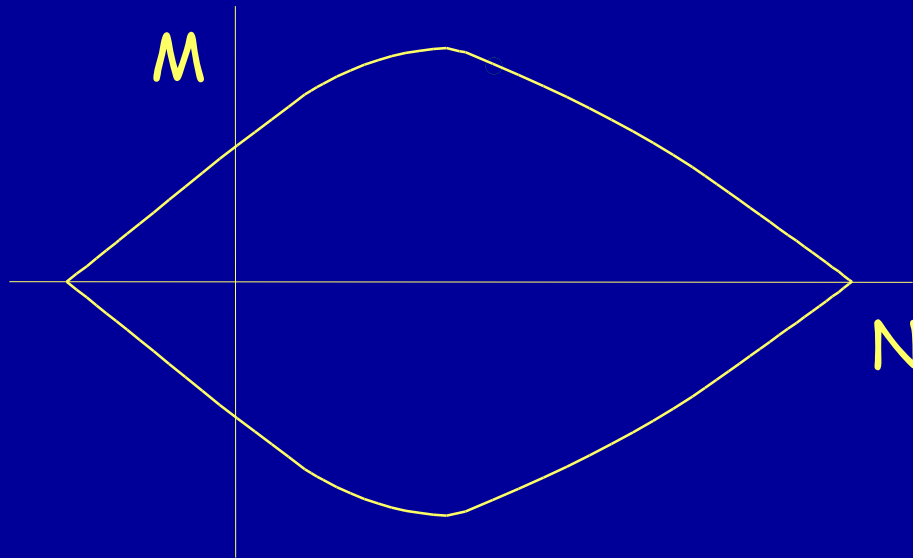
e si riporta la coppia  
M - N nel diagramma



# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\bar{\varepsilon}_{cu}$

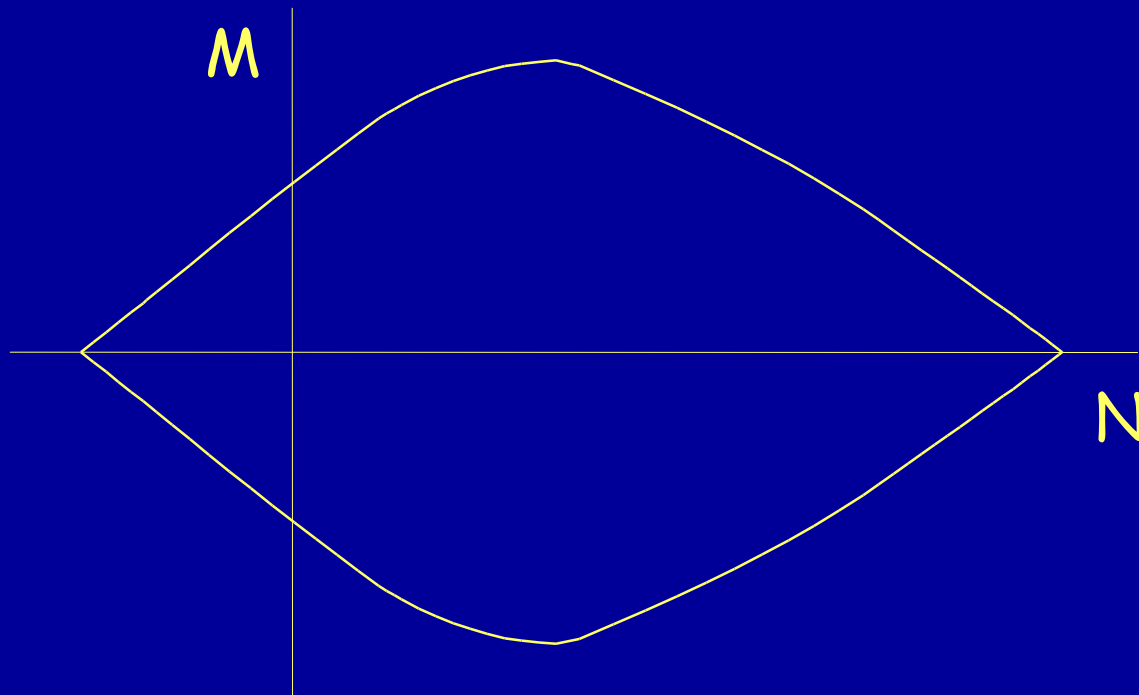
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



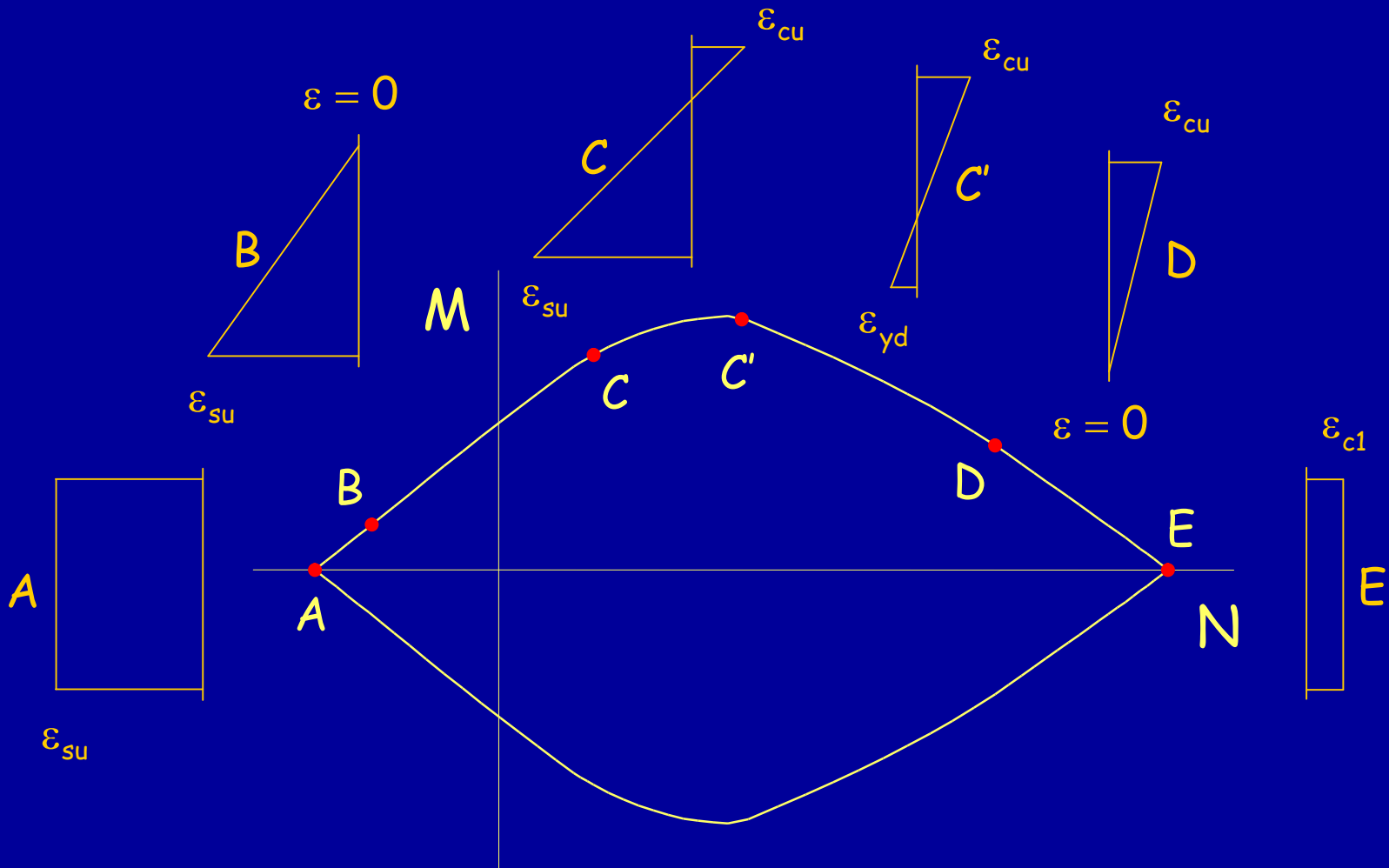
si ottiene il  
dominio  
completo

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni

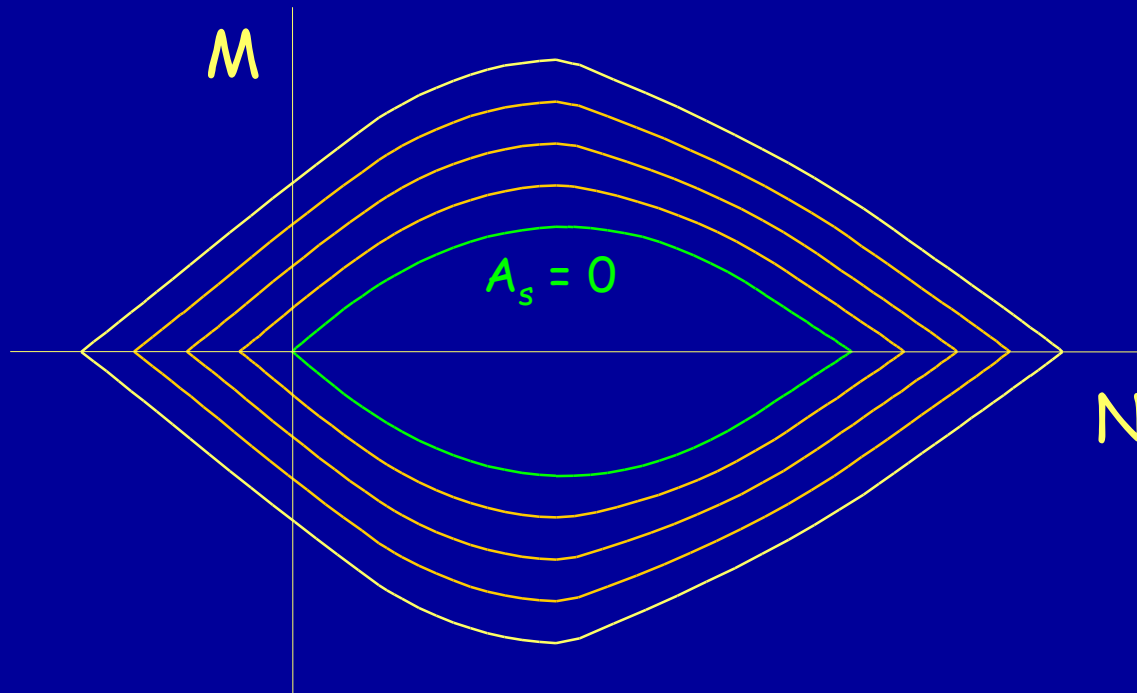


# Domini di resistenza - stato limite ultimo



# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

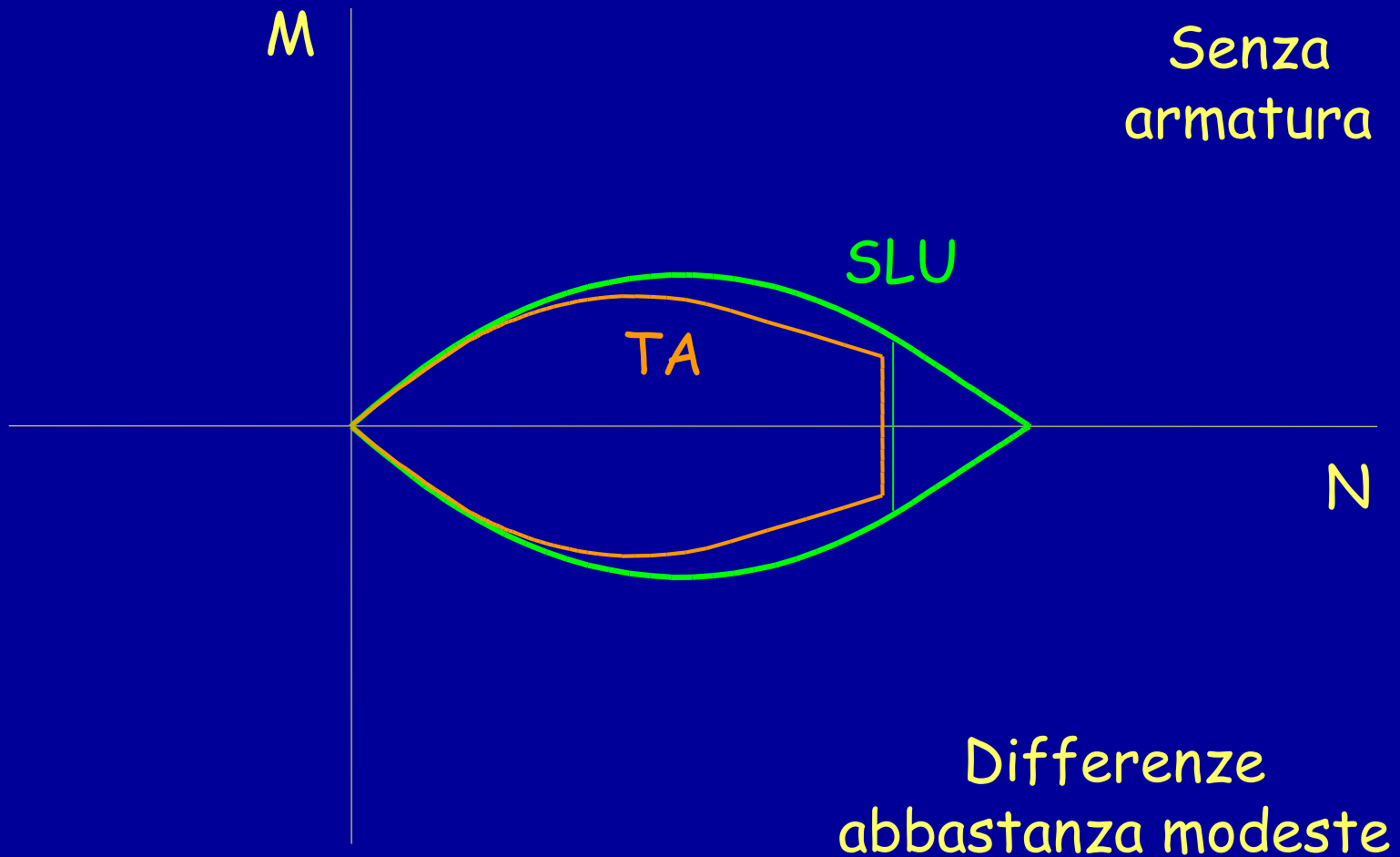


# Domini: confronto tra TA e SLU

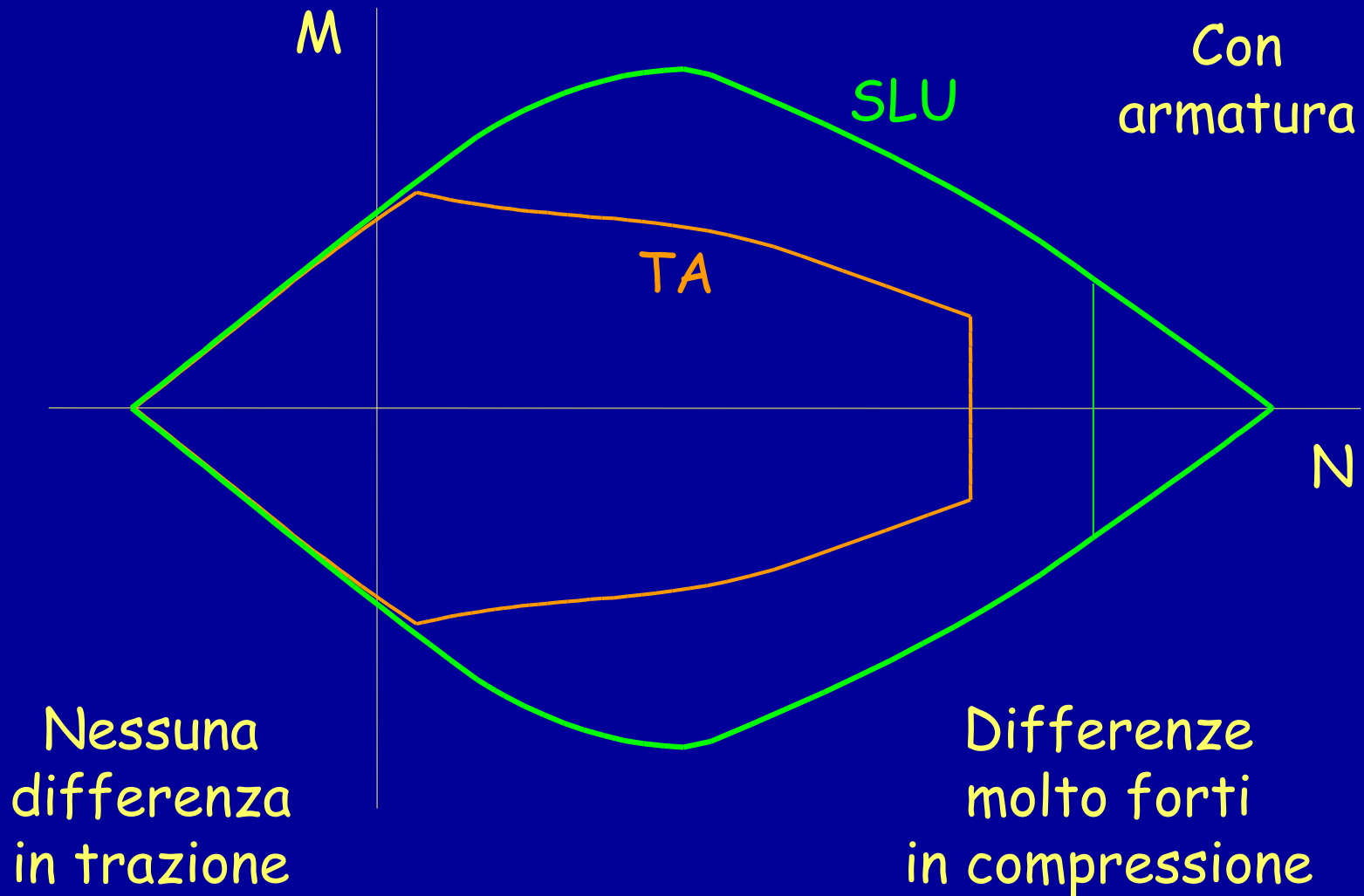
Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (di  $1.4 \div 1.5$ ) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio  $\times 1,45$ )

# Domini: confronto tra TA e SLU



# Domini: confronto tra TA e SLU



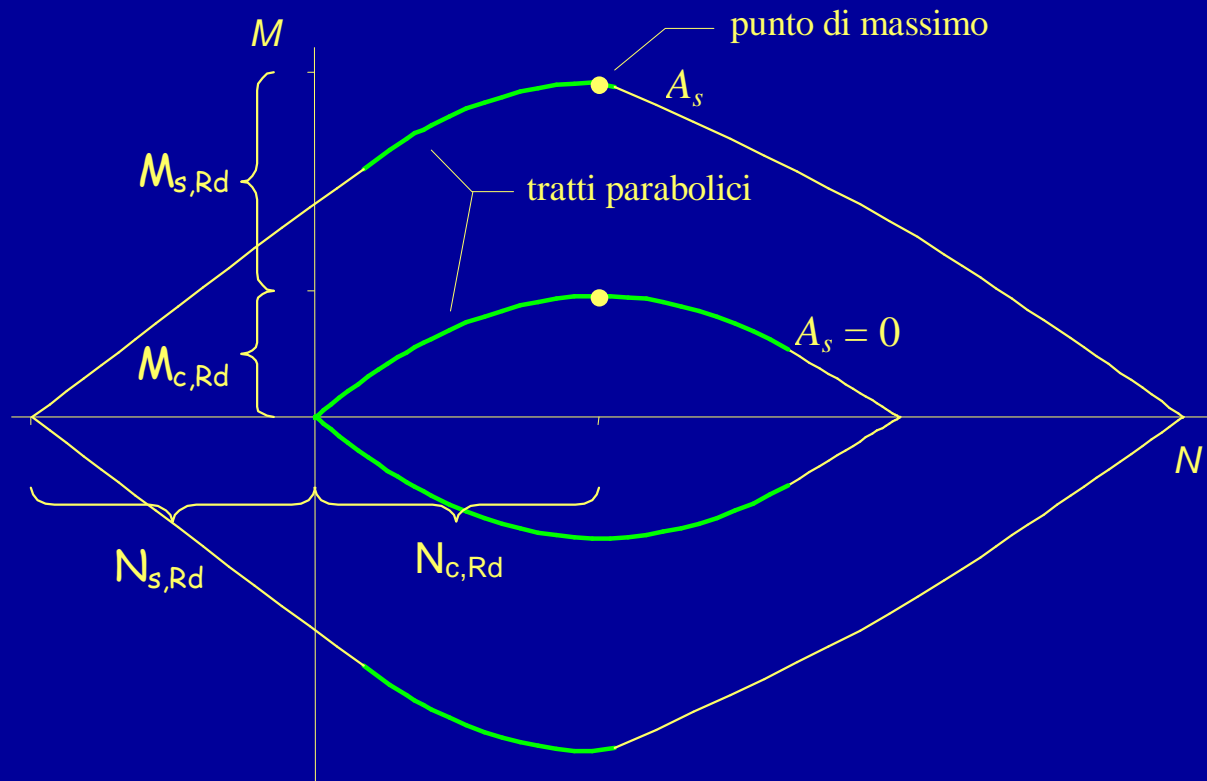
# Progetto e verifica allo SLU con i domini M-N

(sezioni rettangolari,  $A_s = A'_s$ )



# Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



# Dominio M-N allo SLU

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$M = \beta b x \alpha f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left( \frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b \alpha f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0 \quad x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

Il punto di massimo  
è individuato da

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$$

$$N = N_{c,Rd} \quad M = M_{c,Rd} + M_{s,Rd}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd}$$

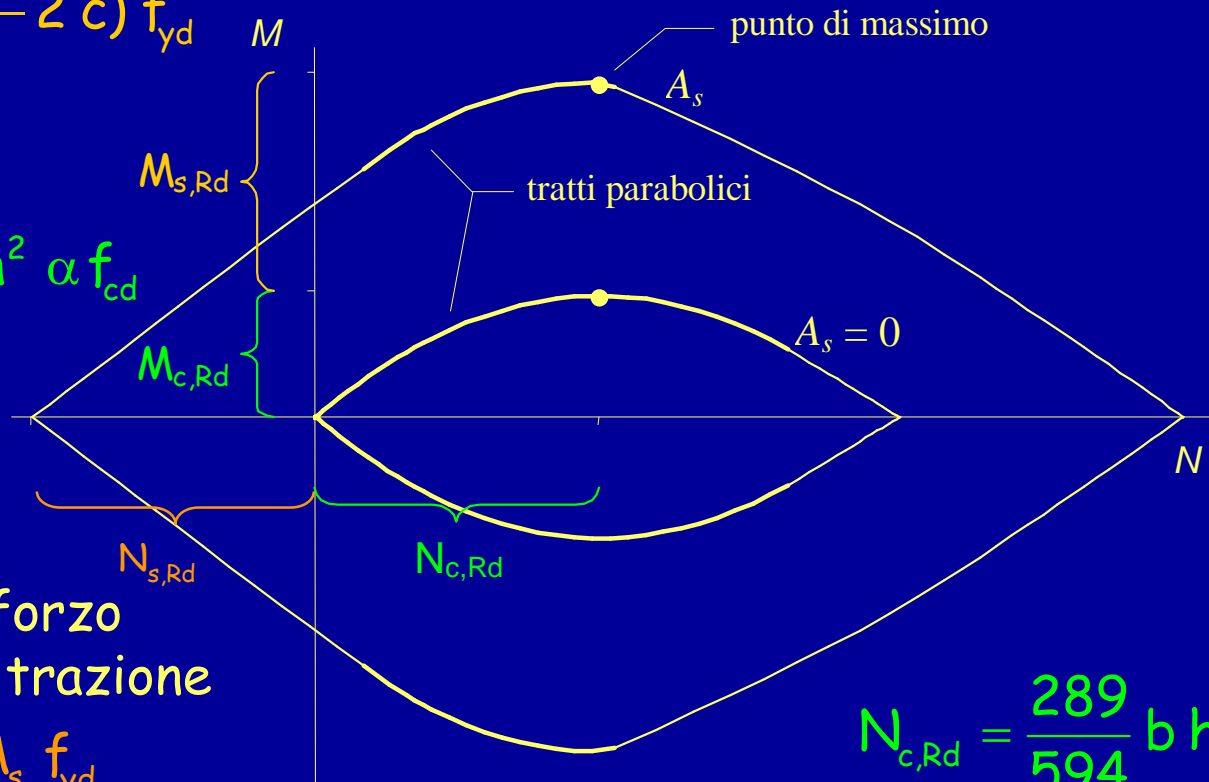
# Dominio M-N allo SLU

$$M_{s,Rd} =$$

$$= A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$M_{c,Rd} =$$

$$= \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$$



Massimo sforzo  
normale di trazione

$$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$$

# Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

# Formulazione analitica

Momento resistente:

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[ 1 - \frac{|N_{Rd} - N_{c,Rd}|^m}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right]$$

con  $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

# Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

con  $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

# Formule alternative

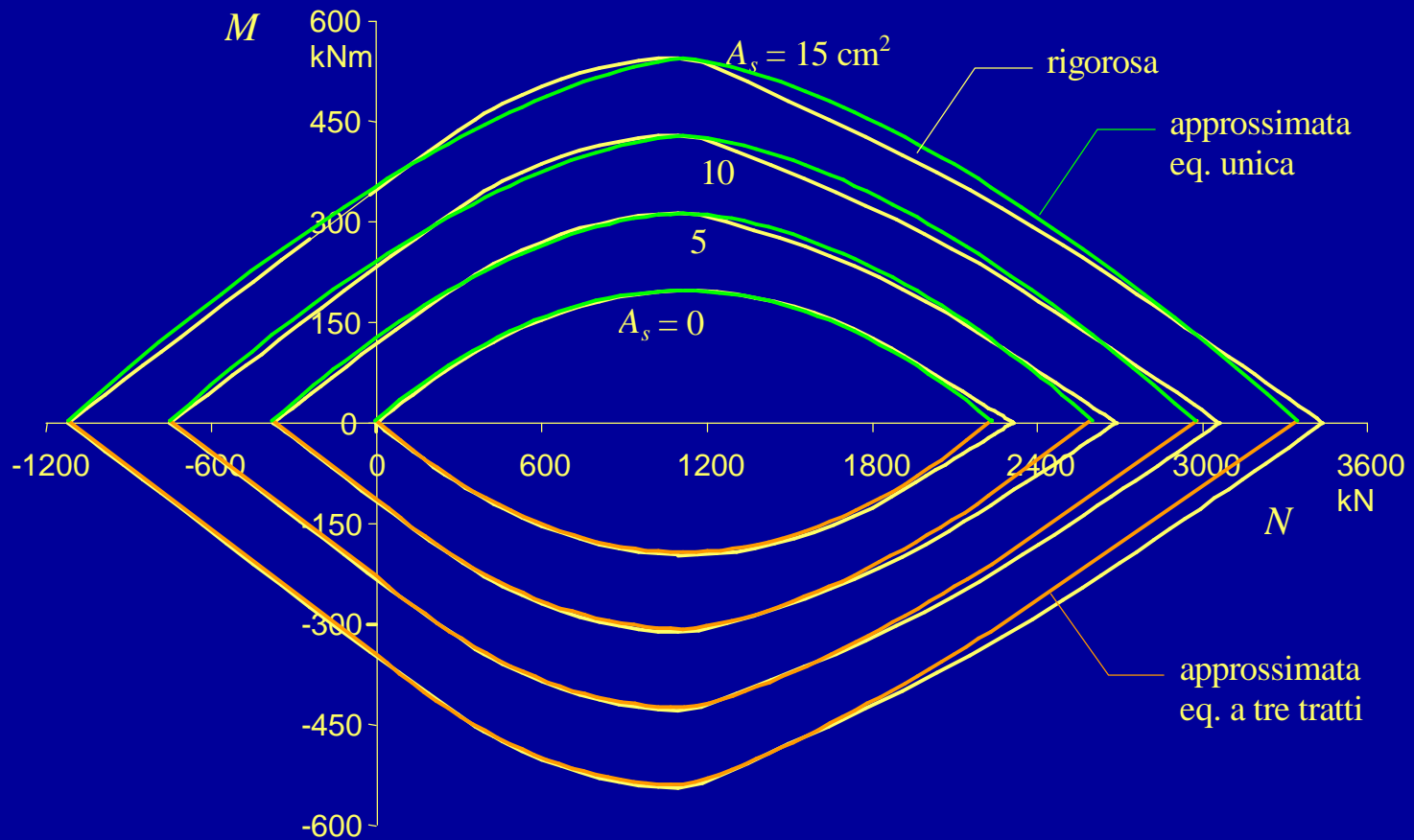
– per  $N_{Sd} < 0$  (tensoflessione)  $\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1$

– per  $0 < N_{Sd} < N_{c,Rd}$   $\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left( \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$

– per  $N_{Sd} > N_{c,Rd}$   $\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left( \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1$

con  $n = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$

# Confronto





# Esempio - verifica a pressoflessione

## Dati geometrici

Sezione 40x70

$$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$$

## Materiale

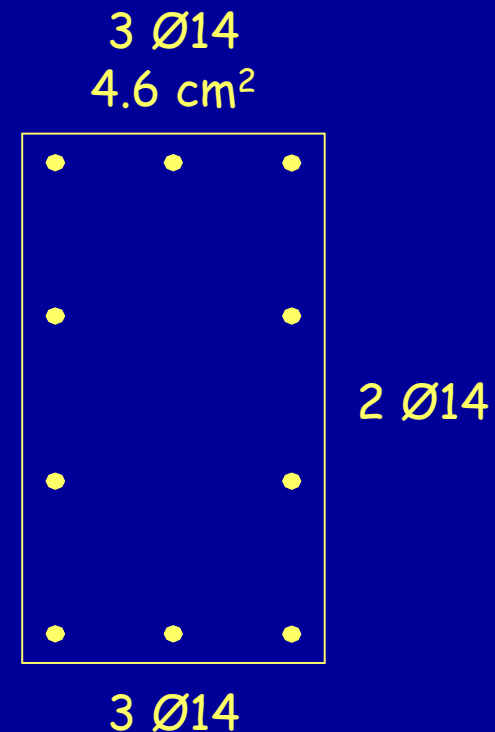
Calcestruzzo  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Acciaio FeB44k

## Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$



# Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} = 0.486 \times 0.40 \times 0.70 \times 11.0 \times 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 1497 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 11.0 \times 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 262.2 \text{ kNm}$$

# Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,Rd} = 345.5 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,Rd} = 107.1 \text{ kNm}$$

# Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} = 1 + \frac{1497}{1497 + 355.5} = 1.808$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[ 1 - \frac{|N_{Rd} - N_{c,Rd}|}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right]^m = \\ &= (262.2 + 107.1) \left[ 1 - \frac{|1300 - 1497|}{1497 + 355.5} \right]^{1.808} = \\ &= 362.9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$M_{Sd} < M_{Rd}$$

Sezione  
verificata

# Esempio - verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.808$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{350}{262.2 + 107.1} + \left| \frac{1300 - 1497}{1497 + 355.5} \right|^{1.808} =$$

$$= 0.948 + 0.017 = 0.965 \leq 1$$

Sezione  
verificata

# Progetto della sezione

Le espressioni possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Il coefficiente  $r$  è in questo caso dipendente da:

- sforzo normale adimensionalizzato  $v = N_{Sd} / 2 N_{c,Rd}$
- percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre  $\rho = A_s / b h$
- caratteristiche dei materiali

# Valori di r

v	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.1	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.2	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.3	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.4	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
0.5	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
0.6	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
0.7	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
0.8	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
0.9	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
1.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

# Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$$

$z$  è il braccio della coppia interna  
costituita dalle armature

$$z = h - 2c \cong 0.9d$$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per  $0 \leq N_{Sd} \leq N_{c,Rd}$



# Esempio - progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

$$M_{Sd,red} = 350 - 262.2 \left[ 1 - \left( \frac{1300 - 1497}{1497} \right)^2 \right] = 92.3 \text{ kNm}$$

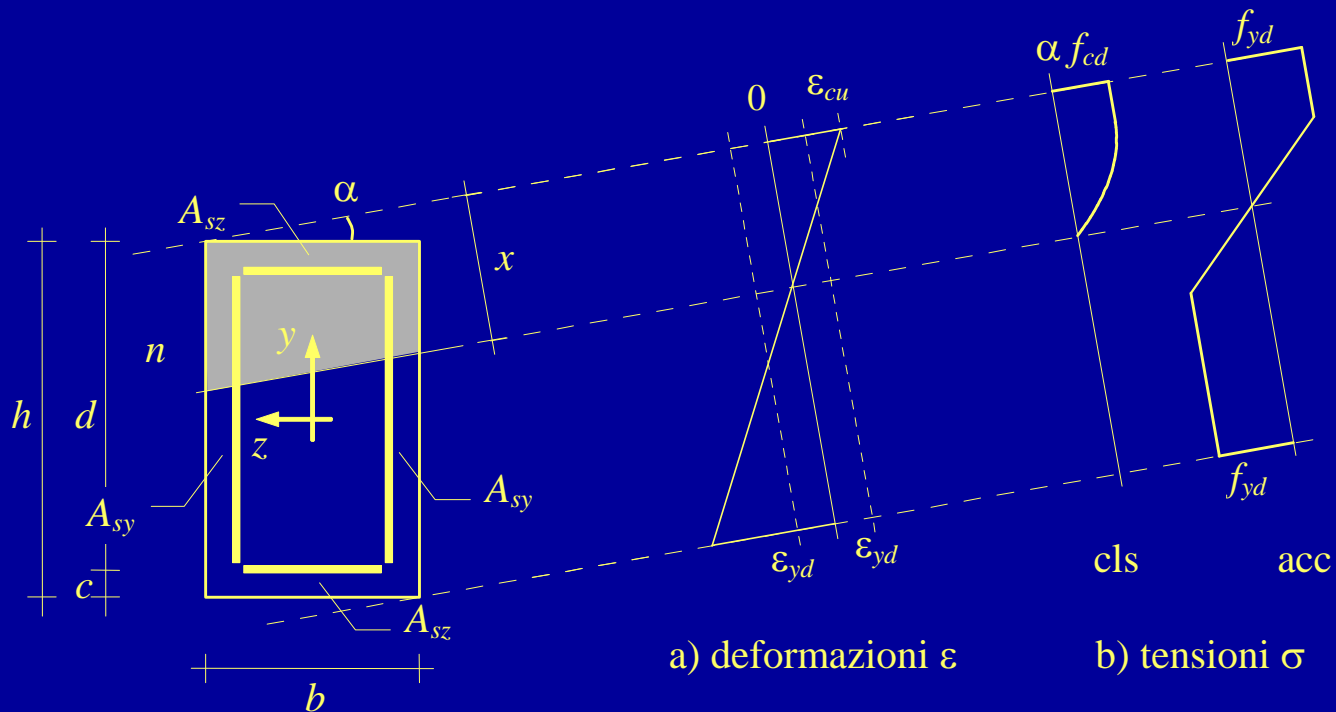
Armatura necessaria:

$$A_s = \frac{92.3}{0.9 \times 0.66 \times 373.9} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

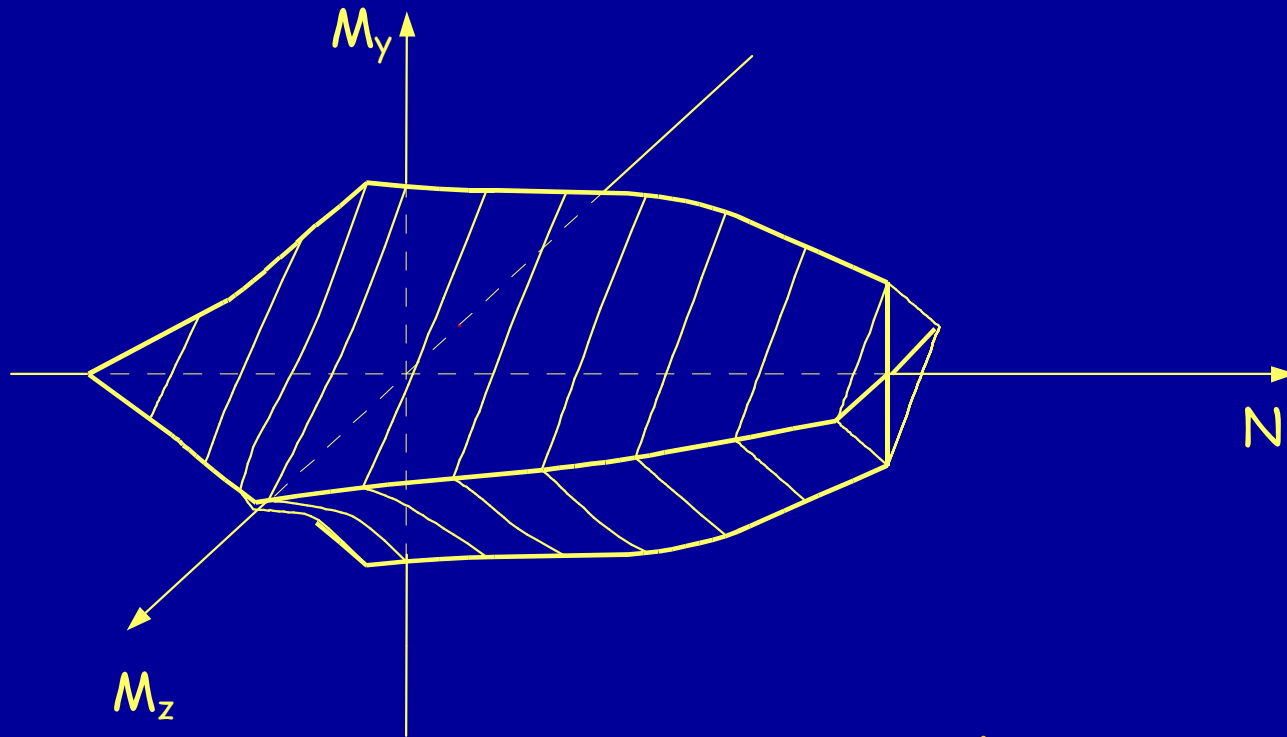
Domini M-N  
per flessione composta deviata

# Pressoflessione deviata

- Procedimento per la costruzione del dominio  $M_y-M_z-N$
- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
  - più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro

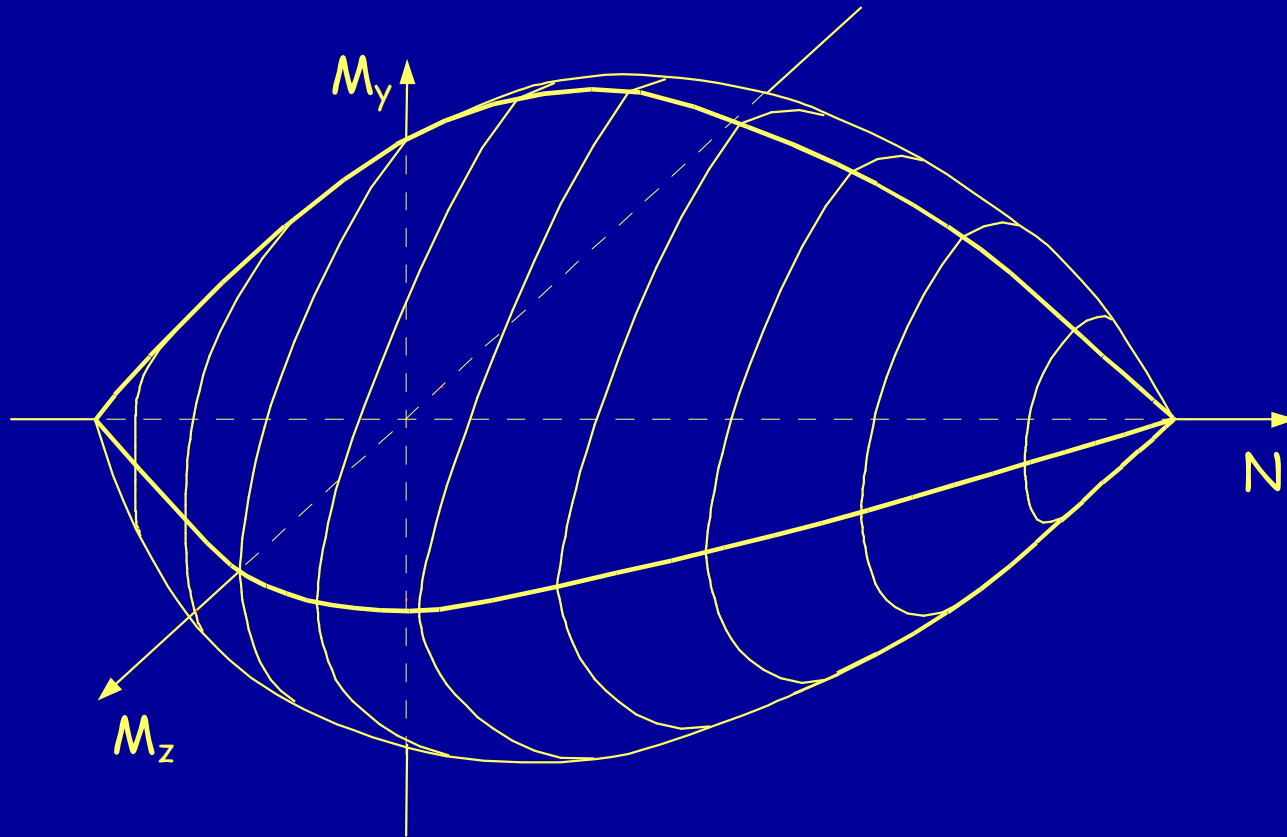


# Dominio alle TA

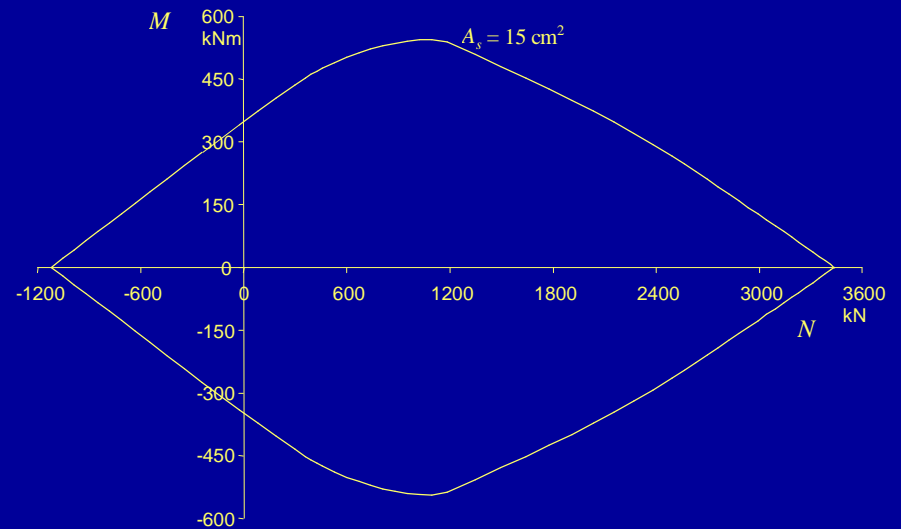
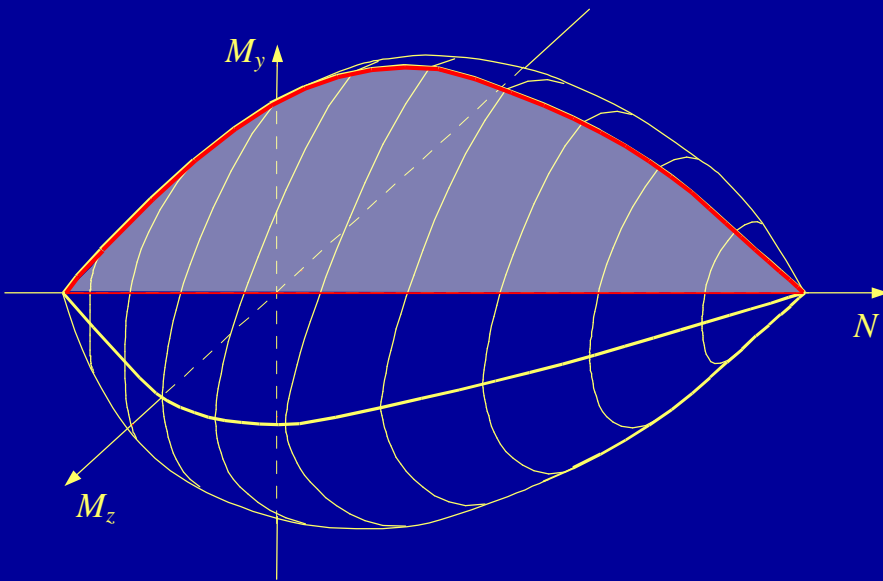


Notare la sezione trasversale:  
la presenza contemporanea di  
 $M_y$  e  $M_z$  è molto penalizzante

# Dominio allo SLU



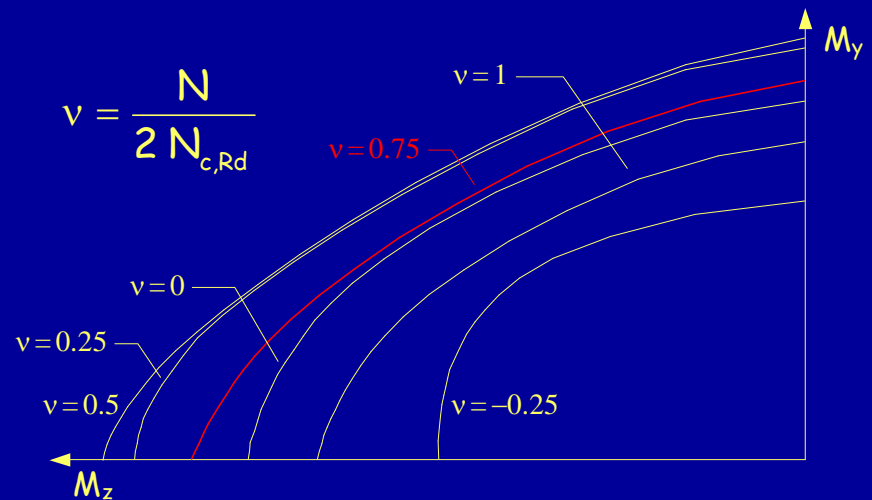
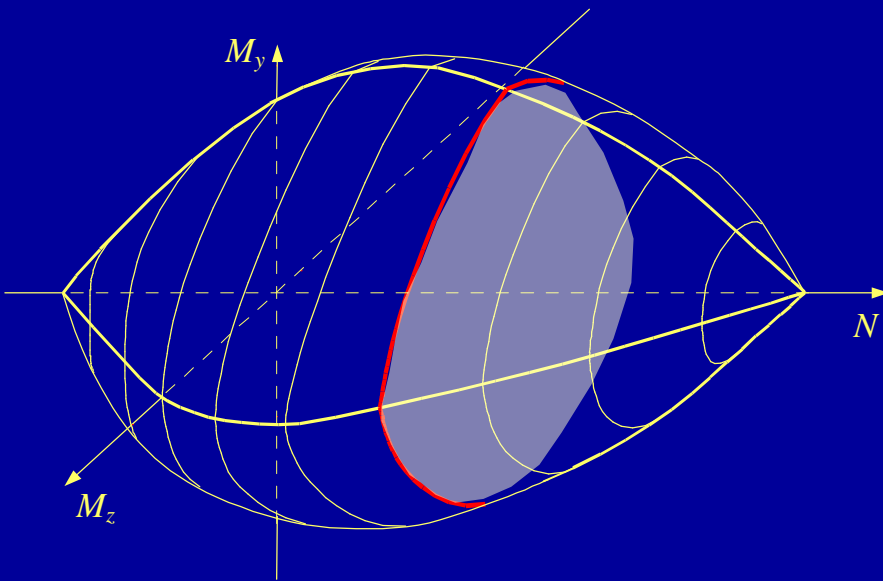
# Dominio allo SLU



# Dominio allo SLU

$$\left( \frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left( \frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

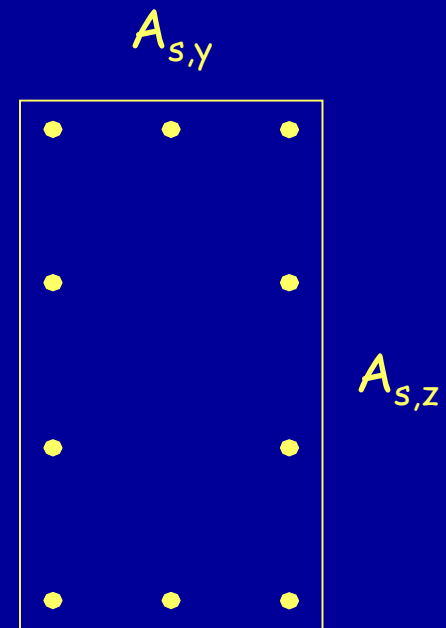
Consiglio:  
usare  $p = q = 1.5$



# Considerazioni

Nel calcolare il momento resistente  $M_{Rd,y}$  si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

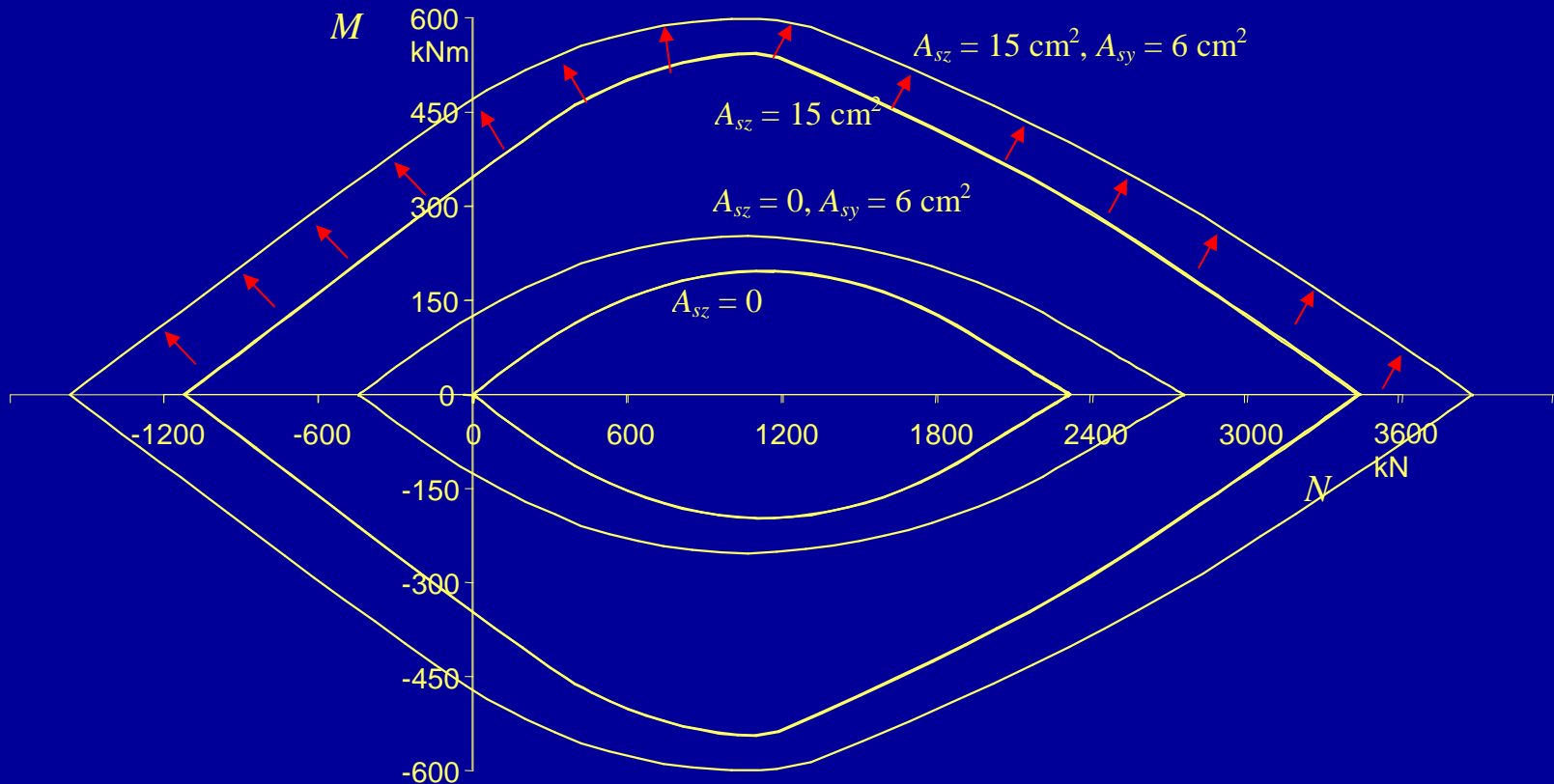
e viceversa





# Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



# Considerazioni

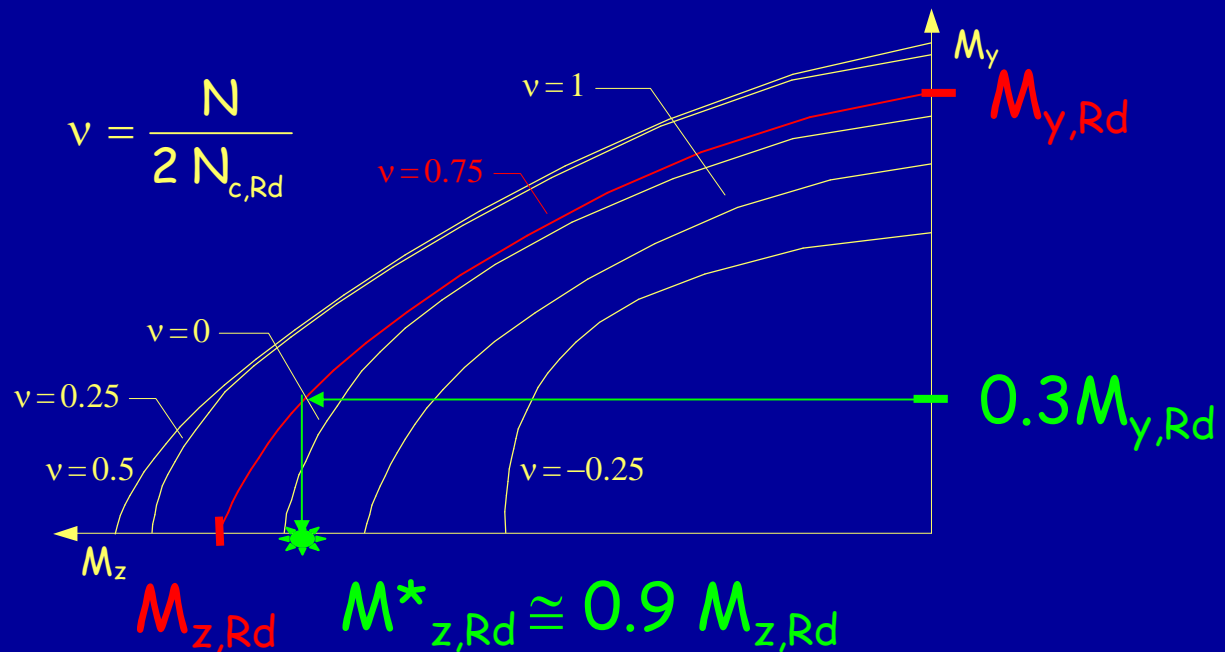
Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$

con  $m = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$

# Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



# Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni,

e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata

# FINE

Per questa presentazione:

coordinamento

*A. Ghersi*

realizzazione

*A. Ghersi,  
M. Muratore,  
E. Marino*

ultimo aggiornamento

*15/02/2007*