

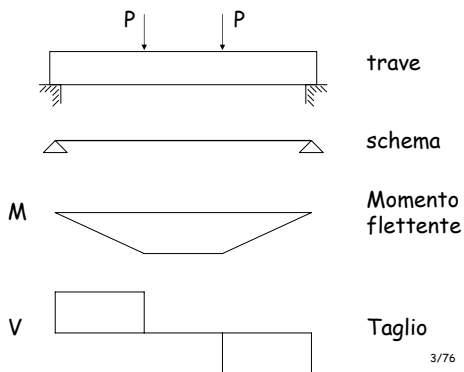
Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

5 - Taglio e torsione

Bologna
3-4 maggio 2012
Edoardo M. Marino

Taglio

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



Meccanismi di resistenza a taglio

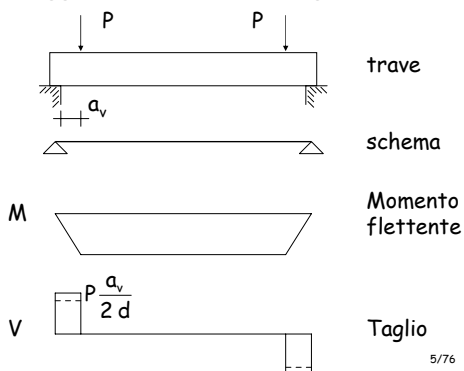
- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]

4/76

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



Meccanismi di resistenza a taglio

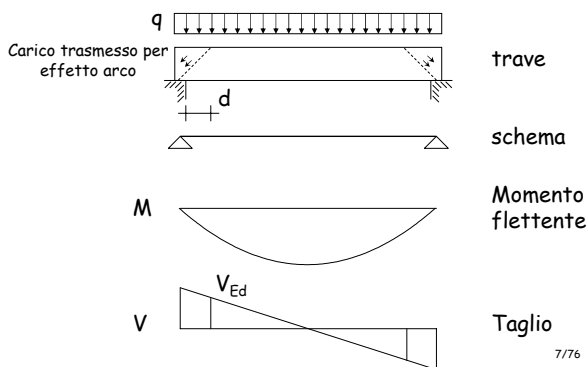
- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

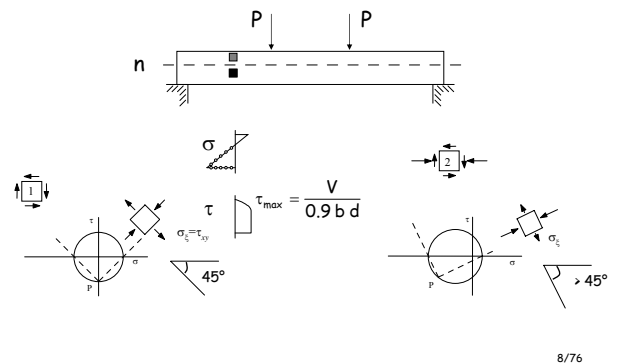
- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]
- In presenza di carichi distribuiti il taglio non deve essere verificato ad una distanza minore di d dalla faccia dell'appoggio [EC2, punto 6.2.1 (8)]

6/76

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione



Taglio:
resistenza di una trave
in assenza di armatura a taglio

Verifica - tensioni ammissibili

Non è necessaria armatura a taglio se $\tau < \tau_{c0}$

Vuol dire che:

- Non si accetta trazione dovuta alla flessione
- Si accettano modeste trazioni dovute al taglio

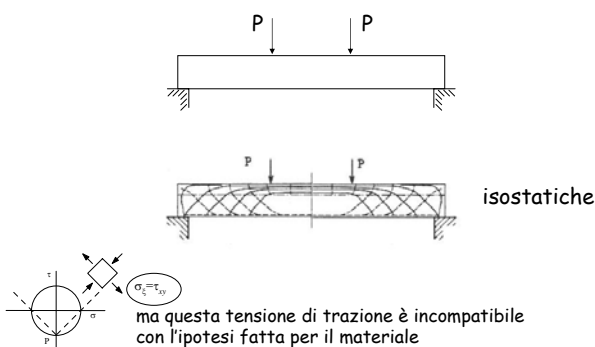
Il taglio al di sotto del quale non è necessaria
armatura a taglio è

$$V_{c0} = 0.9 \tau_{c0} b d$$

Nota: si devono comunque disporre armature
minime a taglio, tranne che nei solai

10/76

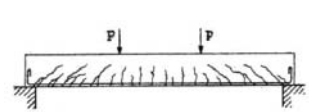
Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione



Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio

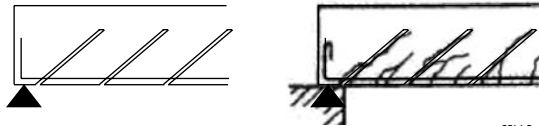


12/76

Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio



Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

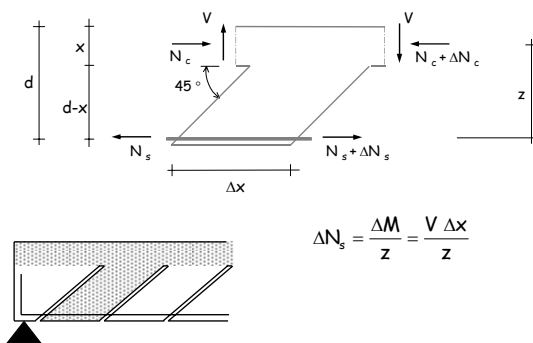
Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio

Modello a pettine



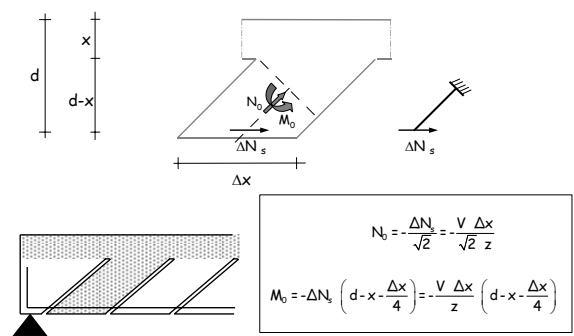
14/76

Resistenza del dente



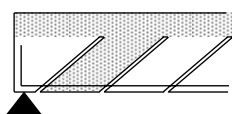
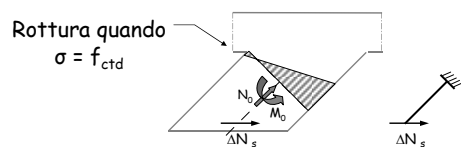
15/76

Resistenza del dente



16/76

Resistenza del dente

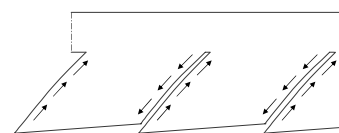


Resistenza del dente:

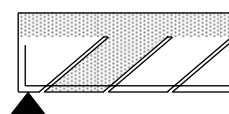
$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} b d$$

Nota: $0.25 f_{ctd}$ è ora sostituito da un altro termine, equivalente, funzione di f_{ck}

Altri contributi alla resistenza del dente



Ingranamento degli inerti



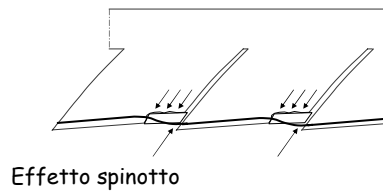
Resistenza del dente:

$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k b d$$

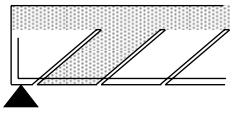
il coefficiente k è funzione dell'altezza utile d della sezione

18/76

Altri contributi alla resistenza del dente



Effetto spinotto

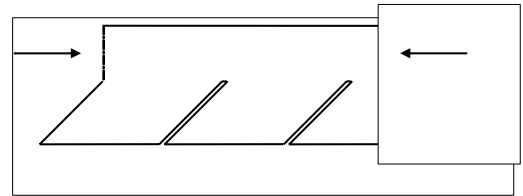


Resistenza del dente:

$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k f(\rho_l) b d$$

l'effetto spinotto dipende
dalla percentuale ρ_l di
armatura longitudinale ^{19/76}

Altri contributi alla resistenza del dente



La presenza di compressione riduce la lunghezza
del dente e quindi le sollecitazioni, aumentando
la resistenza a taglio

20/76

Resistenza in assenza di armature (NTC08, punto 4.1.2.1.3.1)

$$V_{Rd} = \left[0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15 \sigma_{cp} \right] b d$$

preferisco $V_{Rd,c}$

$$\geq v_{min} = 0.035 \sqrt{k^3 f_{ck}} \quad \text{quando } \rho_l \text{ è molto piccolo}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0.2 f_{cd} \quad \text{positiva se compressione}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2$$

d in mm

$$\rho_l = \frac{A_s}{b d} \leq 0.02$$

21/76

Resistenza in assenza di armature Esempio: solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm} \quad h = 24 \text{ cm} \quad A_s = 2 \varnothing 10 \text{ a travetto} \quad 3.14 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{220}} = 1.953$$

$$\rho_l = \frac{3.14}{20 \times 22} = 0.00714$$

$$\frac{\sqrt[3]{100 \times 0.00714 \times 25}}{1.5} = 1.742$$

$$0.18 \times 1.953 \times 1.742 = 0.612 > 0.035 \times \sqrt{1.953^3 \times 25} = 0.478$$

$$V_{Rd} = \left[0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15 \sigma_{cp} \right] b d$$

$\geq 0.035 \sqrt{k^3 f_{ck}}$

$$V_{Rd} = 0.612 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 26.9 \text{ kN}$$

22/76

Confronto con tensioni ammissibili solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm} \quad h = 24 \text{ cm} \quad A_s = 2 \varnothing 10 \text{ a travetto} \quad 3.1 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria
armatura a taglio è

$$V_{co} = 0.9 \tau_{co} b d = 1.4 \times 23.8 = 33.3 \text{ kN}$$

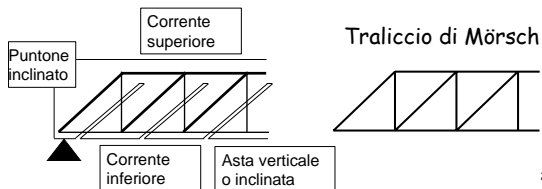
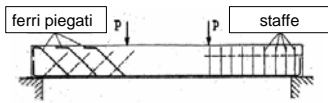
$$= 0.9 \times 0.60 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 23.8 \text{ kN}$$

La resistenza allo SLU è 26.9 kN, di poco maggiore,
ma il carico (e quindi il taglio sollecitante), è circa 1.4
volte maggiore ^{23/76}

Taglio:
resistenza di una trave
con armatura a taglio

Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

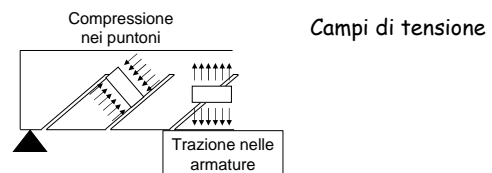
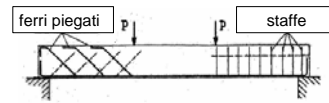
Possibili armature:



25/76

Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:



26/76

Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{cl}$

Quindi: $V_{cl} = 0.9 \tau_{cl} b d$

La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Mörsch - schema isostatico

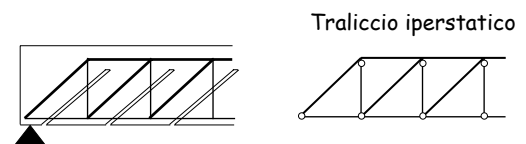
Per staffe: $V_{s,Max} = \frac{A_{sw}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s$

27/76

Verifica - stato limite ultimo

Sia la resistenza del calcestruzzo che quella dell'armatura vengono valutate col modello di traliccio

Attenzione: occorre tener conto del fatto che il traliccio è iperstatico

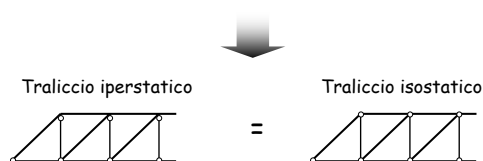


28/76

Verifica - stato limite ultimo

In campo lineare, l'iperstaticità del traliccio è irrilevante

Rigidezza estensionale \gg Rigidezza flessionale



29/76

Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza del calcestruzzo:

$$N_c = V \sqrt{2}$$

$$A_c = \frac{b z}{\sqrt{2}}$$

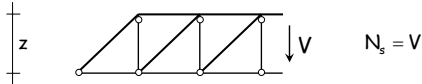
Ponendo $\sigma_c = f_{cd}$ si ottiene $V_{Rd} = \frac{1}{2} f_{cd} b z$

Notare: $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ $f_{cd} = v_1 f_{cd}$ $v_1 = 0.5$ 30/76

Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza dell'armatura:



Ponendo $\sigma_s = f_{yd}$ si ottiene $V_{Rd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z$

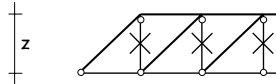
31/76

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "normale" Non più considerato dalle NTC08

Modello "di traliccio a inclinazione variabile"



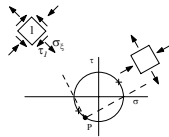
Quando si snerva l'armatura scompare l'armatura a taglio

32/76

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "di traliccio a inclinazione variabile"



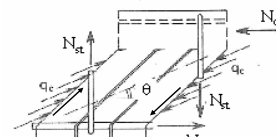
Quando si snerva l'armatura scompare l'armatura a taglio ma per l'ingranamento degli inerti la direzione di compressione si inclina

33/76

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "di traliccio a inclinazione variabile"



Quando si snerva l'armatura scompare l'armatura a taglio ma per l'ingranamento degli inerti la direzione di compressione si inclina

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} f_{cd}' b z$$

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

34/76

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f_{cd}' b z \quad z = 0.9 d$$

Per EC2

$$f_{cd}' = 0.5 f_{cd}$$

$$\alpha_c = 1 \quad \text{in assenza di compressione}$$

$$\alpha_c = 1 + \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \quad \text{per } 0 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.25$$

$$\alpha_c = 1.25 \quad \text{per } 0.25 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.5$$

$$\alpha_c = 2.5 \left(1 - \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \right) \quad \text{per } 0.5 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 1$$

35/76

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta \quad z = 0.9 d$$

preferisco $V_{Rd,s}$

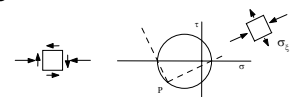
sia per V_{Rcd} che per V_{Rsd}

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

in presenza di compressione

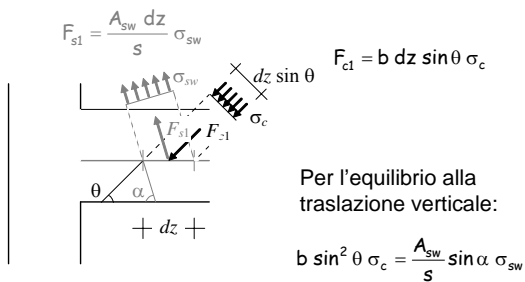
$$\cot \theta_1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$\cot \theta_1 = \frac{\tau}{\sigma_c}$$



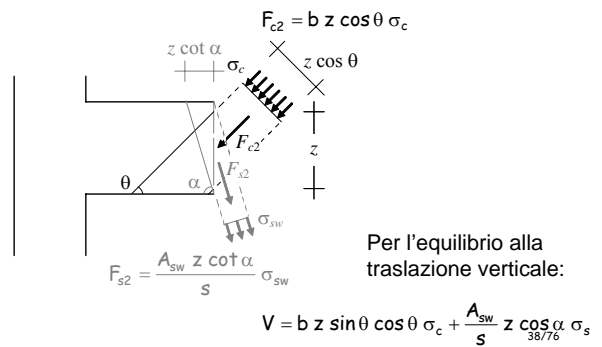
36/76

Modello di campi di tensione



37/76

Modello di campi di tensione



Modello di campi di tensione

Dalle due relazioni

$$b \sin^2 \theta \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha \sigma_{sw}$$

$$V = b z \sin \theta \cos \theta \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos \alpha \sigma_s$$

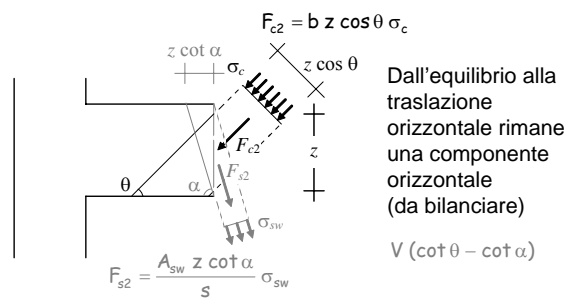
si ricavano le stesse espressioni viste in precedenza

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$V_{Rcd} = \frac{f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

39/76

Modello di campi di tensione



40/76

Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra N_c ed N_s
- Si ottiene così la traslazione del diagramma del momento di:

$$(\cot \theta - \cot \alpha) \times z/2$$

41/76

Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra N_c ed N_s
- Si ottiene così la traslazione del diagramma del momento di (nel caso di staffe $\cot \alpha = 0$):

$$\frac{z \cot \theta}{2}$$

Scuola napoletana:

- L'intera componente è assegnata ad un'apposita armatura, detta "di parete"
- Si ottiene così, in aggiunta alle staffe ($\cot \alpha = 0$), l'armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V \cot \theta}{f_{yd}}$$

42/76

Componente orizzontale da equilibrare

$$V(\cot\theta - \cot\alpha)$$

Suggerimento:

- Posso ritenere, in accordo con la scuola milanese, che una parte (metà) della forza di trazione vada a scaricare N_c e quindi che occorra portare solo l'altra metà
- Questa metà è assegnata all'armatura "di parete"

$$A_{sl} = \frac{V \cot\theta}{2 f_{yd}}$$

- Se A_{sl} mi sembra eccessiva e ne metto di meno devo incrementare l'armatura inferiore (analogamente a traslazione diagramma momenti)

43/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot\theta}{1 + \cot^2\theta} \alpha_c f_{cd}' b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f_{cd}' = 0.5 \times 14.17 = 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot\theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 430.1 \text{ kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 296.6 \text{ kN}$$

44/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot\theta$$

$$\cot\theta = 1 \Rightarrow V_{Rsd} = 105.8 \text{ kN}$$

$$\cot\theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rsd} = 264.2 \text{ kN}$$

45/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

La resistenza della sezione è il minore tra V_{Rcd} e V_{Rsd} calcolati con $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

In questo caso è sempre $V_{Rcd} > V_{Rsd}$

$$\text{Per } \cot\theta = 2.5 \text{ si ha } V_{Rsd} = 264.2 \text{ kN}$$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

46/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - tensioni ammissibili

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{ct} = 0.9 \tau_{ct} b d = 0.9 \times 1.83 \times 30 \times 45 \times 10^{-1} = 222.4 \text{ kN}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{s,Max} = \frac{A_{sw}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s = 6.7 \times 0.9 \times 45 \times 255 \times 10^{-3} = 69.2 \text{ kN}$$

47/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - confronto TA-SLU

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

La resistenza dell'armatura è

- 69.2 kN per TA $1.4 \times 69.2 = 96.9 \text{ kN}$
- 264.2 kN per SLU

Anche tenendo conto della differenza di carico, la resistenza è oltre 2.5 volte maggiore

48/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm staffe Ø8/10 (10 cm²/m)
c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 = 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 430.1 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 296.6 \text{ kN}$$

49/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm staffe Ø8/10 (10 cm²/m)
c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rsd} = 158.5 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rsd} = 396.2 \text{ kN}$$

50/76

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm staffe Ø8/10 (10 cm²/m)
c = 5 cm d = 45 cm

La resistenza della sezione è il minore tra V_{Rcd} e V_{Rsd}

	$\cot \theta = 1$	1.5	2	2.5
V_{Rcd}	430.1	397.1	344.2	296.6
V_{Rsd}	158.5	237.7	317.0	396.2

Per $\cot \theta = 2.1$ si ha $V_{Rcd} = V_{Rsd} = 332.8 \text{ kN}$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

51/76

Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:
$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$$

Occorre definire $\cot \theta$

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per $\cot \theta$

Ponendo
$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z = V_{Ed}$$

si ottiene
$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} \leq 2.5$$

52/76

Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:
$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$$

Occorre definire $\cot \theta$

2. Utilizzare il valore di $\cot \theta$ così determinato, oppure un valore minore

Al crescere di $\cot \theta$ si riducono le staffe necessarie, ma cresce l'armatura di parete (o longitudinale)

Consiglio di non superare $\cot \theta = 2$

3. Calcolo l'armatura di parete o verifico l'armatura longitudinale

Progetto dell'armatura trave emergente

b = 30 cm h = 50 cm $V_{Ed} = 150 \text{ kN}$
c = 5 cm d = 45 cm

1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 5.69$$

2. Posso usare $\cot \theta = 2.5$, ma io preferisco $\cot \theta = 2$

Otengo
$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 4.72 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Userò Ø8/20

3. Armatura di parete
$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{2 f_{yd}} = 3.83 \text{ cm}^2$$

54/76

Progetto dell'armatura trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad V_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

$$c = 5 \text{ cm} \quad d = 45 \text{ cm}$$

1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 1.555$$

2. Userò $\cot \theta = 1.555$

$$\text{Ottengo } \frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 16.23 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Dovrei usare $\varnothing 8/6$ (forse eccessivi)

3. Armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{2 f_{yd}} = 7.95 \text{ cm}^2$$

55/76

Minimi di armature nelle travi (NTC08, punto 4.1.6.1.1)

Area minima longitudinale:

$$A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.0013 b d$$

Area minima delle staffe:

$$A_{st} = 1.5 b \text{ mm}^2 / \text{m} \quad \text{può essere condizionante, in particolare per travi a spessore}$$

Inoltre: 3 staffe a metro, passo non superiore a $0.8 d$

Ulteriori indicazioni (EC2):

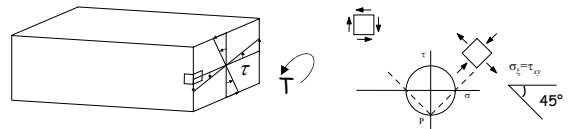
$$\rho_w = \frac{A_{st}}{s b} \geq \rho_{w,min} = \frac{0.08 \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

versioni precedenti davano passi molto ridotti

56/76

Torsione

Comportamento di una trave 1 - calcestruzzo resistente a trazione

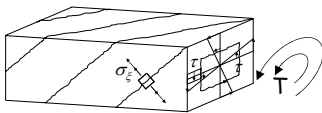


Per bassi livelli di sollecitazioni, la torsione è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo.

Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

58/76

Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione

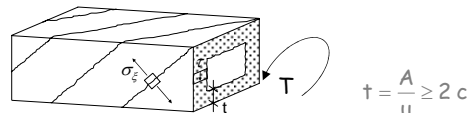


Aumentando il momento torcente ...

... il calcestruzzo si fessura

59/76

Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione

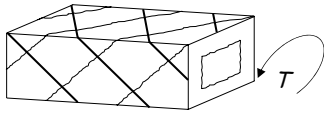


La parte interna della sezione non dà contributo ...

... si considera una sezione cava

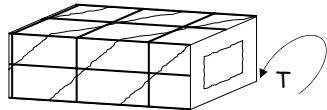
60/76

Armatura a torsione



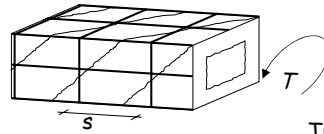
... a spirale

... con staffe e ferri longitudinali



61/76

Modello di calcolo



Traliccio di Rausch

Barre longitudinali = correnti tesi

Staffe = montanti tesi

Calcestruzzo = diagonali compresse

Tutte le aste sono incerniate nei nodi

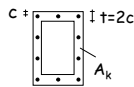
62/76

Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{cl}$

Quindi:

$$T_{cl} = 2 A_k \tau_{cl}$$



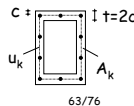
La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Rausch

Per le staffe:

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s$$

Per i ferri longitudinali:

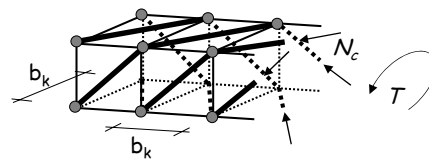
$$T_{s,lon} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s$$



63/76

Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$A_c = \frac{t b_k}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $\sigma_c = f'_{cd}$

si ottiene

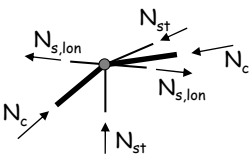
$$T_{Rcd} = f'_{cd} t A_k$$

$$f'_{cd} = 0.5 f_{cd}$$

64/76

Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza dell'armatura:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$N_{st} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

$$N_{s,lon} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $\sigma_{st} = f_{yd}$

si ottiene

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$$

Ponendo $\sigma_{s,lon} = f_{yd}$

si ottiene

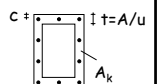
$$T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$$

65/76

Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo

$$T_{Rcd} = A_k t f'_{cd}$$



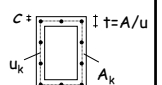
Resistenza dell'armatura

Staffe:

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$$

Ferri longitudinali:

$$T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$$



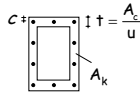
66/76

Resistenza a torsione - SLU

con puntoni ad inclinazione variabile (NTC08, 4.1.2.1.4)

Resistenza del calcestruzzo

$$T_{Rcd} = 2 A_k + f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe: $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$

Ferri longitudinali: $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$

Per effetto dell'ingranamento degli inerti i puntoni di calcestruzzo si inclinano ($0.4 \leq \cot \theta \leq 2.5$)

67/76

Resistenza a torsione

trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$
 $c = 5 \text{ cm}$ $d = 45 \text{ cm}$ $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

$t = \frac{30 \times 50}{2(30 + 50)} = 9.38 \text{ cm}$ $A_k = (30 - 10) \times (50 - 10) = 800 \text{ cm}^2$
 $= 2c = 10 \text{ cm}$ $f_{cd} = 7.08 \text{ MPa}$

La resistenza della trave a torsione è

$$T_{Rcd} = 2 A_k + f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rcd} = 56.6 \text{ kNm}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rcd} = 39.1 \text{ kNm}$

68/76

Resistenza a torsione

trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$
 $c = 5 \text{ cm}$ $d = 45 \text{ cm}$ $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza dell'armatura è

Staffe: $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$

$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rsd} = 20.8 \text{ kNm}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rsd} = 52.1 \text{ kNm}$

Ferri longitudinali: $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$

$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rld} = 64.2 \text{ kNm}$

$u_k = 120 \text{ cm}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rld} = 25.7 \text{ kNm}$

Resistenza a torsione

trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$
 $c = 5 \text{ cm}$ $d = 45 \text{ cm}$ $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza della sezione è il minore tra T_{Rcd} T_{Rsd} T_{Rld}

	$\cot \theta = 1$	1.5	2	2.5
T_{Rcd}	56.6	52.3	45.4	39.1
T_{Rsd}	20.8	31.2	41.6	52.0
T_{Rld}	64.2	42.8	32.1	25.7

Si ha $T_{Rsd} = T_{Rld}$ per $\cot \theta = \sqrt{\frac{A_{s,lon}/u_k}{A_{st}/s}} = 1.754$

Per tale valore $T_{Rsd} = T_{Rld} = 36.5 \text{ kNm}$
 $T_{Rcd} = 48.7 \text{ kNm}$

70/76

Resistenza a torsione trave emergente - tensioni ammissibili

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$
 $c = 5 \text{ cm}$ $d = 45 \text{ cm}$ $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza della trave a torsione è $t = 2c = 10 \text{ cm}$

$T_{cl} = 2 A_k + \tau_{cl} =$
 $= 2 \times (20 \times 40) \times 10 \times 1.83 \times 10^{-3} = 29.3 \text{ kNm}$

La resistenza dell'armatura è

$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s =$
 $= 2 \times (20 \times 40) \times 0.033 \times 255 \times 10^{-3} = 13.5 \text{ kNm}$

$T_{s,lon} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s =$
 $= 2 \times (20 \times 40) \times 0.103 \times 255 \times 10^{-3} = 42.0 \text{ kNm}$

71/76

Resistenza a torsione trave emergente - confronto SLU-TA

Tensioni ammissibili:

$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s = 13.5 \text{ kNm}$
 $1.4 \times 13.5 = 18.9 \text{ kNm}$

Stato limite ultimo ($\cot \theta = 1.754$):

$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta = 36.5 \text{ kNm}$

Anche se i carichi allo SLU sono circa 1.4 volte maggiori, la resistenza è notevolmente maggiore (nell'esempio circa 1.9 volte)

72/76

Dimensionamento della sezione allo stato limite ultimo

1. Scegliere un valore per $\cot \theta$ ed ipotizzare un valore per t (almeno pari a 2 c)
2. Invertendo l'espressione di T_{Rcd} calcolare A_k

$$A_k = \frac{T_{Ed}}{2 t f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}}$$
3. Definire una sezione $b \times h$ che garantisca A_k e calcolare t

$$t = \frac{A}{u} \geq 2 c$$
4. Ricalcolare A_k e controllare che vada bene

$$A_k = (b - t)(h - t)$$

73/76

Dimensionamento della sezione esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

1. Assumo $\cot \theta = 2$ e $t = 10 \text{ cm}$
2. $A_k = \frac{T_{Ed}}{2 t f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{26 \times 10^3}{2 \times 10 \times 7.08 \times \frac{2}{1 + 2^2}} = 459 \text{ cm}^2$
3. Potrei usare una sezione 30×40 che (per $t = 10 \text{ cm}$) ha $A_k = 600 \text{ cm}^2$
Preferisco 30×50

$$t = \frac{1500}{160} = 9.38 \text{ cm} = 2 c = 10 \text{ cm}$$
4. $A_k = (30 - 10)(50 - 10) = 800 \text{ cm}^2$
va bene

74/76

Progetto di staffe e barre longitudinali allo stato limite ultimo

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per $\cot \theta$
Ponendo $T_{Rcd} = 2 A_k t f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = T_{Ed}$
si ottiene $\cot \theta = \frac{A_k t f_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k t f_{cd}}{T_{Ed}}\right)^2 - 1} \leq 2.5$
2. Utilizzare il valore di $\cot \theta$ così determinato, oppure un valore minore, per calcolare staffe e barre longitudinali

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} \cot \theta} \quad A_{s,lon} = \frac{T_{Ed} u_k \cot \theta}{2 A_k f_{yd}}$$
3. Distribuire le barre longitudinali in proporzione ai lati

Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione 30×50

1. $\cot \theta = \frac{A_k t f_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k t f_{cd}}{T_{Ed}}\right)^2 - 1} = \frac{800 \times 10 \times 7.08}{26 \times 10^3} + \sqrt{\left(\frac{800 \times 10 \times 7.08}{26 \times 10^3}\right)^2 - 1} = 4.12$
2. Si può usare anche $\cot \theta = 2.5$; scelgo $\cot \theta = 2$

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{26 \times 10^3}{2 \times 800 \times 391.3 \times 2} = 2.08 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \varnothing 8/25$$

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 120 \times 2}{2 \times 800 \times 391.3} \times 10^3 = 9.97 \text{ cm}^2$$

76/76

Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione 30×50

Se però si decide di usare $\varnothing 8/20 = 2.5 \text{ cm}^2 / \text{m}$ questo corrisponde a

$$\cot \theta = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} A_{st} / s} = 1.661$$

L'armatura longitudinale necessaria è

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 120 \times 1.661}{2 \times 800 \times 391.3} \times 10^3 = 8.28 \text{ cm}^2$$

77/76

Torsione e taglio

Calcestruzzo:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rcd}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rcd}} \leq 1$$

Staffe:

- si progettano separatamente, per la torsione e per il taglio e si sommano.
- l'angolo θ deve essere uguale per la torsione e per il taglio.

78/76