

**Problemi specifici nel progetto di strutture  
antisismiche con pareti in c.a.**

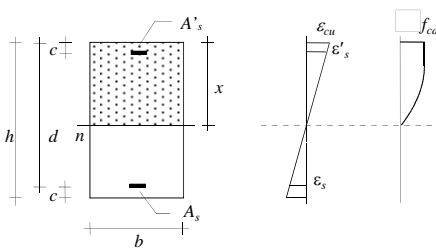
2 - L'elemento parete: flessione composta

Bologna  
10 gennaio 2013  
Edoardo M. Marino

**Flessione composta**  
breve richiami

1. Determinare il momento resistente  $M_{N,Rd}$  in funzione dello sforzo normale sollecitante  $N_{Ed}$ 
  - Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
  - Determinare la risultante delle tensioni e quindi  $N$
  - Variare il diagramma di deformazioni in modo da avere  $N = N_{Ed}$
  - Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni

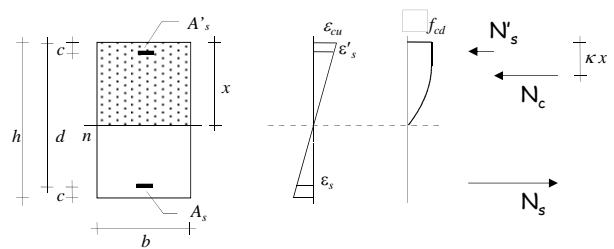
**Verifica a flessione composta**  
procedimento



**Dati:**  
Geometria della sezione  
Armature  
Coppia  $M_{Ed}$ - $N_{Ed}$

**Incognite:**  
Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente  $M_{Rd}$   
corrispondente a  $N_{Ed}$

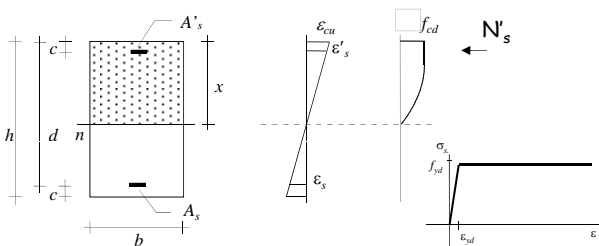
**Verifica a flessione composta**  
procedimento



Per trovare l'asse neutro:  $N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$   
(equilibrio alla traslazione)

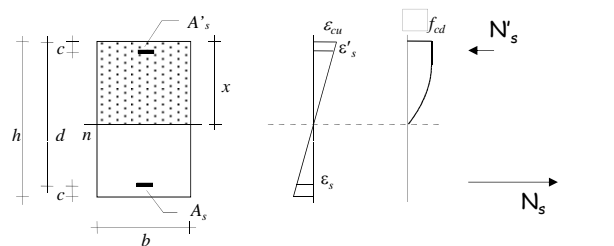
Poi calcolare  $M_{Rd}$ , con equilibrio alla rotazione

**Verifica a flessione composta**  
risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



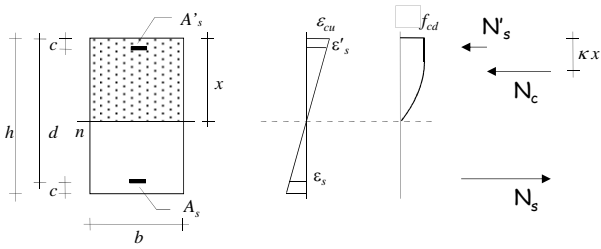
$$\epsilon'_s = \frac{x-c}{x} \epsilon'_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \\ &\text{se } \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned}$$

**Verifica a flessione composta**  
risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



$$\epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s \\ &\text{se } \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned}$$

### Verifica a flessione composta risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



$$N_c = -\beta \cdot b \cdot x \cdot f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

### Verifica a flessione composta asse neutro

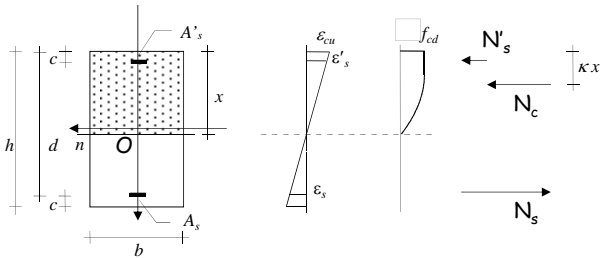
- Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} \quad N_{Ed} \text{ positivo se trazione}$$

altrimenti si può risolvere per tentativi l'equazione:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

### Verifica a flessione composta momento resistente



Si determina imponendo  
l'equilibrio alla rotazione  
(rispetto al baricentro della  
sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

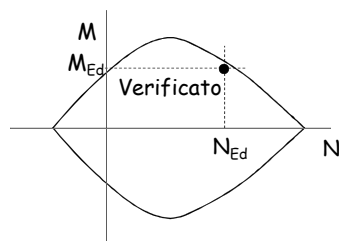
### Flessione composta brevi richiami

- Determinare il dominio di resistenza (o curva di interazione)  $M_{Rd} - N_{Rd}$

- Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
- Determinare la risultante delle tensioni e quindi  $N_{Rd}$
- Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni,  $M_{Rd}$
- Variare il diagramma di deformazioni in modo da ottenere tutte le coppie  $M_{Rd} - N_{Rd}$

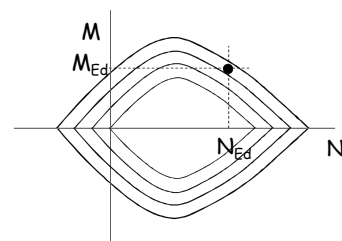
### Dominio di resistenza per la verifica

- La sezione è verificata se il punto che rappresenta la coppia  $M_{Ed} - N_{Ed}$  è interno al dominio



### Dominio di resistenza per il progetto delle armature

- Tracciando il dominio con più curve, che rappresentano diverse quantità di armatura, è possibile determinare l'armatura necessaria per una assegnata coppia  $M_{Ed} - N_{Ed}$



### Flessione composta breve richiami

#### 3. Utilizzare formule approssimate

(vedi A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

$$N_{c,max} = A_c f_{cd} \quad M_{c,max} = 0.12 A_c h f_{cd}$$

$$N_{s,max} = A_{s,tot} f_{yd} \quad M_{s,max} = 0.5 A_{s,tot} (h - 2c) f_{yd}$$

$$v_M = 0.48 \quad m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

per sezione rettangolare con armatura simmetrica  
( $A_s = A'_s$ ;  $A_{s,tot} = 2 A_s$ )

### Flessione composta per le pareti Cosa cambia?

- L'armatura è costituita da tante barre: occorre decidere come disporle



concentrata  
agli estremi  
(su più strati)



distribuita  
uniformemente



un po' distribuita e  
un po' concentrata

### Distribuzione dell'armatura e proprietà della parete

- Resistenza**  
Capacità di portare momento flettente
- Duttilità**  
Capacità di deformarsi plasticamente  
Duttilità = rapporto tra curvatura ultima e curvatura allo snervamento dell'armatura tesa
- Influenza della distribuzione dell'armatura:**  
Studio di Cardenas e Magura, 1973

### Studio di Cardenas e Magura

Riproduce (analiticamente) il comportamento della parete sotto l'effetto di un momento flettente crescente fino al collasso per valutare

- Momento resistente
- Duttilità disponibile

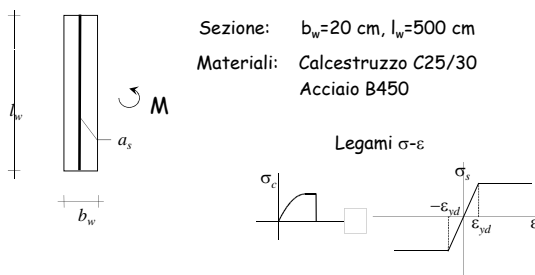
Considera sezioni con diverse quantità d'armatura

Considera due distribuzioni di armature

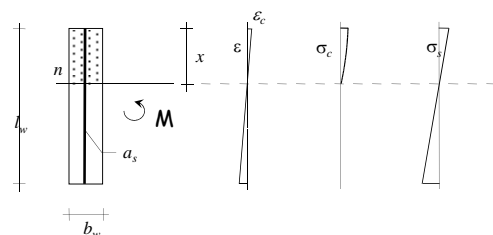
- Distribuita uniformemente
- Concentrata prevalentemente alle estremità

### Studio di Cardenas e Magura procedimento

- Si considera nullo lo sforzo normale
- Si fa crescere il momento flettente fino al collasso

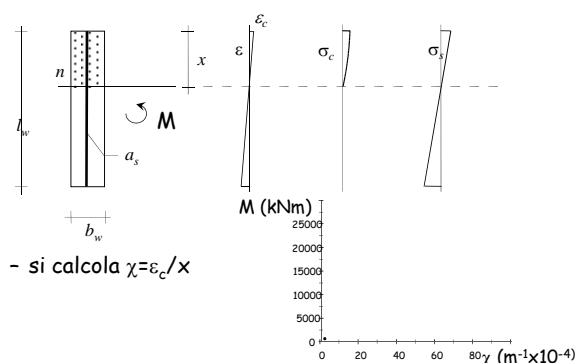


### Studio di Cardenas e Magura procedimento

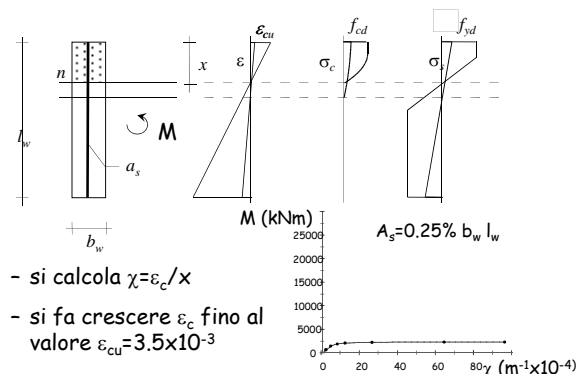


- si assegna  $\epsilon_c$ ;
- si determina  $x$  con equilibrio alla traslazione;
- si calcola il momento  $M$  corrispondente.

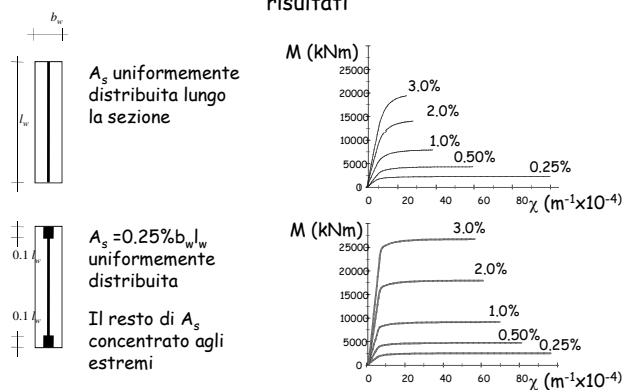
### Studio di Cardenas e Magura procedimento



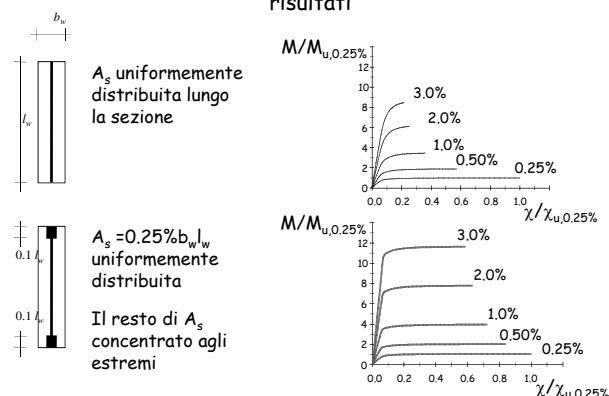
### Studio di Cardenas e Magura procedimento



### Studio di Cardenas e Magura risultati



### Studio di Cardenas e Magura risultati



### Studio di Cardenas e Magura risultati

- Armatura con distribuzione uniforme
  - Aumentando la quantità di armatura si aumenta il momento resistente ma si riduce pesantemente la duttilità
- Armatura prevalentemente alle estremità
  - A parità di armatura complessiva si ottiene un momento resistente superiore a quella precedente
  - All'aumentare della quantità di armatura la riduzione di duttilità disponibile è inferiore



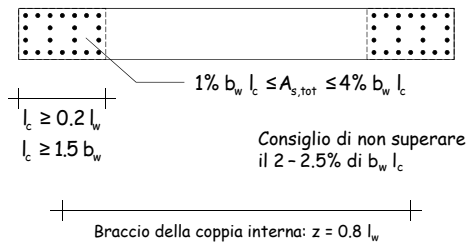
Conviene concentrare l'armatura alle estremità

### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Individuare zone alle estremità della sezione della parete, nelle quali è disposta una buona quantità di armatura longitudinale, ben confinata
  - La zona confinata deve estendersi per un tratto  $l_c$  fino a raggiungere il "punto dove il calcestruzzo non confinato può frantumarsi ed essere espulso per le grandi deformazioni di compressione"  
Eurocodice 8, punto 5.4.3.4.2(6)
  - La zona confinata deve estendersi per un tratto  $l_c$  "pari al 20% della lunghezza  $l_w$  in pianta della parete stessa e comunque non inferiore a 1.5 volte lo spessore della parete"  
NTC08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Nella zona confinata si deve disporre una armatura longitudinale adeguata



### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Nella zona critica si individuano alle estremità della parete due zone confinate aventi per lati lo spessore della parete e una lunghezza "confinata"  $l_c$  pari al 20% della lunghezza in pianta  $l$  della parete stessa e comunque non inferiore a 1,5 volte lo spessore della parete. In tale zona il rapporto geometrico  $\rho$  dell'armatura totale verticale, riferito all'area confinata, deve essere compreso entro i seguenti limiti:

$$1\% \leq \rho \leq 4\%$$

NTC 08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



### Instabilità delle barre



27-02-2010, Cile



Foto P. Fajfar

### Le staffe si possono aprire o rompere



27-02-2010, Cile



Foto P. Fajfar

### Disgregamento del nucleo di calcestruzzo



27-02-2010, Cile



Foto P. Fajfar

### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



Per prevenire l'instabilità delle barre delle zone confinate e la disgregazione del nucleo di calcestruzzo occorre disporre una buona staffatura



Nelle zone confinate l'armatura trasversale deve essere costituita da barre di diametro **non inferiore a 6 mm**, disposti in modo da fermare una barra verticale ogni due con un passo non superiore a **8 volte il diametro della barra o a 10 cm**. Le barre non fissate devono trovarsi a **meno di 15 cm** da una barra fissata.

NTC 08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni di normativa zone di estremità

- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

#### Zona critica

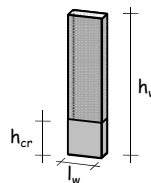
È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche, ovvero ...

... la porzione di parete di altezza  $h_{cr}$  al di sopra dell'incastro

$$h_{cr} = \max(l_w, h_w / 6)$$

$$h_{cr} \leq h_{1 \text{ piano}} \quad \text{per edifici fino a 6 piani}$$

$$h_{cr} \leq h_{2 \text{ piani}} \quad \text{edifici con più di 6 piani}$$



NTC 08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni di normativa zone di estremità

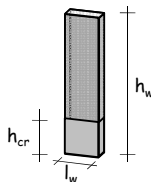
- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

#### Zona critica

È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche

Al di fuori della zona critica

È comunque opportuno tenere presente le indicazioni precedenti, sia pure in maniera più blanda



### Indicazioni di normativa altre prescrizioni

#### In tutta la parete

- Le armature, sia orizzontali che verticali, devono avere diametro non superiore ad 1/10 dello spessore della parete, devono essere disposte su entrambe le facce della parete, ad un passo non superiore a 30 cm, devono essere collegate con legature, in ragione di almeno nove ogni metro quadrato

#### Nella zona centrale

- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

NTC 08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni di normativa zona centrale

- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

Questa armatura è sufficiente anche per la fessurazione da flessione nel piano di maggior rigidità



$$A_s \geq 0.2\% A_c$$

Per flessione nel piano debole è tesa solo una fila di barre ed il minimo sarebbe 0.15%  $A_{c, \text{tess}}$ , ovvero 0.3%  $A_{c, \text{tot}}$ . Questa flessione è però in genere trascurabile

NTC 08, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni bozza NTC 2013 zone di estremità

Valgono i limiti stabiliti per i pilastri

	CD "A"	CD "B"
Diametro staffe:	$\phi_w \geq \max(6 \text{ mm}, 0.4 \phi_{l \text{ max}})$	$\phi_w \geq 6 \text{ mm}$
Passo staffe:	$s \leq 1/3 \text{ lato minore}$	$s \leq 1/2 \text{ lato minore}$
Per barre $\phi 20$ e $b_w = 30 \text{ cm}$	$s \leq 12.5 \text{ cm}$ 10 cm	$s \leq 17.5 \text{ cm}$ 15 cm
	$s \leq 6 \phi_l$	$s \leq 8 \phi_l$

Ed inoltre ...

NTC 13, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni bozza NTC 2013 zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\alpha$  Coefficiente di efficacia del confinamento

$$\alpha = \alpha_n \alpha_s \quad \alpha_n = 1 - \frac{\sum b_i^2}{6 b_o h_o} \quad \alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right) \left(1 - \frac{s}{2 h_o}\right)$$

$b_o, h_o$  dimensioni del nucleo confinato

$b_i$  distanza tra due barre consecutive "contenute"

$s$  passo delle staffe

NTC 13, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni bozza NTC 2013 zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\omega_{wd}$  rapporto meccanico di armatura trasversale

$$\omega_{wd} = \frac{\text{volume staffe}}{\text{volume nucleo di calcestruzzo}} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

NTC 13, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni bozza NTC 2013 zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\mu_{\phi}$  domanda di duttilità attesa

$$\mu_{\phi} = \begin{cases} 1.5 (2q - 1) & \text{se } T_1 \geq T_c \\ 1.5 \left(1 + 2(q - 1) \frac{T_c}{T_1}\right) & \text{se } T_1 < T_c \end{cases}$$

NTC 13, punto 7.4.6.2.4

### Indicazioni bozza NTC 2013 zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$v_d$  sforzo normale adimensionalizzato

$$v_d = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}$$

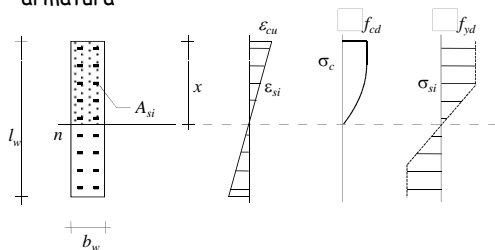
$\omega_v$  rapporto meccanico di armatura longitudinale al di fuori degli elementi di bordo

$$\omega_v = \rho_v \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

NTC 13, punto 7.4.6.2.4

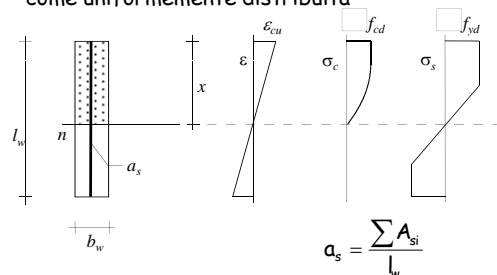
### Verifica a flessione composta per le pareti

- Il procedimento rimane quello generale, ma occorre tener conto del fatto che ci sono molte barre di armatura



### Verifica a flessione composta per le pareti

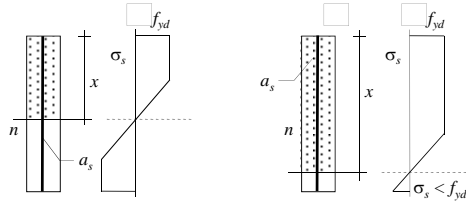
- Se vi è solo armatura diffusa lungo la parete, per semplificare i calcoli questa può essere pensata come uniformemente distribuita



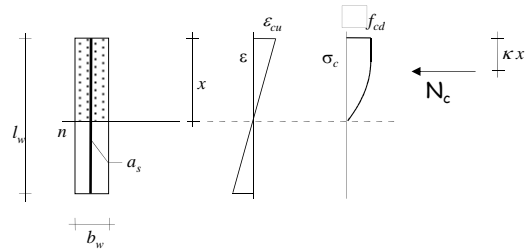
### Verifica a flessione composta per le pareti

Possono verificarsi due casi

- L'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa (quasi sempre è così)
- L'armatura tesa è tutta in campo elastico



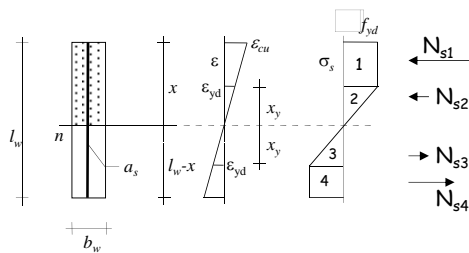
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



$$N_c = -\beta b x f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

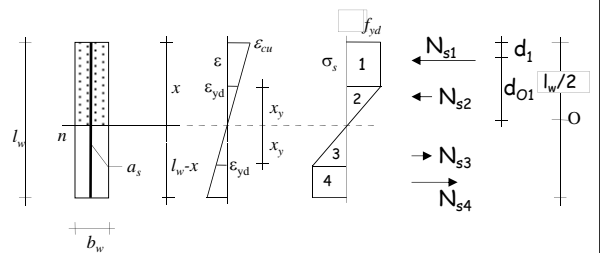
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



$x_y$  si può esprimere in funzione di  $x$

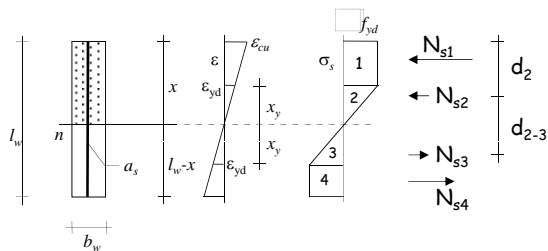
$$x_y = \frac{\epsilon_{yd}}{\epsilon_{cu}} x$$

### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} \quad d_1 = \frac{x - x_y}{2} \quad d_{01} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

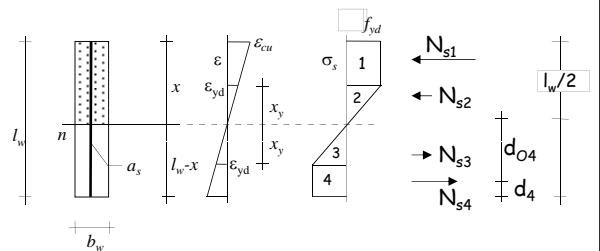
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} \quad d_2 = x - \frac{2}{3} x_y \quad d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y$$

$$N_{s3} = -N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd}$$

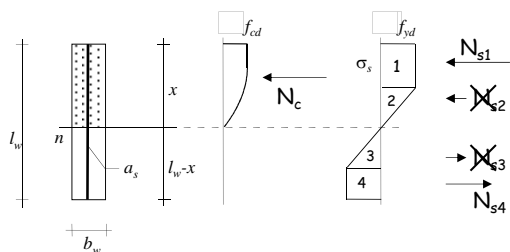
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} \quad d_4 = \frac{l_w - x - x_y}{2} \quad d_{04} = \frac{x + x_y}{2}$$



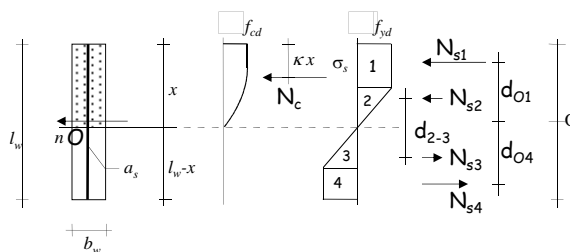
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s4} = N_{Ed} \Rightarrow x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}}$$

### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa snervata



Il momento resistente vale:

$$M_{Rd} = N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{O1} + N_{s4} d_{O4} - N_c (l_w / 2 - k x)$$

per sezione rettangolare,  $k = 0.416$

### Esempio 1

armatura in zona tesa snervata

Parete 30x400 Calcestruzzo C25/30  
30 Ø 12 Acciaio B450C  
 $A_{s, tot} = 33.9 \text{ cm}^2$   $N_{Ed} = -2000 \text{ kN}$   
 $a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$   $M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro  
(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

### Esempio 1

individuazione dell'asse neutro

- Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} = \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 2000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 810 \text{ mm} = 81.0 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

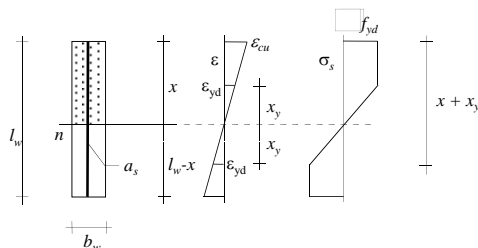
$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 81.0}{81.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 13.8 \times 10^{-3}$$

Poiché  $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$  ( $1.86 \times 10^{-3}$ ) la posizione trovata è esatta

Si ha inoltre  $x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 81.0 = 43.1 \text{ cm}$

### Esempio 1

individuazione dell'asse neutro



Nota: l'armatura in zona tesa è snervata se  $x + x_y < l_w$   
 $x + x_y = 81.0 + 43.1 = 124.1 \text{ cm} < l_w = 400 \text{ cm}$

Poiché  $x + x_y < l_w$  l'armatura è snervata e la posizione trovata è esatta

### Esempio 1

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$N_c = -\beta b_w x f_{yd} = -0.81 \times 20 \times 81.0 \times 14.1 / 10 = -2789.7 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 37.9 \times 391.3 / 10 = -125.8 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 43.1 \times 391.3 / 10 = -71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = -N_{s2} = 71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} = 8.48 \times 275.8 \times 391.3 / 10 = 915.5 \text{ kN}$$

### Esempio 1 calcolo del momento resistente

• Si ha:

$$d_{01} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{81.0 - 43.1 - 50.0}{2} = -181.1 \text{ cm}$$

$$d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y = \frac{4}{3} 43.1 = 57.5 \text{ cm}$$

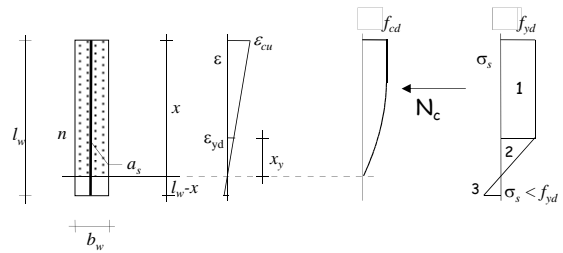
$$d_{04} = \frac{x + x_y}{2} = \frac{81.0 + 43.1}{2} = 62.1 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{01} + N_{s4} d_{04} - N_c (l_w / 2 - k x) =$$

$$= 5476.3 \text{ kNm}$$

la sezione è verificata

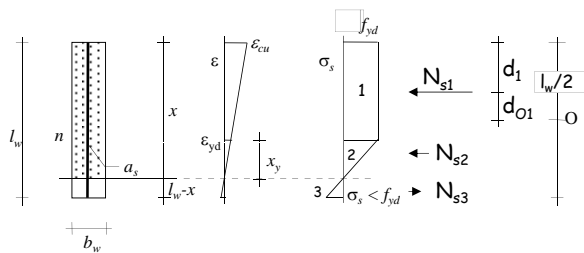
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



$x_y$  ed  $N_c$  si calcolano come nel caso precedente

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x \quad N_c = -\beta b x f_{cd} \quad \beta = 0.810$$

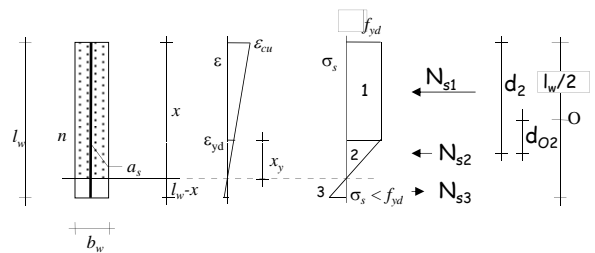
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



$N_{s1} d_1$  e  $d_{01}$  si calcolano come nel caso precedente

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} \quad d_1 = \frac{x - x_y}{2} \quad d_{01} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

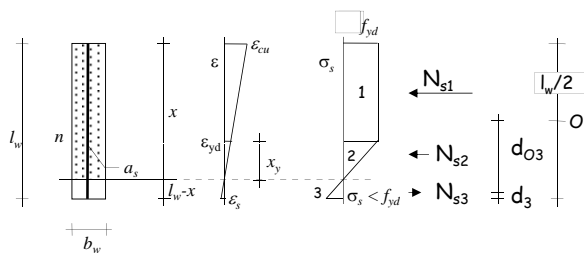
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



$N_{s2}$  e  $d_2$  si calcolano come nel caso precedente

$$N_2 = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} \quad d_2 = x - \frac{2}{3} x_y \quad d_{02} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2}$$

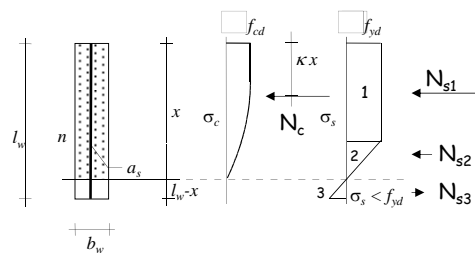
### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



$$N_{s3} = \frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s \quad d_3 = \frac{l_w - x}{3}$$

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{l_w - x}{x_y} f_{yd} \quad d_{03} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3}$$

### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s2} + N_{s3} = N_{Ed}$$

### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata

... che con qualche passaggio diventa:

$$\left\{ a_s \left[ \frac{1}{2} - \left( 1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2\varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \right\} x^2 - \left( a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right) x + \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd} = 0$$

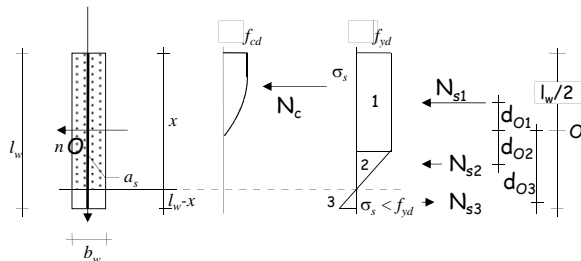
ovvero  $A x^2 + B x + C = 0$

con

$$A = a_s \left[ \frac{1}{2} - \left( 1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2\varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd}$$

$$B = - \left( a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right) \quad C = \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd}$$

### Verifica a flessione composta armatura in zona tesa non snervata



$$M_{Rd} = N_{s1} d_{01} + N_{s2} d_{02} + N_{s3} d_{03} + N_c \left( -l_w/2 + k x \right)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

### Esempio 2

armatura in zona tesa non snervata ?

Parete 30x400 Calcestruzzo C25/30  
30 Ø 12 Acciaio B450C  
 $A_{s, tot} = 33.9 \text{ cm}^2$   $N_{Ed} = -10000 \text{ kN}$   
 $a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$   $M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro  
(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

### Esempio 2

individuazione dell'asse neutro

• Se l'armatura tesa è snervata

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} = \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 10000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 275.9 \text{ mm} = 275.9 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 275.9 = 146.9 \text{ cm}$$

$$x + x_y = 275.9 + 146.9 = 422.8 \text{ cm} > 400 \text{ cm}$$

L'armatura tesa non è snervata

### Esempio 2

individuazione dell'asse neutro

• Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene

$$x = 276.0 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 276.0}{276.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.57 \times 10^{-3}$$

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 276.0 = 146.9 \text{ cm}$$

$$x + x_y = 276.0 + 146.9 = 422.9 \text{ cm} > 400 \text{ cm}$$

... dunque adesso la posizione dell'asse neutro è corretta

### Esempio 2

calcolo del momento resistente

• Si ha:

$$N_c = -\beta b_w x f_{cd} = -0.81 \times 30 \times 276.0 \times 14.1/10 = -9501.4 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 129.1 \times 391.3/10 = -428.4 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 146.9 \times 391.3/10 = -243.9 \text{ kN}$$

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{1.57}{1.86} \times 391.3 = 330.2 \text{ MPa}$$

$$N_{s3} = -\frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s = -0.5 \times 8.48 \times 124.0 \times 330.2/10 = 173.7 \text{ kN}$$

### Esempio 2 calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$d_{01} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{276.0 - 129.1 - 400}{2} = -135.5 \text{ cm}$$

$$d_{02} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2} = 276.0 - \frac{2}{3} 146.9 - \frac{400}{2} = -22.0 \text{ cm}$$

$$d_{03} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3} = \frac{400}{6} + \frac{276.0}{3} = 158.7 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = N_{s1} d_{01} + N_{s2} d_{02} + N_{s3} d_{03} + N_c \left( -l_w / 2 + k x \right) = 9002.9 \text{ kNm}$$

la sezione è verificata

### Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Ghersi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura diffusa lungo tutta la parete fornisce un contributo flessionale ridotto a circa il 40% rispetto al caso di armatura concentrata agli estremi

### Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione  $b_w l_w$ ) con armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad N_{s,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad M_{s,max} = 0.4 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

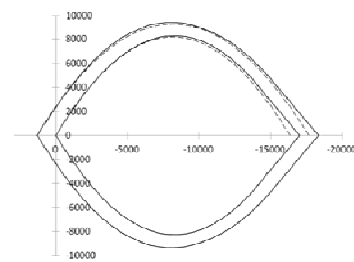
$$m = 2$$

Nota:  
per armatura diffusa meglio  
usare sempre  $m=2$

con  $A_{s,par}$  = armatura distribuita (lungo un lato della parete)

### Confronto per armatura diffusa formula approssimata - valori esatti

- Sezione usata come esempio:  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e  
valori esatti (in nero)



### Verifica a flessione composta con armatura concentrata - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Ghersi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto  $0.2 l_w$

### Verifica a flessione composta con armatura concentrata - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione  $b_w l_w$ ) con armatura concentrata in  $0.2 l_w$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd}$$

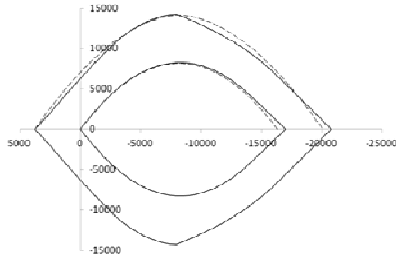
$$v_M = 0.48$$

$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

con  $A_{s,estr}$  = armatura all'estremità (nel singolo estremo)

### Confronto per armatura concentrata formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con  $A_{s,estr}=2\%$ :  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e  
valori esatti (in nero)



### Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

È possibile utilizzare formule approssimate  
(vedi: A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Ghersi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto  $0.2 l_w$
- L'armatura diffusa è disposta nel tratto centrale  $0.6 l_w$

### Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

Formule semplificate nel caso di parete con  
armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad N_{s-e,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd} \quad N_{s-p,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

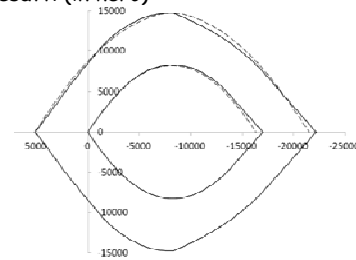
$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad M_{s-e,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd} \quad M_{s-p,max} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48 \quad m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s-e,max} / N_{c,max}}$$

con  $A_{s,estr}$  = armatura all'estremità (nel singolo estremo)  
 $A_{s,par}$  = armatura nel tratto  $0.6 l_w$  della parete (su un lato)

### Confronto per armatura concentrata formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con  $A_{s,estr}=2\%$  e armatura  
distribuita 12Ø16:  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e  
valori esatti (in nero)



### Progetto della sezione a flessione composta

- Aliquota di momento portata dal calcestruzzo, in  
funzione di  $N_{Ed}$

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad N_{Ed} = A_c \bar{\sigma}_c \quad N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad v_M \cong 0.5$$

$$\text{se } \bar{\sigma}_c \ll f_{cd} \quad M_{Rd(c,N)} \cong M_{c,max} \left[ 4 \frac{\bar{\sigma}_c}{f_{cd}} \right] = 0.48 b_w l_w^2 \bar{\sigma}_c$$

$$l_c = 0.2 l_w \quad z = 0.8 l_w \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{Rd(c,N)}}{z} \cong 0.6 b_w l_w \bar{\sigma}_c = 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c$$

### Progetto della sezione a flessione composta

- Aliquota di momento che deve portare l'armatura

$$N_s = \frac{M_{Rd(s)}}{z} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)}}{z} \quad \text{con} \quad \frac{M_{Rd(c,N)}}{z} \cong 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c$$

$$N_s = A_s f_{yd} = \rho b_w l_c f_{yd} \quad \rho = \frac{A_s}{b_w l_c} \quad \text{Percentuale di armatura cerchiata}$$

$$M_{Ed} = 0.8 l_w (\rho b_w l_c f_{yd} + 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c) = 0.16 b_w l_w^2 (\rho f_{yd} + 3 \bar{\sigma}_c)$$

- Formula di progetto

$$l_w = r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}} \quad \text{con} \quad r_s = \frac{1}{\sqrt{0.16 (\rho f_{yd} + 3 \bar{\sigma}_c)}}$$

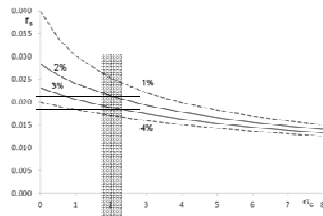
### Progetto della sezione a flessione composta

- Formula di progetto

$$I_w = r_s^2 \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}}$$

- Valori consigliati di  $r_s$

per  $\bar{\sigma}_c \cong 2 \text{ MPa}$   
 $r_s = 0.018 \div 0.022$



### Progetto della sezione a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a

$M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)

- Data l'entità dello sforzo normale si può pensare che sia  $\sigma_c \cong 2 \text{ MPa}$
- Provo con  $r_s = 0.022$  e  $b_w = 0.30 \text{ m}$

$$I_w = r_s^2 \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}} = 0.022^2 \sqrt{\frac{18000}{0.30}} = 5.39 \text{ m}$$

- Scelgo  $I_w = 5.50 \text{ m}$
- In questo modo ho  $\sigma_c = 1.52 \text{ MPa}$ , un po' meno di  $2 \text{ MPa}$  ma dovrebbe andare bene lo stesso

### Progetto dell'armatura a flessione composta

- Si suppone assegnata:
  - la dimensione della sezione
  - l'armatura disposta nel tratto centrale (se non impegnata per altre sollecitazioni)
- Si calcola il momento flettente che può portare il calcestruzzo e l'armatura del tratto centrale
- Si calcola l'armatura di estremità necessaria per portare la restante parte del momento flettente

### Progetto dell'armatura a flessione composta

- Momento flettente che può portare il calcestruzzo

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad v_M = 0.48 \cong 0.5$$

- Momento flettente che può portare l'armatura del tratto centrale

$$M_{Rd(s-p)} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

### Progetto dell'armatura a flessione composta

- Armatura di estremità necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 l_w f_{yd}}$$

### Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a

$M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)

- Ho scelto di usare una sezione  $30 \times 550$  con armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)

- Momento flettente portato dal calcestruzzo

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} = 30 \times 550 \times 14.2 \times 10^{-1} = 23430 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} = 0.12 \times 30 \times 550^2 \times 14.2 \times 10^{-3} = 15464 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right] = 6111 \text{ kNm}$$

### Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a  
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con  
armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)
  - Momento flettente portato dalle barre di parete

$$M_{Rd(s-p)} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd} =$$

$$= 0.2 \times 14.7 \times 550 \times 391.3 \times 10^{-3} = 633 \text{ kNm}$$

### Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a  
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con  
armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)
  - Armatura necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 l_w f_{yd}} =$$

$$= \frac{18000 - 6111 - 633}{0.8 \times 5.50 \times 391.3} \times 10 = 65.4 \text{ cm}^2$$

Zona cerchiata 30x110; l'armatura è l'1.98%

### Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Il confronto col programma EC2 conferma la  
correttezza del progetto

