Corso di aggiornamento

Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

5 – Taglio e torsione

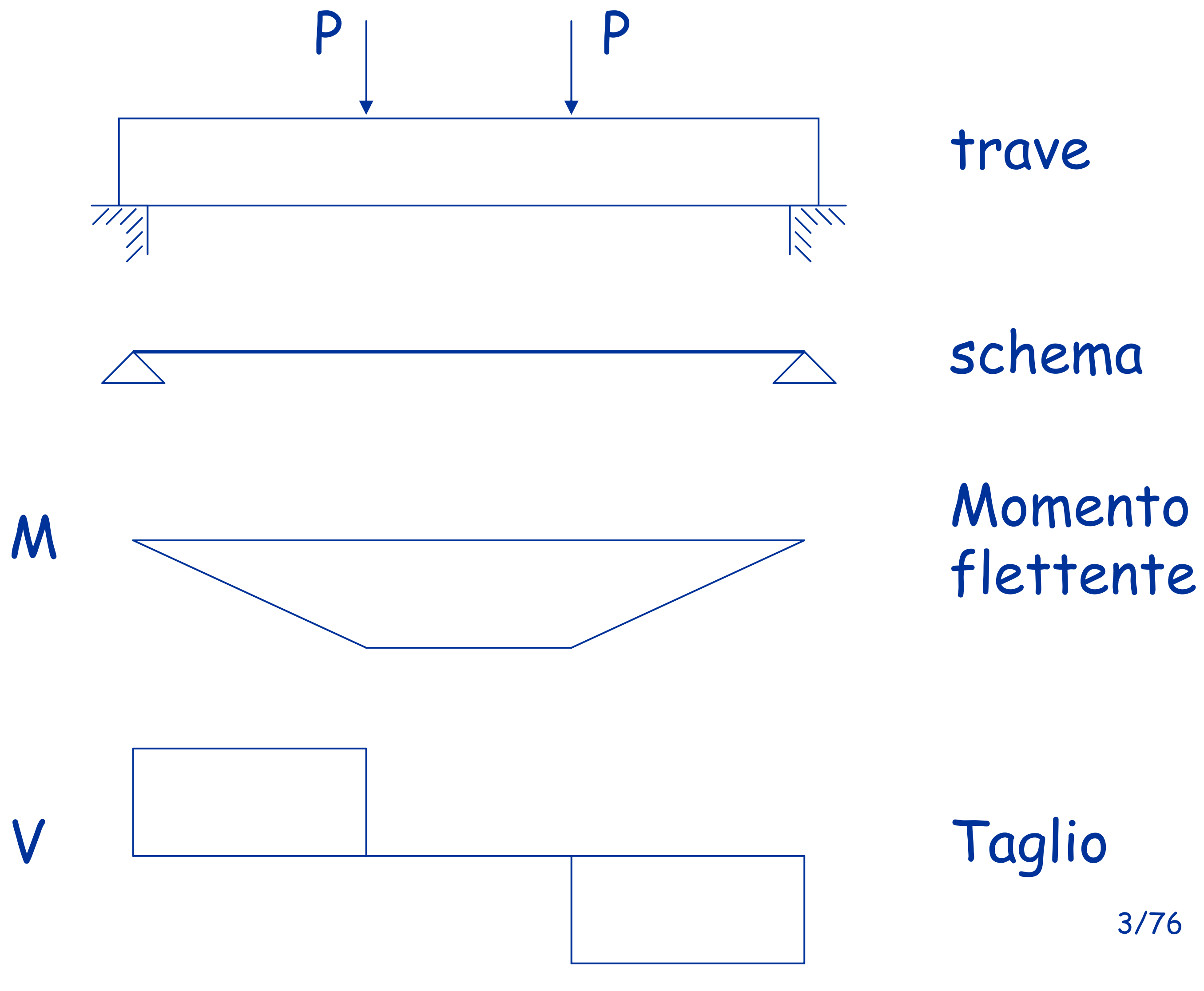
Bologna

3-4 maggio 2012

Edoardo M. Marino

Taglio

Comportamento di una trave
soggetta a flessione e taglio



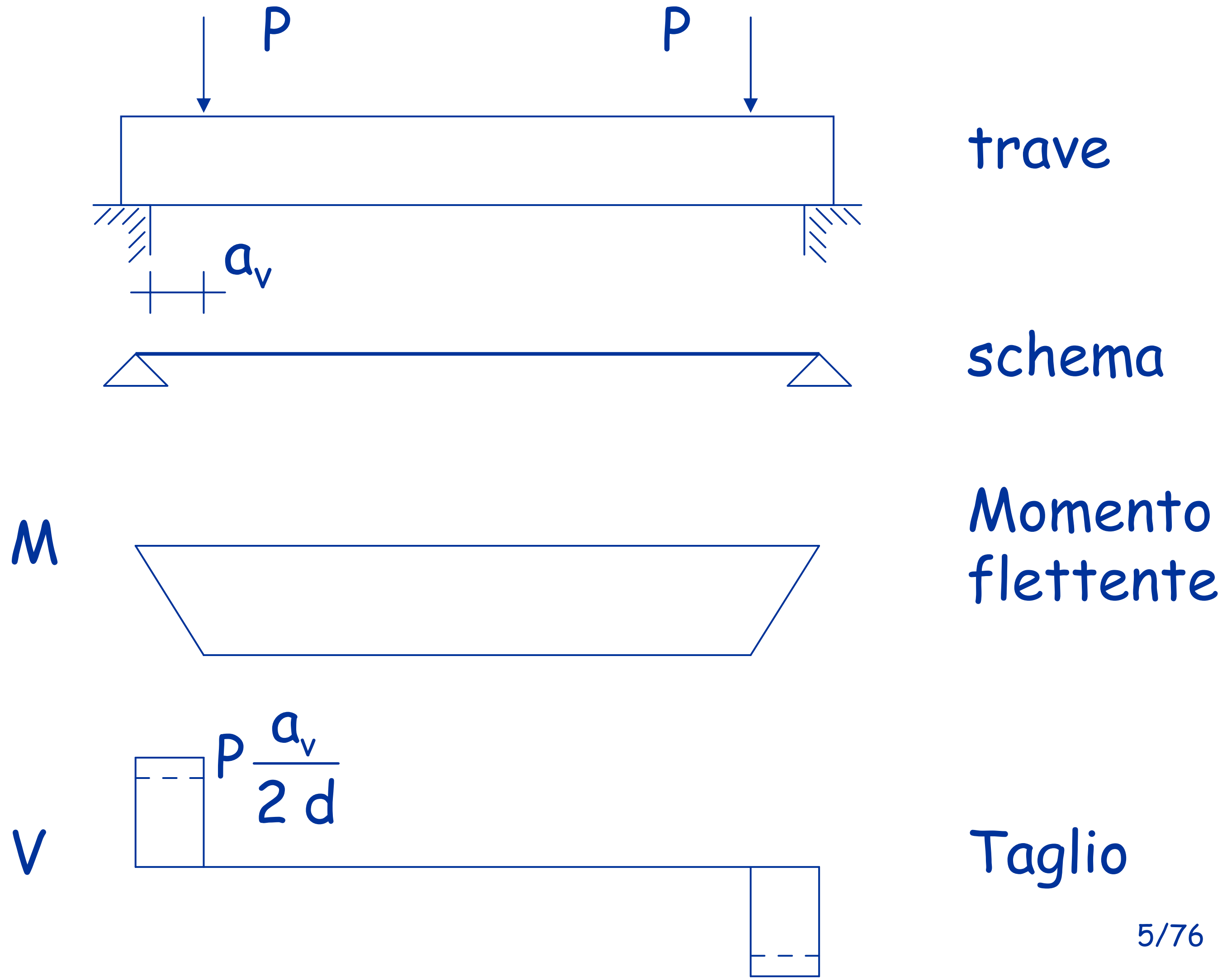
Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2\,d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2\,d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



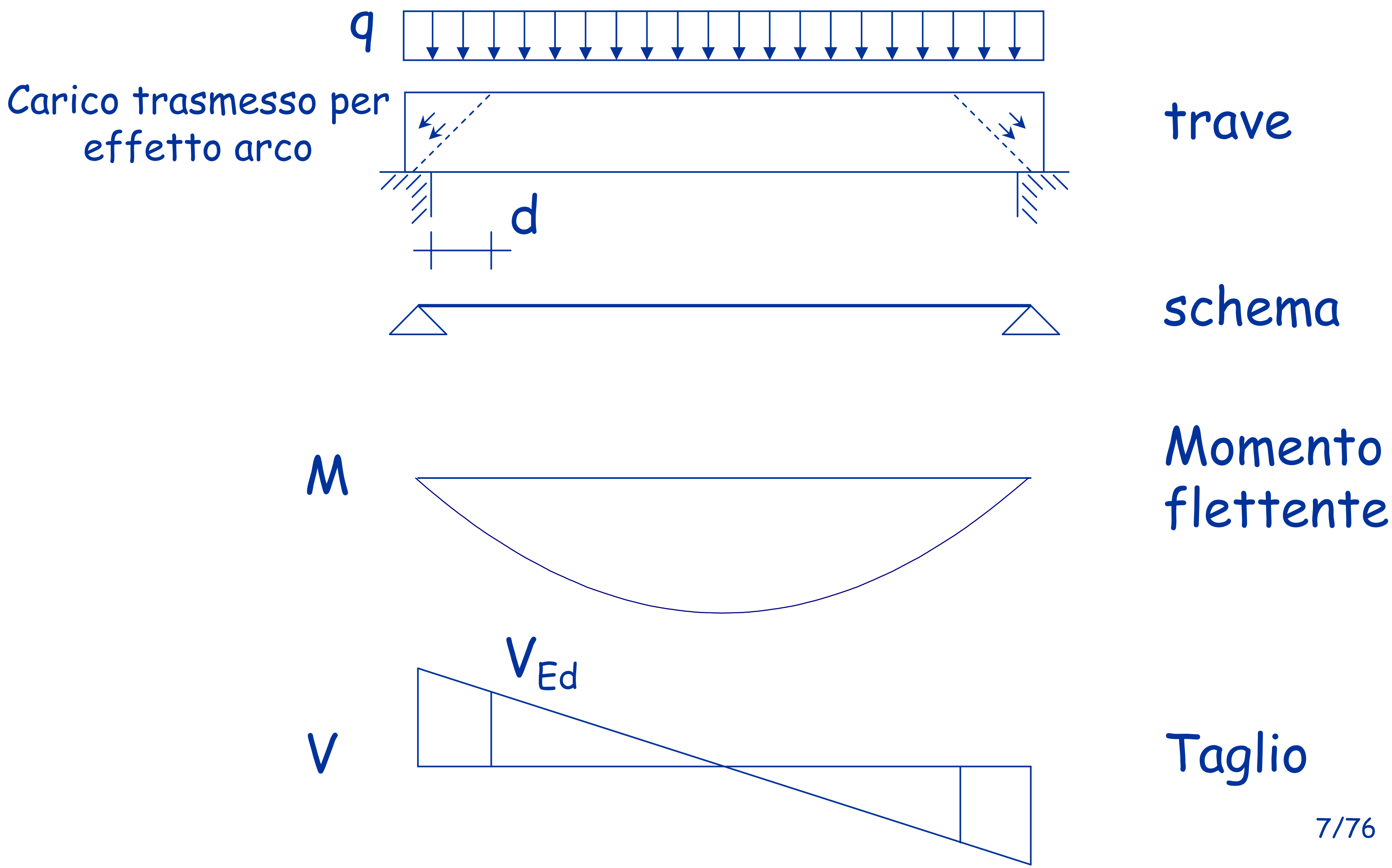
Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

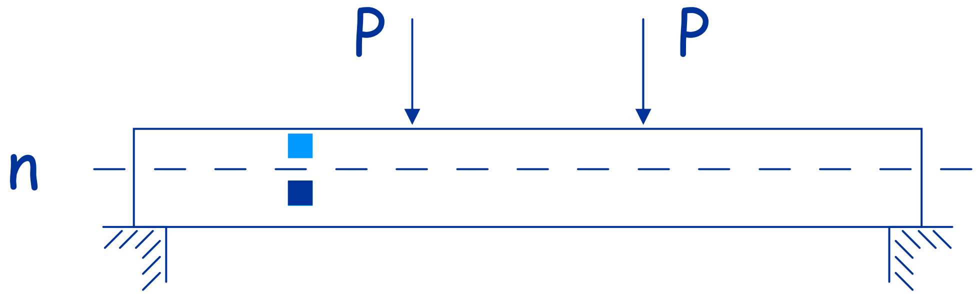
Indicazioni di normativa:

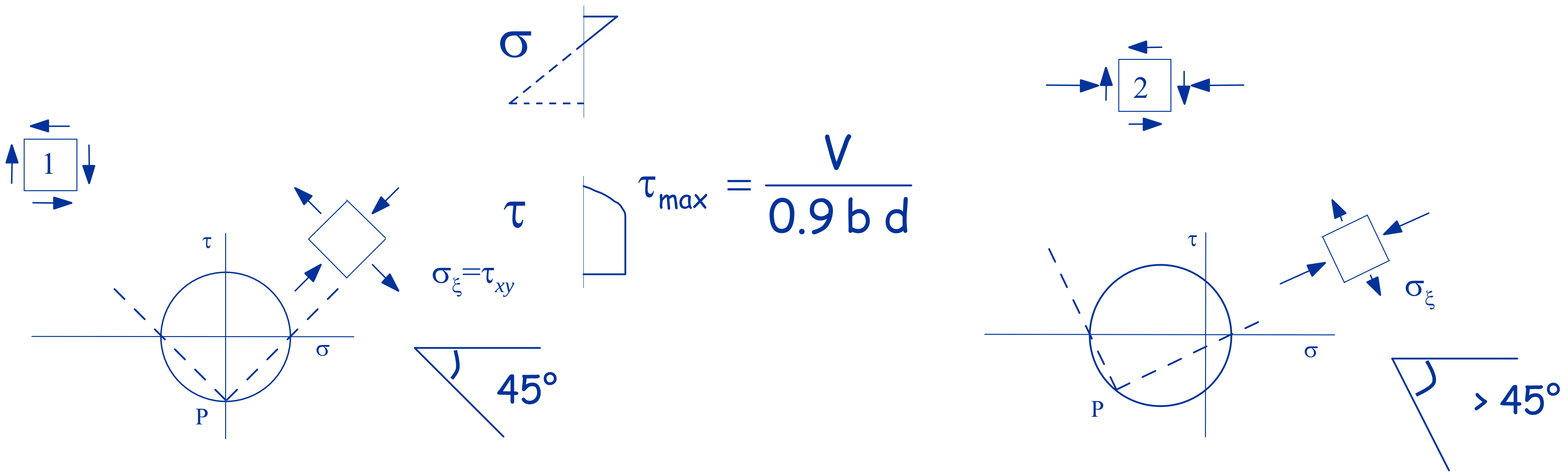
- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2\,d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2\,d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]
- In presenza di carichi distribuiti il taglio non deve essere verificato ad una distanza minore di d dalla faccia dell'appoggio [EC2, punto 6.2.1 (8)]

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



Comportamento di una trave
2 - calcestruzzo non resistente a trazione





$$\tau_{max} = \frac{V}{0.9\, b\, d}$$

Taglio:
resistenza di una trave
in assenza di armatura a taglio

Verifica – tensioni ammissibili

Non è necessaria armatura a taglio se $\tau < \tau_{c0}$

Vuol dire che:

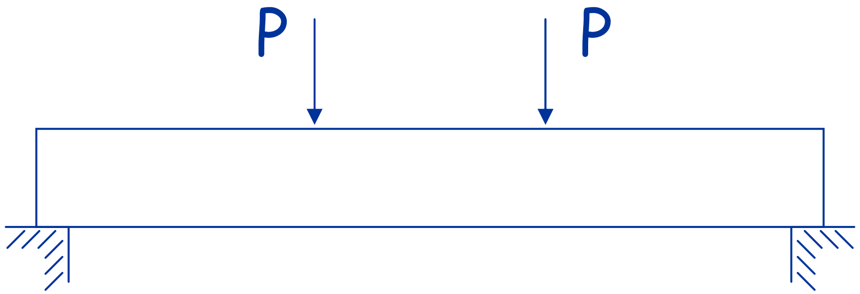
- Non si accetta trazione dovuta alla flessione
- Si accettano modeste trazioni dovute al taglio

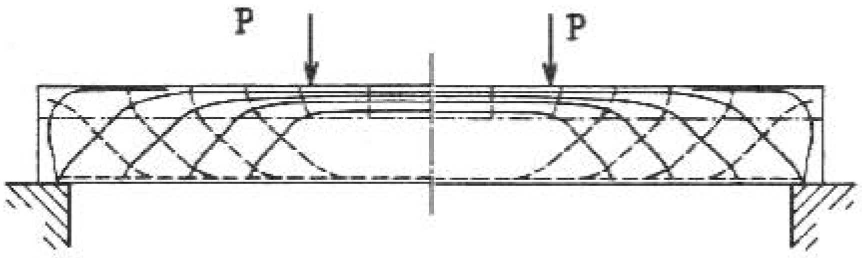
Il taglio al di sotto del quale non è necessaria armatura a taglio è

$$V_{c0} = 0.9\ \tau_{c0}\ b\ d$$

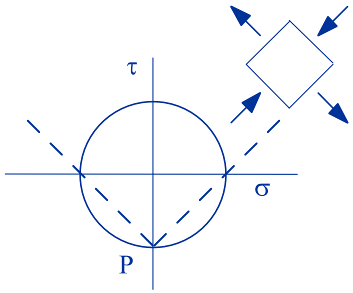
Nota: si devono comunque disporre armature minime a taglio, tranne che nei solai

Comportamento di una trave
2 - calcestruzzo non resistente a trazione





isostatiche



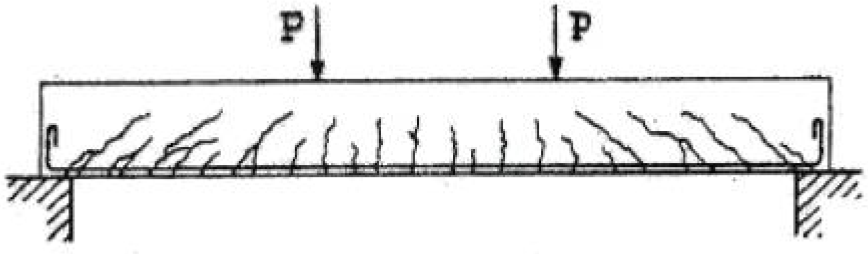
$\sigma_\xi = \tau_{xy}$

ma questa tensione di trazione è incompatibile
con l'ipotesi fatta per il materiale

Verifica – stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

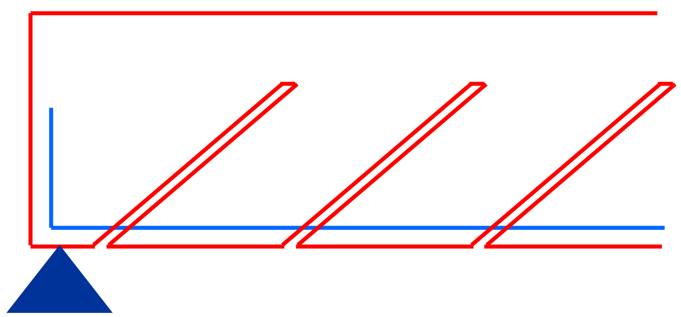
Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio

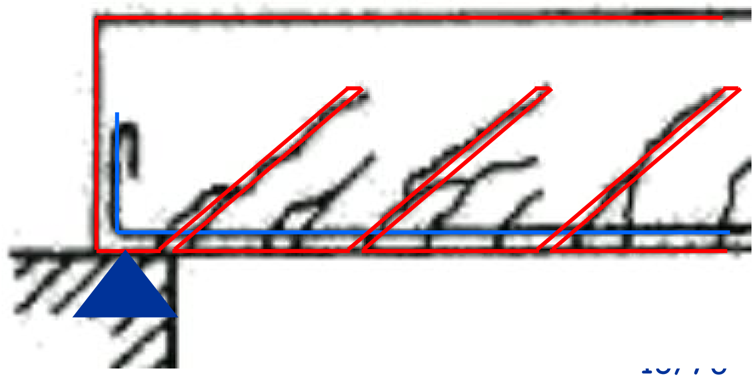


Verifica – stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio



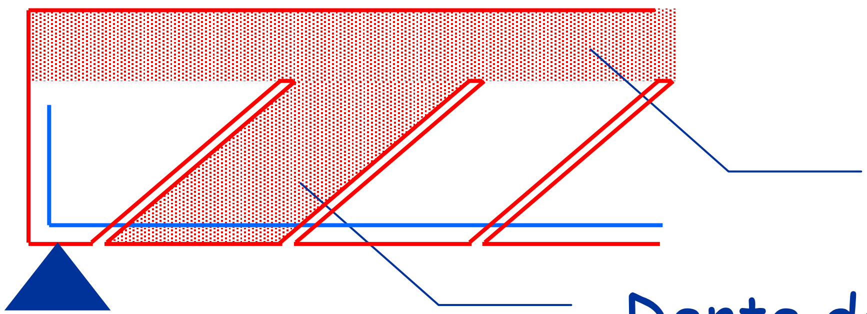


Verifica – stato limite ultimo

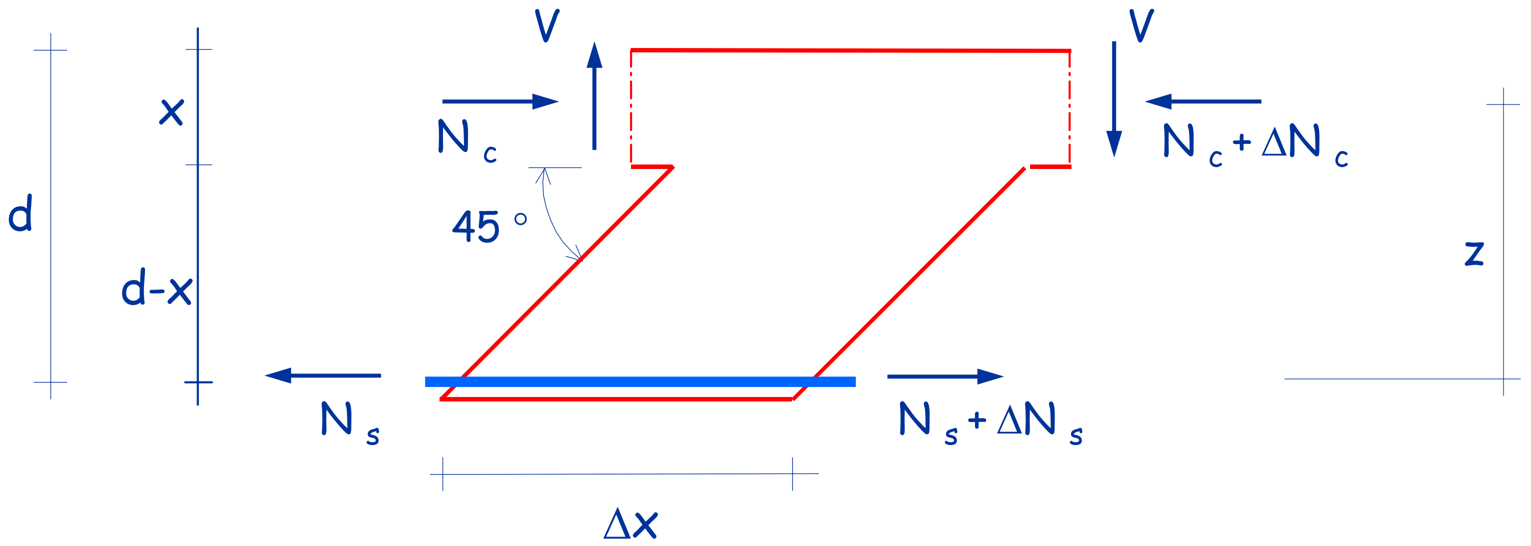
Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

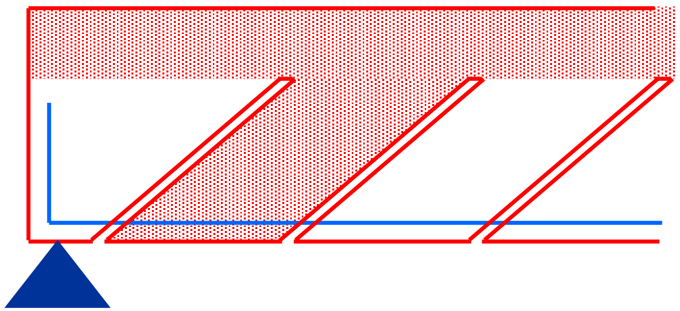
Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio

Modello a pettine



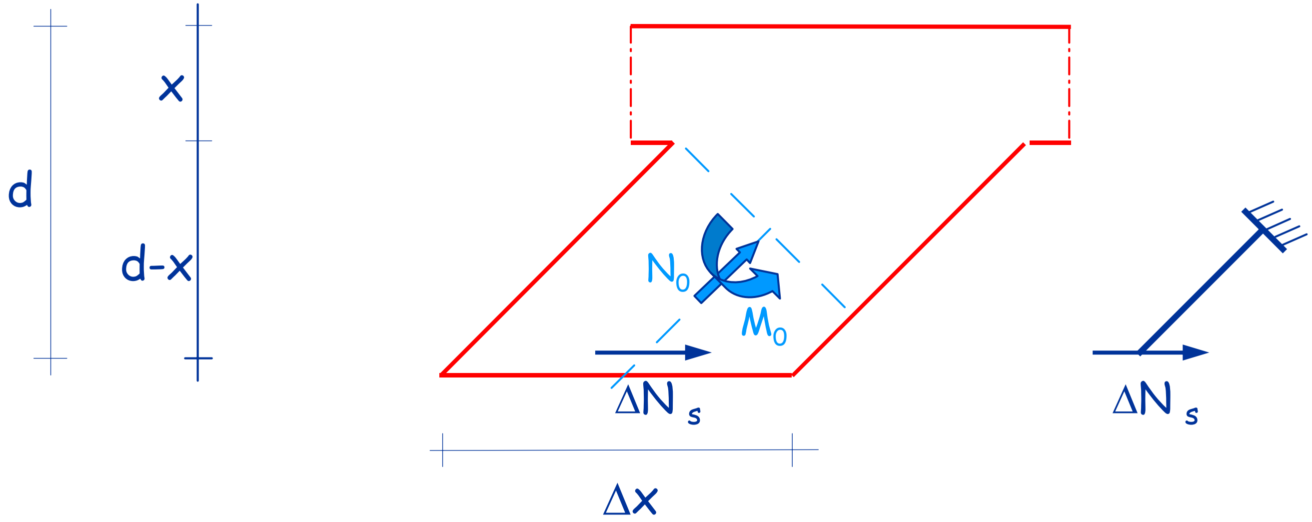
Resistenza del dente

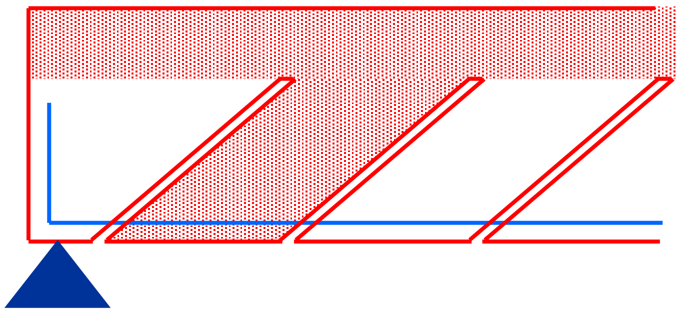




$$\Delta N_s = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V\ \Delta x}{z}$$

Resistenza del dente



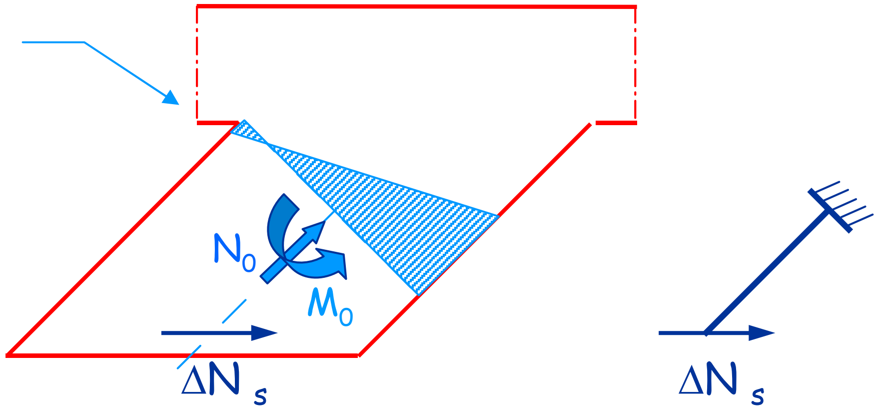


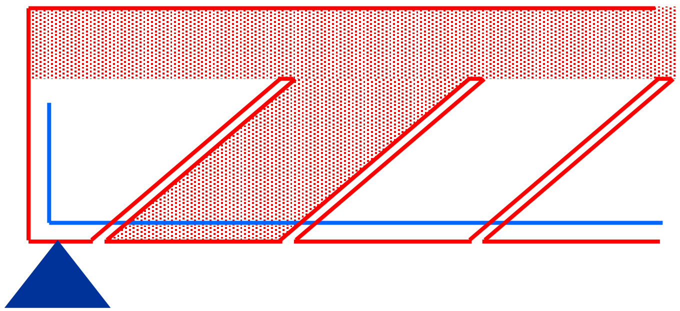
$$N_0 = -\frac{\Delta N_s}{\sqrt{2}} = -\frac{V \; \Delta x}{\sqrt{2} \; z}$$

$$M_0 = -\Delta N_s \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right) = -\frac{V \; \Delta x}{z} \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right)$$

Resistenza del dente

Rottura quando
$\sigma = f_{ctd}$



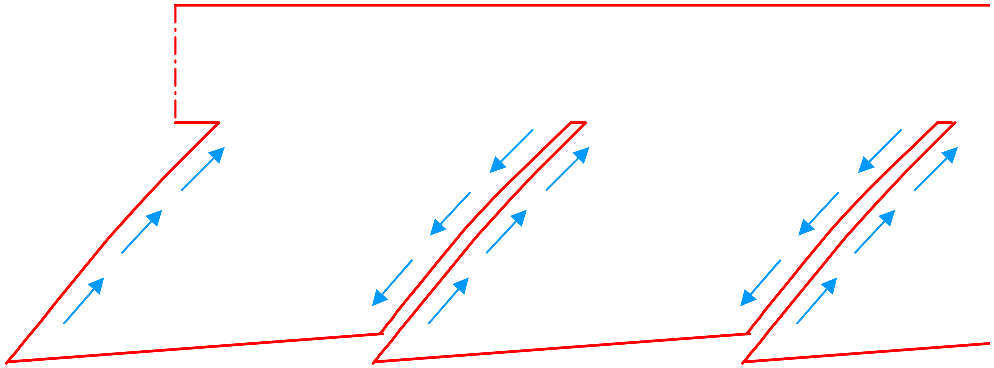


Resistenza del dente:

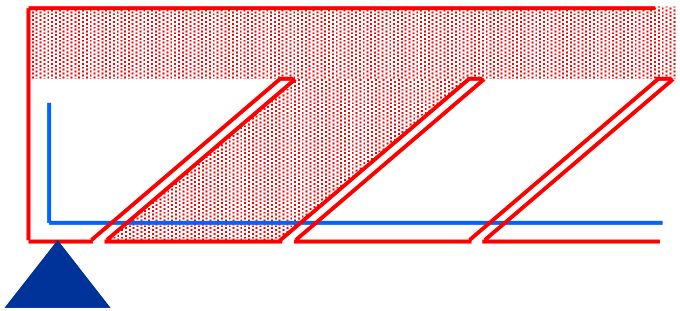
$$V_{Rd} = 0.25\ f_{ctd}\ b\ d$$

Nota: $0.25\ f_{ctd}$ è ora sostituito da un altro termine, equivalente, funzione di f_{ck}

Altri contributi
alla resistenza del dente



Ingranamento degli inerti

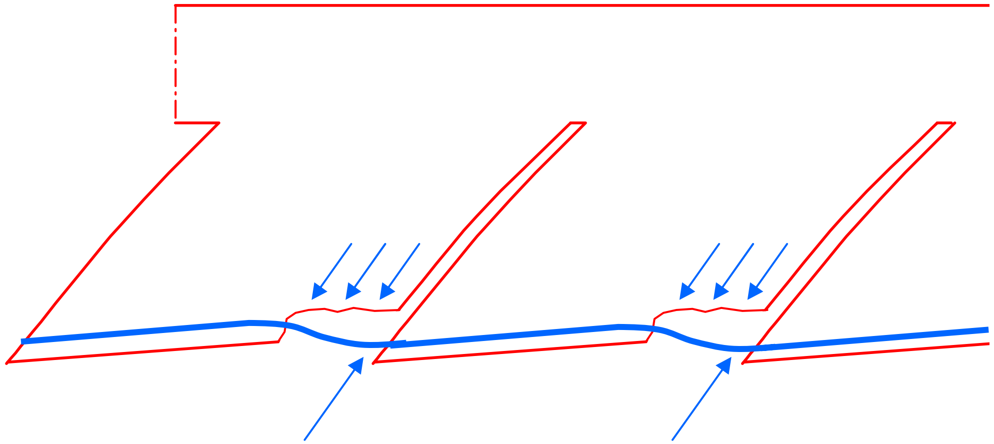


Resistenza del dente:

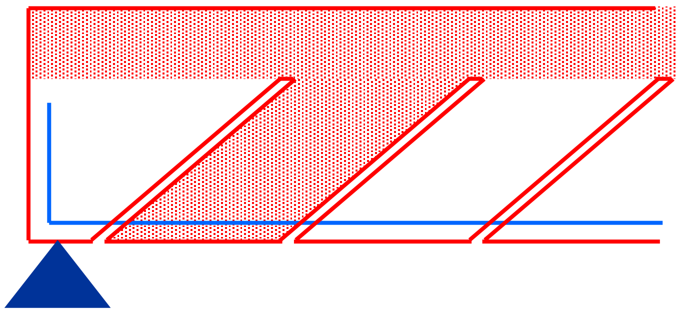
$$V_{Rd} = 0.25\, f_{ctd}\, k\, b\, d$$

il coefficiente k è funzione dell'altezza utile d della sezione

Altri contributi
alla resistenza del dente



Effetto spinotto

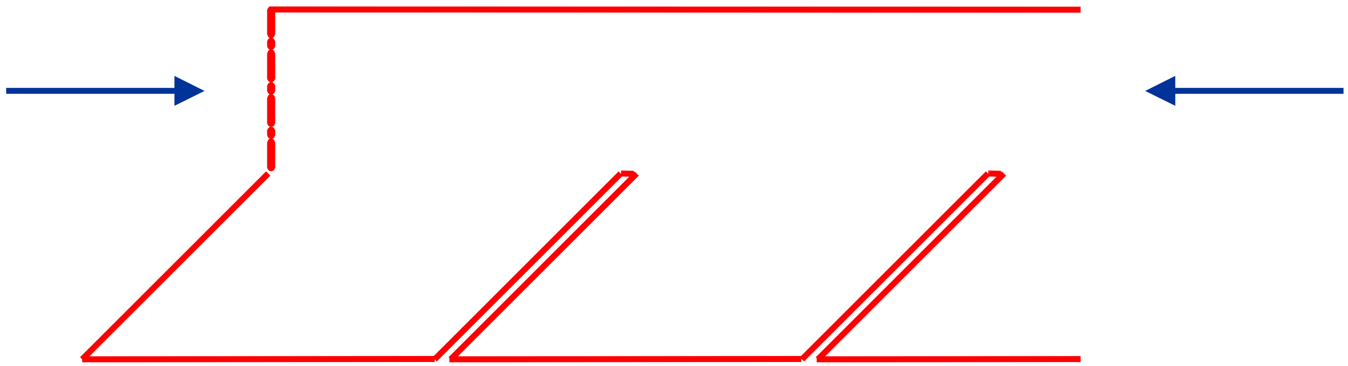


Resistenza del dente:

$$V_{Rd} = 0.25\, f_{ctd}\, k\, f(\rho_l)\, b\, d$$

l'effetto spinotto dipende dalla percentuale ρ_l di armatura longitudinale

Altri contributi
alla resistenza del dente



La presenza di compressione riduce la lunghezza del dente e quindi le sollecitazioni, aumentando la resistenza a taglio

Resistenza in assenza di armature (NTC08, punto 4.1.2.1.3.1)

$$V_{Rd} = \left[0.18\, k \frac{\sqrt[3]{100\, \rho_l\, f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15\, \sigma_{cp} \right] b\, d$$

preferisco $V_{Rd,c}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}$$

$$\geq v_{min} = 0.035 \sqrt{k^3\, f_{ck}}$$

quando ρ_l è molto piccolo

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0.2\, f_{cd}$$

positiva se compressione

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2$$

d in mm

$$\rho_l = \frac{A_s}{b\, d} \leq 0.02$$

Resistenza in assenza di armature
Esempio: solaio (due travetti a metro)

b = 20 cm

h = 24 cm
d = 22 cm

A_s = 2∅10 a travetto
3.14 cm^2 a metro

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{220}} = 1.953$$

$$\rho_l = \frac{3.14}{20 \times 22} = 0.00714$$

$$\frac{\sqrt[3]{100 \times 0.00714 \times 25}}{1.5} = 1.742$$

$$0.18 \times 1.953 \times 1.742 = 0.612 \quad > \quad 0.035 \times \sqrt{1.953^3 \times 25} = 0.478$$

$$V_{Rd} = \left[\underbrace{0.18\, k\, \frac{\sqrt[3]{100\, \rho_l\, f_{ck}}}{\gamma_c}}_{\geq 0.035 \sqrt{k^3\, f_{ck}}} + \cancel{0.15\, \sigma_{cp}} \right] b\, d$$

$$V_{Rd} = 0.612 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = \\ = 26.9 \text{ kN}$$

Confronto con tensioni ammissibili
solaio (due travetti a metro)

b = 20 cm

h = 24 cm

d = 22 cm

A_s = 2∅10 a travetto

3.1 cm^2 a metro

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria armatura a taglio è

$$V_{c0} = 0.9\ \tau_{c0}\ b\ d =$$

$$= 0.9 \times 0.60 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 23.8\ \text{kN}$$

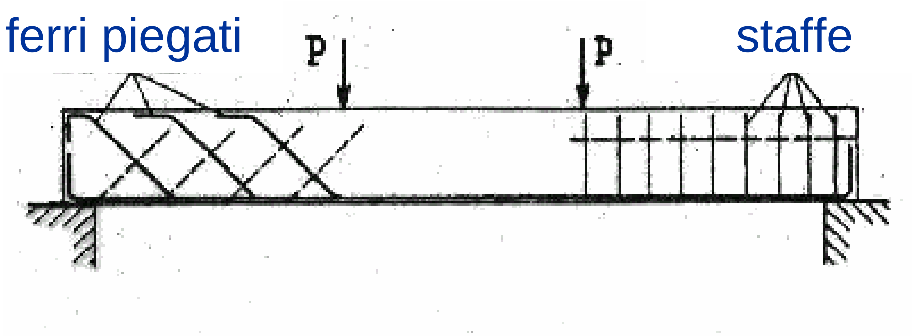
$$1.4 \times 23.8 = 33.3\ \text{kN}$$

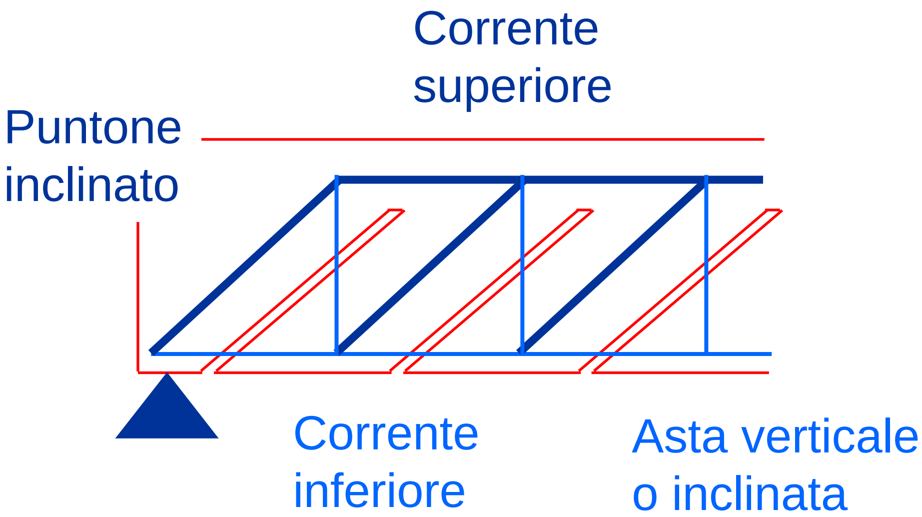
La resistenza allo SLU è 26.9 kN, di poco maggiore, ma il carico (e quindi il taglio sollecitante), è circa 1.4 volte maggiore

Taglio:
resistenza di una trave con armatura a taglio

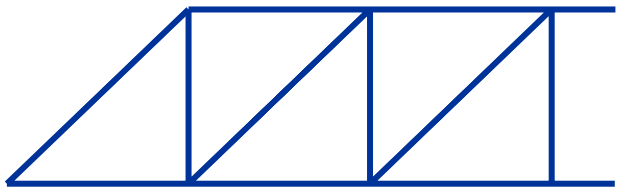
Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:



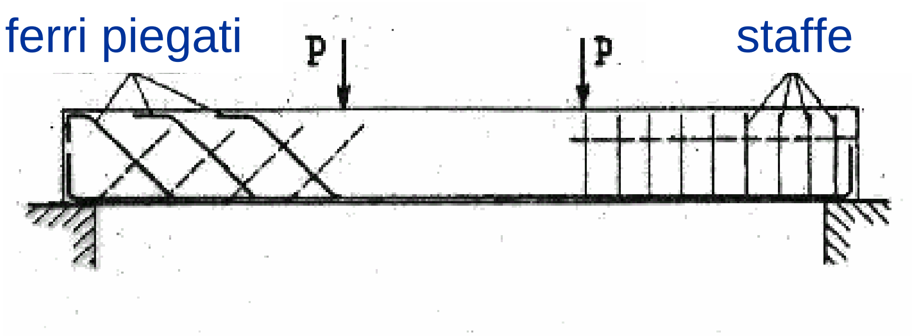


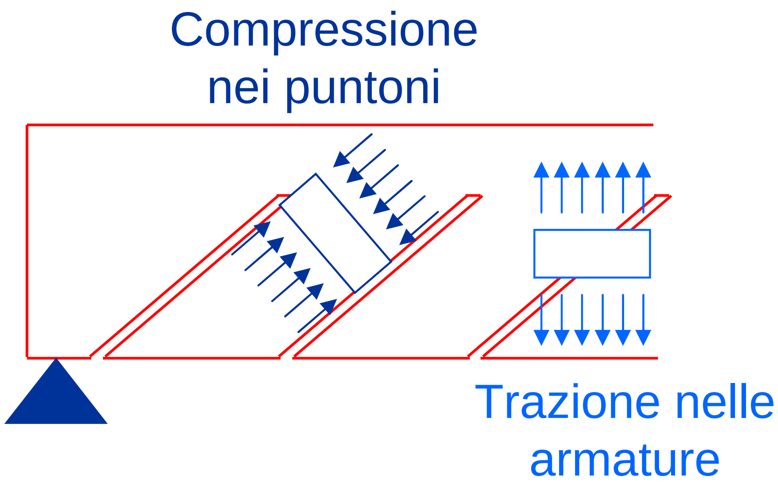
Traliccio di Mörsch



Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:





Campi di tensione

Verifica – tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{c1}$

Quindi: $$V_{c1} = 0.9\, \tau_{c1}\, b\, d$$

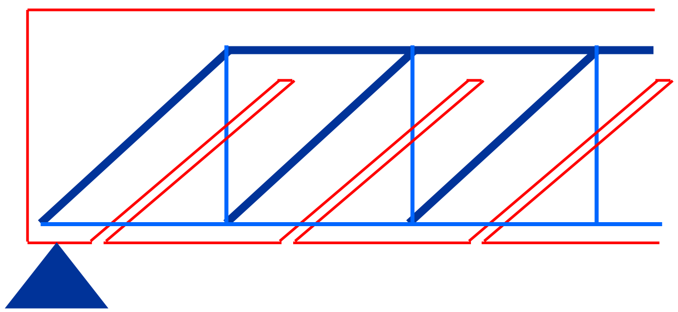
La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Mörsch - schema isostatico

Per staffe: $$V_{s,Max} = \frac{A_{sw}}{s}\, 0.9\, d\, \overline{\sigma}_s$$

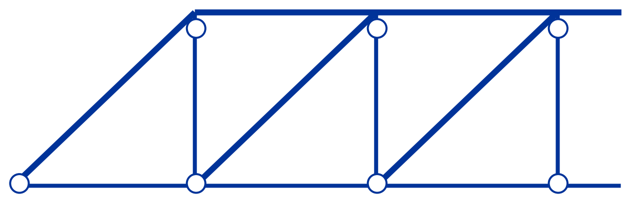
Verifica - stato limite ultimo

Sia la resistenza del calcestruzzo che quella dell'armatura vengono valutate col modello di traliccio

Attenzione: occorre tener conto del fatto che il traliccio è iperstatico



Traliccio iperstatico

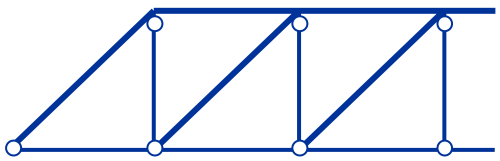


Verifica - stato limite ultimo

In campo lineare, l'iperstaticità del traliccio è irrilevante

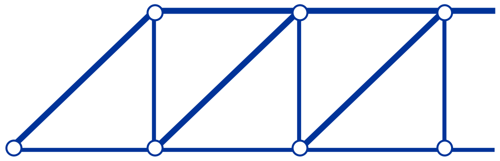
Rigidezza estensionale >> Rigidezza flessionale

Traliccio iperstatico



=

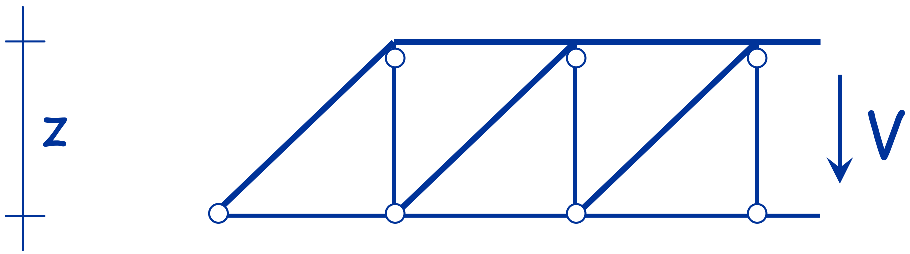
Traliccio isostatico



Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza del calcestruzzo:

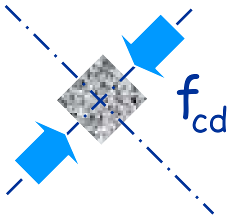


$$N_c = V\sqrt{2}$$

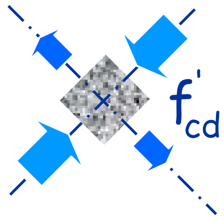
$$A_c = \frac{b\,z}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $\sigma_c = f'_{cd}$ si ottiene $V_{Rd} = \frac{1}{2} f'_{cd}\, b\, z$

Notare:



$$f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$



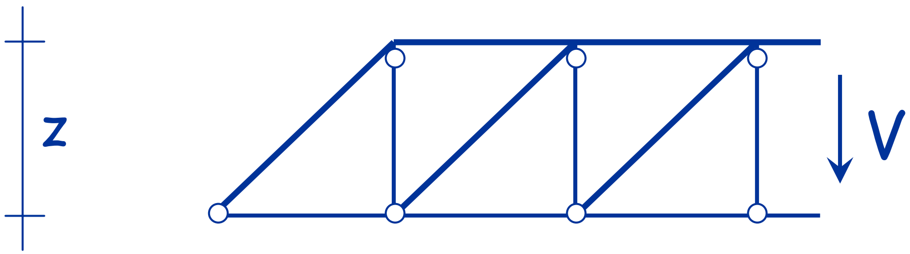
$$f'_{cd} = \nu_1\, f_{cd}$$

$$\nu_1 = 0.5$$

Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza dell'armatura:



$$N_s = V$$

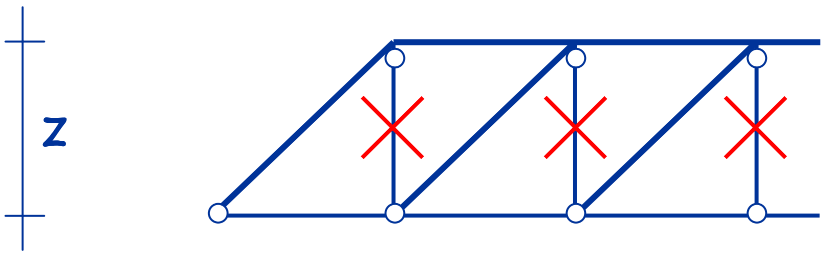
Ponendo $\sigma_s = f_{yd}$ si ottiene $V_{Rd} = \dfrac{A_{sw}}{s} f_{yd}\, z$

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello “normale” Non più considerato dalle NTC08

Modello “di traliccio a inclinazione variabile”

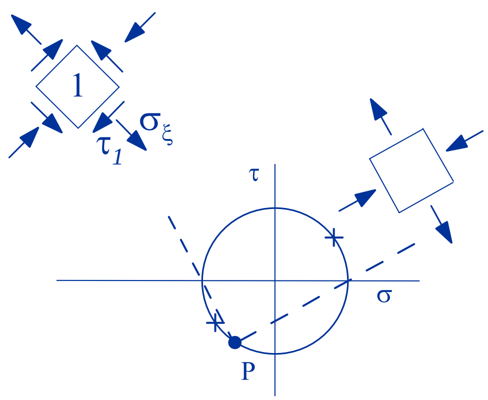


Quando si snerva l’armatura scompare l’armatura a taglio

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello “di traliccio a inclinazione variabile”



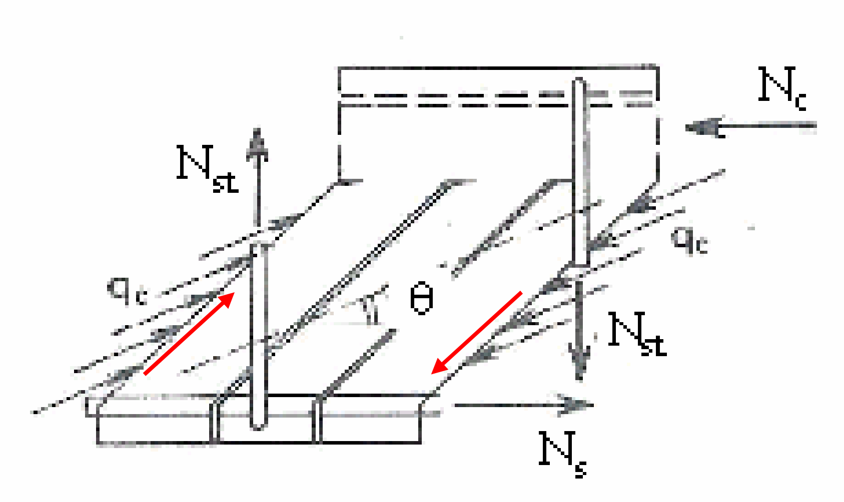
Quando si snerva l’armatura scompare l’armatura a taglio

ma per l’ingranamento degli inerti la direzione di compressione si inclina

Verifica – stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello “di traliccio a inclinazione variabile”



Quando si snerva l’armatura scompare l’armatura a taglio

ma per l’ingranamento degli inerti la direzione di compressione si inclina

$$1 \le \cot\theta \le 2.5$$

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} f'_{cd}\, b\, z$$

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd}\, z \cot\theta$$

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z \qquad z = 0.9\, d$$

Per EC2 $V_{Rd,max}$

$$f'_{cd} = 0.5\, f_{cd}$$

$$\alpha_c = 1 \qquad \text{in assenza di compressione}$$

$$\alpha_c = 1 + \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \qquad \text{per} \quad 0 \le \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \le 0.25$$

$$\alpha_c = 1.25 \qquad \text{per} \quad 0.25 \le \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \le 0.5$$

$$\alpha_c = 2.5\left(1 - \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}\right) \qquad \text{per} \quad 0.5 \le \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \le 1$$

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd}\, z \cot\theta \qquad z = 0.9\, d$$

preferisco $V_{Rd,s}$

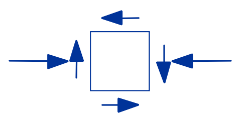
sia per V_{Rcd} che per V_{Rsd}

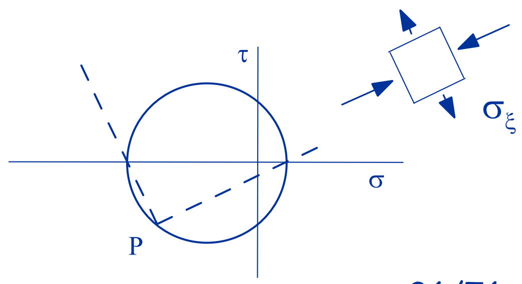
$$1 \leq \cot\theta \leq 2.5$$

in presenza di compressione

$$\cot\theta_1 \leq \cot\theta \leq 2.5$$

$$\cot\theta_1 = \frac{\tau}{\sigma_\xi}$$

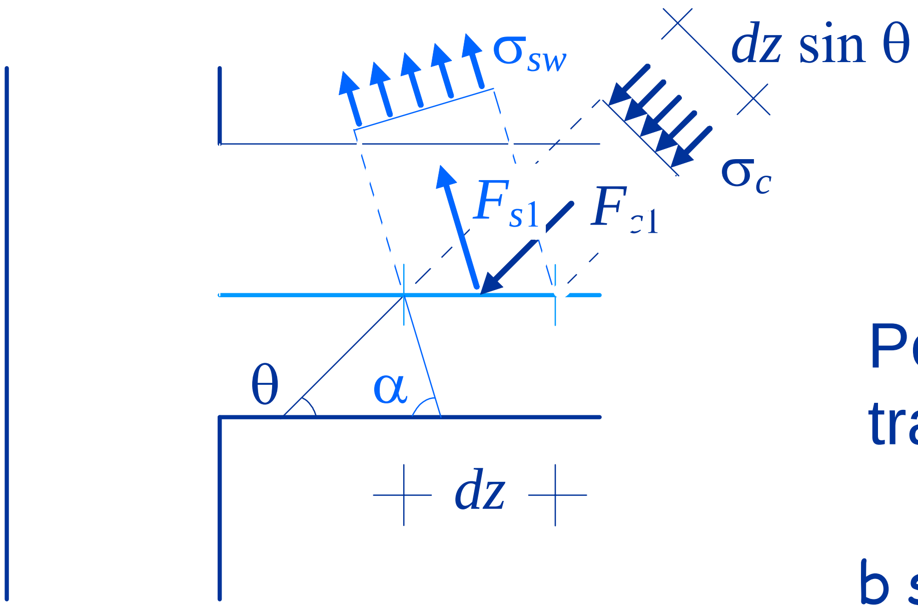




Modello di campi di tensione

$$F_{s1} = \frac{A_{sw}\, dz}{s} \sigma_{sw}$$

$$F_{c1} = b\, dz \sin\theta\, \sigma_c$$

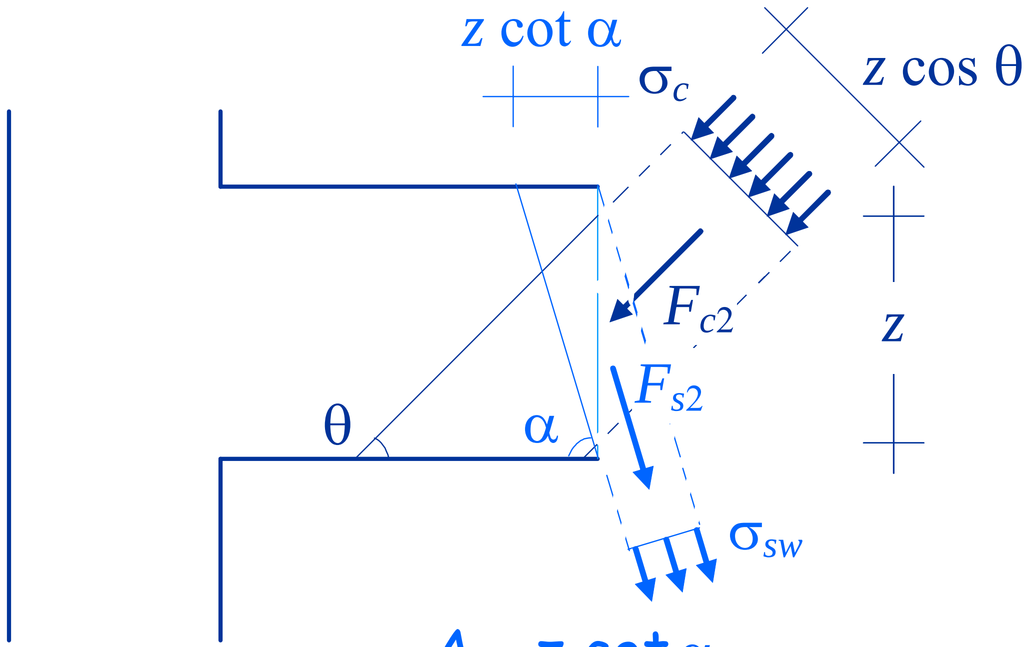


Per l’equilibrio alla traslazione verticale:

$$b \sin^2\theta\, \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin\alpha\, \sigma_{sw}$$

Modello di campi di tensione

$$F_{c2} = b\, z \cos\theta\, \sigma_c$$



$$F_{s2} = \frac{A_{sw}\; z \cot\alpha}{s}\, \sigma_{sw}$$

Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$V = b\, z \sin\theta \cos\theta\, \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s}\, z \cos\alpha\, \sigma_s$$

Modello di campi di tensione

Dalle due relazioni

$$b \sin^2\theta \, \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin\alpha \, \sigma_{sw}$$

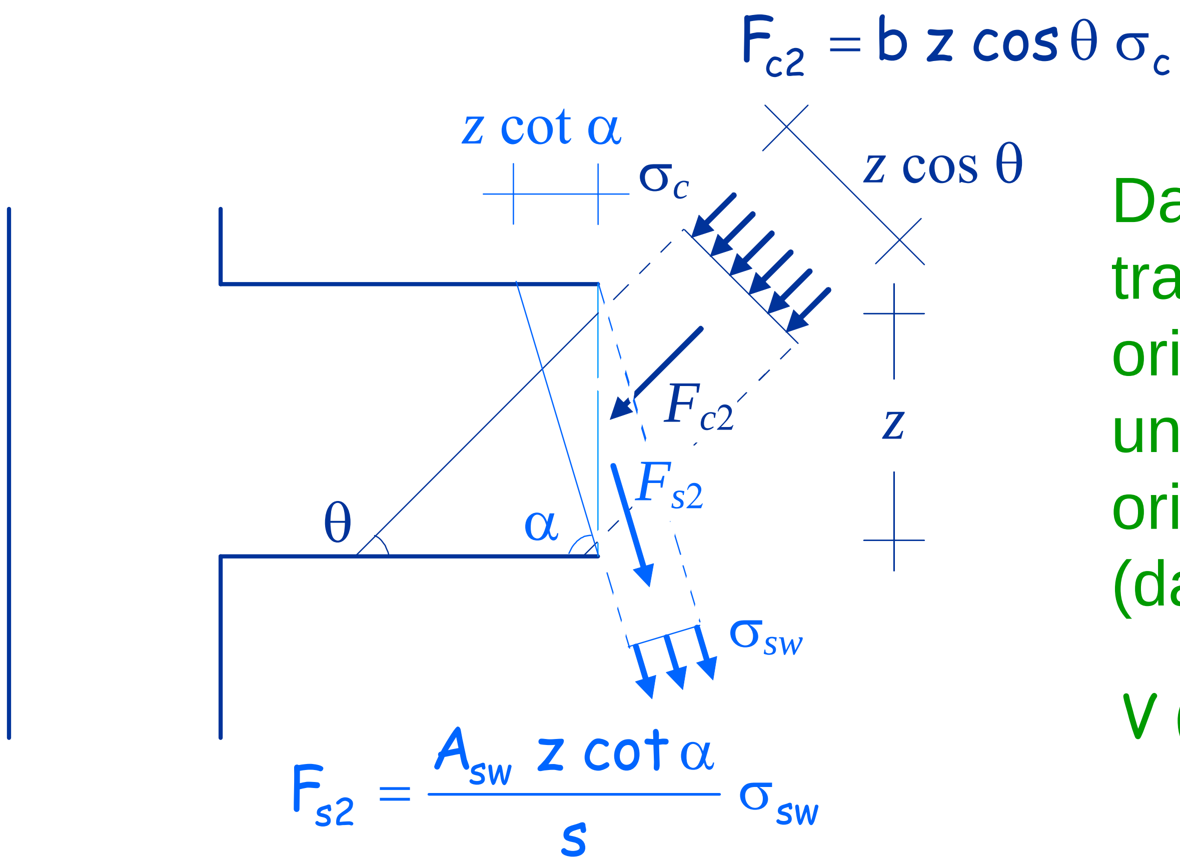
$$V = b \, z \sin\theta \cos\theta \, \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos\alpha \, \sigma_s$$

si ricavano le stesse espressioni viste in precedenza

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z \, f_{yd} \, (\cot\theta + \cot\alpha) \sin\alpha$$

$$V_{Rcd} = \frac{f'_{cd} \, b \, z \, (\cot\theta + \cot\alpha)}{1 + \cot^2\theta}$$

Modello di campi di tensione



Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale rimane una componente orizzontale (da bilanciare)

$$V\,(\cot\theta - \cot\alpha)$$

Componente orizzontale
da equilibrare

$V(\cot\theta - \cot\alpha)$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra N_c ed N_s
- Si ottiene così la traslazione del diagramma del momento di:

$$(\cot\theta - \cot\alpha) \times z/2$$

Componente orizzontale
da equilibrare

$V\,(\cot\theta - \cot\alpha)$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra N_c ed N_s
- Si ottiene così la traslazione del diagramma del momento di (nel caso di staffe $\cot\alpha = 0$):

$$\frac{z\cot\theta}{2}$$

Scuola napoletana:

- L'intera componente è assegnata ad un'apposita armatura, detta "di parete"
- Si ottiene così, in aggiunta alle staffe ($\cot\alpha = 0$), l'armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V\cot\theta}{f_{yd}}$$

Componente orizzontale
da equilibrare

$V\,(\cot\theta - \cot\alpha)$

Suggerimento:

- Posso ritenere, in accordo con la scuola milanese, che una parte (metà) della forza di trazione vada a scaricare N_c e quindi che occorra portare solo l'altra metà
- Questa metà è assegnata all'armatura "di parete"

$$A_{sl} = \frac{V \cot\theta}{2\, f_{yd}}$$

- Se A_{sl} mi sembra eccessiva e ne metto di meno devo incrementare l'armatura inferiore (analogamente a traslazione diagramma momenti)

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

$b = 30$ cm $h = 50$ cm staffe $\varnothing 8/15$ ($6.7\ cm^2/m$)
$c = 5$ cm $d = 45$ cm

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\,\alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 = \\ = 7.08\ \text{MPa}$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rcd} = 430.1\ \text{kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rcd} = 296.6\ \text{kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm staffe ∅8/15 (6.7 cm²/m)

c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \, z \cot\theta$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 105.8 \text{ kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 264.2 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm   staffe ∅8/15 (6.7 cm^2/m)
c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza della sezione è il minore tra V_{Rcd} e V_{Rsd}
calcolati con $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

In questo caso è sempre $V_{Rcd} > V_{Rsd}$

Per $\cot\theta = 2.5$ si ha $V_{Rsd} = 264.2$ kN

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente – tensioni ammissibili

b = 30 cm   h = 50 cm   staffe ∅8/15 (6.7 cm²/m)

c = 5 cm   d = 45 cm

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{c1} = 0.9\ \tau_{c1}\ b\ d =$$
$$= 0.9 \times 1.83 \times 30 \times 45 \times 10^{-1} = 222.4\ \text{kN}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{s,Max} = \frac{A_{sw}}{s}\ 0.9\ d\ \overline{\sigma}_s =$$
$$= 6.7 \times 0.9 \times 45 \times 255 \times 10^{-3} = 69.2\ \text{kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente – confronto TA-SLU

b = 30 cm h = 50 cm staffe ∅8/15 (6.7 cm^2/m)
c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza dell'armatura è

- 69.2 kN per TA $1.4 \times 69.2 = 96.9$ kN
- 264.2 kN per SLU

Anche tenendo conto della differenza di carico,
la resistenza è oltre 2.5 volte maggiore

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm staffe ∅8/10 (10 cm²/m)

c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\,\alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 = $$
$$= 7.08\ \text{MPa}$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rcd} = 430.1\ \text{kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rcd} = 296.6\ \text{kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

$b = 30$ cm　　$h = 50$ cm　　staffe $\varnothing 8/10$ ($10\ cm^2/m$)

$c = 5$ cm　　$d = 45$ cm

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd}\, z \cot\theta$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 158.5\ \text{kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 396.2\ \text{kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio
trave emergente

$b = 30$ cm $\quad$ $h = 50$ cm $\quad$ staffe $\varnothing 8/10$ ($10\ cm^2/m$)
$c = 5$ cm $\quad$ $d = 45$ cm

La resistenza della sezione è il minore tra V_{Rcd} e V_{Rsd}

	$\cot\theta = 1$	1.5	2	2.5
V_{Rcd}	430.1	397.1	344.2	296.6
V_{Rsd}	158.5	237.7	317.0	396.2

Per $\cot\theta = 2.1$ si ha $\quad$ $V_{Rcd} = V_{Rsd} = 332.8$ kN

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

Progetto dell'armatura
allo stato limite ultimo

Staffe:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9\, d\, f_{yd}\, \cot\theta}$$

Occorre definire $\cot\theta$

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per $\cot\theta$

Ponendo

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\, \alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z = V_{Ed}$$

si ottiene

$$\cot\theta = \frac{\alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z}{2\, V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c\, f'_{cd}\, b\, z}{2\, V_{Ed}}\right)^2 - 1} \le 2.5$$

Progetto dell'armatura
allo stato limite ultimo

Staffe:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9\, d\, f_{yd} \cot\theta}$$

Occorre definire cot θ

2. Utilizzare il valore di cot θ così determinato, oppure un valore minore

   Al crescere di cot θ si riducono le staffe necessarie, ma cresce l'armatura di parete (o longitudinale)

   Consiglio di non superare cot θ = 2

3. Calcolo l'armatura di parete o verifico l'armatura longitudinale

Progetto dell'armatura
trave emergente

b = 30 cm   h = 50 cm V_{Ed} = 150 kN
c = 5 cm   d = 45 cm

1. Calcolo

$$\cot\theta = \frac{\alpha_c \, f'_{cd} \, b \, z}{2 \, V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c \, f'_{cd} \, b \, z}{2 \, V_{Ed}}\right)^2 - 1} = 5.69$$

2. Posso usare cot θ = 2.5, ma io preferisco cot θ = 2

Ottengo $$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 \, d \, f_{yd} \cot\theta} = 4.72 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Userò ∅8/20

3. Armatura di parete $$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot\theta}{2 \, f_{yd}} = 3.83 \text{ cm}^2$$

Progetto dell'armatura
trave emergente

b = 30 cm　　h = 50 cm　　V_{Ed} = 400 kN
c = 5 cm　　d = 45 cm

1. Calcolo

$$\cot\theta = \frac{\alpha_c\ f'_{cd}\ b\ z}{2\ V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c\ f'_{cd}\ b\ z}{2\ V_{Ed}}\right)^2 - 1} = 1.555$$

2. Userò $\cot\theta$ = 1.555

Ottengo $$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9\ d\ f_{yd}\ \cot\theta} = 16.23\ cm^2/m$$

Dovrei usare ∅8/6 (forse eccessivi)

3. Armatura di parete $$A_{sl} = \frac{V_{Ed}\ \cot\theta}{2\ f_{yd}} = 7.95\ cm^2$$

Minimi di armature nelle travi
(NTC08, punto 4.1.6.1.1)

Area minima longitudinale:

$$A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b\, d \geq 0.0013\, b\, d$$

Area minima delle staffe:

$$A_{st} = 1.5\, b \quad mm^2/m$$

può essere condizionante, in particolare per travi a spessore

Inoltre: 3 staffe a metro, passo non superiore a 0.8 d

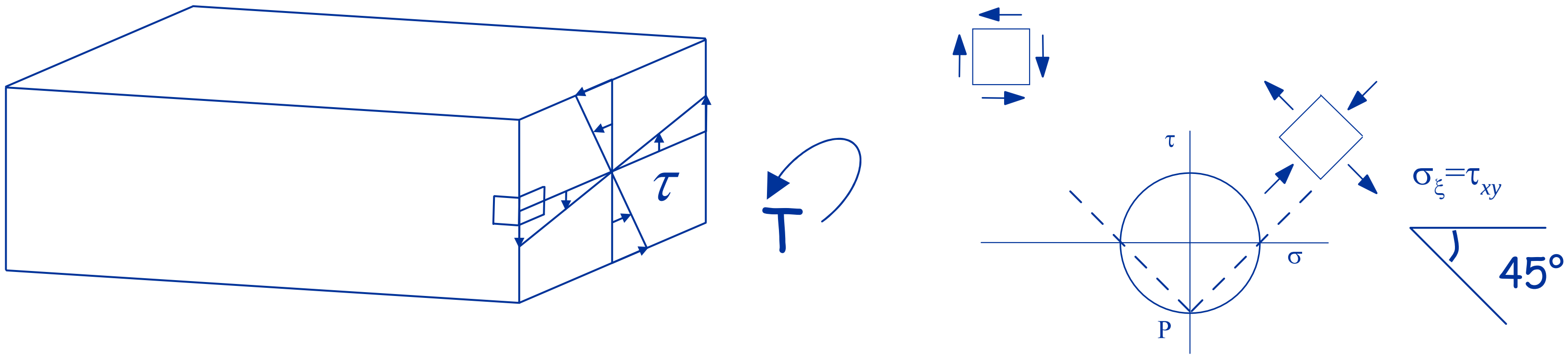
Ulteriori indicazioni (EC2):

$$\rho_w = \frac{A_{st}}{s\, b} \geq \rho_{w,min} = \frac{0.08\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

versioni precedenti davano passi molto ridotti

Torsione

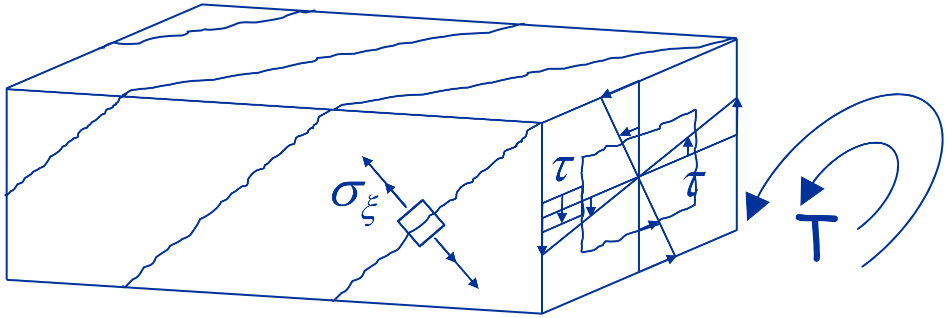
Comportamento di una trave
1 - calcestruzzo resistente a trazione



Per bassi livelli di sollecitazioni, la torsione è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo.

Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

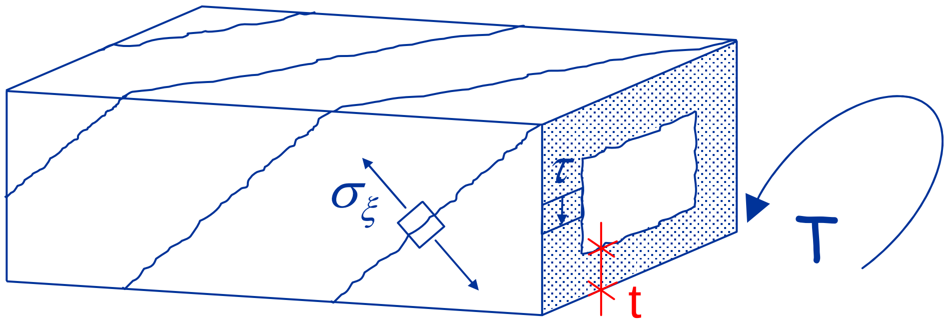
Comportamento di una trave
2 - calcestruzzo non resistente a trazione



Aumentando il momento torcente …

… il calcestruzzo si fessura

Comportamento di una trave
2 - calcestruzzo non resistente a trazione

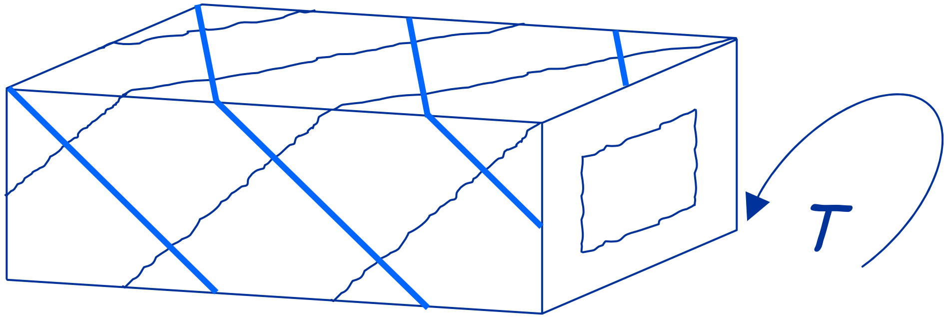


$$t = \frac{A}{u} \geq 2\,c$$

La parte interna della sezione non dà contributo …

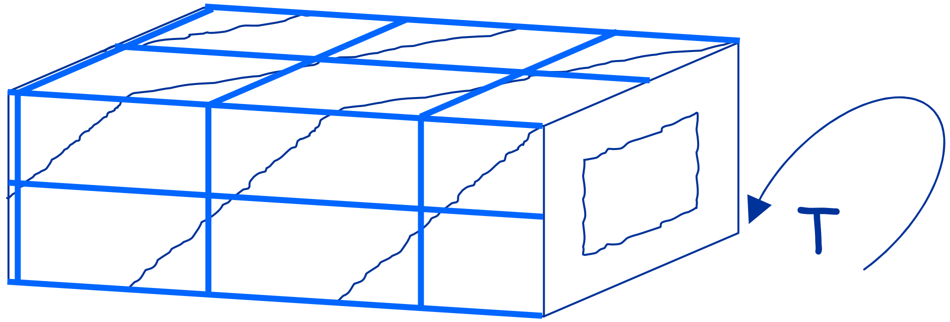
… si considera una sezione cava

Armatura a torsione

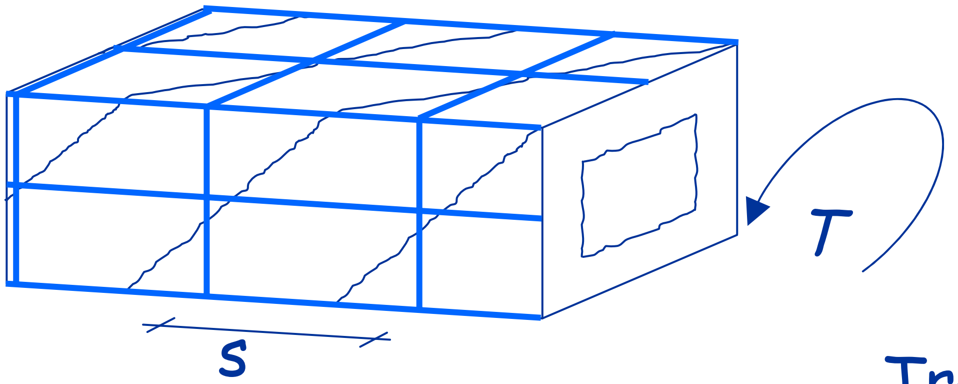


… a spirale

… con staffe e
ferri longitudinali



Modello di calcolo

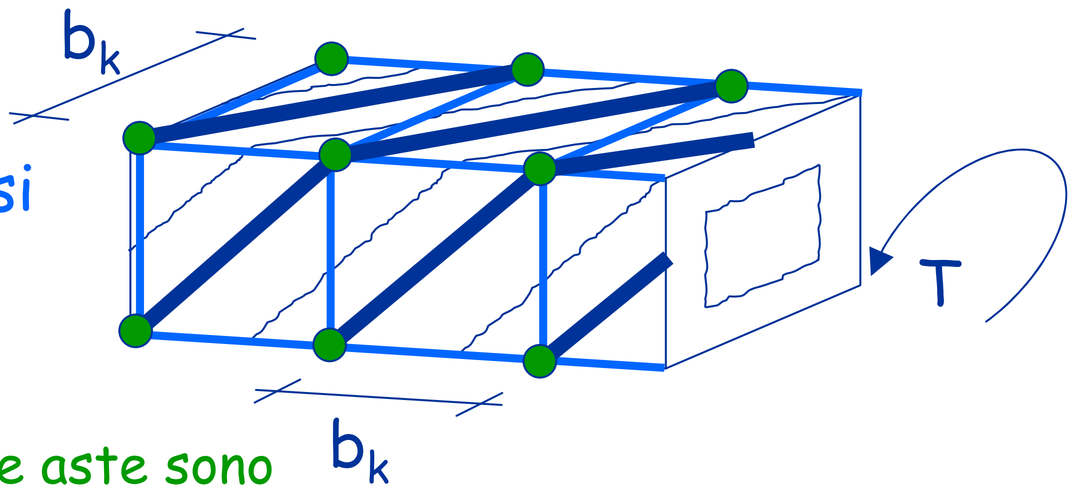


Traliccio di Rausch

Barre longitudinali = correnti tesi

Staffe = montanti tesi

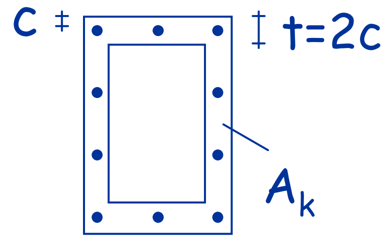
Calcestruzzo = diagonali compresse



Tutte le aste sono incernierate nei nodi

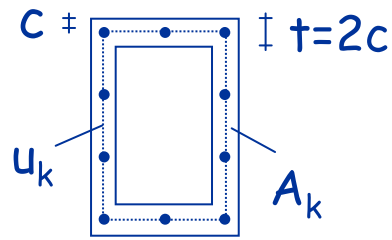
Verifica – tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{c1}$



Quindi: $$T_{c1} = 2\, A_k\, t\, \tau_{c1}$$

La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Rausch

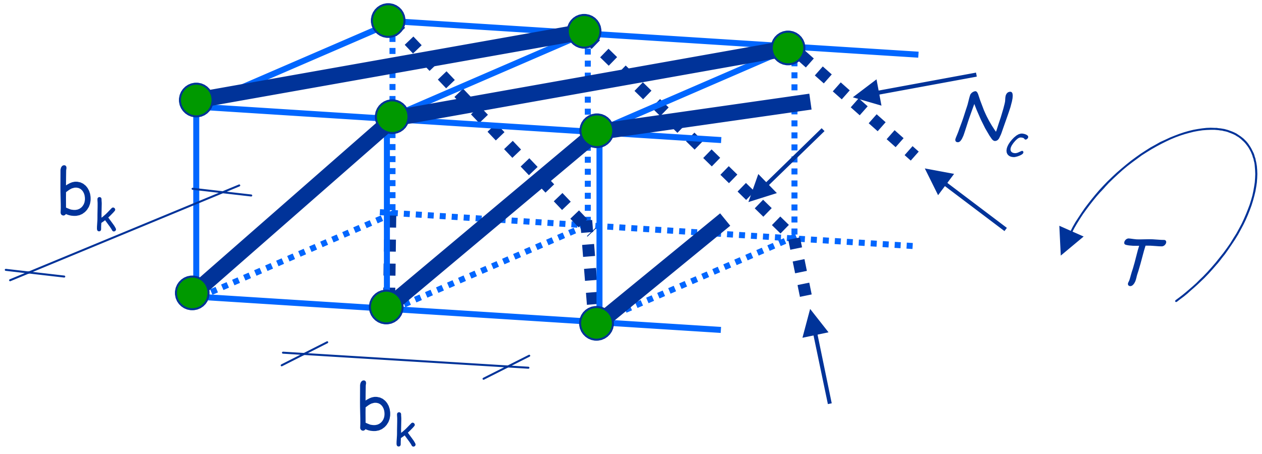


Per le staffe: $$T_{st} = 2\, A_k\, \frac{A_{st}}{s}\, \bar{\sigma}_s$$

Per i ferri longitudinali: $$T_{s,lon} = 2\, A_k\, \frac{A_{s,lon}}{u_k}\, \bar{\sigma}_s$$

Resistenza a torsione - SLU
con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2}\, b_k}$$

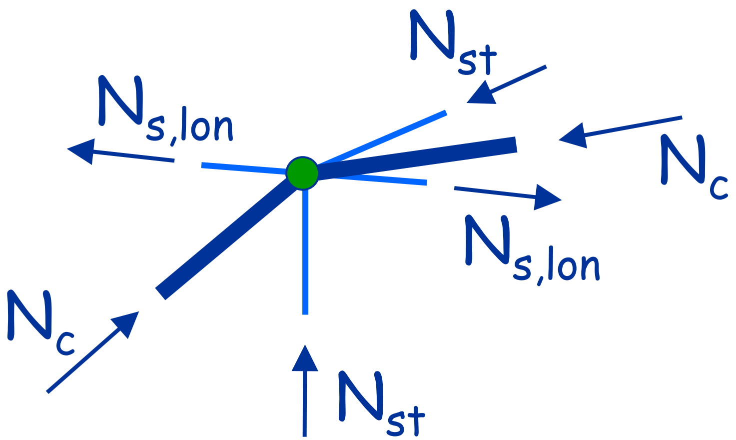
$$A_c = \frac{t\, b_k}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $\sigma_c = f_{cd}^{'}$ si ottiene $T_{Rcd} = f_{cd}^{'}\, t\, A_k$

$$f_{cd}^{'} = 0.5\, f_{cd}$$

Resistenza a torsione - SLU
con puntoni inclinati a 45°

Resistenza dell'armatura:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2}\, b_k}$$

$$N_{st} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

$$N_{s,lon} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

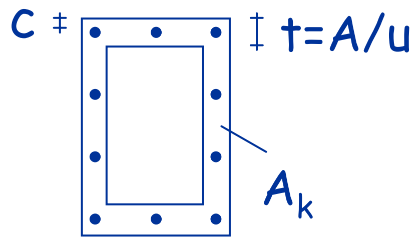
Ponendo $\sigma_{st} = f_{yd}$ si ottiene $T_{Rsd} = 2\, A_k \dfrac{A_{st}}{s} f_{yd}$

Ponendo $\sigma_{s,lon} = f_{yd}$ si ottiene $T_{Rld} = 2\, A_k \dfrac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$

Resistenza a torsione - SLU
con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo

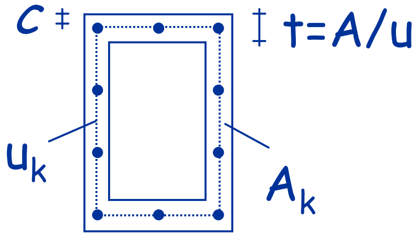
$$T_{Rcd} = A_k\, t\, f'_{cd}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe: $$T_{Rsd} = 2\, A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$$

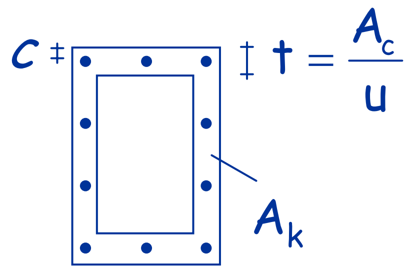
Ferri longitudinali: $$T_{Rld} = 2\, A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$$



Resistenza a torsione - SLU
con puntoni ad inclinazione variabile (NTC08, 4.1.2.1.4)

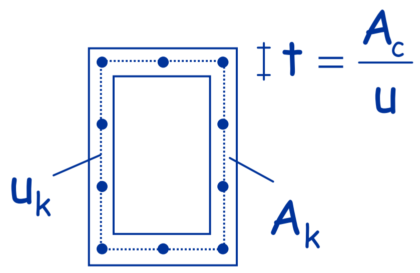
Resistenza del calcestruzzo

$$T_{Rcd} = 2\,A_k\,t\,f'_{cd}\,\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe: $$T_{Rsd} = 2\,A_k\,\frac{A_{st}}{s}\,f_{yd}\cot\theta$$



Ferri longitudinali: $$T_{Rld} = 2\,A_k\,\frac{A_{s,lon}}{u_k}\,f_{yd}\,\frac{1}{\cot\theta}$$

Per effetto dell'ingranamento degli inerti i puntoni di calcestruzzo si inclinano ($0.4 \leq \cot\theta \leq 2.5$)

Resistenza a torsione
trave emergente

$b = 30$ cm $\quad h = 50$ cm $\quad A_{s,lon} = 8\varnothing14 \; (12.3\ cm^2)$

$c = 5$ cm $\quad d = 45$ cm $\quad$ staffe $\varnothing8/15 \; (3.33\ cm^2/m)$

$$t = \frac{30 \times 50}{2(30+50)} = \cancel{9.38}\ cm$$

$$= 2\,c = 10\ cm$$

$$A_k = (30-10) \times (50-10) = 800\ cm^2$$

$$f_{cd}' = 7.08\ MPa$$

La resistenza della trave a torsione è

$$T_{Rcd} = 2\,A_k\,t\,f_{cd}'\,\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{Rcd} = 56.6\ kN\,m$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad T_{Rcd} = 39.1\ kN\,m$$

Resistenza a torsione
trave emergente

$b = 30$ cm $\quad h = 50$ cm $\quad A_{s,lon} = 8\varnothing14 \; (12.3 \text{ cm}^2)$

$c = 5$ cm $\quad d = 45$ cm $\quad$ staffe $\varnothing8/15 \; (3.33 \text{ cm}^2/\text{m})$

La resistenza dell'armatura è

Staffe:

$$T_{Rsd} = 2\, A_k \,\frac{A_{st}}{s}\, f_{yd} \cot\theta$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{Rsd} = 20.8 \text{ kN m}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad T_{Rsd} = 52.1 \text{ kN m}$$

Ferri longitudinali:

$$T_{Rld} = 2\, A_k \,\frac{A_{s,lon}}{u_k}\, f_{yd} \,\frac{1}{\cot\theta}$$

$$u_k = 120 \text{ cm}$$

$$\cot\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{Rld} = 64.2 \text{ kN m}$$

$$\cot\theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad T_{Rld} = 25.7 \text{ kN m}$$

Resistenza a torsione
trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm $A_{s,lon}$ = 8∅14 (12.3 cm^2)
c = 5 cm d = 45 cm staffe ∅8/15 (3.33 cm^2/m)

La resistenza della sezione è il minore tra T_{Rcd} T_{Rsd} T_{Rld}

	cotθ = 1	1.5	2	2.5
T_{Rcd}	56.6	52.3	45.4	39.1
T_{Rsd}	20.8	31.2	41.6	52.0
T_{Rld}	64.2	42.8	32.1	25.7

Si ha $T_{Rsd} = T_{Rld}$ per $\cot\theta = \sqrt{\dfrac{A_{s,lon}/u_k}{A_{st}/s}} = 1.754$

Per tale valore $T_{Rsd} = T_{Rld} = 36.5$ kNm
$T_{Rcd} = 48.7$ kNm

Resistenza a torsione
trave emergente – tensioni ammissibili

$b = 30$ cm $h = 50$ cm $A_{s,lon} = 8\varnothing14$ (12.3 cm^2)
$c = 5$ cm $d = 45$ cm staffe $\varnothing8/15$ (3.33 cm^2/m)

La resistenza della trave a torsione è $t = 2\,c = 10$ cm

$$T_{c1} = 2\,A_k\,t\,\tau_{c1} = $$
$$= 2 \times (20 \times 40) \times 10 \times 1.83 \times 10^{-3} = 29.3 \text{ kNm}$$

La resistenza dell'armatura è

$$T_{st} = 2\,A_k\,\frac{A_{st}}{s}\,\overline{\sigma}_s = $$
$$= 2 \times (20 \times 40) \times 0.033 \times 255 \times 10^{-3} = 13.5 \text{ kNm}$$

$$T_{s,lon} = 2\,A_k\,\frac{A_{s,lon}}{u_k}\,\overline{\sigma}_s = $$
$$= 2 \times (20 \times 40) \times 0.103 \times 255 \times 10^{-3} = 42.0 \text{ kNm}$$

Resistenza a torsione
trave emergente – confronto SLU-TA

Tensioni ammissibili:

$$T_{Rsd} = 2\,A_k\,\frac{A_{st}}{s}\,\overline{\sigma}_s = 13.5\ \text{kNm}$$

$$1.4 \times 13.5 = 18.9\ \text{kN}$$

Stato limite ultimo (cotθ = 1.754):

$$T_{Rsd} = 2\,A_k\,\frac{A_{st}}{s}\,f_{yd}\cot\theta = 36.5\ \text{kNm}$$

Anche se i carichi allo SLU sono circa 1.4 volte maggiori, la resistenza è notevolmente maggiore (nell'esempio circa 1.9 volte)

Dimensionamento della sezione allo stato limite ultimo

1. Scegliere un valore per cot θ ed ipotizzare un valore per t (almeno pari a 2 c)

2. Invertendo l'espressione di T_{Rcd} calcolare A_k

$$A_k = \frac{T_{Ed}}{2\, t\, f'_{cd} \dfrac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}}$$

3. Definire una sezione b×h che garantisca A_k e calcolare t

$$t = \frac{A}{u} \geq 2\, c$$

4. Ricalcolare A_k e controllare che vada bene

$$A_k = (b-t)\,(h-t)$$

Dimensionamento della sezione
esempio

Dati: T_{Ed} = 26 kNm

1. Assumo cot θ = 2 e t = 10 cm

2. $$A_k = \frac{T_{Ed}}{2\,t\,f'_{cd}\,\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}} = \frac{26\times 10^3}{2\times 10\times 7.08\times \frac{2}{1+2^2}} = 459\ \text{cm}^2$$

3. Potrei usare una sezione 30×40 che (per t=10 cm) ha A_k = 600 cm²
   Preferisco 30×50

$$t = \frac{1500}{160} = \cancel{9.38}\ \text{cm}$$
$$= 2\,c = 10\ \text{cm}$$

4. $$A_k = (30-10)\,(50-10) = 800\ \text{cm}^2$$

   va bene

Progetto di staffe e barre longitudinali
allo stato limite ultimo

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per cot θ

   Ponendo $$T_{Rcd} = 2\, A_k\, t\, f'_{cd}\, \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = T_{Ed}$$

   si ottiene $$\cot\theta = \frac{A_k\, t\, f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k\, t\, f'_{cd}}{T_{Ed}}\right)^2 - 1} \leq 2.5$$

2. Utilizzare il valore di cot θ così determinato, oppure un valore minore, per calcolare staffe e barre longitudinali

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2\, A_k\, f_{yd}\, \cot\theta} \qquad A_{s,lon} = \frac{T_{Ed}\, u_k\, \cot\theta}{2\, A_k\, f_{yd}}$$

3. Distribuire le barre longitudinali in proporzione ai lati

Progetto di staffe e barre longitudinali
esempio

Dati: T_{Ed} = 26 kNm

Si è scelta una sezione 30×50

1. $$\cot\theta = \frac{A_k\, t\, f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k\, t\, f'_{cd}}{T_{Ed}}\right)^2 - 1} = $$
$$= \frac{800 \times 10 \times 7.08}{26 \times 10^3} + \sqrt{(2.18)^2 - 1} = 4.12$$

2. Si può usare anche cot θ = 2.5; scelgo cot θ = 2

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{26 \times 10^5}{2 \times 800 \times 391.3 \times 2} = 2.08\ cm^2/m \qquad \varnothing 8/25$$

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 120 \times 2}{2 \times 800 \times 391.3} \times 10^3 = 9.97\ cm^2$$

Progetto di staffe e barre longitudinali
esempio

Dati: T_{Ed} = 26 kNm

Si è scelta una sezione 30×50

Se però si decide di usare ∅8/20 = 2.5 cm²/m questo corrisponde a

$$\cot\theta = \frac{T_{Ed}}{2\,A_k\,f_{yd}\,A_{st}/s} = 1.661$$

L'armatura longitudinale necessaria è

$$A_{s,lon} = \frac{26\times 120\times 1.661}{2\times 800\times 391.3}\times 10^3 = 8.28\ \text{cm}^2$$

Torsione e taglio

Calcestruzzo:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rcd}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rcd}} \leq 1$$

Staffe:

- si progettano separatamente, per la torsione e per il taglio e si sommano.
- l'angolo θ deve essere uguale per la torsione e per il taglio.