Corso di aggiornamento

Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

3 – Flessione semplice

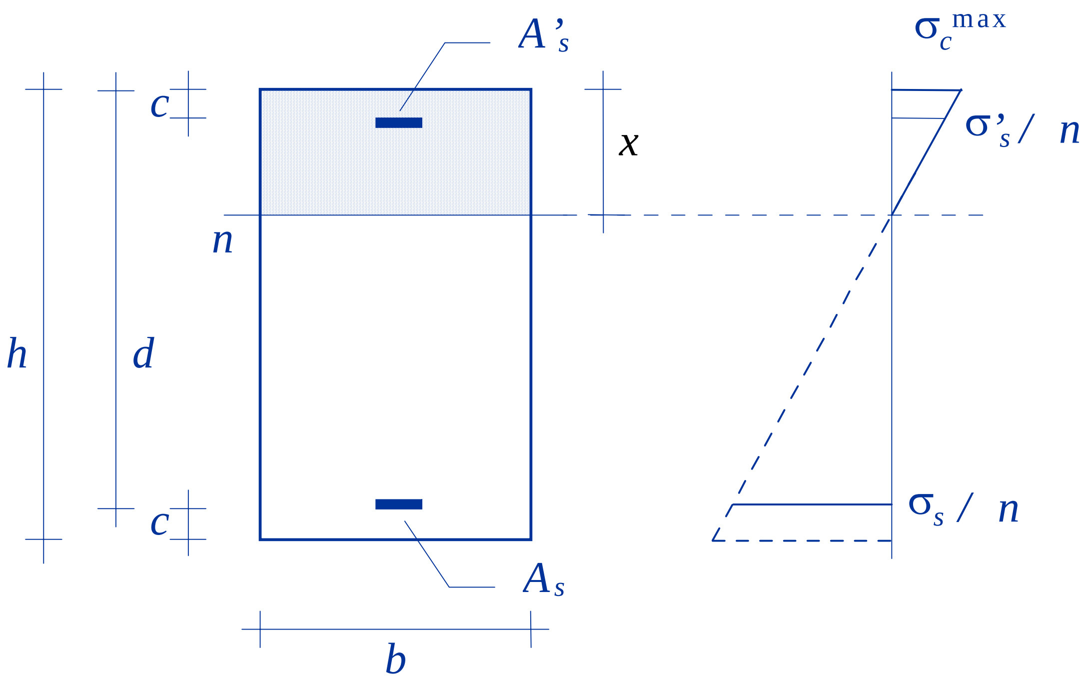
Bologna

3-4 maggio 2012

Edoardo M. Marino

Verifica di sezioni inflesse

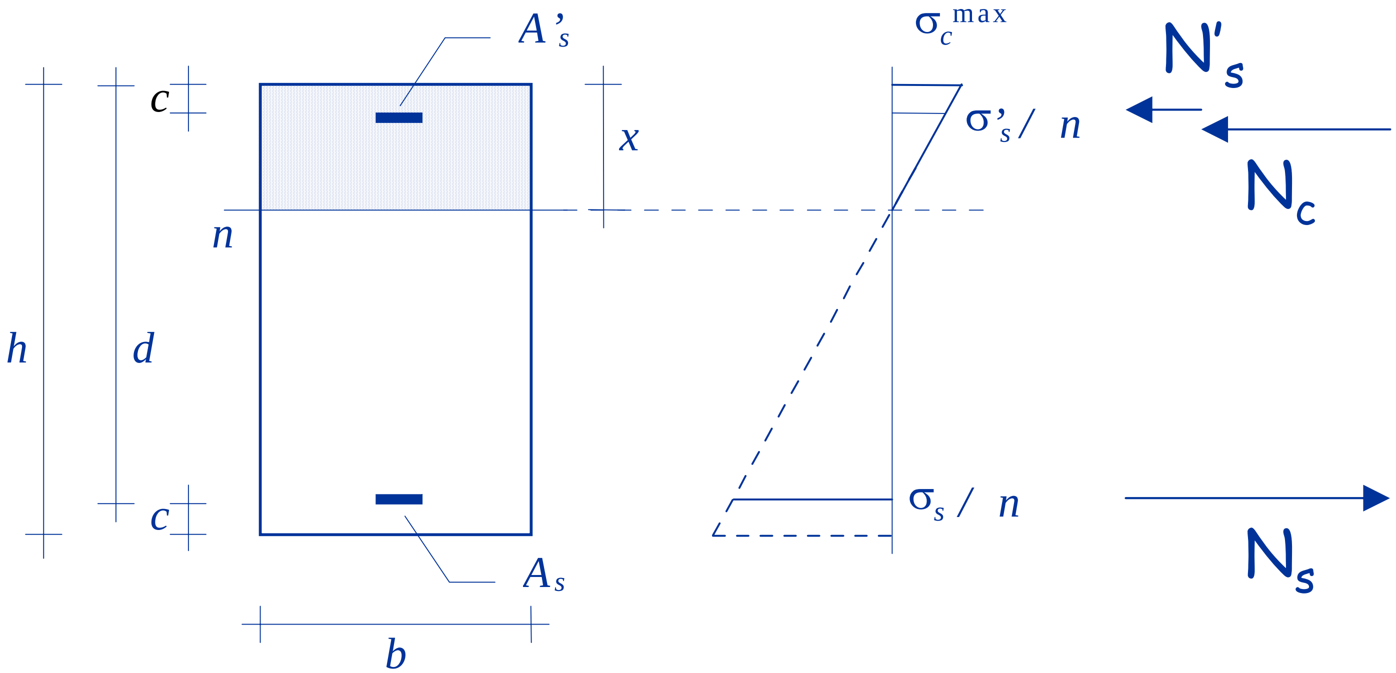
Verifica - tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili

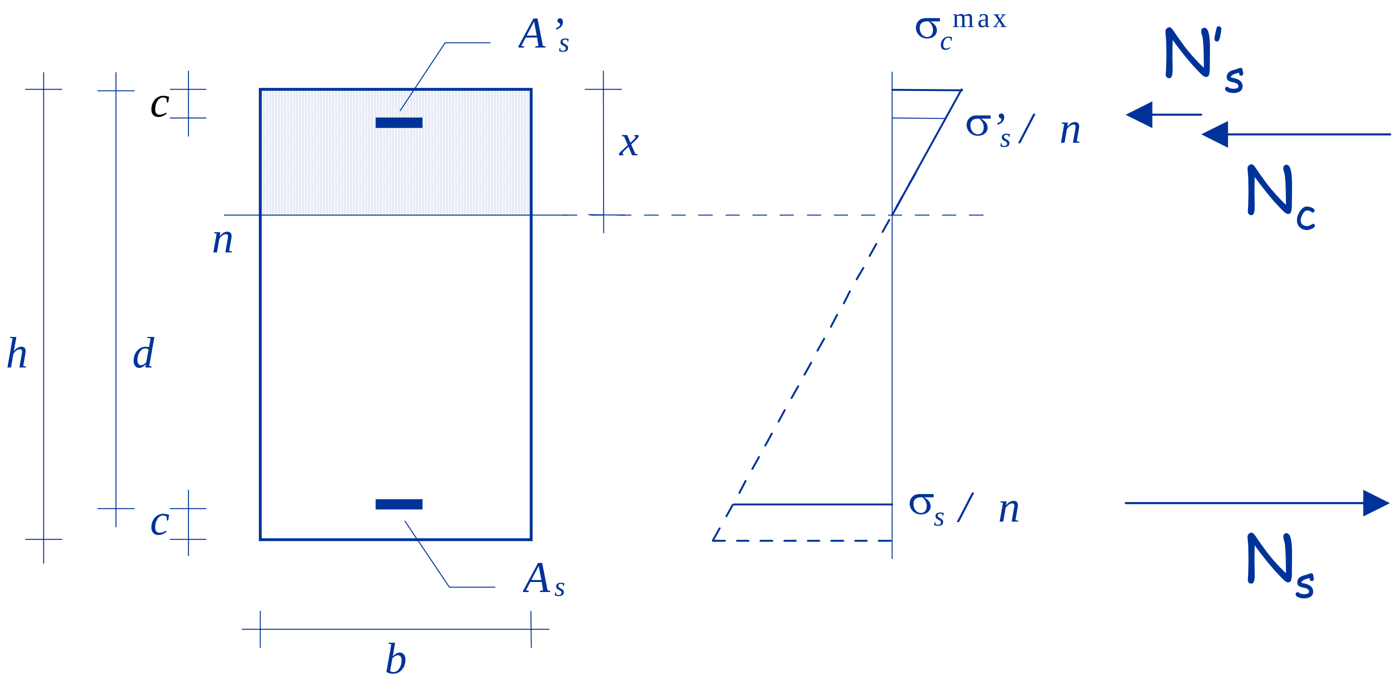


Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = 0$

(equilibrio alla traslazione)

oppure …

Verifica – tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro: $S_n = 0$

(l'asse neutro è baricentrico)

Verifica - tensioni ammissibili

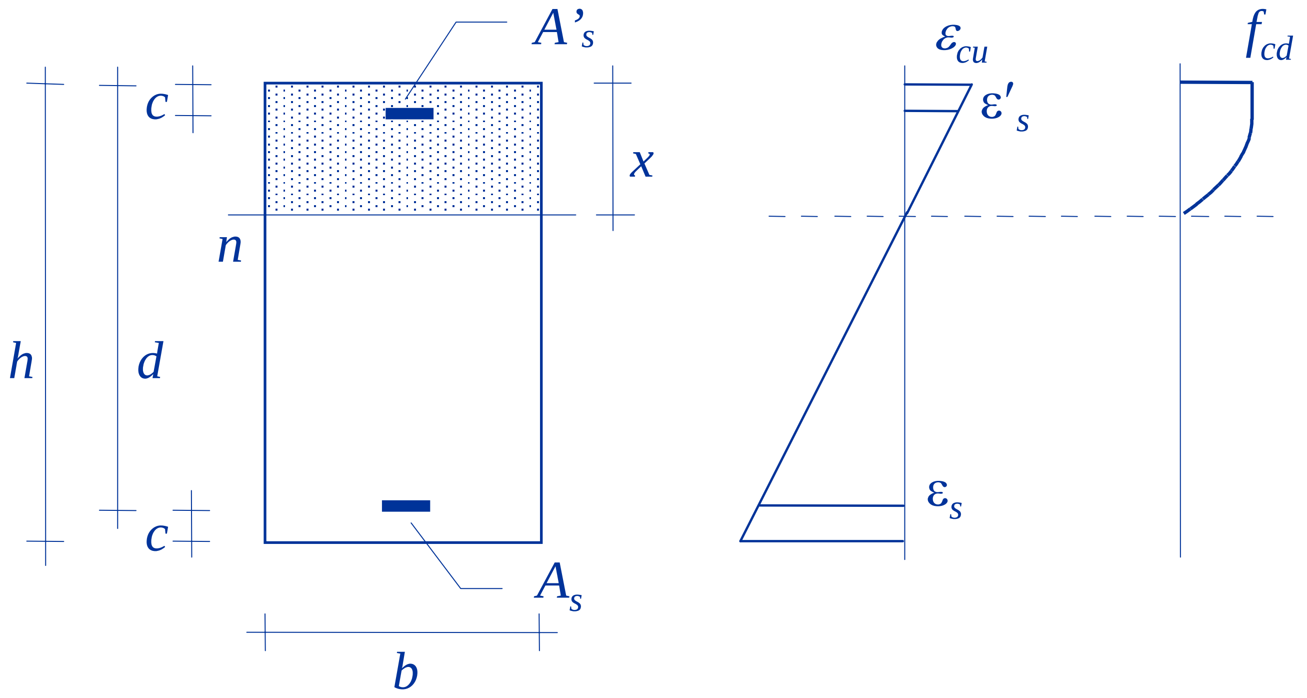
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s\,c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right]$$

E poi: $$\sigma = -\frac{M}{I}y$$

con: $$I = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s\,(x - c)^2 + n\,A_s(d - x)^2$$

Verifica - stato limite ultimo



Dati:

Geometria della sezione

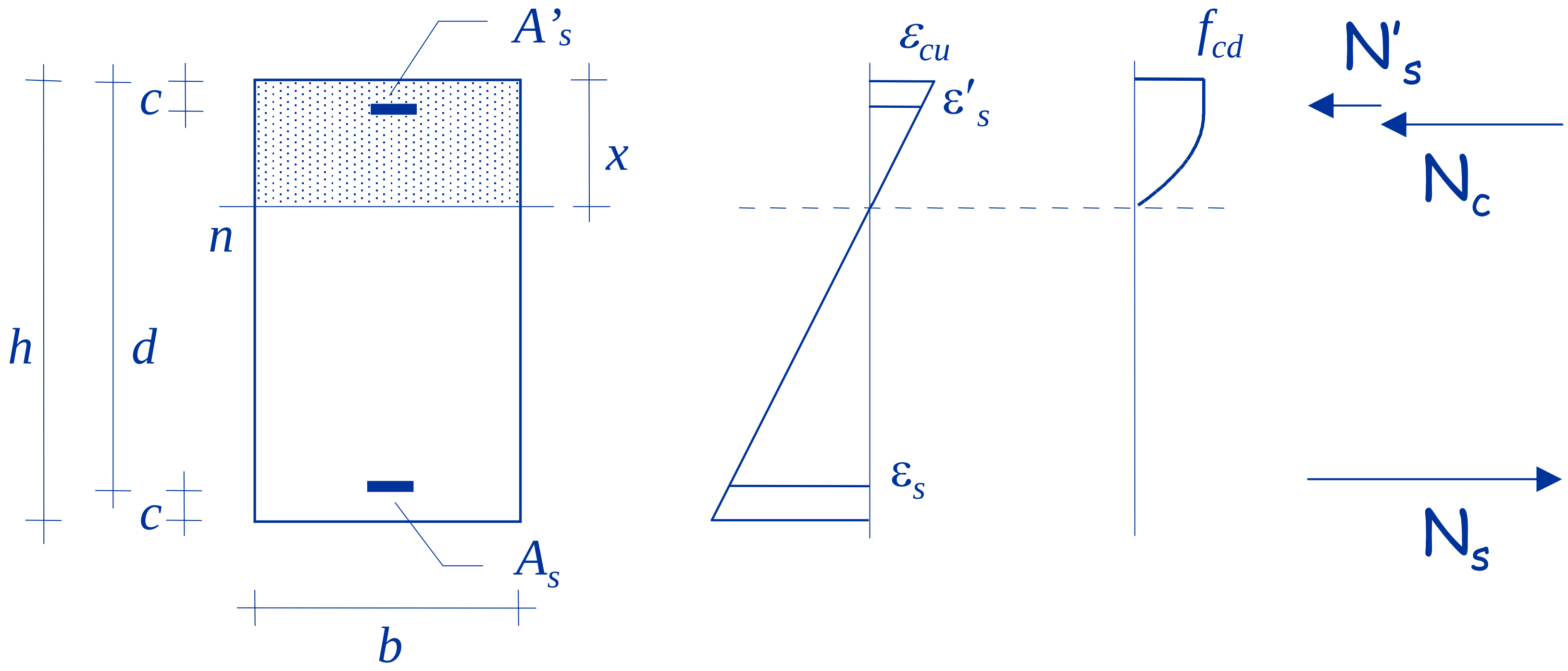
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro

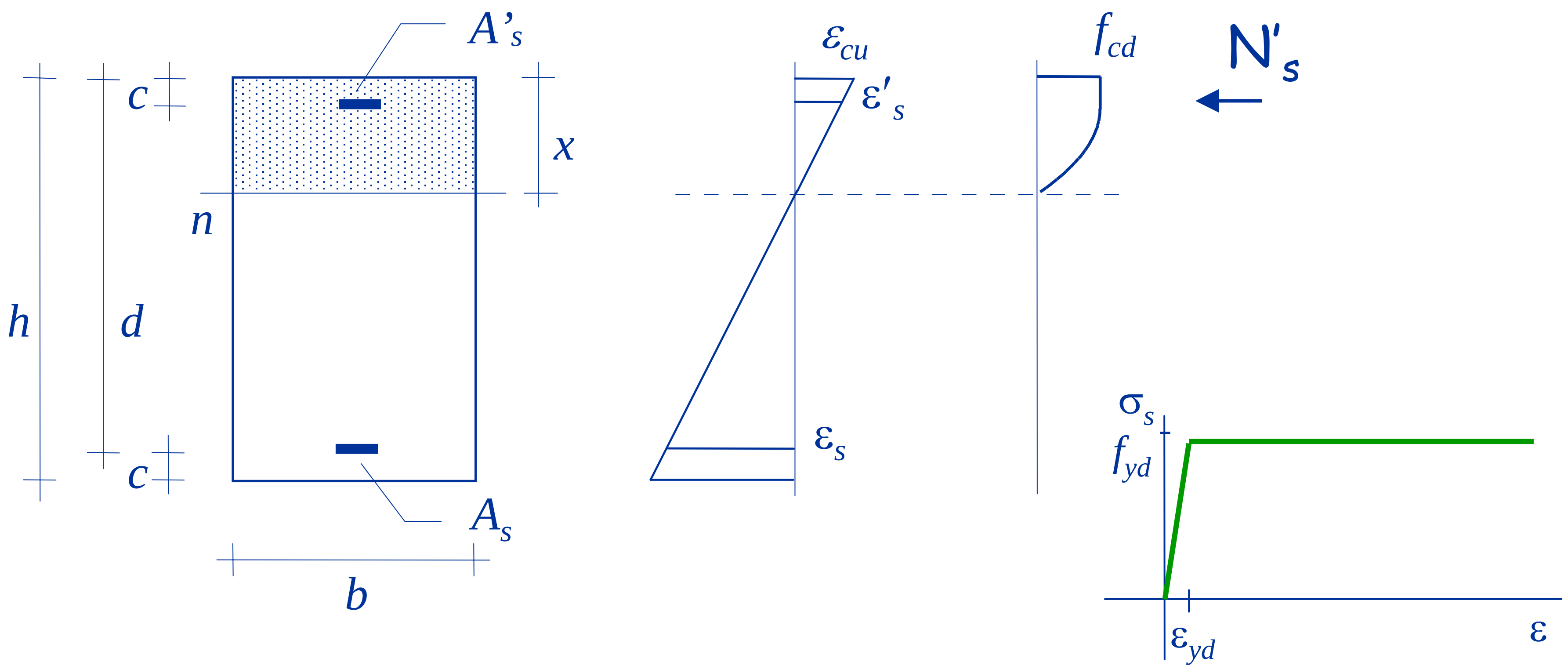
Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = 0$
(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

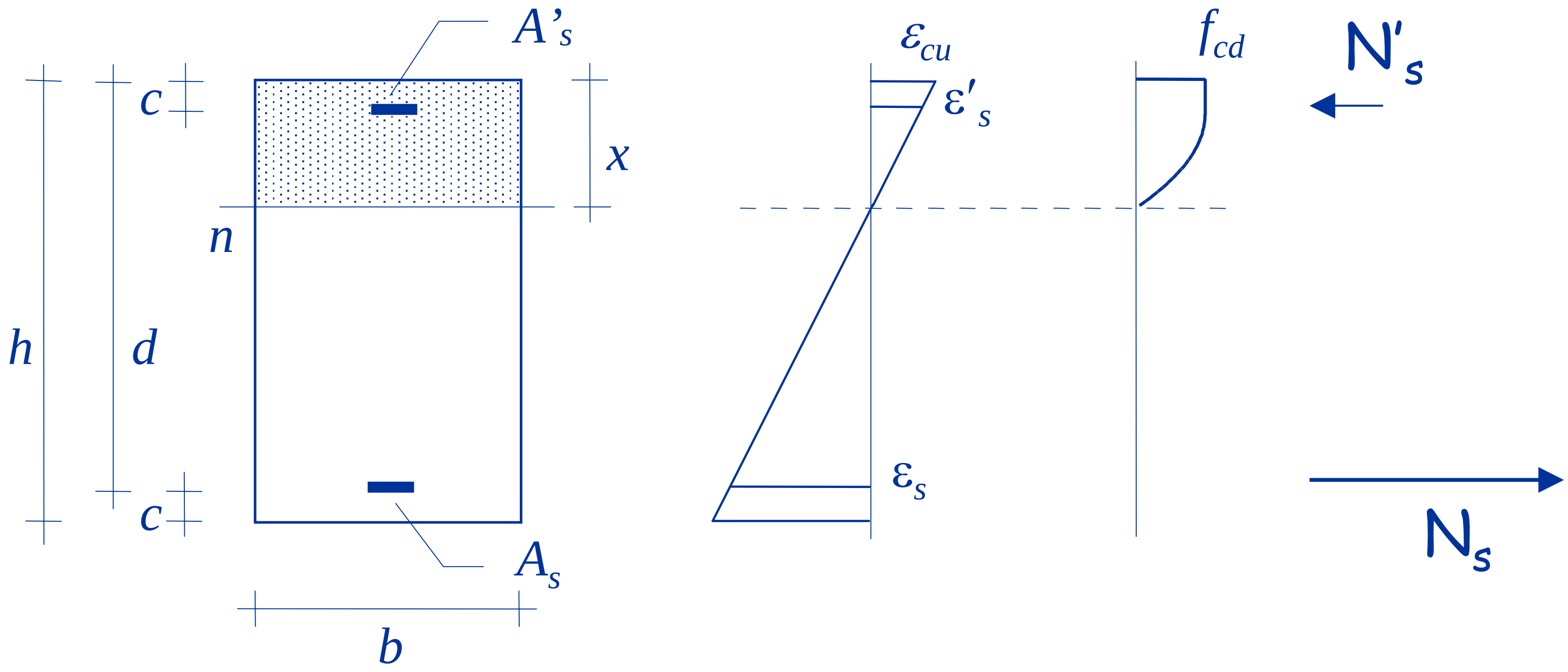


$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x}\varepsilon_{cu}$$

in molti casi $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s\, f_{yd}$

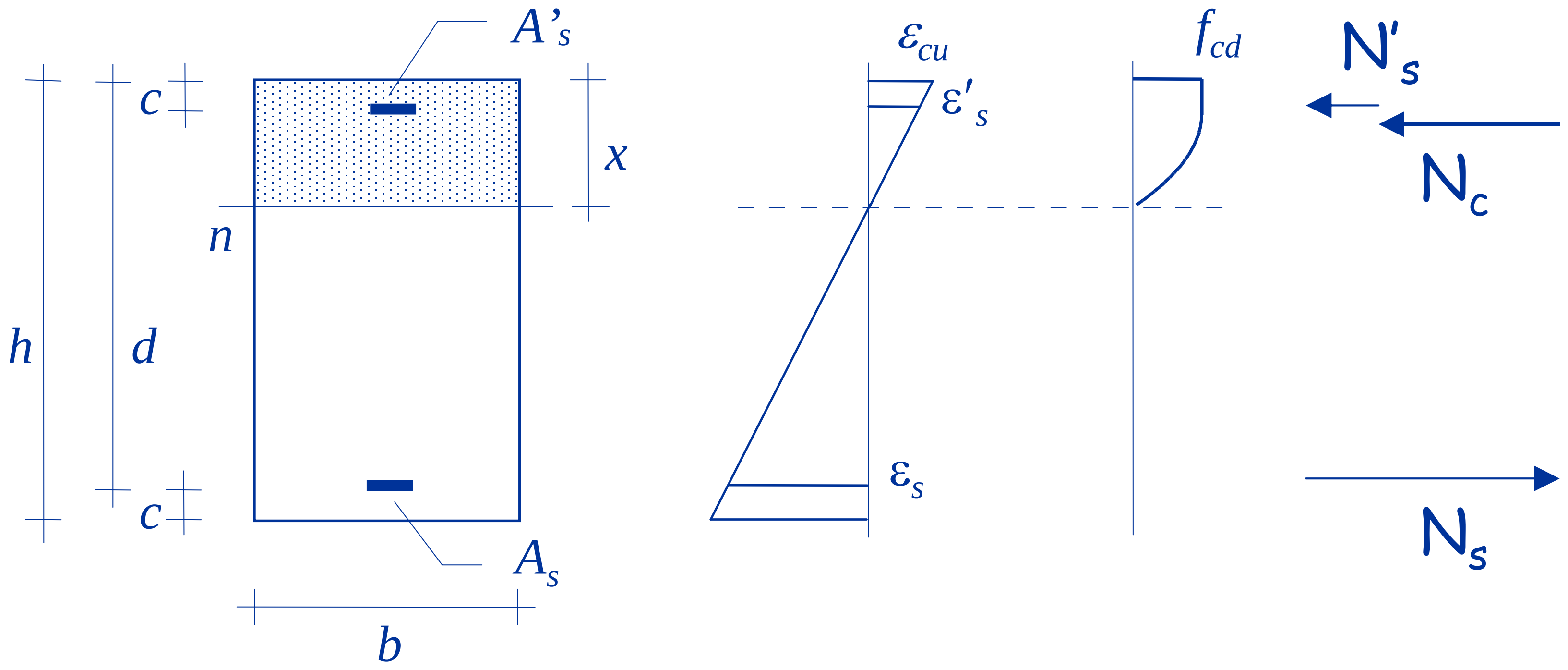
se $\varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \dfrac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s\, \sigma'_s$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \Rightarrow \quad N_s = A_s\, f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta \; b \, x \, f_{cd}$$

per sezione rettangolare, β = 0.810

Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\beta\, b\, x\, f_{cd} + A'_s\, \sigma'_s - A_s\, f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado:

$$\beta\, b\, x\, f_{cd} + A'_s\, f_{yd} - A_s\, f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado

$$\beta\, b\, x\, f_{cd} + A'_s \, \frac{x - c}{x} \, \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \, f_{yd} - A_s\, f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

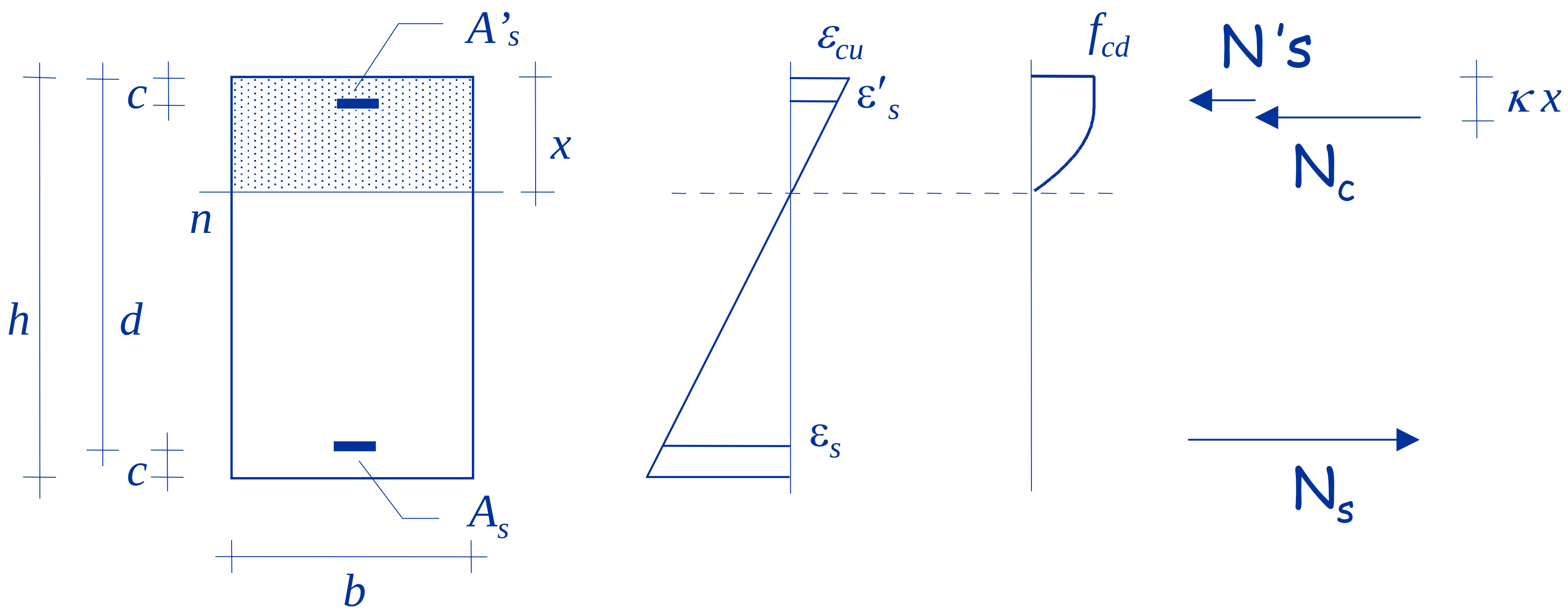
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s\right) \frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s\right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s\, c\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s \, (d - \kappa\, x) + N'_s \, (\kappa\, x - c)$$

per sezione rettangolare, κ = 0.416

Esempio n. 1
verifica di sezione rettangolare

Dati:

M_{Ed} = 160 kNm

Sezione	30x50	Calcestruzzo	C25/30
Armature	$A_s = 4\varnothing 20$	Acciaio	B450C
	$A'_s = 2\varnothing 14$		

Procedura:

1 – individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 1

individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.74 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x}\, \varepsilon_{cu} = \frac{10.74 - 5}{10.74} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.87 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (1.86×10^{-3}) la posizione trovata è esatta

Esempio n. 1
individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

Si ottiene la profondità minima dell'asse neutro affinché l'armatura compressa sia snervata:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.14\ c$$

Per acciaio B450C

Nell'esempio si è ottenuto:

$$x = 10.74\ \text{cm} \geq 2.14\ c = 10.70\ \text{cm}$$

Esempio n. 1
calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s\,(d - \kappa\, x) + N'_s\,(\kappa\, x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1\ \text{kN}$$

$$N'_s = 3.08 \times 391 \times 10^{-1} = 120.4\ \text{kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (45 - 0.416 \times 10.74) + \\ + 120.4 \times (0.416 \times 10.74 - 5)] \times 10^{-2}$$

$$M_{Rd} = 198.4\ \text{kNm}$$

Si noti che
$\kappa\, x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Esempio n. 2
verifica di sezione rettangolare

Dati: M_{Ed} = 160 kNm

Sezione	30x50	Calcestruzzo	C25/30
Armature	A_s = 4∅20	Acciaio	B450C
	A'_s = 3∅20		

Procedura:

1 – individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 2
individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}} = \frac{(12.56 - 9.42) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 3.56 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 3.56 \text{ cm} < 2.14\, c = 10.70 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e …

Esempio n. 2
individuazione dell'asse neutro

… bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s\, c\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}}} = 7.53 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 7.53 \text{ cm} < 2.14\, c = 10.70 \text{ cm}$$

Esempio n. 2
individuazione dell'asse neutro

… bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s\, c\, f_{yd}}{\beta\, b\, f_{cd}}} = 7.53 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \underbrace{\frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}}_{\varepsilon'_s} f_{yd} = 197.8 \text{ MPa}$$

Esempio n. 2
calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s\,(d - \kappa\, x) + N'_s\,(\kappa\, x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1\ \text{kN}$$

$$N'_s = 9.42 \times 197.8 \times 10^{-1} = 186.3\ \text{kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (45 - 0.416 \times 7.53) + $$
$$+ 186.3 \times (0.416 \times 7.53 - 5)] \times 10^{-2}$$

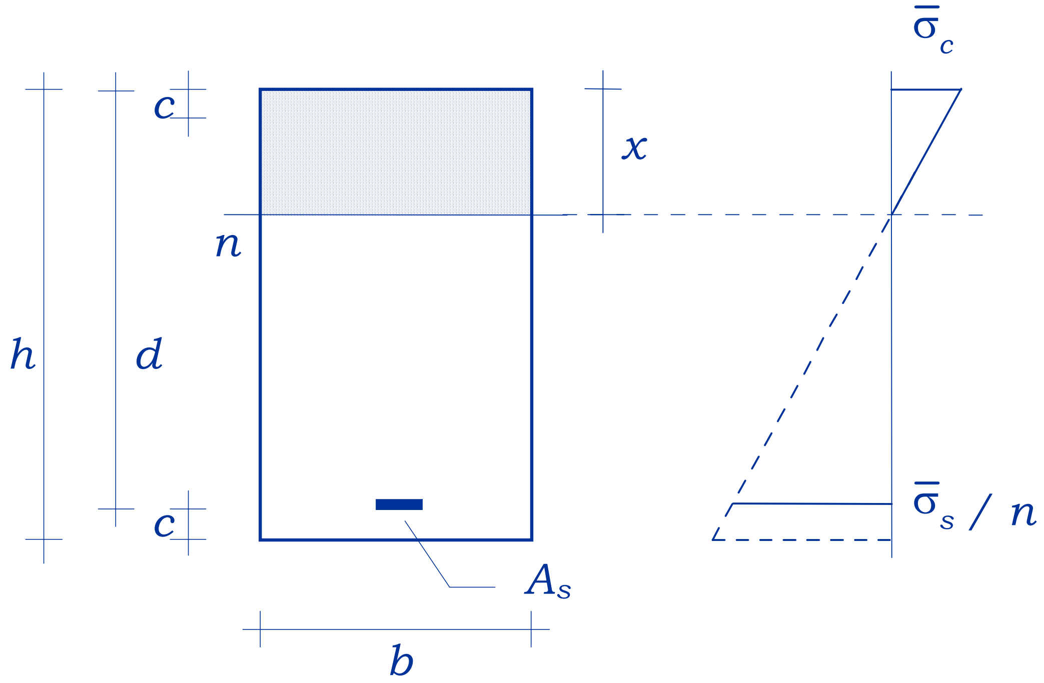
$$M_{Rd} = 202.3\ \text{kNm}$$

Si noti che
$\kappa\, x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

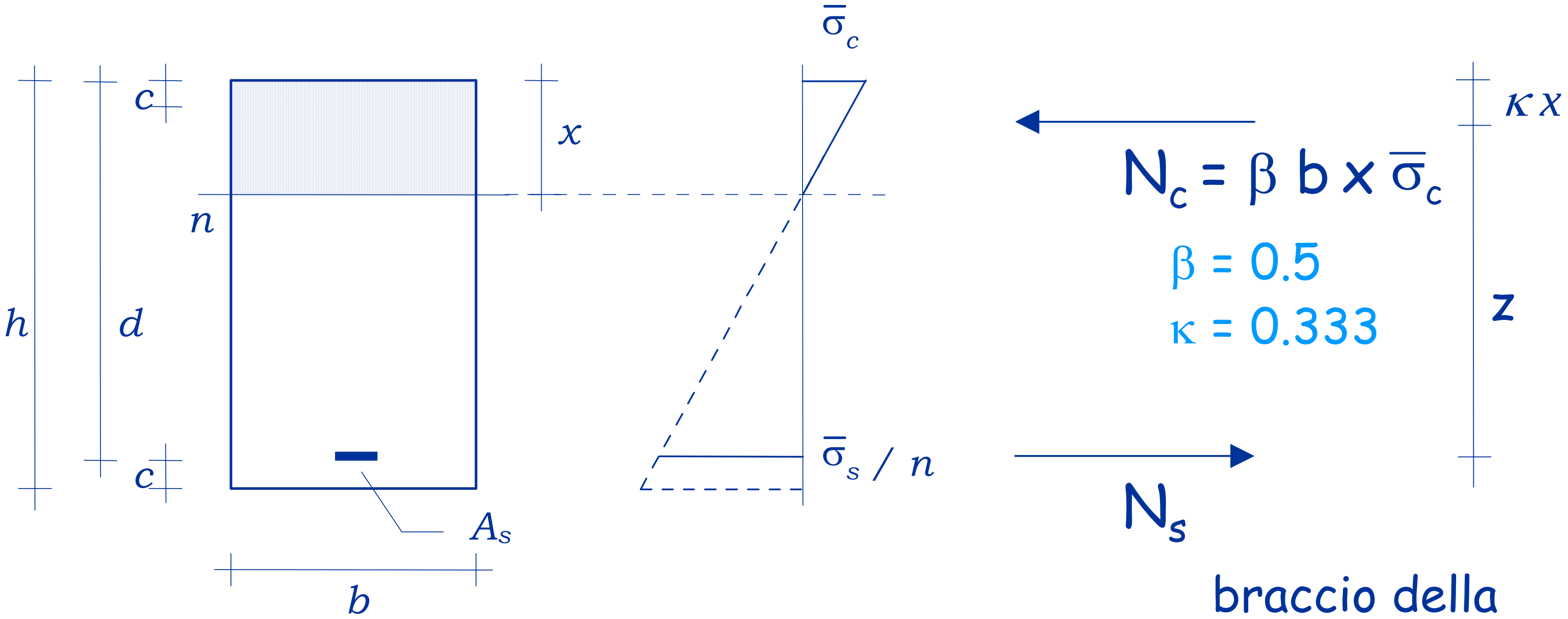
Progetto – tensioni ammissibili



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni
che si vuole avere nella sezione

Progetto – tensioni ammissibili



$N_c = \beta\, b\, x\, \bar{\sigma}_c$

$\beta = 0.5$

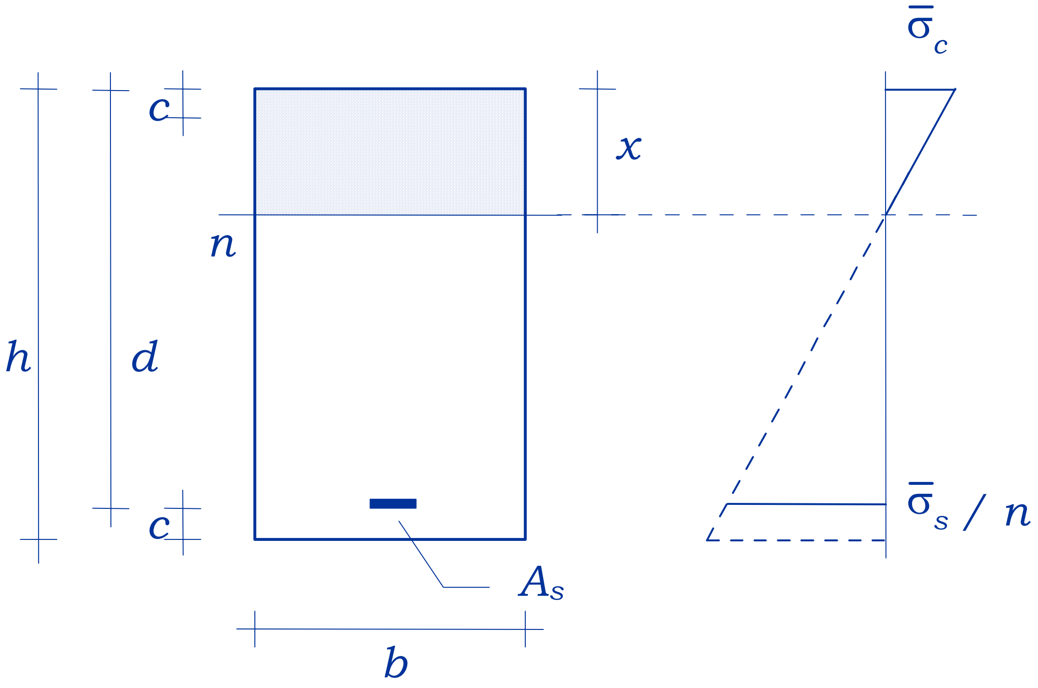
$\kappa = 0.333$

braccio della coppia interna
$z = d - \kappa\, x$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$M = N_c\, z$ $\qquad M = \beta\, b\, \xi\, d\, \bar{\sigma}_c\, (d - \kappa\, \xi\, d)$

Progetto – tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b\,d^2}{r^2}$$

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}}$$

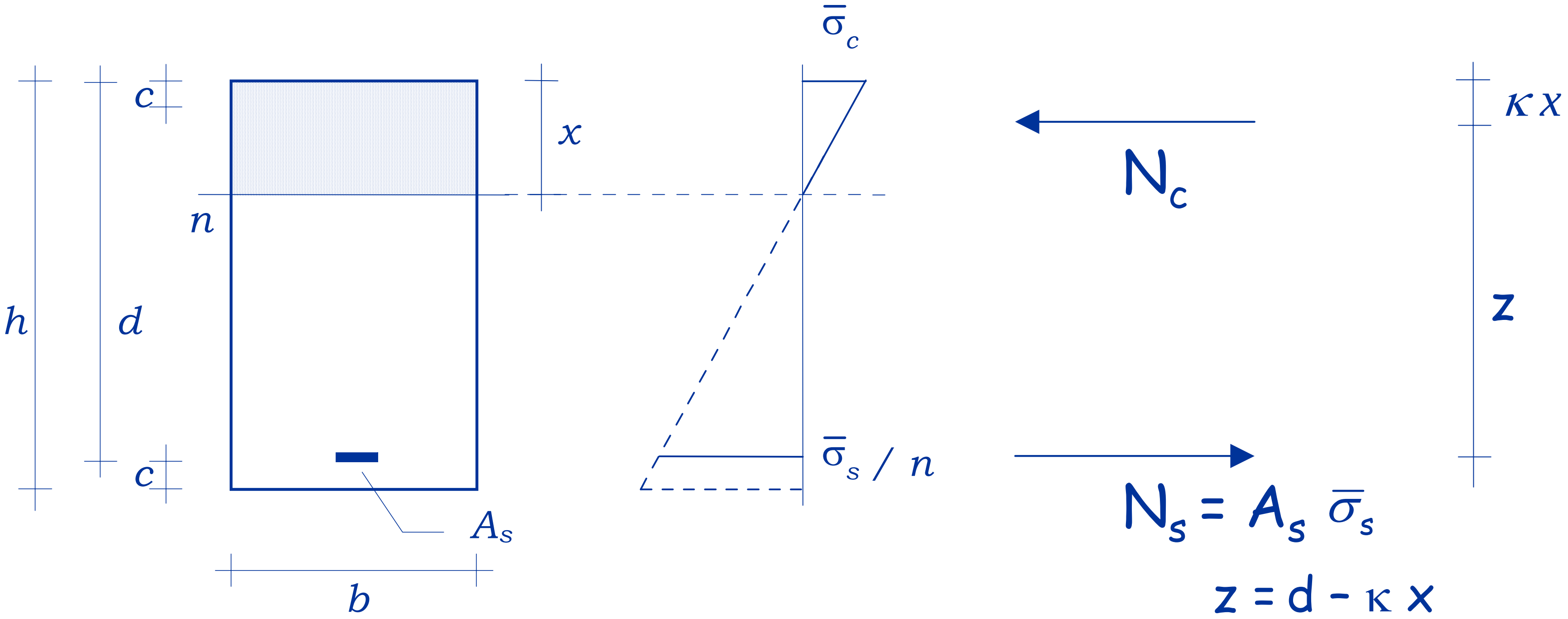
con:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta\,\xi\,(1-\kappa\,\xi)\,\bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c\,z \qquad M = \beta\,b\,\xi\,d\,\bar{\sigma}_c\,(d-\kappa\,\xi\,d)$$

Progetto – tensioni ammissibili

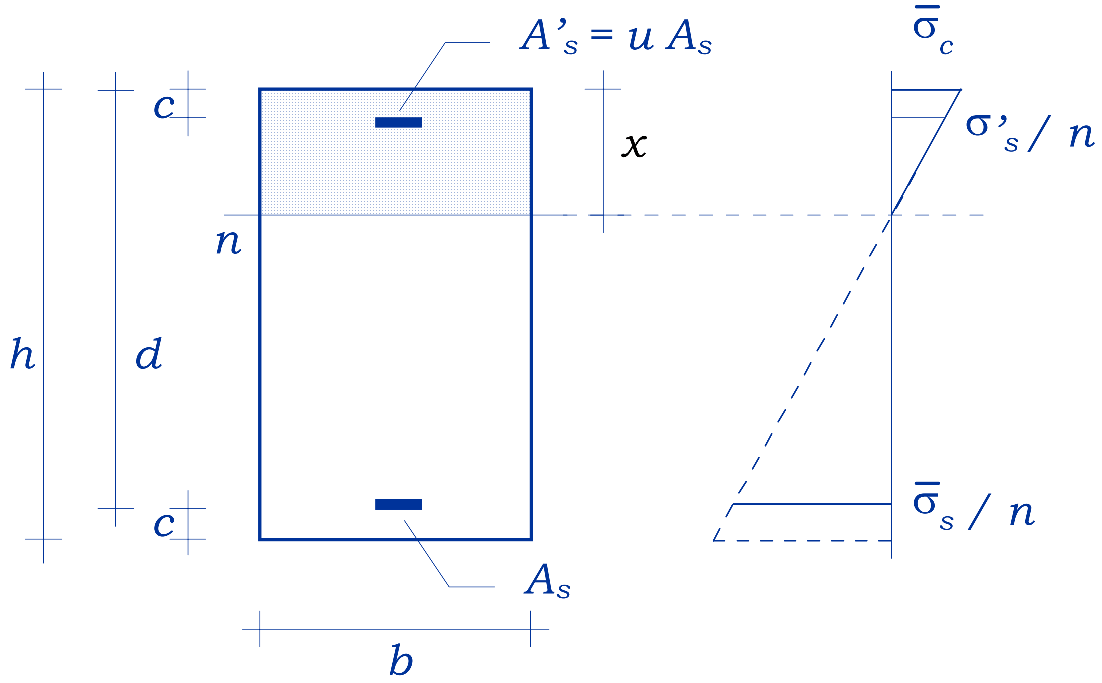


3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$M = N_s \, z$ $\qquad$ $M = A_s \, \bar{\sigma}_s \, z$

$$A_s = \frac{M}{0.9 \, d \, \bar{\sigma}_s}$$

Progetto – tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x - c}{d - x}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, \bar{\sigma}_s}$$

Analogamente per sezione a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

Progetto – stato limite ultimo
Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

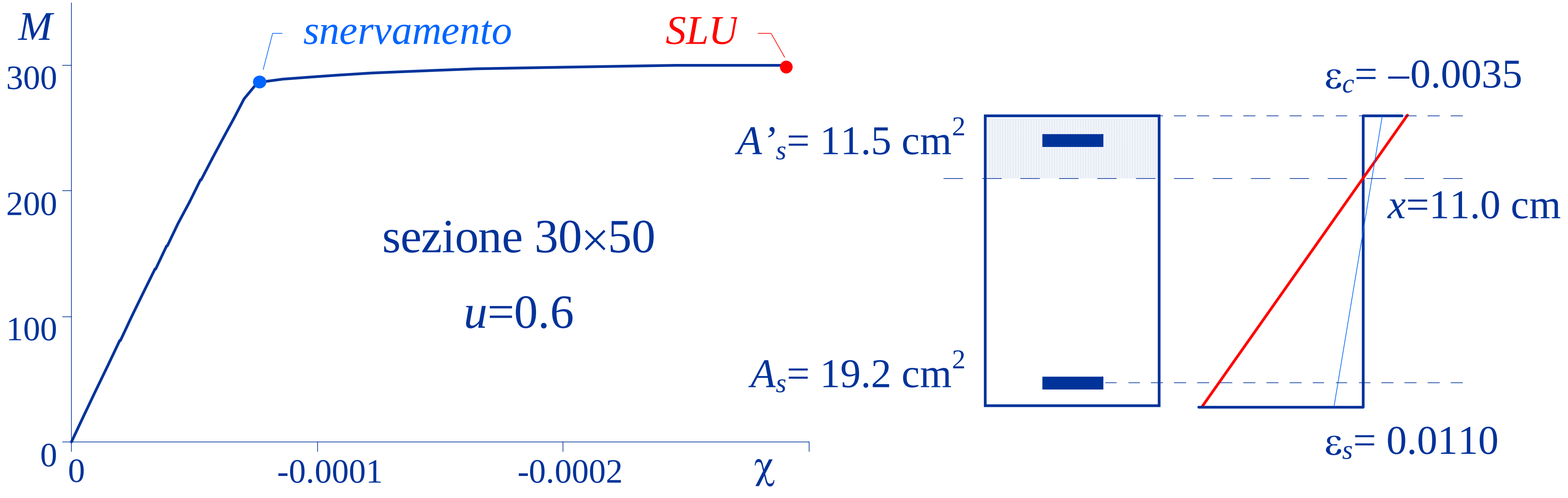
In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.6 M_{Rd} = 300 kNm

$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$ x=11.0 cm χ=-0.000286

Buona duttilità

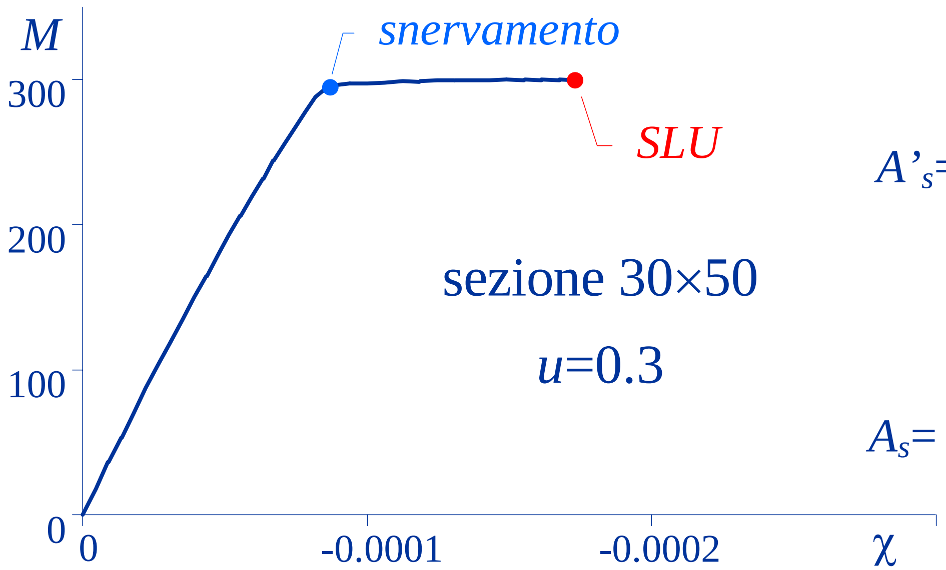


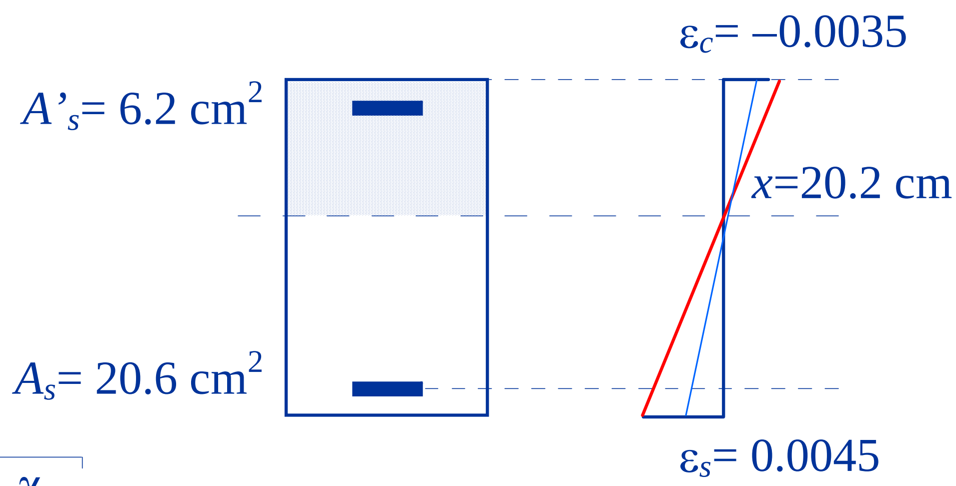
Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.3 M_{Rd} = 300 kNm

$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$ x=20.2 cm χ=-0.000184

Duttilità discreta



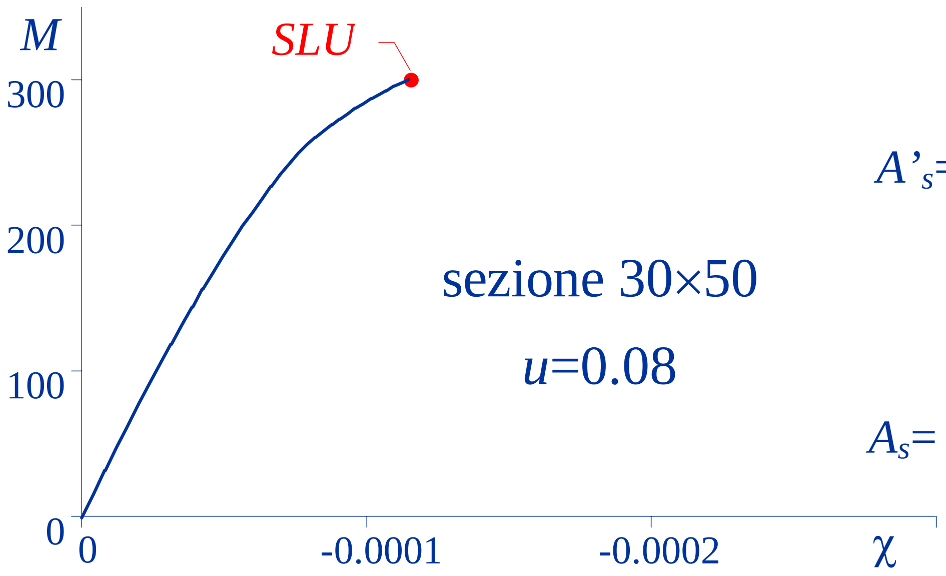


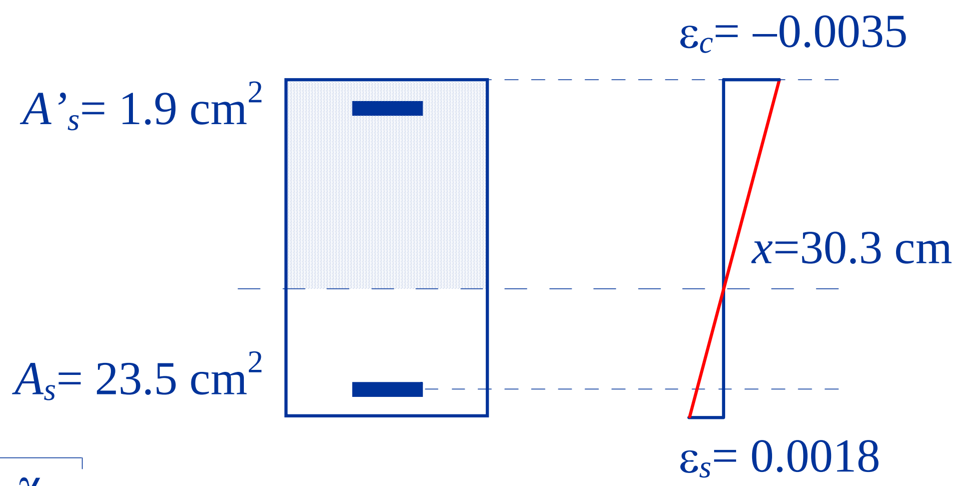
Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.08 M_{Rd} = 300 kNm

ε_{su} = 1.8 x 10^{-3} x=30.3 cm χ=-0.000116

Bassa duttilità





Duttilità della sezione

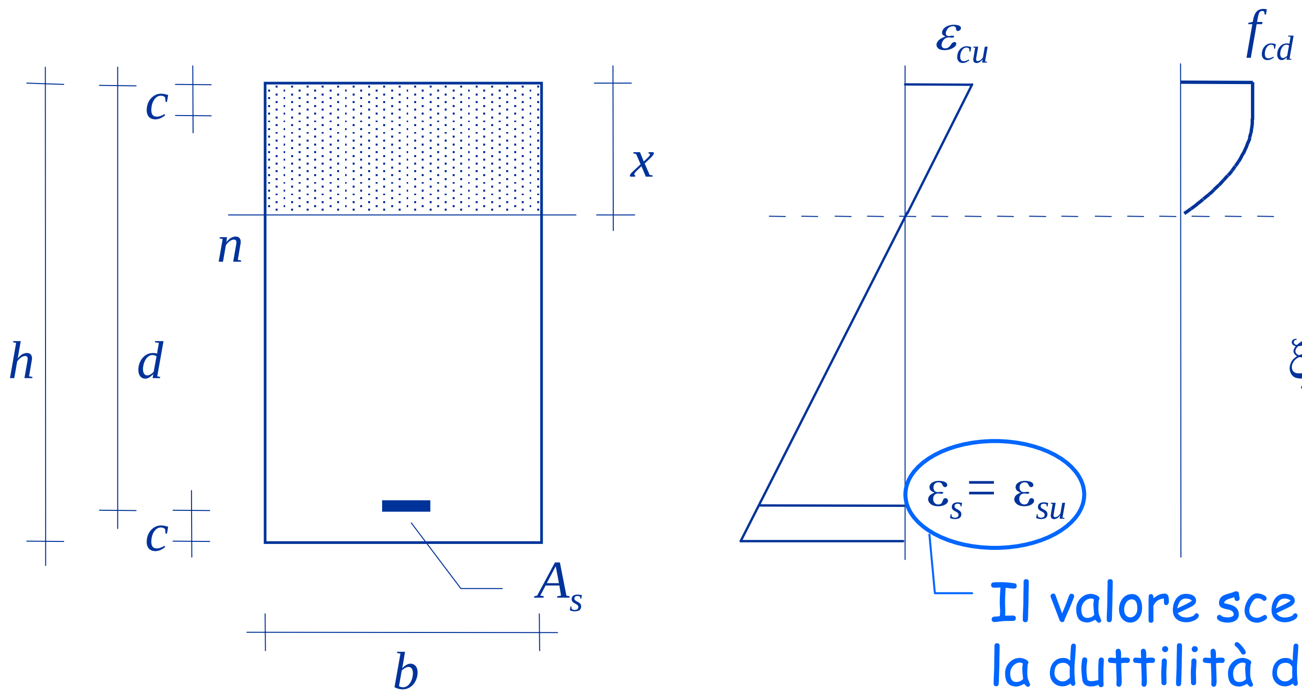
- Le sezioni con minore armatura sono più duttili
- La duttilità cresce con la deformazione ε_s dell'armatura tesa allo SLU

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

- ad alta duttilità se $\varepsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità se $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni in c.a. duttili le progetteremo sempre assumendo $\varepsilon_s \geq 0.010$

Progetto - stato limite ultimo



Il valore scelto per ε_s condiziona la duttilità della sezione

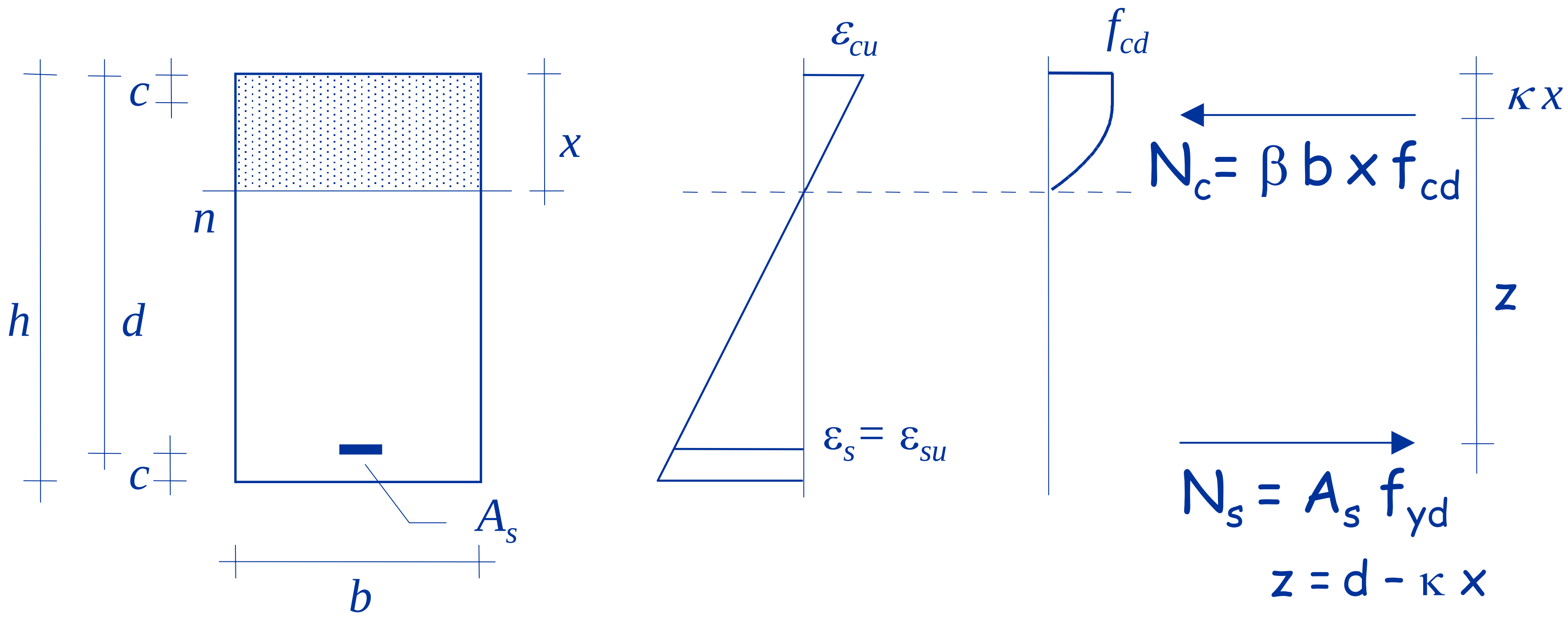
Posso assumere ξ=0.25

$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su}}$$

1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\varepsilon_{su} \cong 10 \times 10^{-3}$

Progetto - stato limite ultimo



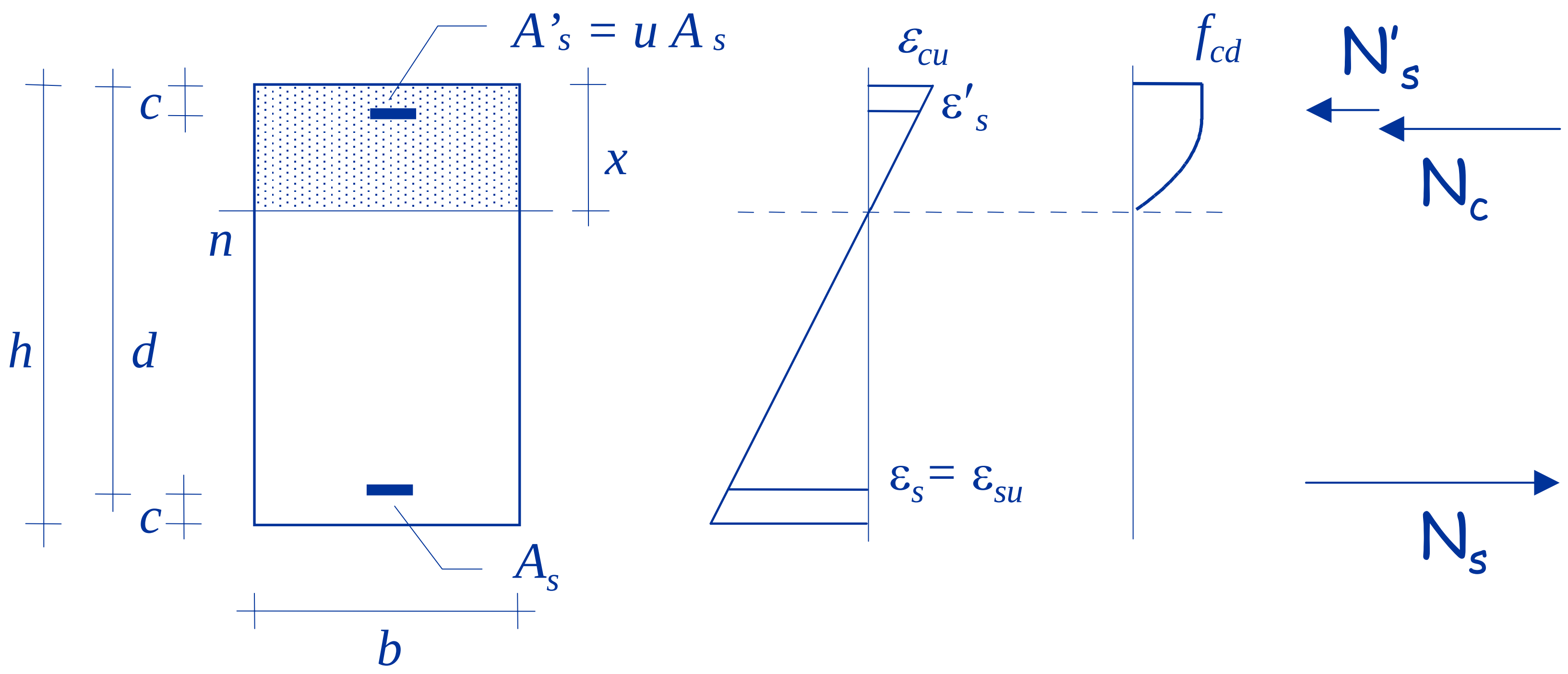
$$z = d - \kappa\, x$$

2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}}$$

con: $$r = \frac{1}{\sqrt{\beta\,\xi\,(1-\kappa\,\xi)\, f_{cd}}}$$

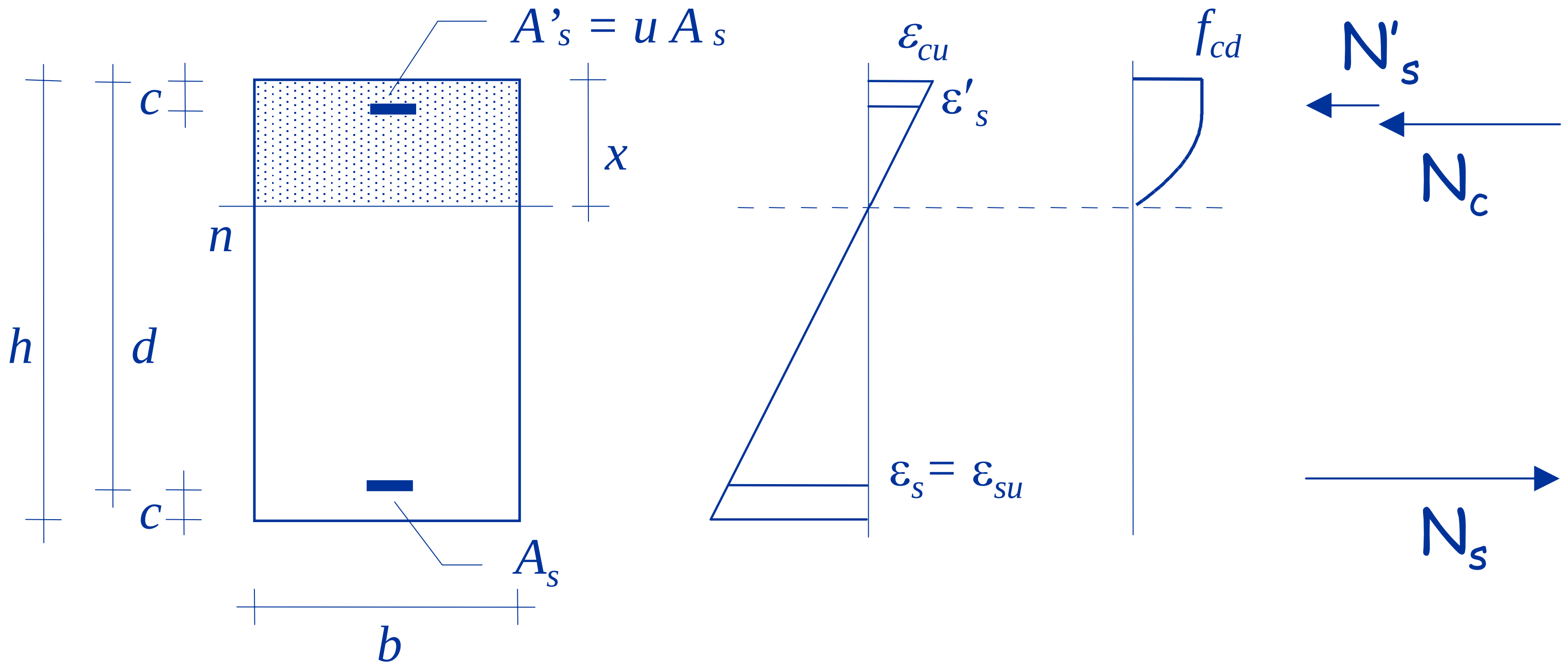
Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9\,d\,f_{yd}}$$

Valori di z/d (C25/30, B450C)

sezioni progettate con $\varepsilon_c=\varepsilon_{cu}$ ed $\varepsilon_s=0.010$ (ξ = 0.259)

Tensioni ammissibili

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 0.49	s' = 0.42	s' = 0.26
0	0.878		
0.25	0.887	0.881	0.873
0.50	0.896	0.883	0.868
0.75	0.905	0.885	0.863
1.00	0.914	0.888	0.858

Stato limite ultimo

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 1.00	s' = 1.00	s' = 0.42
0	0.892		
0.25	0.907	0.894	0.884
0.50	0.921	0.896	0.876

Sempre molto prossimo a 0.9

Quanto vale il coefficiente r?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per C25/30 e B450C: $r = 0.0253$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30: $r = 0.0194$

Esempio n. 1

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0253\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.50 \text{ m}$$

uso 30x55

$$A_s = \frac{M}{0.9\,d\,\overline{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.50 \times 255} = 10.02 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0194\sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.45 \text{ m}$$

uso 30x50

$$A_s = \frac{M}{0.9\,d\,f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.45 \times 391} = 10.10 \text{ cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r'?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r\sqrt{1 - s'u} \qquad \text{con} \qquad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \qquad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto γ = c/d)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 0.49	s' = 0.42	s' = 0.26
0	0.0253		
0.25	0.0236	0.0239	0.0245
0.50	0.0217	0.0225	0.0238
0.75	0.0198	0.0209	0.0229
1.00	0.0176	0.0192	0.0220

Stato limite ultimo

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 1.00	s' = 1.00	s' = 0.42
0	0.0194		
0.25	0.0167	0.0168	0.0185
0.50	0.0135	0.0137	0.0174

Nota: γ = 0.05 per travi emergenti
γ = 0.20 per travi a spessore

Valori di r'/r (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 0.49	s' = 0.42	s' = 0.26
0		1.000	
0.25	0.931	0.945	0.970
0.50	0.856	0.888	0.939
0.75	0.781	0.826	0.906
1.00	0.697	0.760	0.871

Travi emergenti　　Travi a spessore

Stato limite ultimo

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 1.00	s' = 1.00	s' = 0.42
0		1.000	
0.25	0.859	0.865	0.951
0.50	0.696	0.706	0.898

Travi emergenti　　Travi a spessore

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.2 \div 0.5$)

Le differenze sono significative nel progetto delle travi emergenti e si riducono nel progetto delle travi a spessore

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando u = A'_s/A_s è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b\, d \geq 0.13\ \%\ b\, d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 4\ \%\ b\, h$$

$$A'_s \leq 4\ \%\ b\, h$$

Percentuale massima consigliata: $1 \div 1.5\%$

Limiti alle formule di progetto
per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \le \rho\, b\, d \qquad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha:

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9\, d\, f_{yd}} \le \rho\, b\, d$$

E quindi:

$$d \ge r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \qquad \text{con} \qquad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9\, \rho\, f_{yd}}}$$

$= 0.0169$ se $\rho=0.010$

$= 0.0138$ se $\rho=0.015$

Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s

Suggerisco per r' un limite tra 0.015 e 0.017

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura (u=0.25, γ=0.10)

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0239\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.47 \text{ m}$$

uso 30x55

era 0.50 m per u=0

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0168\sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m}$$

uso 30x45

era 0.45 m per u=0

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura (u=0.25, γ=0.10)

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0239\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.47 \text{ m}$$

uso 30x55

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, \overline{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.50 \times 255} = 10.02 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0168\sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m}$$

uso 30x45

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9\, d\, f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.40 \times 391} = 11.36 \text{ cm}^2$$

era 10.10 cm^2 per u=0

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura (u=0.50, γ=0.10)

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0225\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.44\ \text{m}$$

uso 30x50

era 0.50 m per u=0
0.47 m per u=0.25

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = \underset{0.015}{\cancel{0.0137}}\sqrt{\frac{160}{0.30}} = \overset{0.35}{\cancel{0.31}}\ \text{m}$$

uso 30x40

era 0.45 m per u=0
0.39 m per u=0.25

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura (u=0.50, γ=0.10)

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45\ \text{m}$$

uso 30x50

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, \overline{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.45 \times 255} = 11.14\ \text{cm}^2$$

era 10.02 cm^2 per u=0

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160$ kNm

$$d = r'\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.015\sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.35\ \text{m}$$

uso 30x40

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9\, d\, f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.35 \times 391} = 12.99\ \text{cm}^2$$

era 10.10 cm^2 per u=0

Progetto allo stato limite ultimo - commento

Si ottengono sezioni trasversali:

- simili a quelle richieste dal metodo delle tensioni ammissibili se non si considera l'armatura compressa
- sensibilmente più basse quando si considera l'armatura compressa

L'armatura tesa:

- é simile a quella richiesta dal metodo delle tensioni ammissibili per sezioni a semplice armatura
- può divenire eccessivamente grande quando si riduce l'altezza della sezioni sfruttando l'effetto positivo dell'armatura compressa

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
r' = 0.018 o 0.017

(corrisponde a 0<u<25% per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori un po' maggiori
r' = 0.019 (corrisponde a 0<u<25% per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura dell'1.5% si può scendere al valore
r' = 0.015 (ma non andare mai al di sotto di questi)

Criteri di buona progettazione (SLU)

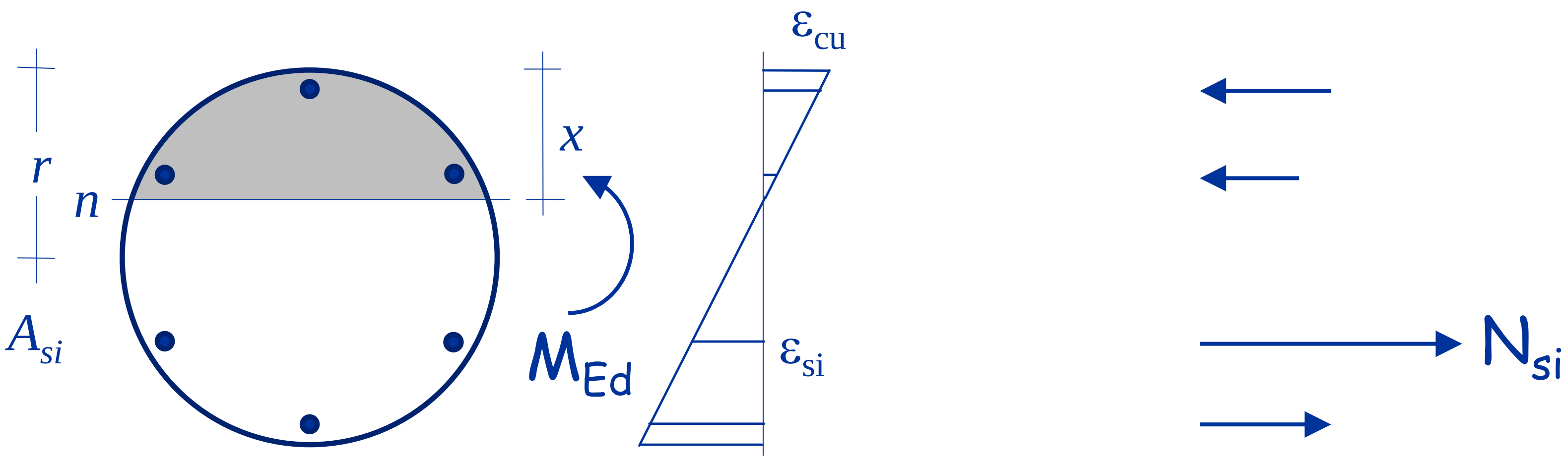
Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a 0.9 d

Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore (0.8 d)

Sezioni di forma generica

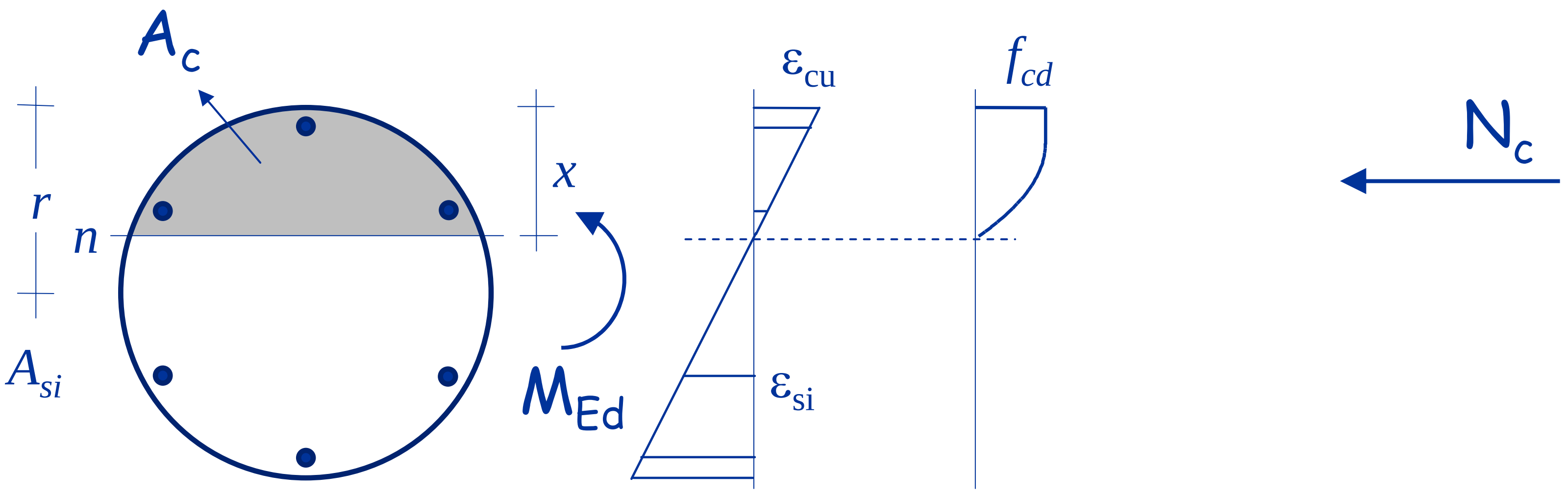
Verifica sezione circolare



Risultanti delle tensioni nelle armature

ε_{si}	⇒	σ_{si}	⇒	$N_{si} = A_{si}\,\sigma_{si}$
(Diagramma ε)		(Legame σ-ε)		

Verifica sezione circolare



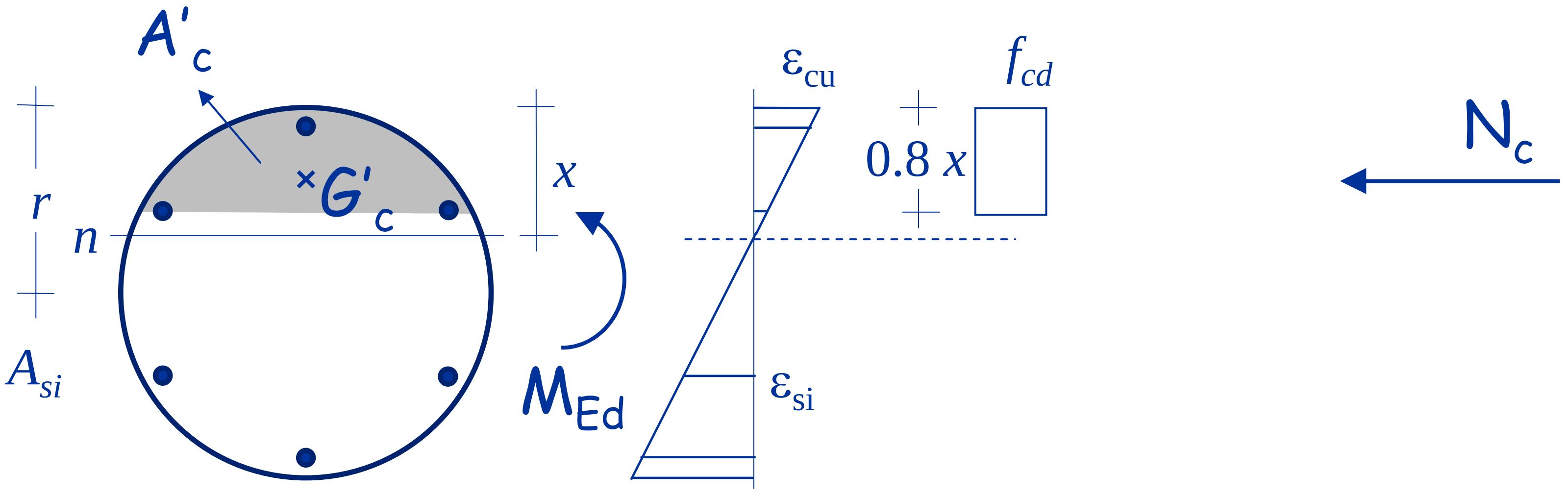
Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

$\cancel{N_c = \beta\, A_c\, f_{cd}}$ Ma quanto vale β? $N_c = \int_{A_c} \sigma \, dA$

A_c = area di calcestruzzo compresso

o in alternativa …

Verifica sezione circolare



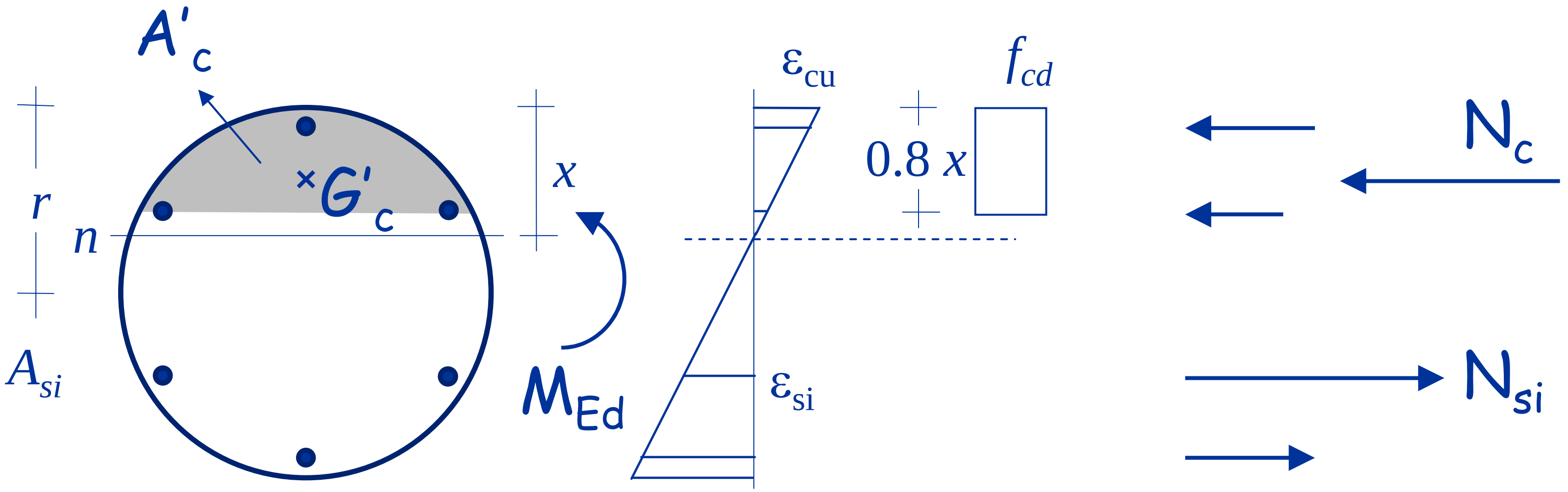
Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

$$\cancel{N_c = \int_{A_c} \sigma \, dA} \quad \Rightarrow \quad N_c = A'_c \, f_{cd}$$

A'_c = area di calcestruzzo compresso con $\sigma_c \neq 0$

N_c è applicato nel baricentro di A'_c (G'_c)

Verifica sezione circolare

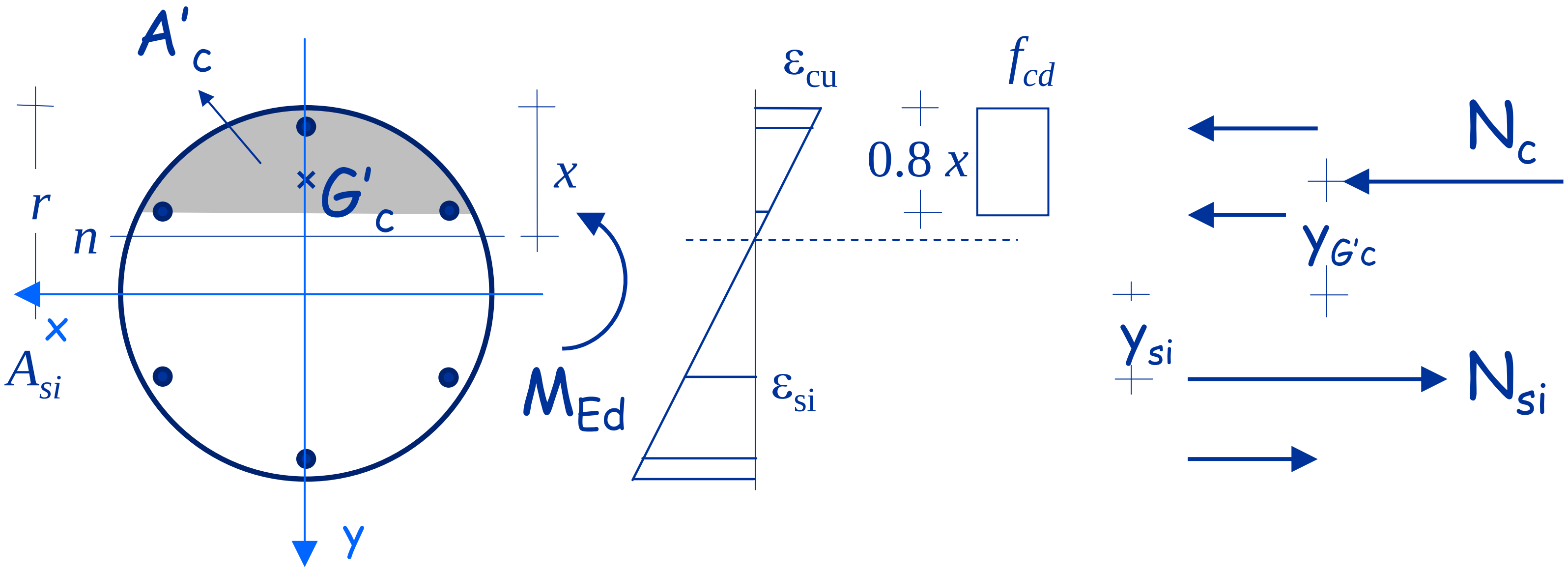


Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \Sigma\, N_{si} = 0$$

Posso ricavare x per tentativi

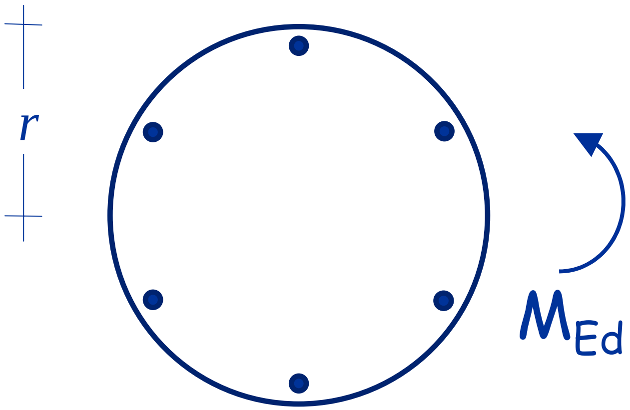
Verifica sezione circolare



Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c \, y_{G'c} + \sum N_{si} \, y_{si}$$

Esempio



Dati:

Sezione	r = 20 cm
	c = 4 cm
Armature	6∅14
Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

M_{Ed} = 45 kNm

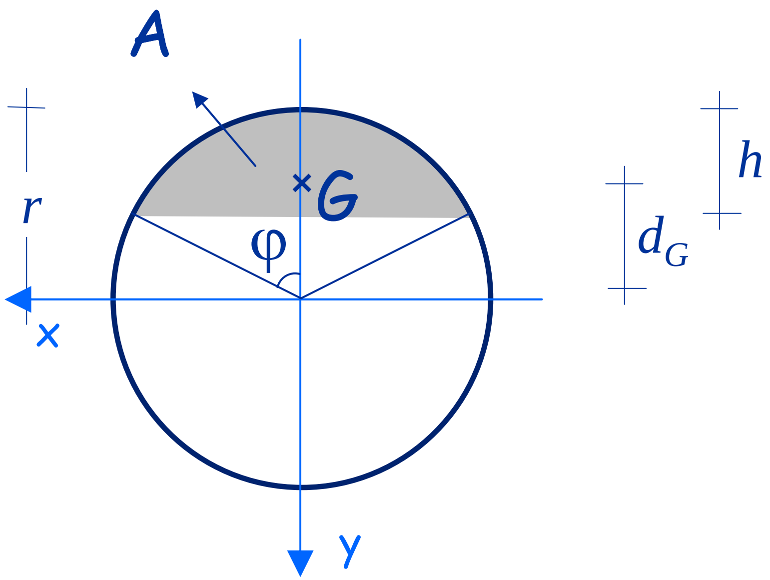
Procedura:

1 – individuazione dell'asse neutro per tentativi

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Calcolo di N_c

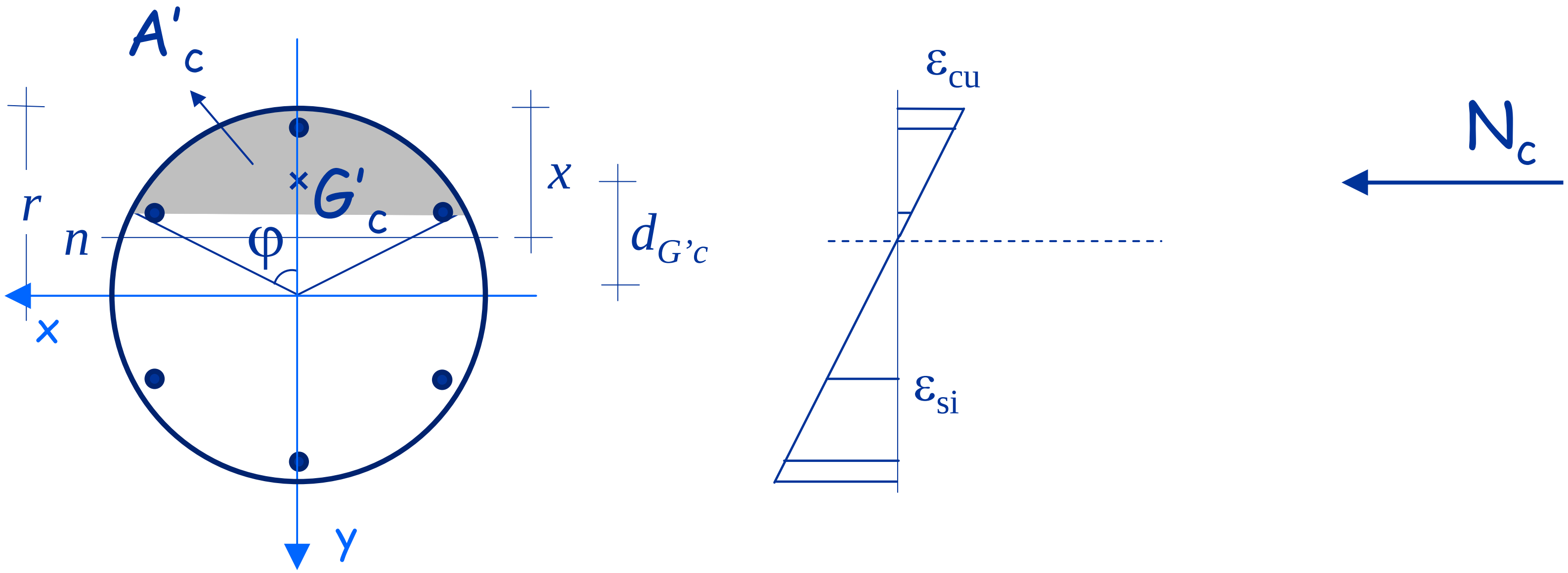


$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \text{sen}\, 2\varphi)$$

$$d_G = \frac{2}{3} \frac{r^3 \text{sen}^3\, 2\varphi}{A}$$

Calcolo di N_c



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r - 0.8\,x}{r}\right)$$

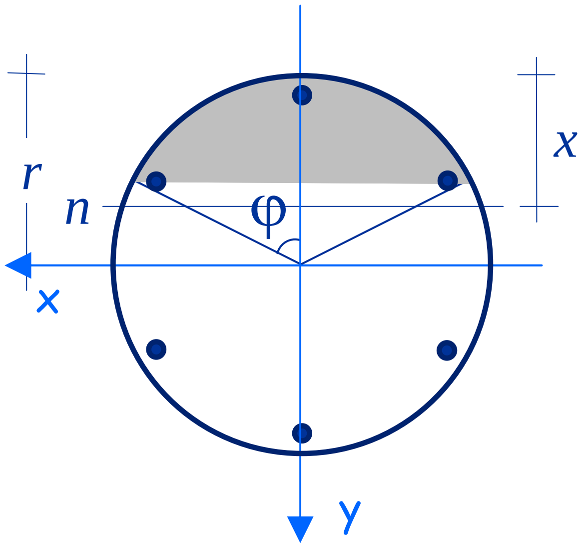
$h = 0.8\,x$

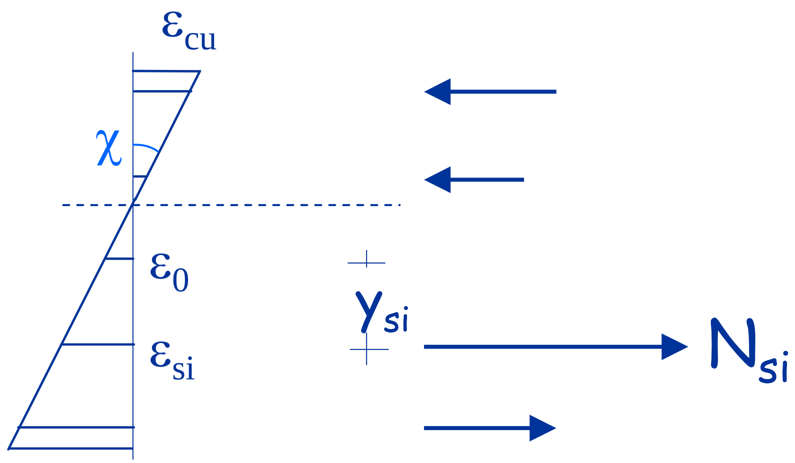
$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \text{sen}\,2\varphi)$$

$$N_c = A'_c\, f_{cd}$$

$$y_{G'c} = -d_{G'c} = -\frac{2}{3}\frac{r^3 \text{sen}^3\,2\varphi}{A'_c}$$

Calcolo di N_{si}





$$N_{si} = A_{si}\,\sigma_{si}$$

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_{cu}\left(1 - \frac{r}{x}\right)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x}$$

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_0 + \chi\, y_{si}$$

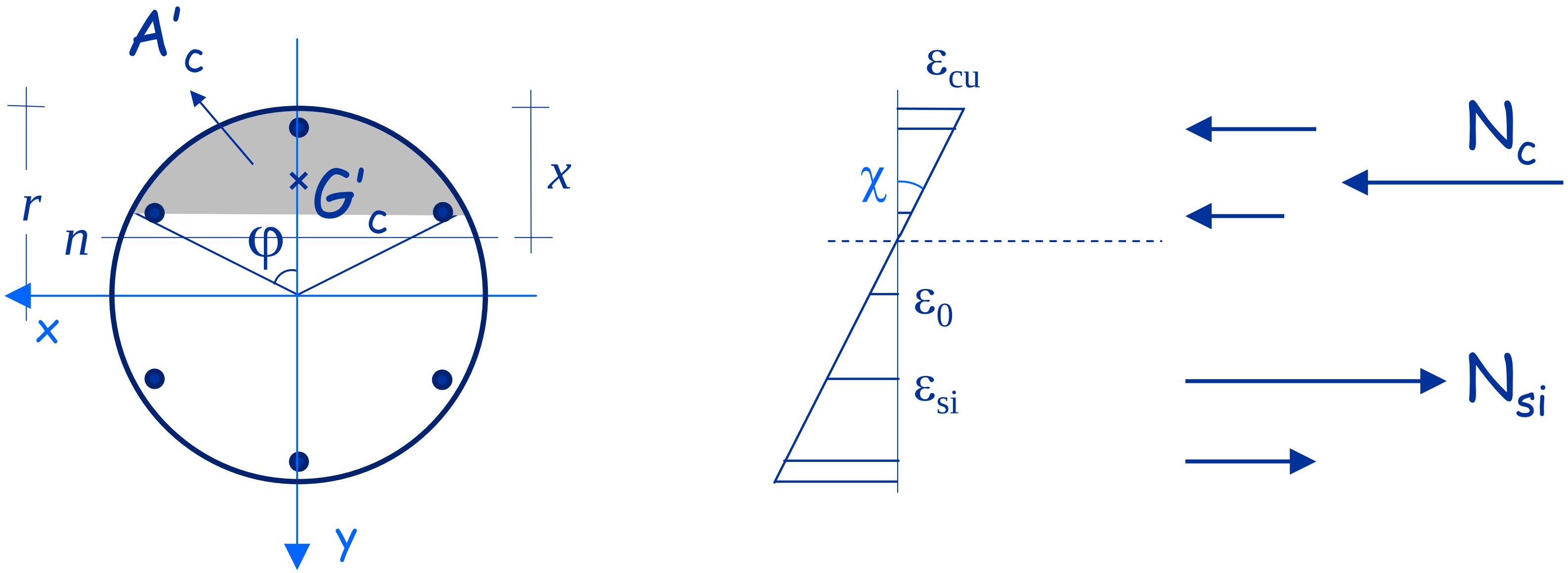
$$\Rightarrow$$

$$\sigma_{si} = -f_{yd} \qquad \varepsilon_{si} \le -\varepsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = E\,\varepsilon_{si} \qquad -\varepsilon_{yd} < \varepsilon_{si} < \varepsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd} \qquad \varepsilon_{si} \ge \varepsilon_{yd}$$

Determinazione di x



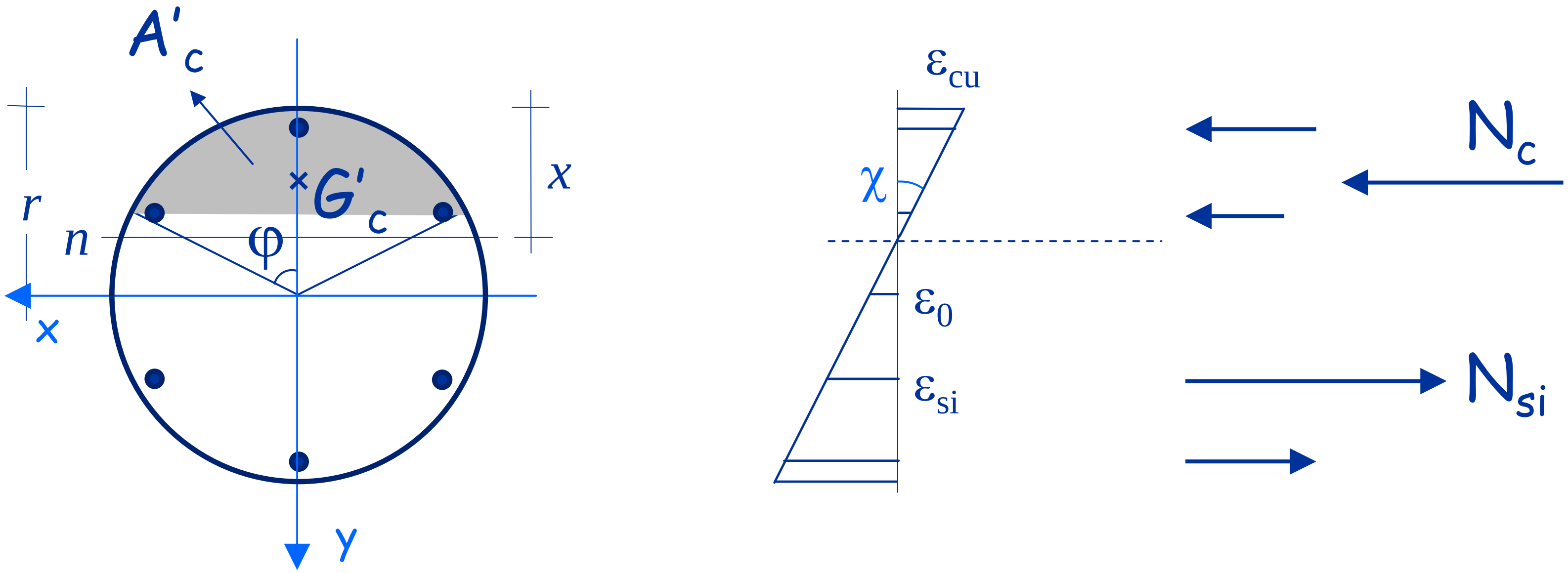
Scelgo x = 10 cm (ad esempio)

N_c = -254.1 kN

N_{s1} = -60.2 kN; N_{s2} = 45.3 kN; N_{s3} = 120.5 kN; N_{s4} = 60.2 kN

$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4}$ = -88.3 kN

Determinazione di x



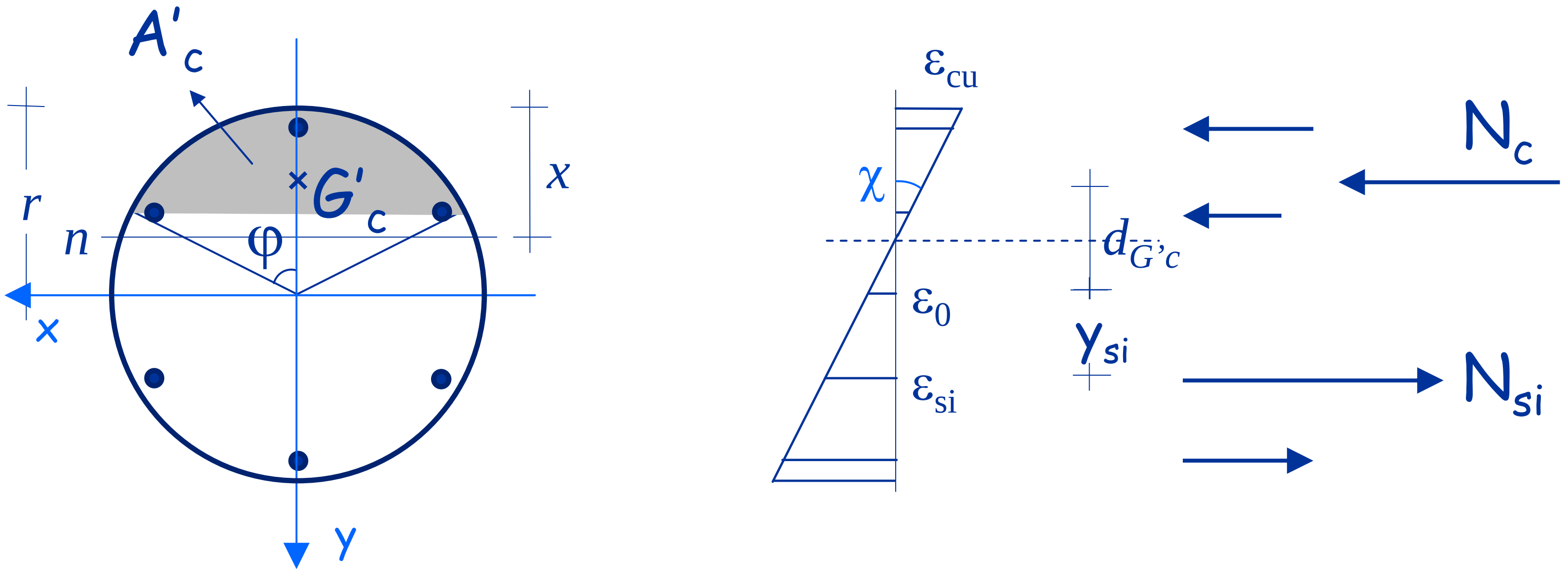
Per tentativi determino x = 8.68 cm

N_c = -207.2 kN

N_{s1} = -60.2 kN; N_{s2} = 86.7 kN; N_{s3} = 120.5 kN; N_{s4} = 60.2 kN

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = 0$$

Determinazione di M_{Rd}



N_c = -207.2 kN

N_{s1} = -60.2 kN

N_{s2} = 86.7 kN

N_{s3} = 120.5 kN

N_{s4} = 60.2 kN

$y_{G'c}$ = -15.9 cm

y_{S1} = -16 cm

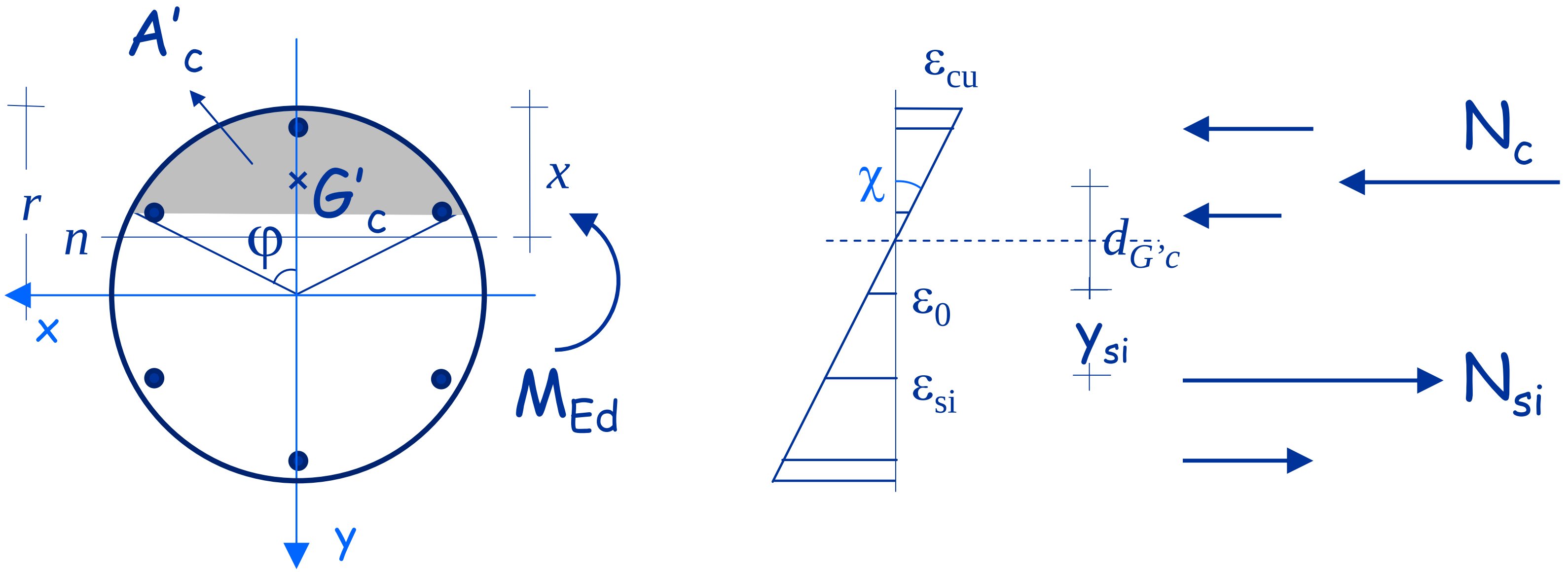
y_{S2} = - 8 cm

y_{S3} = 8 cm

y_{S4} = 16 cm

$$M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

Verifica



$$M_{Ed} = 45\ \text{kNm} < M_{Rd} = 54.9\ \text{kNm}$$

La sezione è verificata