

Corso di aggiornamento
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

**Problemi specifici nel progetto di strutture
antisismiche con pareti in c.a.**

2 - L'elemento parete: flessione composta

Bologna

10 gennaio 2013

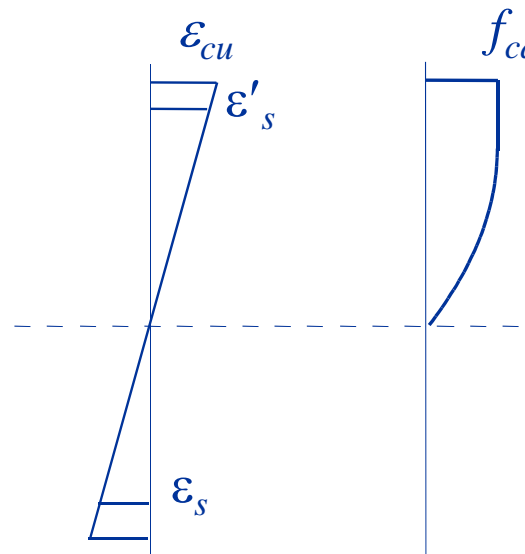
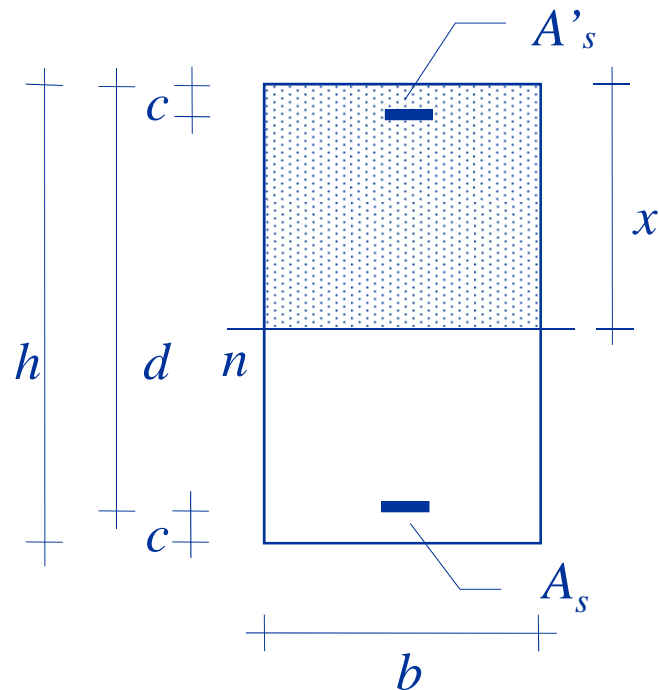
Edoardo M. Marino

Flessione composta

brevi richiami

1. Determinare il momento resistente $M_{N,Rd}$ in funzione dello sforzo normale sollecitante N_{Ed}
 - Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
 - Determinare la risultante delle tensioni e quindi N
 - Variare il diagramma di deformazioni in modo da avere $N = N_{Ed}$
 - Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni

Verifica a flessione composta procedimento



Dati:

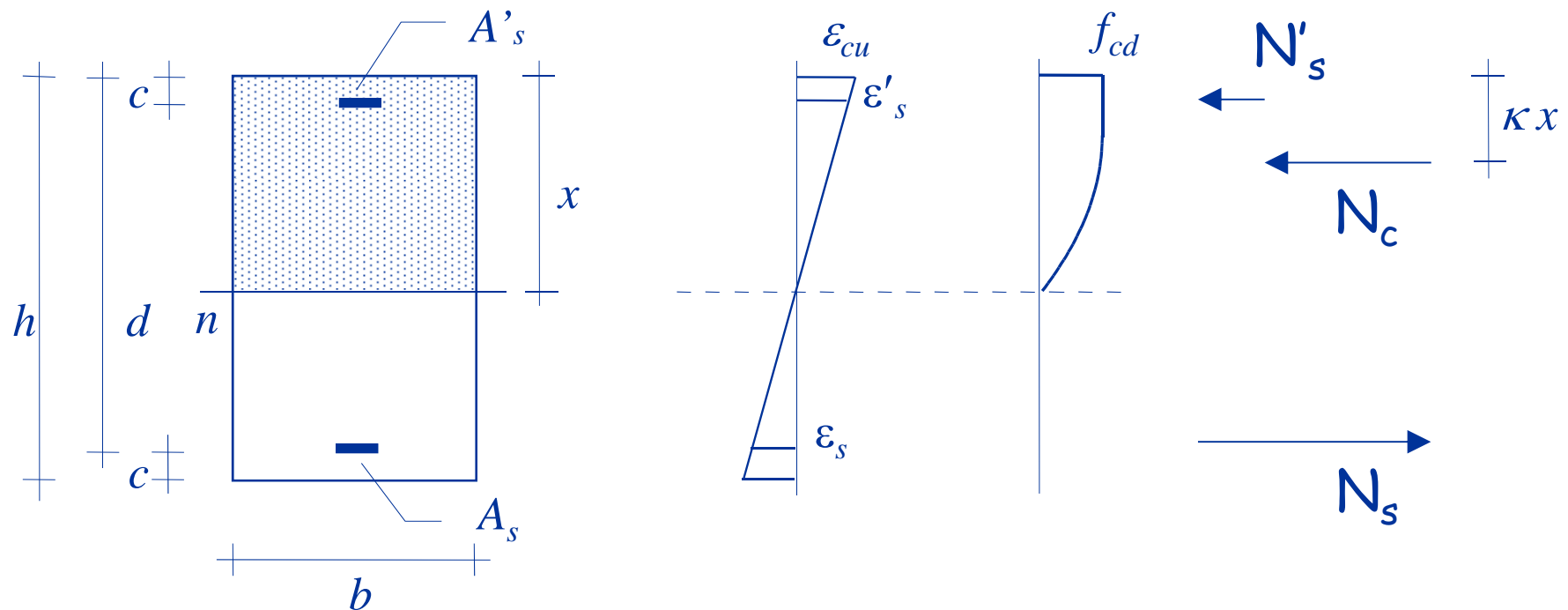
Geometria della sezione
Armature

Coppia $M_{Ed}-N_{Ed}$

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente M_{Rd}
corrispondente a N_{Ed}

Verifica a flessione composta procedimento



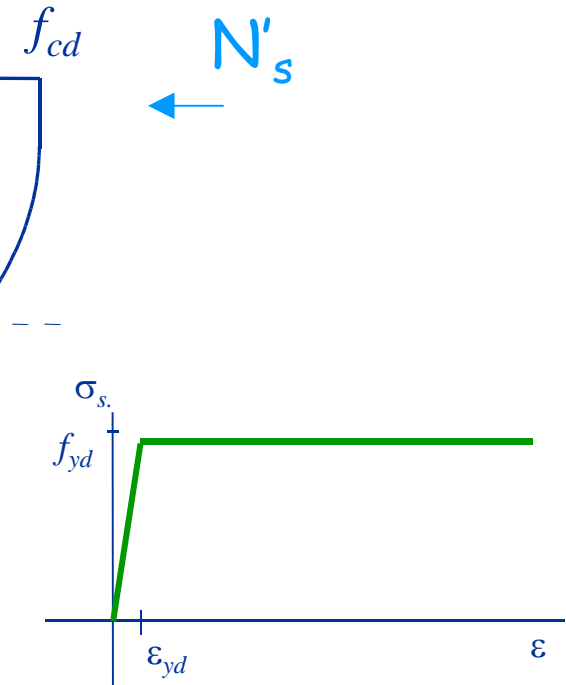
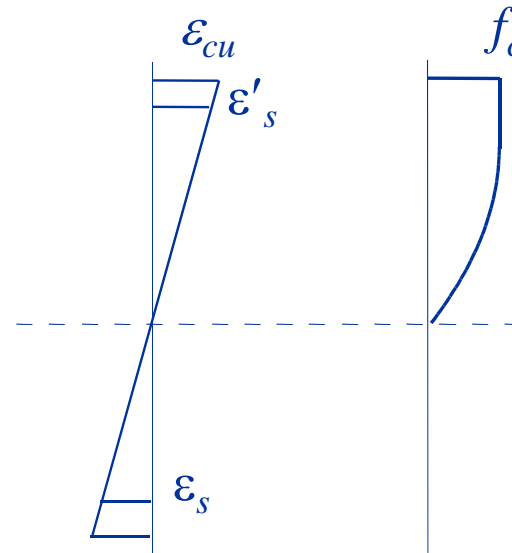
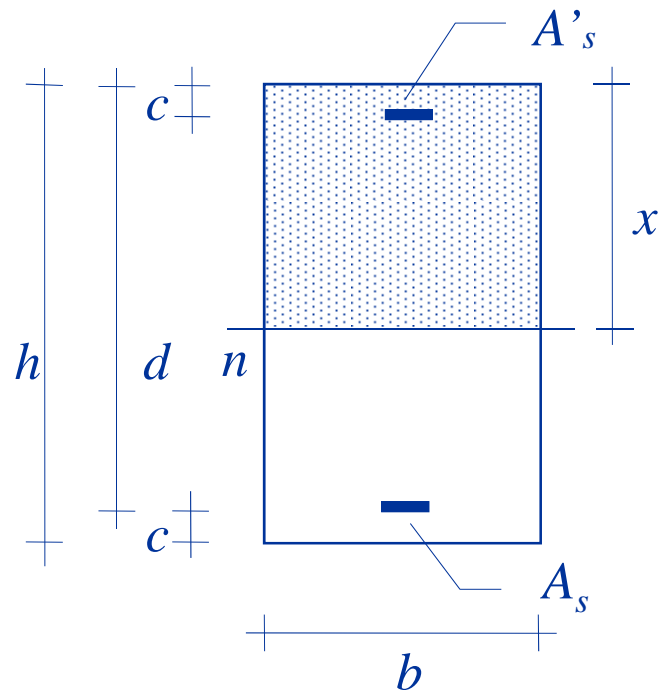
Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

Poi calcolare M_{Rd} , con equilibrio alla rotazione

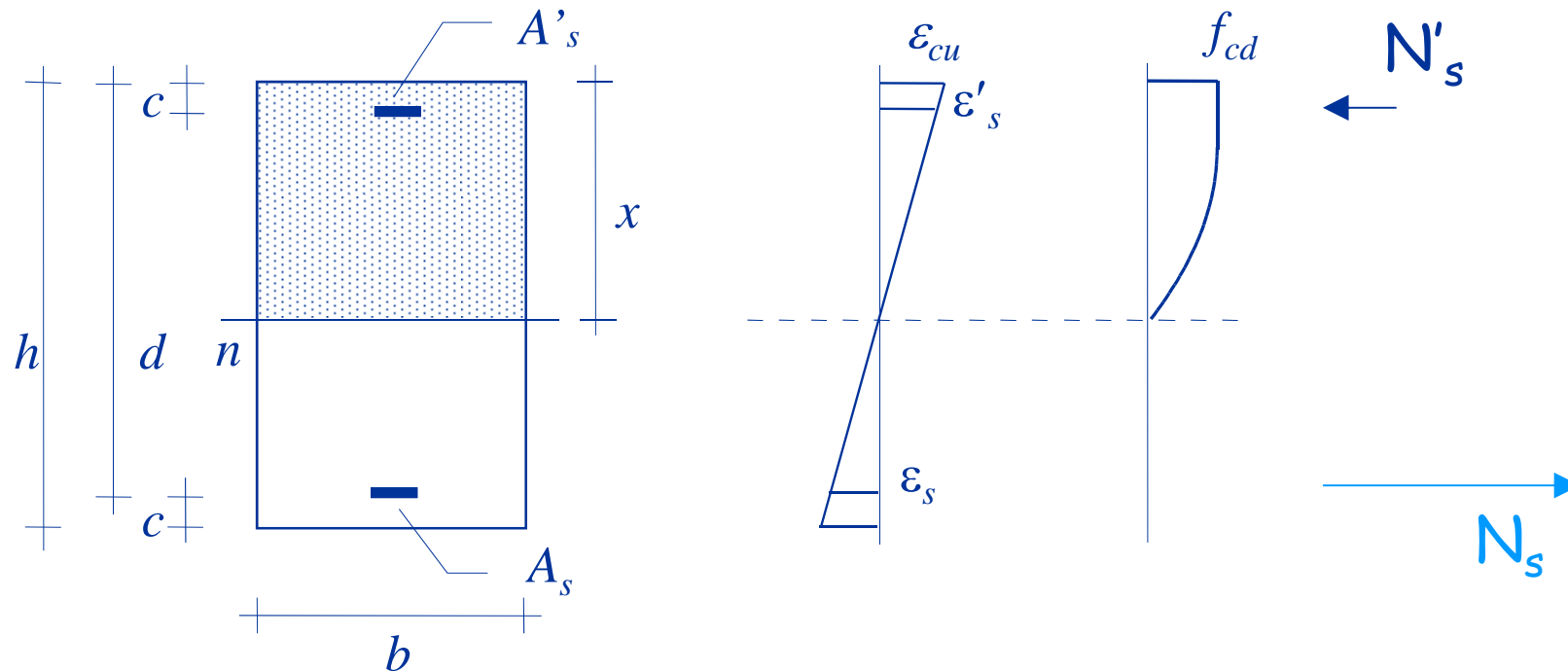
Verifica a flessione composta risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



N'_s

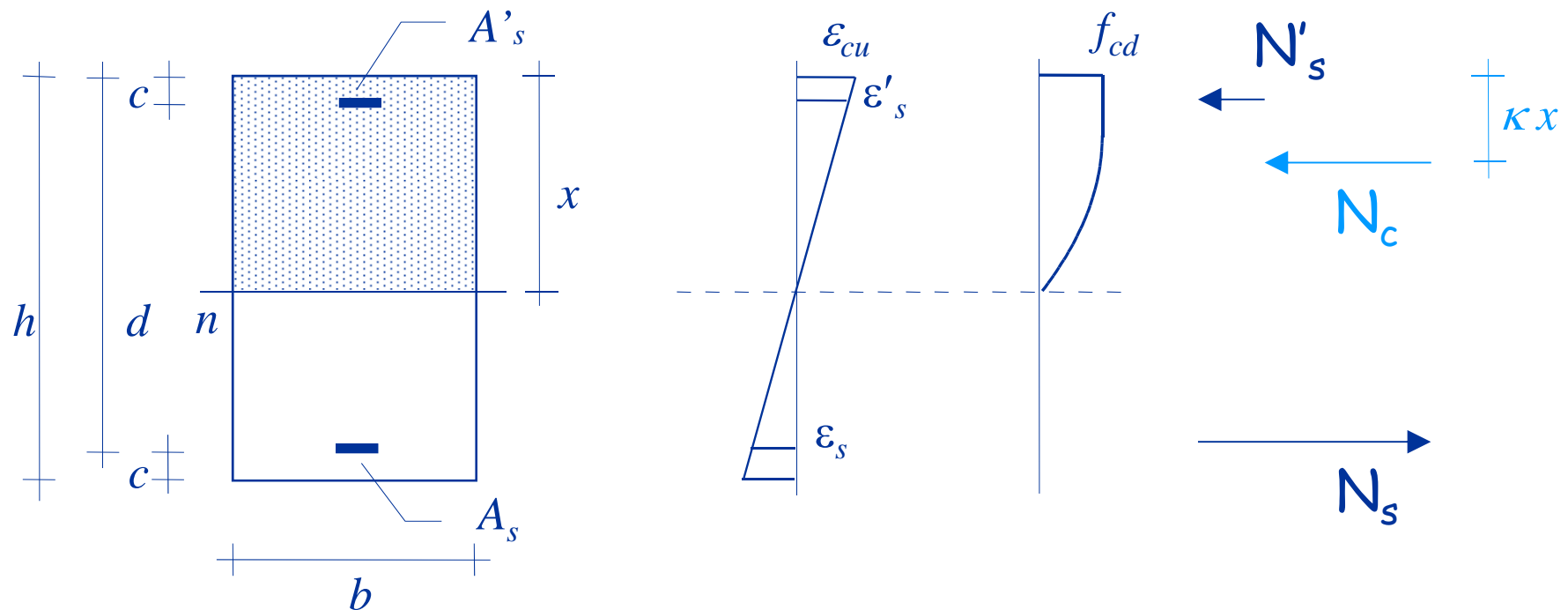
$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma'_s = \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$$

Verifica a flessione composta risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$$

Verifica a flessione composta risultante delle tensioni (sezione parzializzata)



$$N_c = - \beta \ b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Verifica a flessione composta

asse neutro

- Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

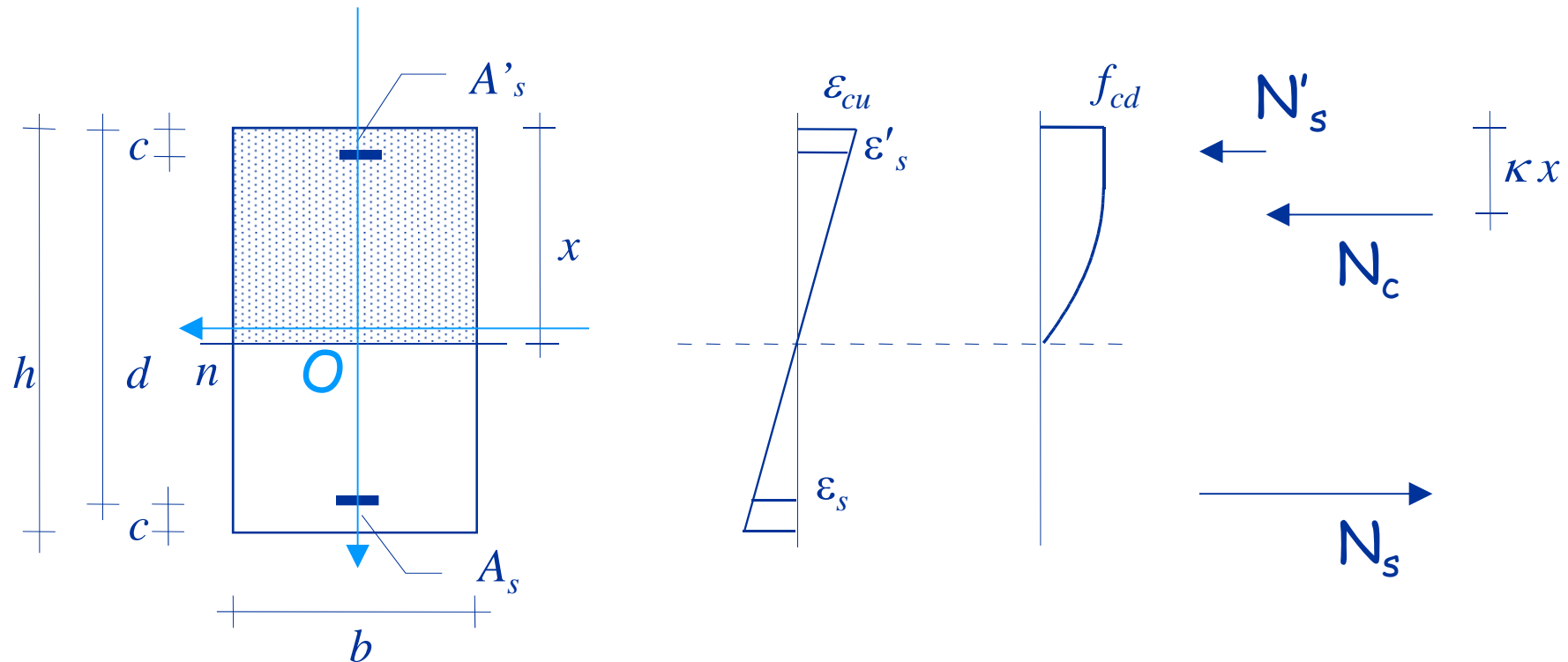
$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} \quad N_{Ed} \text{ positivo se trazione}$$

altrimenti si può risolvere per tentativi l'equazione:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

Verifica a flessione composta

momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto al baricentro della
sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Flessione composta

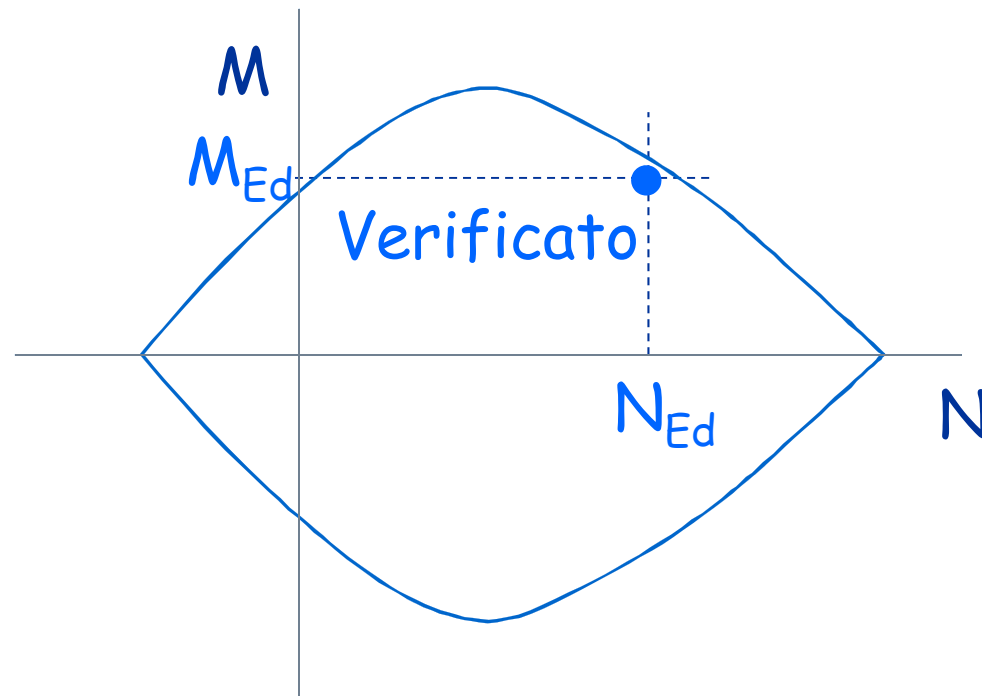
brevi richiami

2. Determinare il dominio di resistenza (o curva di interazione) $M_{Rd} - N_{Rd}$

- Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
- Determinare la risultante delle tensioni e quindi N_{Rd}
- Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni, M_{Rd}
- Variare il diagramma di deformazioni in modo da ottenere tutte le coppie $M_{Rd} - N_{Rd}$

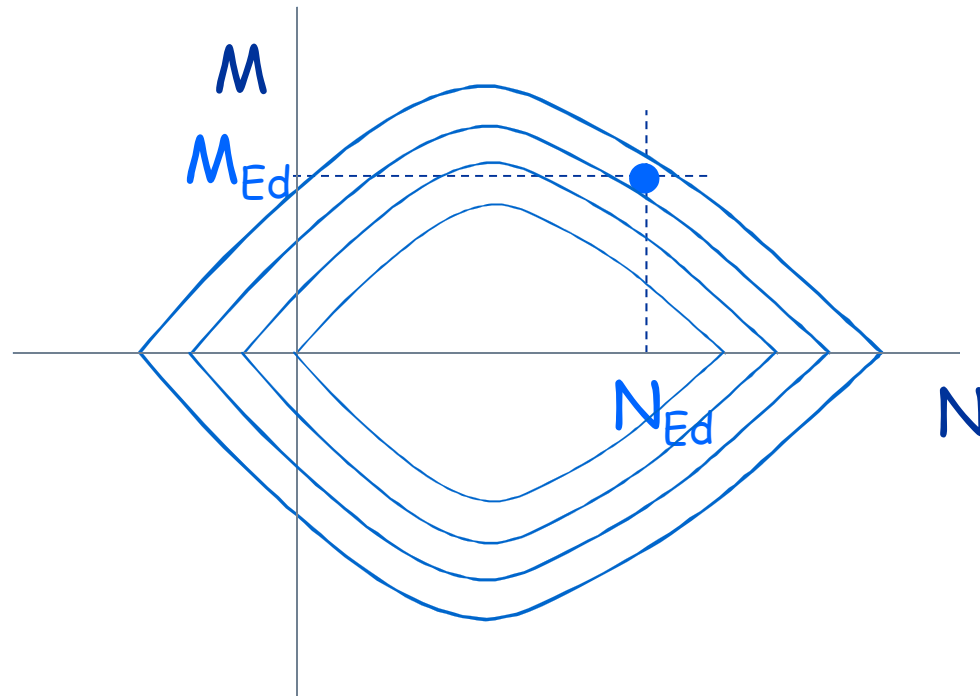
Dominio di resistenza per la verifica

- La sezione è verificata se il punto che rappresenta la coppia $M_{Ed} - N_{Ed}$ è interno al dominio



Dominio di resistenza per il progetto delle armature

- Tracciando il dominio con più curve, che rappresentano diverse quantità di armatura, è possibile determinare l'armatura necessaria per una assegnata coppia $M_{Ed} - N_{Ed}$



Flessione composta

brevi richiami

3. Utilizzare formule approssimate

(vedi A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = A_c f_{cd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 A_c h f_{cd}$$

$$N_{s,max} = A_{s,tot} f_{yd}$$

$$M_{s,max} = 0.5 A_{s,tot} (h - 2c) f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

per sezione rettangolare con armatura simmetrica
($A_s = A'_s$; $A_{s,tot} = 2 A_s$)

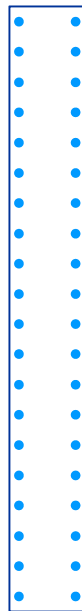
Flessione composta per le pareti

Cosa cambia?

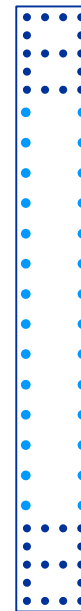
- L'armatura è costituita da tante barre: occorre decidere come disporle



concentrata
agli estremi
(su più strati)



distribuita
uniformemente



un po' distribuita e
un po' concentrata

Distribuzione dell'armatura e proprietà della parete

- Resistenza
Capacità di portare momento flettente
- Duttilità
Capacità di deformarsi plasticamente
Duttilità = rapporto tra curvatura ultima e
curvatura allo snervamento dell'armatura tesa
- Influenza della distribuzione dell'armatura:
Studio di Cardenas e Magura, 1973

Studio di Cardenas e Magura

Riproduce (analiticamente) il comportamento della parete sotto l'effetto di un momento flettente crescente fino al collasso per valutare

- Momento resistente
- Duttilità disponibile

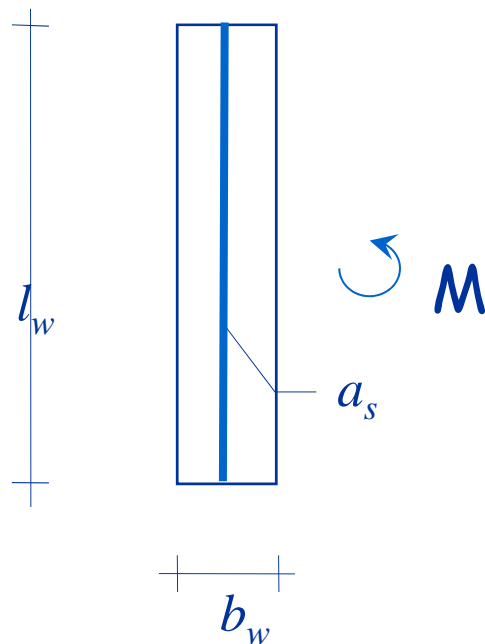
Considera sezioni con diverse quantità d'armatura

Considera due distribuzioni di armature

- Distribuita uniformemente
- Concentrata prevalentemente alle estremità

Studio di Cardenas e Magura procedimento

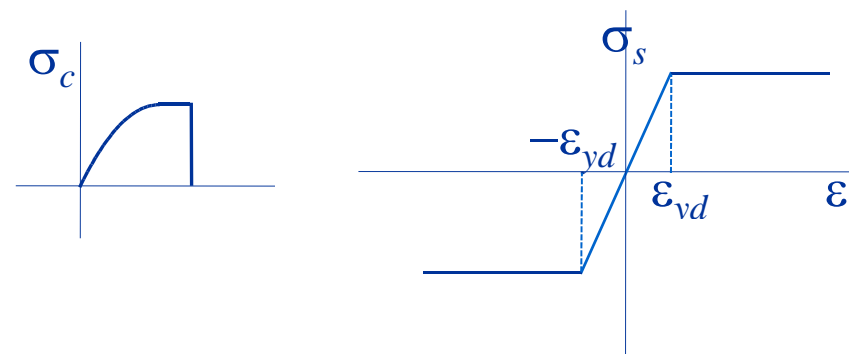
- Si considera nullo lo sforzo normale
- Si fa crescere il momento flettente fino al collasso



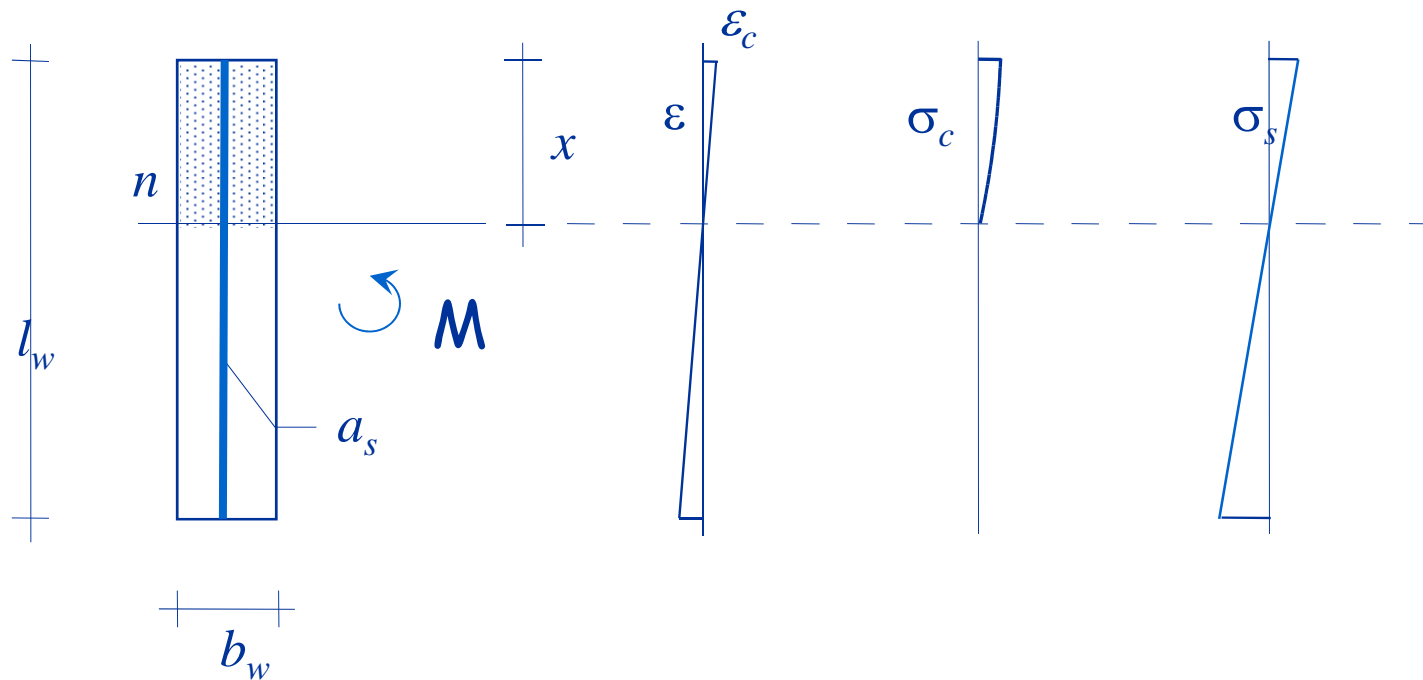
Sezione: $b_w=20$ cm, $l_w=500$ cm

Materiali: Calcestruzzo C25/30
Acciaio B450

Legami σ - ε

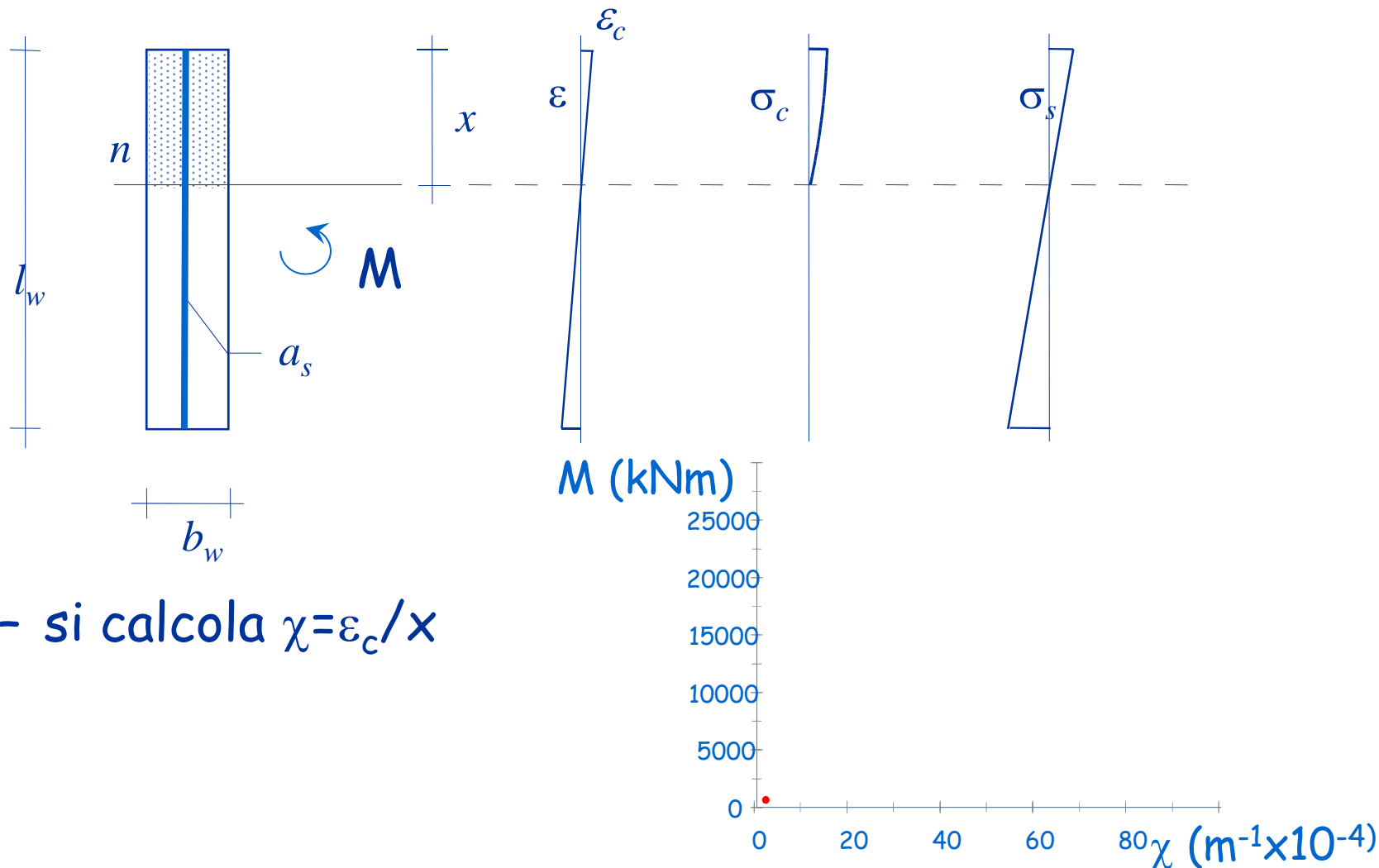


Studio di Cardenas e Magura procedimento

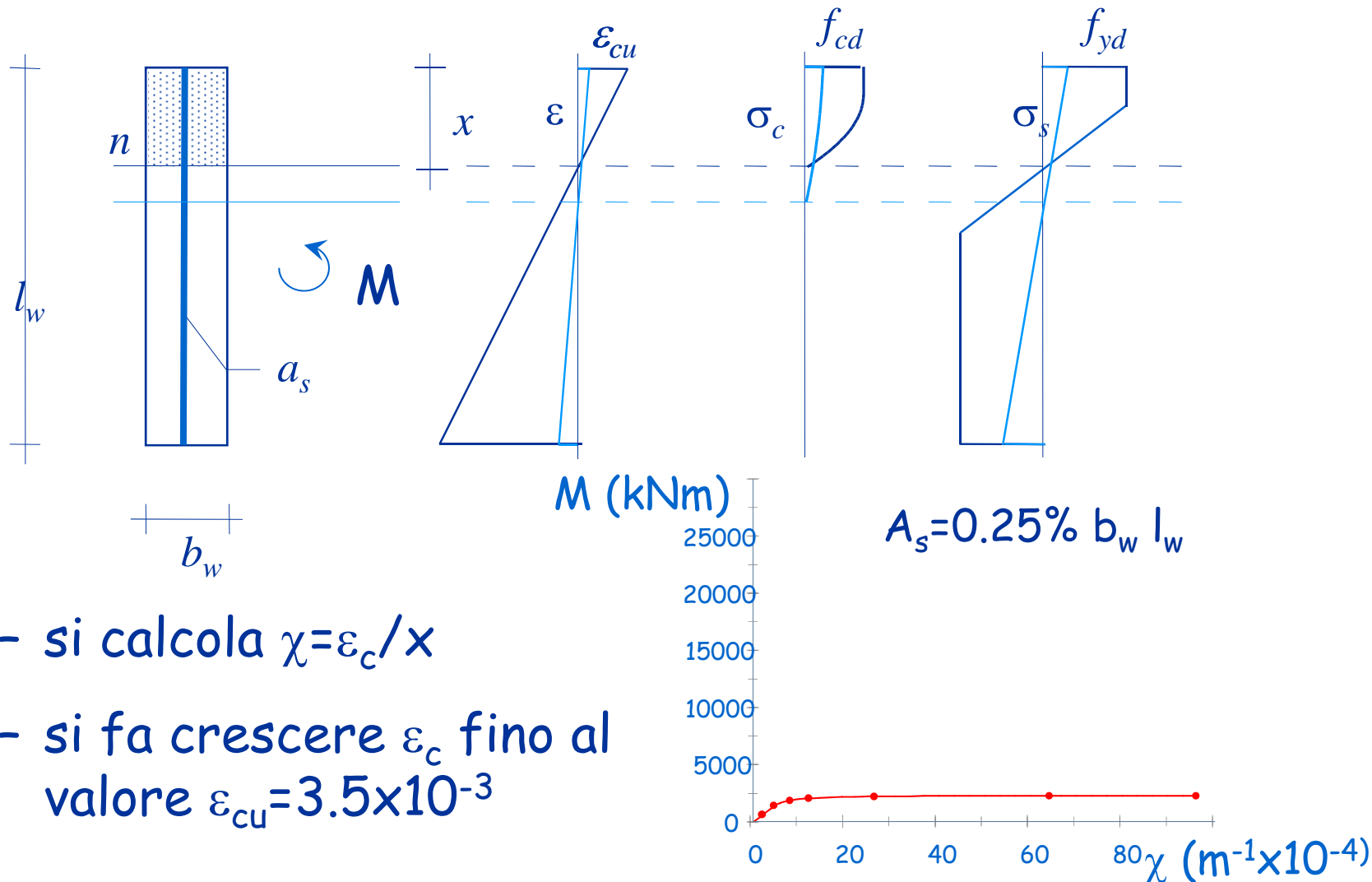


- si assegna ε_c ;
- si determina x con equilibrio alla traslazione;
- si calcola il momento M corrispondente.

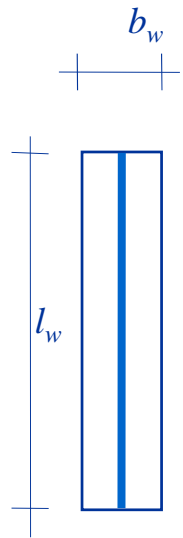
Studio di Cardenas e Magura procedimento



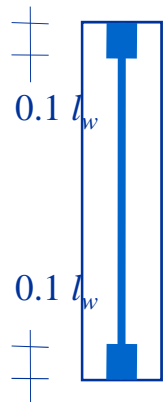
Studio di Cardenas e Magura procedimento



Studio di Cardenas e Magura risultati

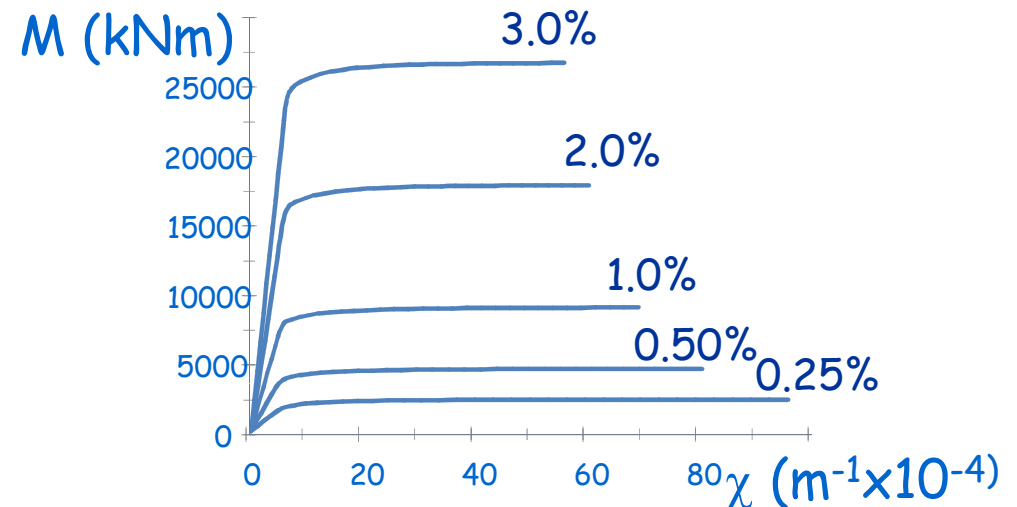
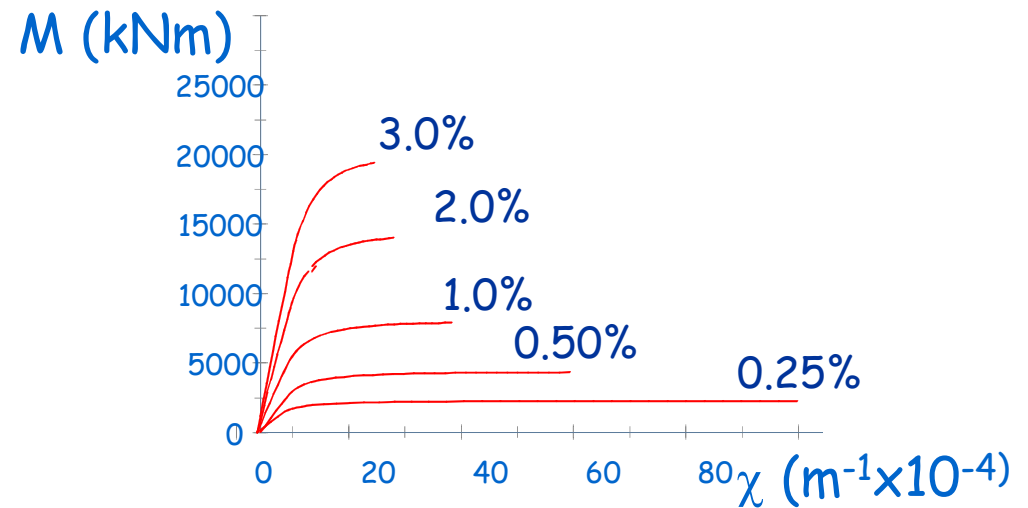


A_s uniformemente distribuita lungo la sezione

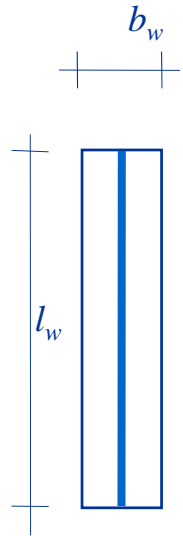


$A_s = 0.25\% b_w l_w$ uniformemente distribuita

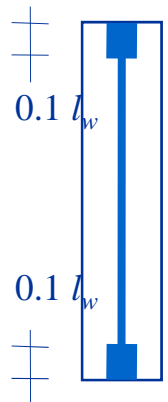
Il resto di A_s concentrato agli estremi



Studio di Cardenas e Magura risultati

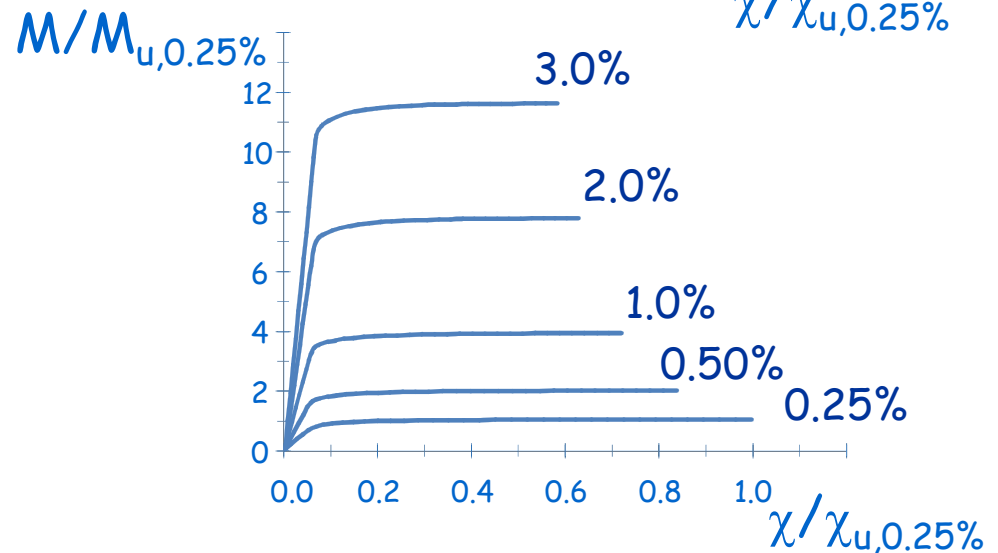
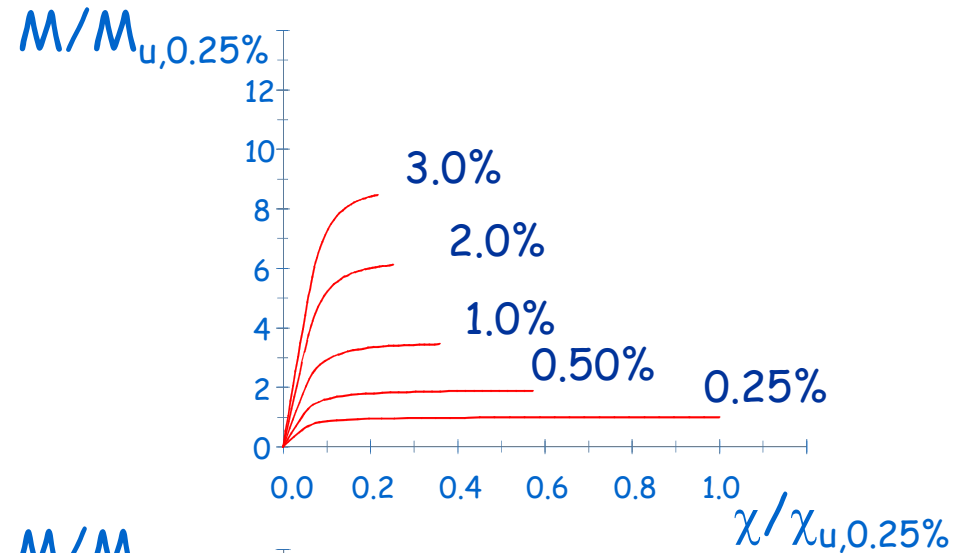


A_s uniformemente
distribuita lungo
la sezione



$A_s = 0.25\% b_w l_w$
uniformemente
distribuita

Il resto di A_s
concentrato agli
estremi



Studio di Cardenas e Magura

risultati

- Armatura con distribuzione uniforme
 - Aumentando la quantità di armatura si aumenta il momento resistente ma si riduce pesantemente la duttilità
- Armatura prevalentemente alle estremità
 - A parità di armatura complessiva si ottiene un momento resistente superiore a quella precedente
 - All'aumentare della quantità di armatura la riduzione di duttilità disponibile è inferiore



Conviene concentrare l'armatura alle estremità

Indicazioni di normativa

zone di estremità

- Individuare zone alle estremità della sezione della parete, nelle quali è disposta una buona quantità di armatura longitudinale, ben confinata
 - La zona confinata deve estendersi per un tratto l_c fino a raggiungere il "punto dove il calcestruzzo non confinato può frantumarsi ed essere espulso per le grandi deformazioni di compressione"
Eurocodice 8, punto 5.4.3.4.2(6)
 - La zona confinata deve estendersi per un tratto l_c "pari al 20% della lunghezza l_w in pianta della parete stessa e comunque non inferiore a 1.5 volte lo spessore della parete"
NTC08, punto 7.4.6.2.4

Indicazioni di normativa

zone di estremità

- Nella zona confinata si deve disporre una armatura longitudinale adeguata



$$1\% b_w l_c \leq A_{s,tot} \leq 4\% b_w l_c$$

$l_c \geq 0.2 l_w$

$$l_c \geq 1.5 b_w$$

Consiglio di non superare
il 2 - 2.5% di $b_w l_c$

Braccio della coppia interna: $z = 0.8 l_w$

Indicazioni di normativa

zone di estremità

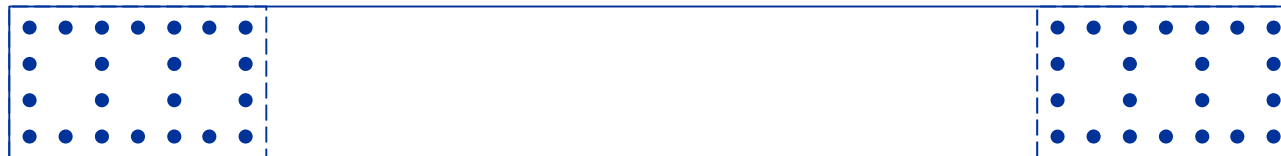
- Nella zona critica si individuano alle estremità della parete due zone confinate aventi per lati lo spessore della parete e una lunghezza "confinata" l_c pari al 20% della lunghezza in pianta l della parete stessa e comunque non inferiore a 1,5 volte lo spessore della parete. In tale zona il rapporto geometrico ρ dell'armatura totale verticale, riferito all'area confinata, deve essere compreso entro i seguenti limiti:

$$1\% \leq \rho \leq 4\%$$

Indicazioni di normativa

zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



Instabilità delle barre



27-02-2010 , Cile



Foto P. Fajfar

Le staffe si possono aprire o rompere



27-02-2010 , Cile

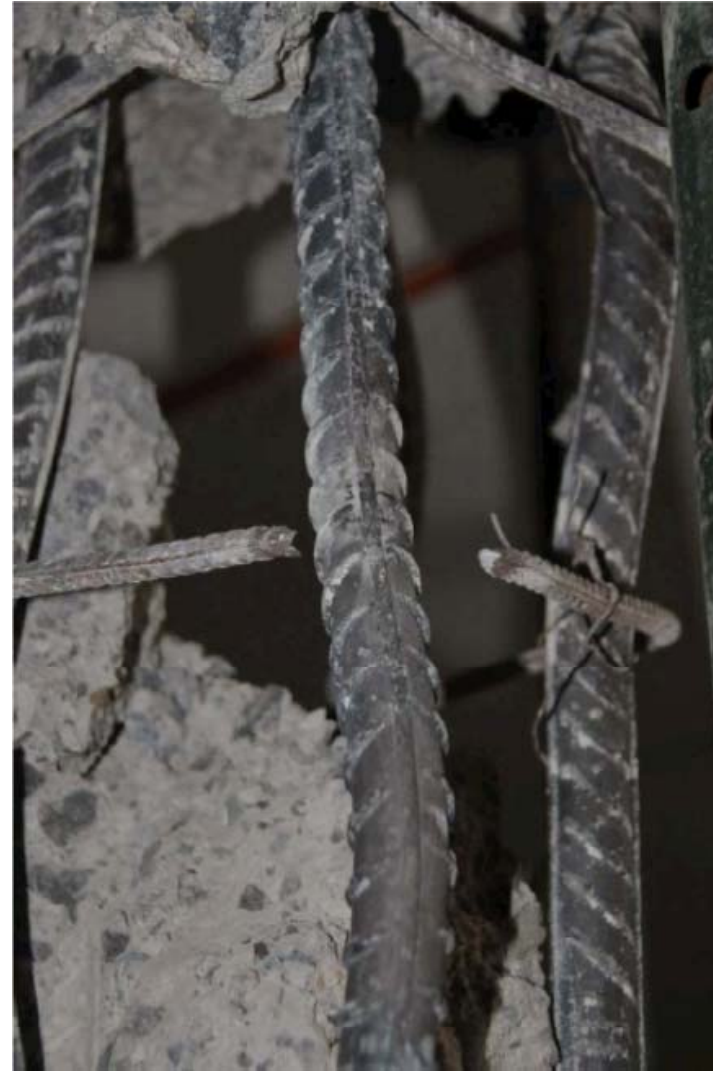


Foto P. Fajfar

Disgregamento del nucleo di calcestruzzo



27-02-2010 , Cile



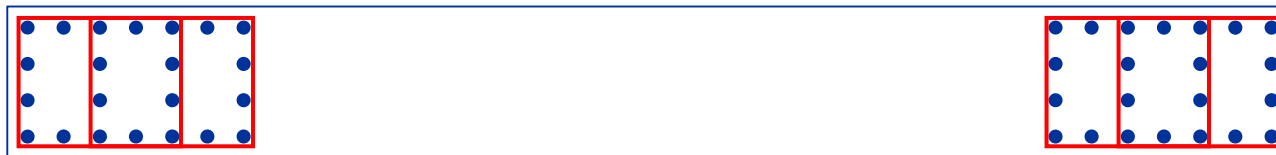
Foto P. Fajfar

Indicazioni di normativa zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



Per prevenire l'instabilità delle barre delle zone confinate e la disgregazione del nucleo di calcestruzzo occorre disporre una buona staffatura



Nelle zone confinate l'armatura trasversale deve essere costituita da barre di diametro **non inferiore a 6 mm**, disposti in modo da fermare una barra verticale ogni due con un passo non superiore a **8 volte il diametro della barra o a 10 cm**. Le barre non fissate devono trovarsi a **meno di 15 cm** da una barra fissata.

Indicazioni di normativa

zone di estremità

- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

Zona critica

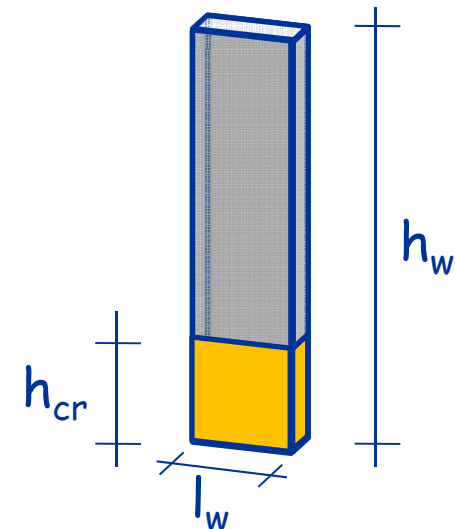
È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche, ovvero ...

... la porzione di parete di altezza h_{cr} al di sopra dell'incastro

$$h_{cr} = \max (l_w, h_w / 6)$$

$$h_{cr} \leq h_{1 \text{ piano}} \quad \text{per edifici fino a 6 piani}$$

$$h_{cr} \leq h_{2 \text{ piani}} \quad \text{edifici con più di 6 piani}$$



Indicazioni di normativa

zone di estremità

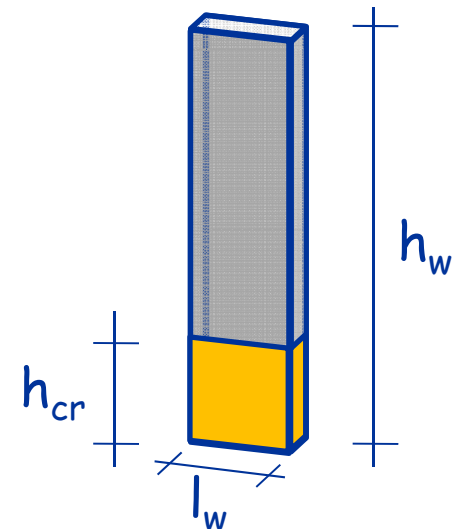
- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

Zona critica

È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche

Al di fuori della zona critica

È comunque opportuno tenere presente le indicazioni precedenti, sia pure in maniera più blanda



Indicazioni di normativa altre prescrizioni

In tutta la parete

- Le armature, sia orizzontali che verticali, devono avere diametro non superiore ad $1/10$ dello spessore della parete, devono essere disposte su entrambe le facce della parete, ad un passo non superiore a 30 cm, devono essere collegate con legature, in ragione di almeno nove ogni metro quadrato

Nella zona centrale

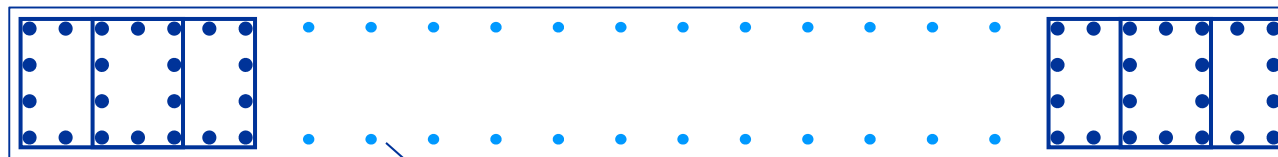
- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

Indicazioni di normativa

zona centrale

- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

Questa armatura è sufficiente anche per la fessurazione da flessione nel piano di maggior rigidezza



$$A_s \geq 0.2\% A_c$$

Per flessione nel piano debole è tesa solo una fila di barre ed il minimo sarebbe $0.15\% A_{c,tesa}$, ovvero $0.3\% A_{c,tot}$
Questa flessione è però in genere trascurabile

Indicazioni bozza NTC 2013

zone di estremità

Valgono i limiti stabiliti per i pilastri

	CD "A"	CD "B"
Diametro staffe:	$\phi_w \geq \max(6 \text{ mm}, 0.4 \phi_{l \max})$	$\phi_w \geq 6 \text{ mm}$
Passo staffe:	$s \leq 1/3 \text{ lato minore}$	$s \leq 1/2 \text{ lato minore}$
Per barre $\phi 20$ e $b_w = 30 \text{ cm}$	$s \leq 12.5 \text{ cm}$ $s \leq 6 \phi_l$	$s \leq 17.5 \text{ cm}$ $s \leq 8 \phi_l$

Ed inoltre ...

Indicazioni bozza NTC 2013

zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

α Coefficiente di efficacia del confinamento

$$\alpha = \alpha_n \alpha_s \quad \alpha_n = 1 - \frac{\sum b_i^2}{6 b_o h_o} \quad \alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right) \left(1 - \frac{s}{2 h_o}\right)$$

b_o, h_o dimensioni del nucleo confinato

b_i distanza tra due barre consecutive "contenute"

s passo delle staffe

Indicazioni bozza NTC 2013

zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

ω_{wd} rapporto meccanico di armatura trasversale

$$\omega_{wd} = \frac{\text{volume staffe}}{\text{volume nucleo di calcestruzzo}} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

Indicazioni bozza NTC 2013

zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

μ_{ϕ} domanda di duttilità attesa

$$\mu_{\phi} = \begin{cases} 1.5 (2 q - 1) & \text{se } T_1 \geq T_c \\ 1.5 \left(1 + 2(q - 1) \frac{T_c}{T_1} \right) & \text{se } T_1 < T_c \end{cases}$$

Indicazioni bozza NTC 2013

zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

v_d sforzo normale adimensionalizzato

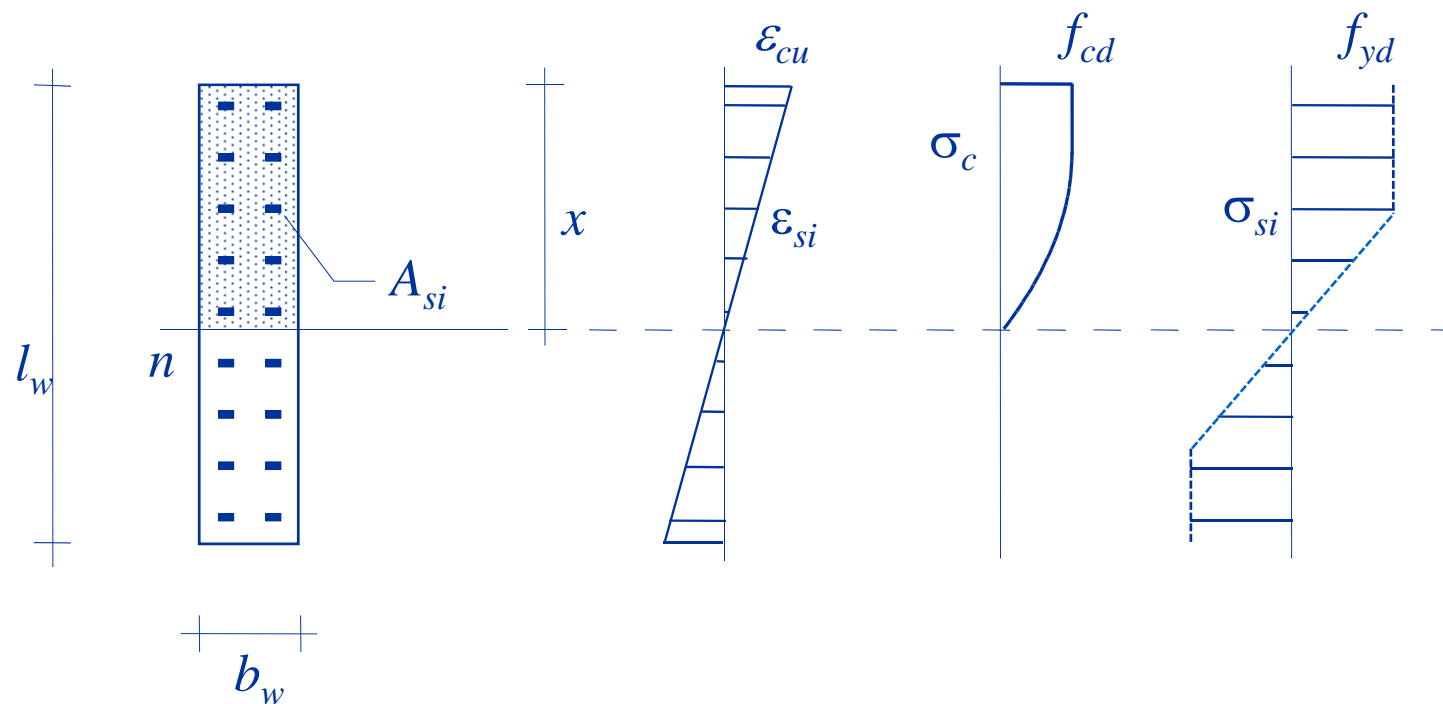
$$v_d = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}$$

ω_v rapporto meccanico di armatura longitudinale al di fuori degli elementi di bordo

$$\omega_v = \rho_v \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

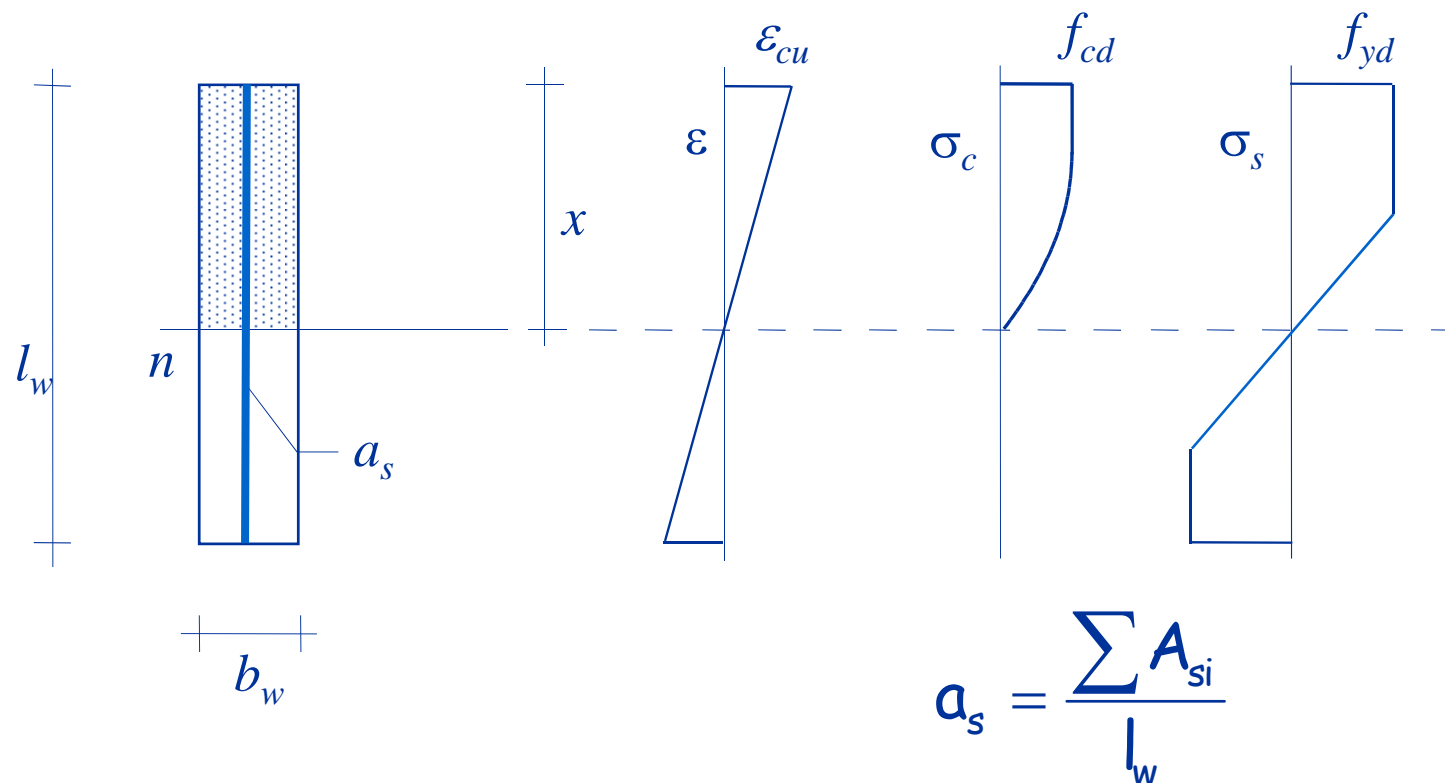
Verifica a flessione composta per le pareti

- Il procedimento rimane quello generale, ma occorre tener conto del fatto che ci sono molte barre di armatura



Verifica a flessione composta per le pareti

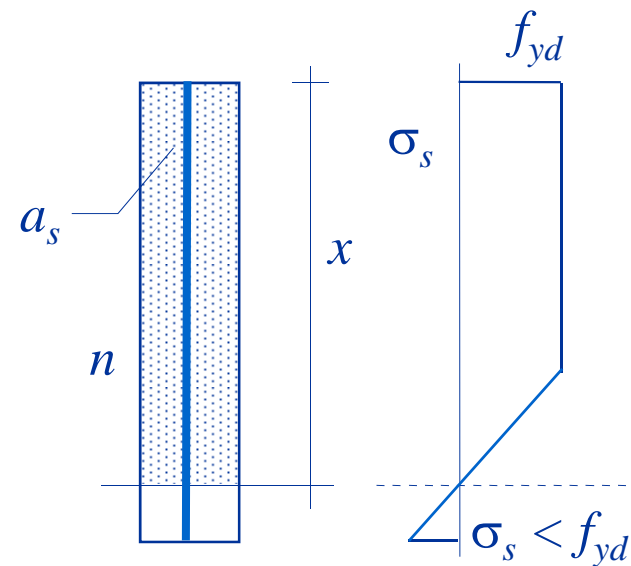
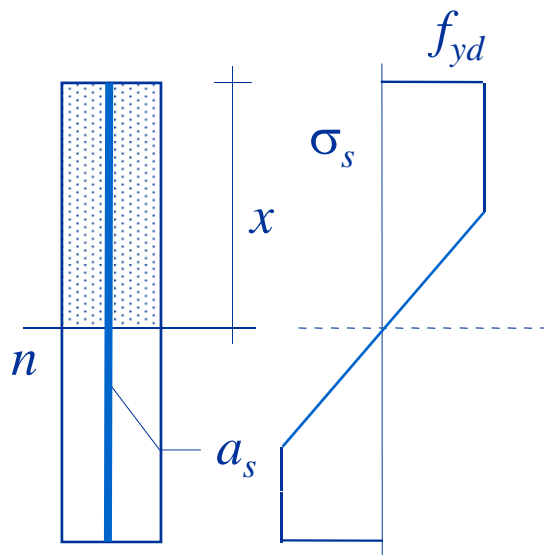
- Se vi è solo **armatura diffusa** lungo la parete, per semplificare i calcoli questa può essere pensata come uniformemente distribuita



Verifica a flessione composta per le pareti

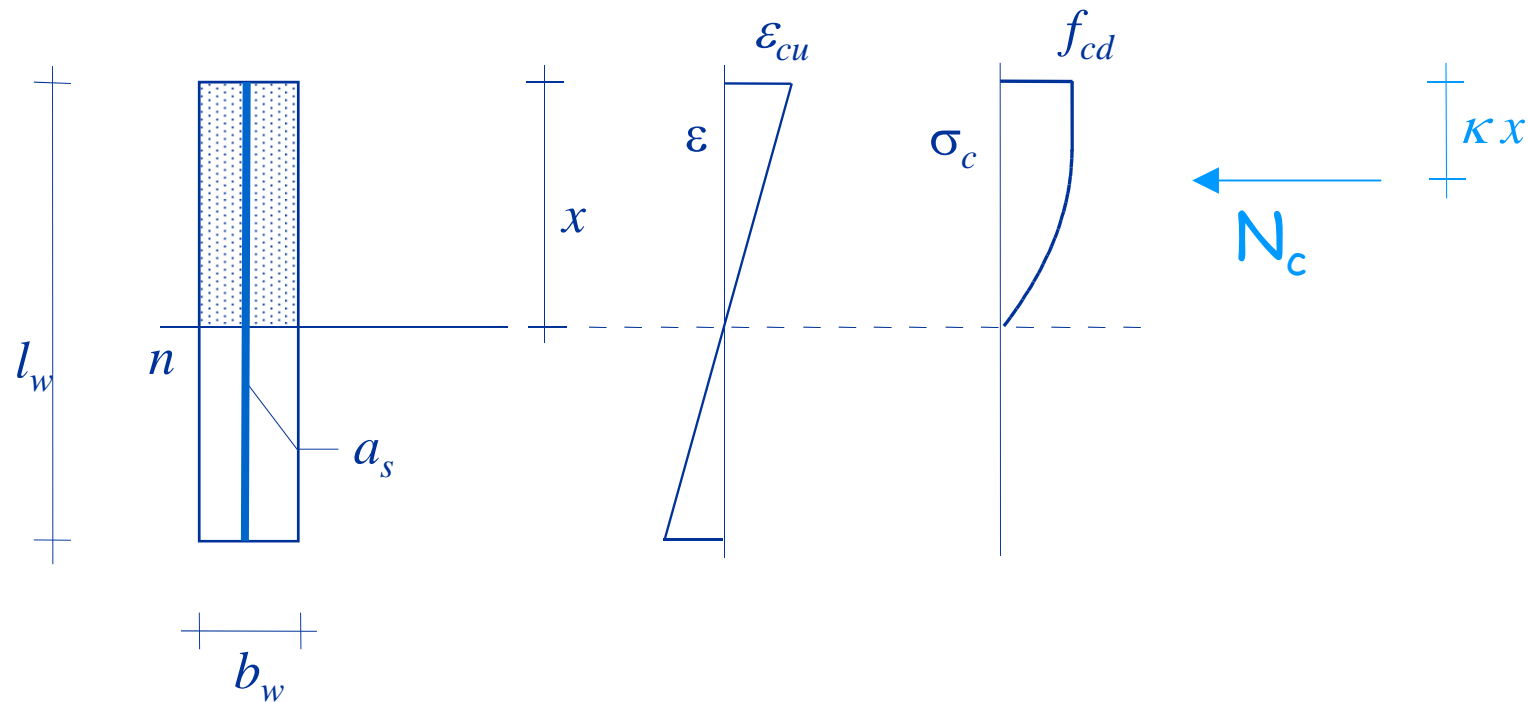
Possono verificarsi due casi

- L'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa (quasi sempre è così)
- L'armatura tesa è tutta in campo elastico



Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa snervata

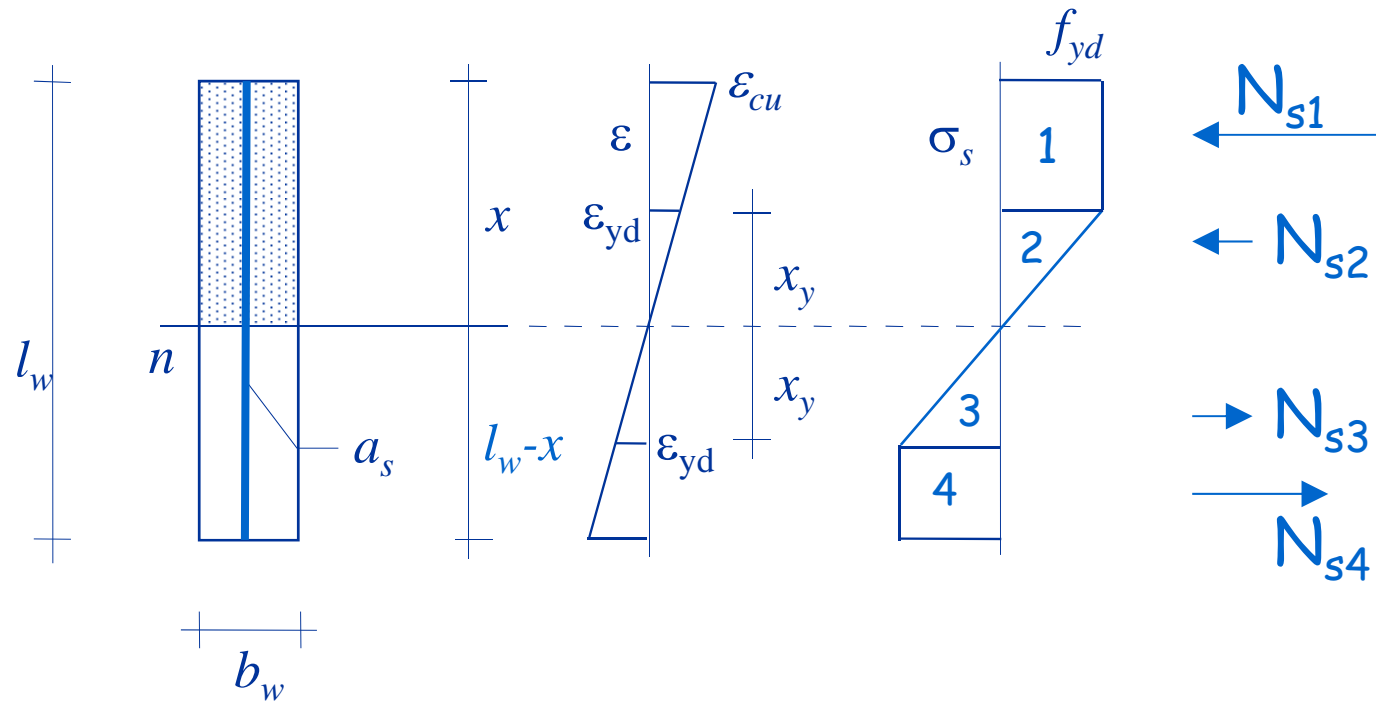


$$N_c = - \beta \ b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa snervata

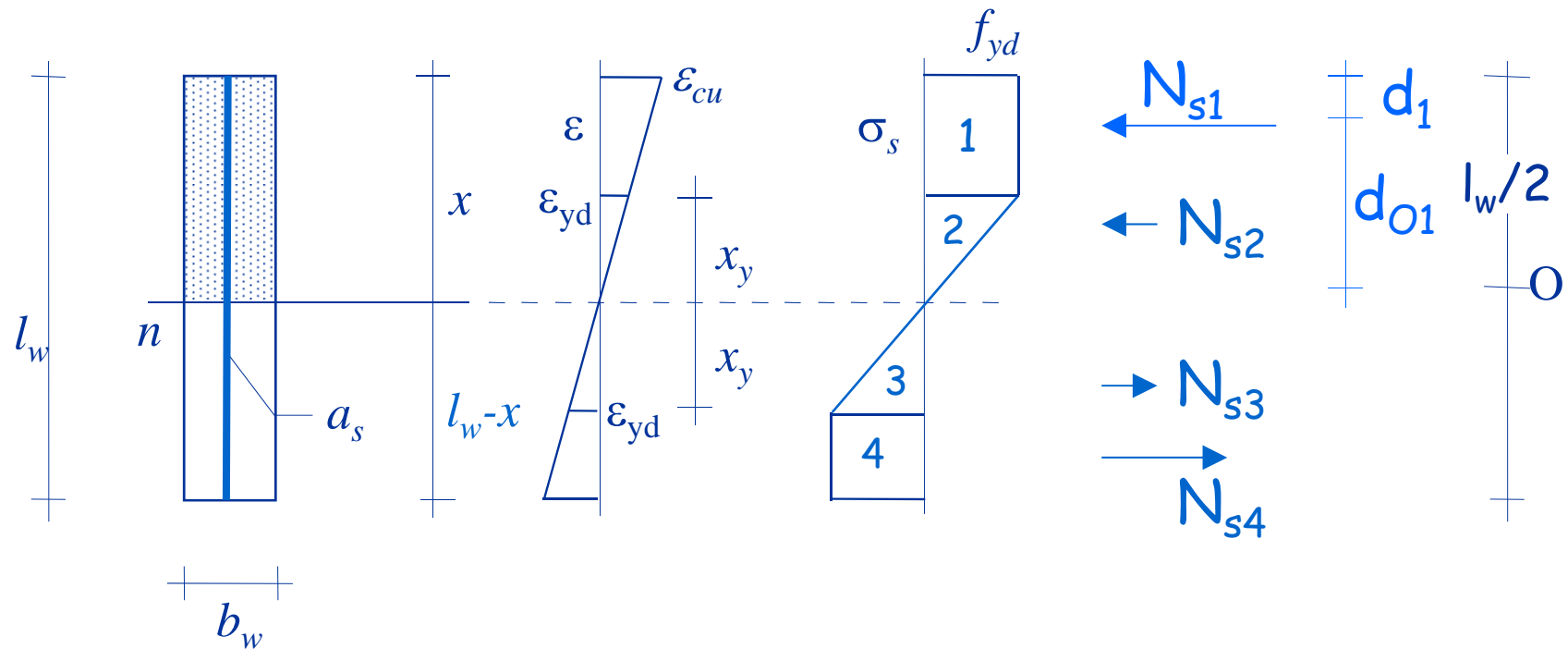


x_y si può esprimere in funzione di x

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x$$

Verifica a flessione composta

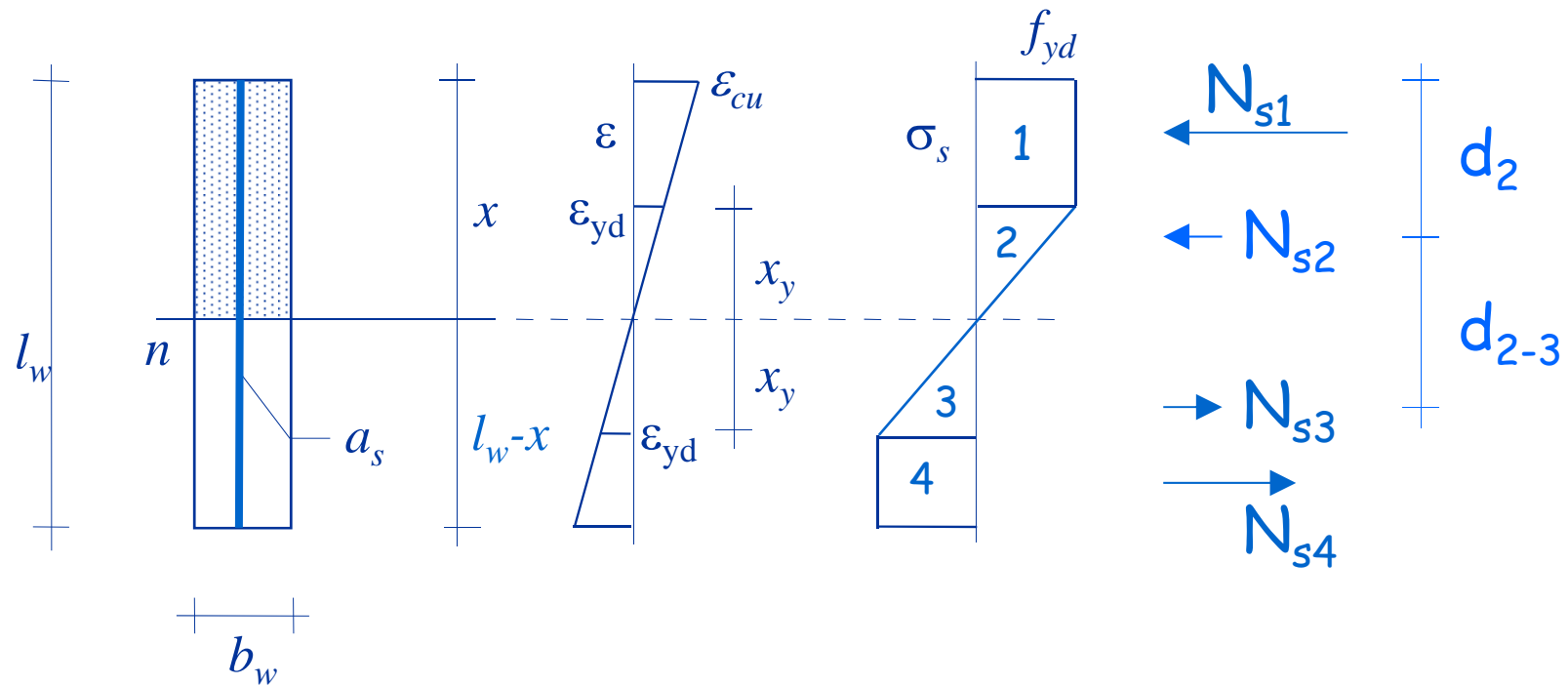
armatura in zona tesa snervata



$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} \quad d_1 = \frac{x - x_y}{2} \quad d_{O1} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa snervata



$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd}$$

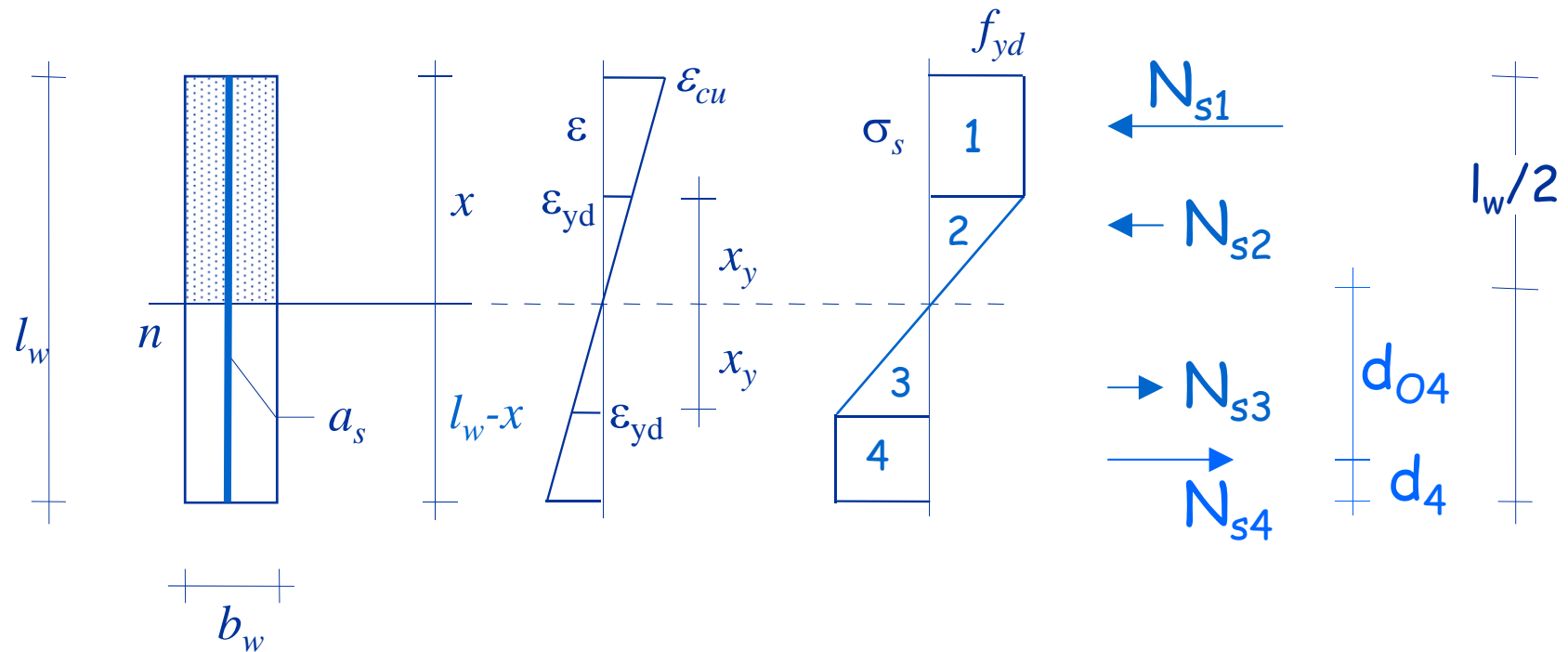
$$N_{s3} = -N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd}$$

$$d_2 = x - \frac{2}{3} x_y$$

$$d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y$$

Verifica a flessione composta

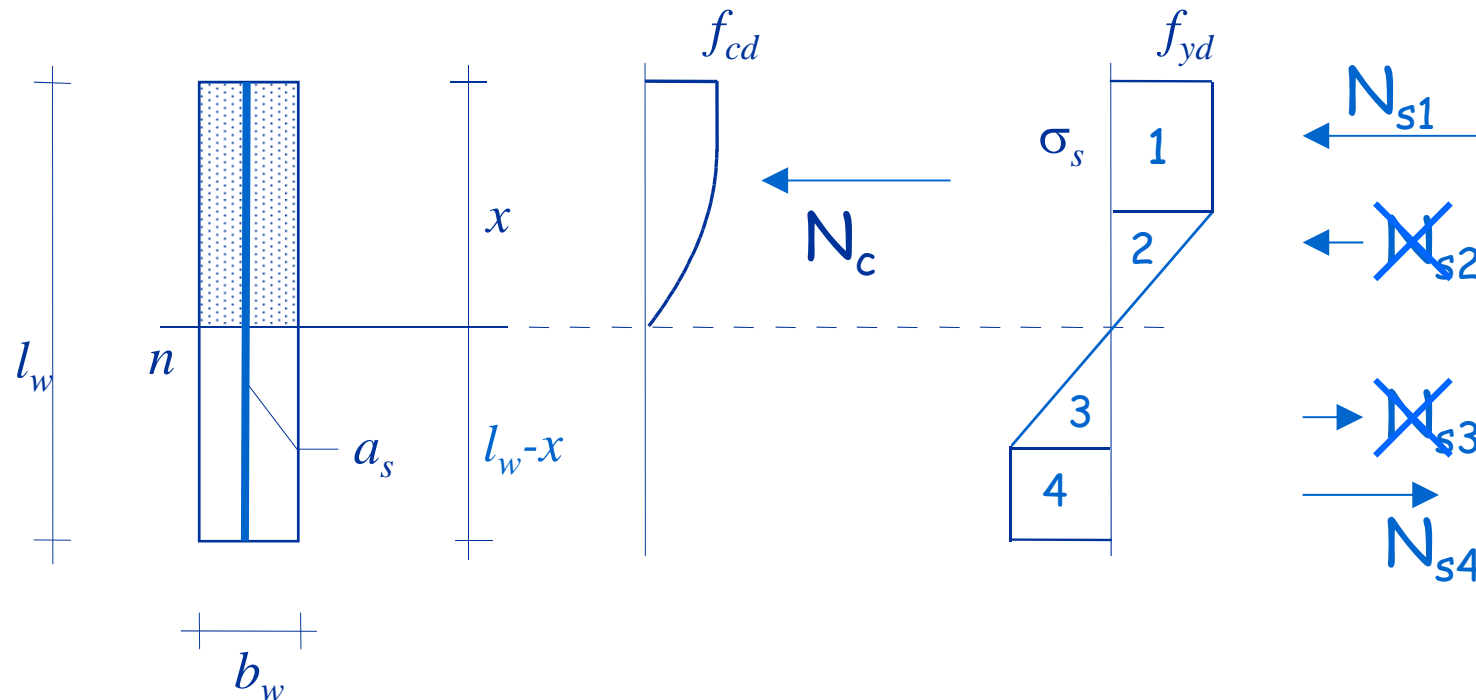
armatura in zona tesa snervata



$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} \quad d_4 = \frac{l_w - x - x_y}{2} \quad d_{O4} = \frac{x + x_y}{2}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa snervata

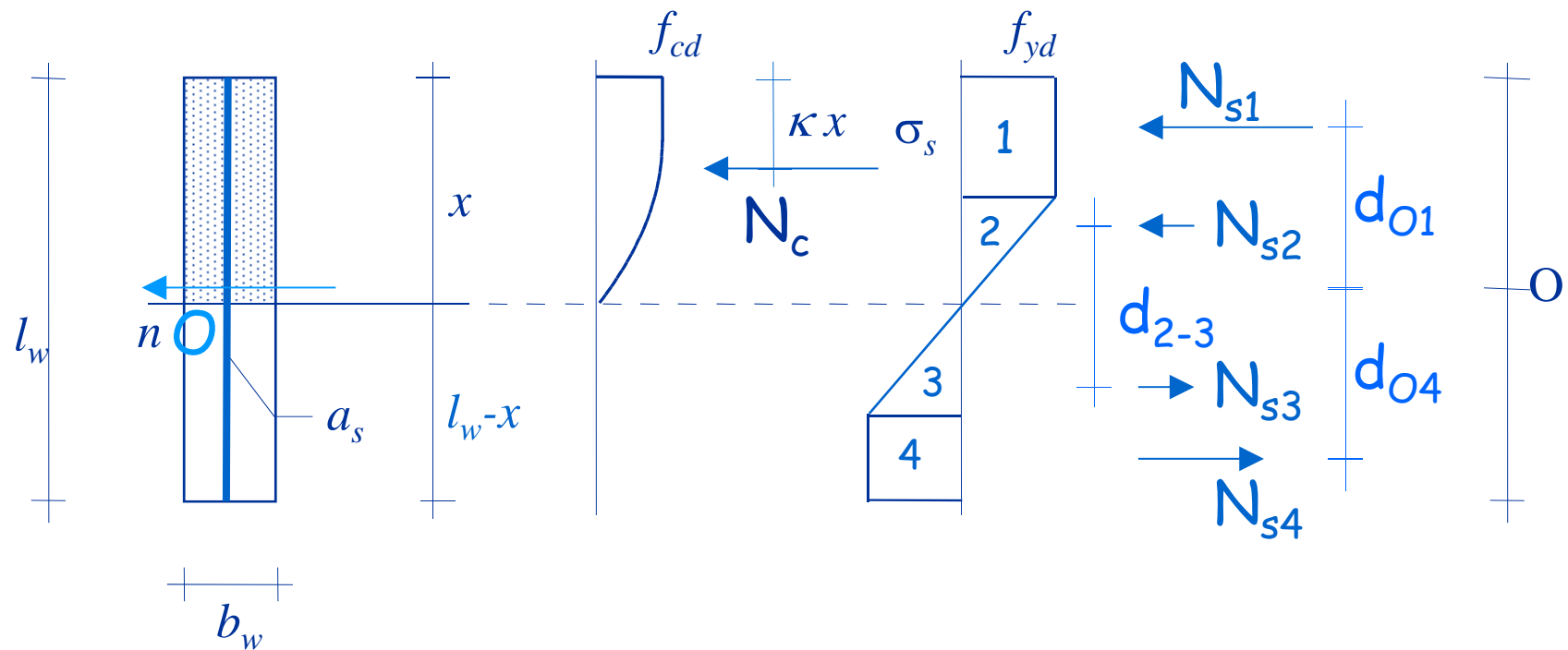


La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s4} = N_{Ed} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa snervata



Il momento resistente vale:

$$M_{Rd} = N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{o1} + N_{s4} d_{o4} - N_c (l_w / 2 - k x)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio 1

armatura in zona tesa snervata

Parete 30x400

30 \varnothing 12

$A_{s,tot} = 33.9 \text{ cm}^2$

$a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

$N_{Ed} = -2000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

Esempio 1

individuazione dell'asse neutro

- Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} =$$
$$= \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 2000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 810 \text{ mm} = 81.0 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 81.0}{81.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 13.8 \times 10^{-3}$$

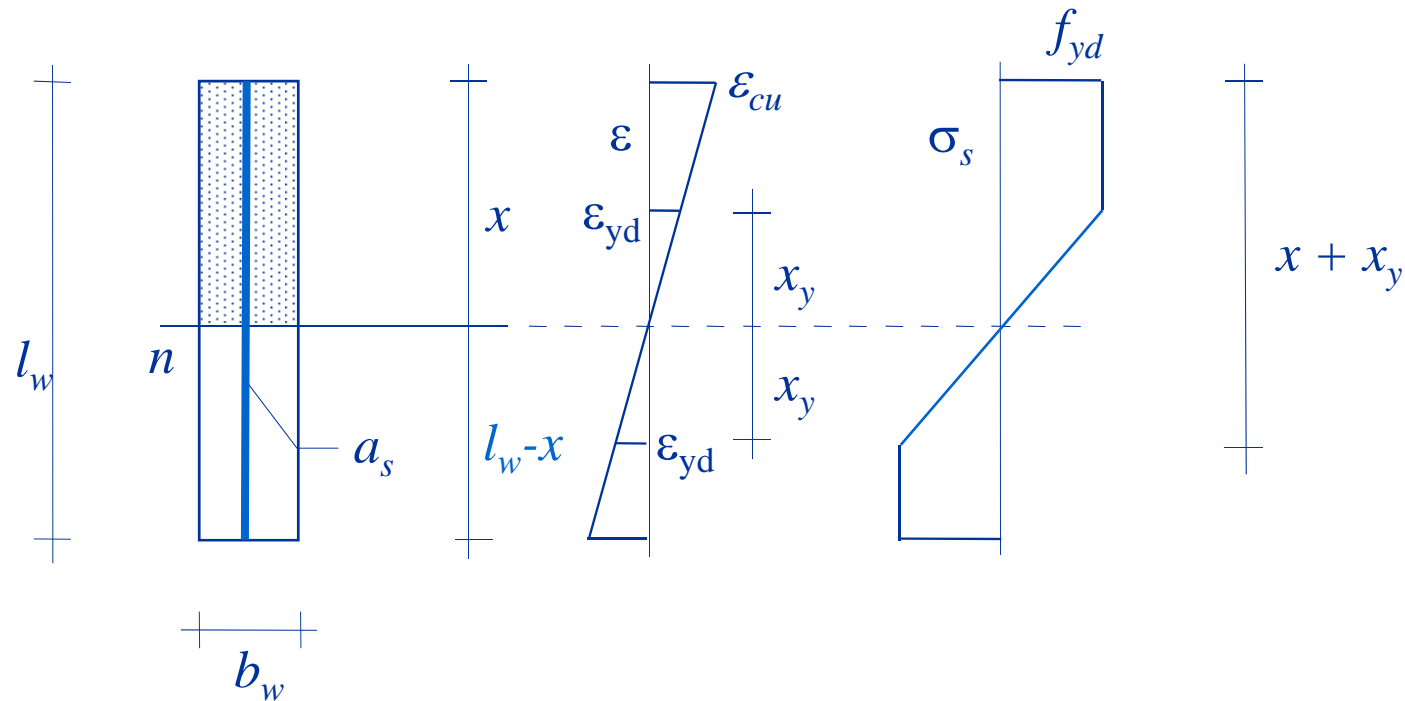
Poiché $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd} (1.86 \times 10^{-3})$ la posizione trovata è esatta

Si ha inoltre

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 81.0 = 43.1 \text{ cm}$$

Esempio 1

individuazione dell'asse neutro



Nota: l'armatura in zona tesa è snervata se $x + x_y < l_w$

$$x + x_y = 81.0 + 43.1 = 124.1 \text{ cm} < l_w = 400 \text{ cm}$$

Poiché $x + x_y < l_w$ l'armatura è snervata e la posizione trovata è esatta

Esempio 1

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$N_c = -\beta b_w \times f_{yd} = -0.81 \times 20 \times 81.0 \times 14.1/10 = -2789.7 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 37.9 \times 391.3/10 = -125.8 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 43.1 \times 391.3/10 = -71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = -N_{s2} = 71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} = 8.48 \times 275.8 \times 391.3/10 = 915.5 \text{ kN}$$

Esempio 1

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$d_{o1} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{81.0 - 43.1 - 500}{2} = -181.1 \text{ cm}$$

$$d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y = \frac{4}{3} 43.1 = 57.5 \text{ cm}$$

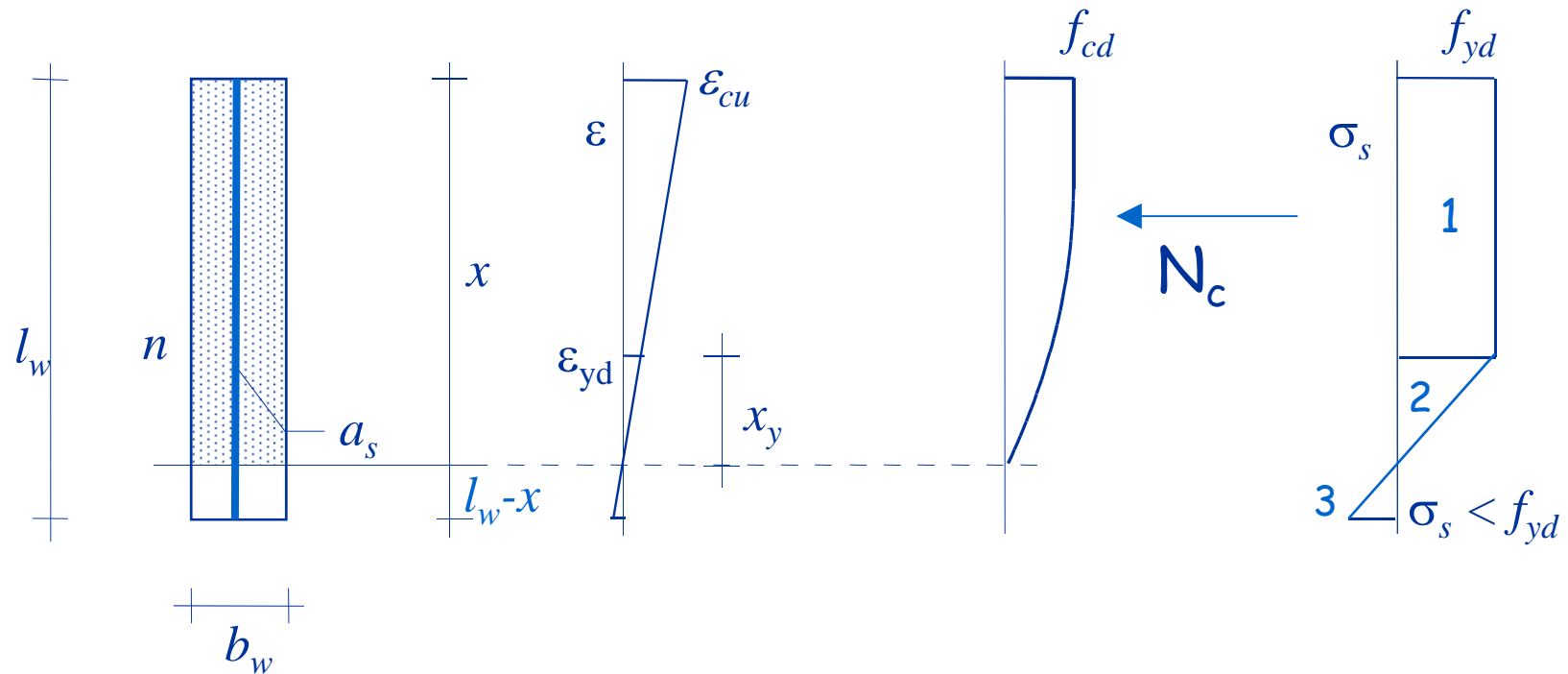
$$d_{o4} = \frac{x + x_y}{2} = \frac{81.0 + 43.1}{2} = 62.1 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{o1} + N_{s4} d_{o4} - N_c (l_w / 2 - k x) = \\ &= 5476.3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

la sezione è verificata

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata



x_y ed N_c si calcolano come nel caso precedente

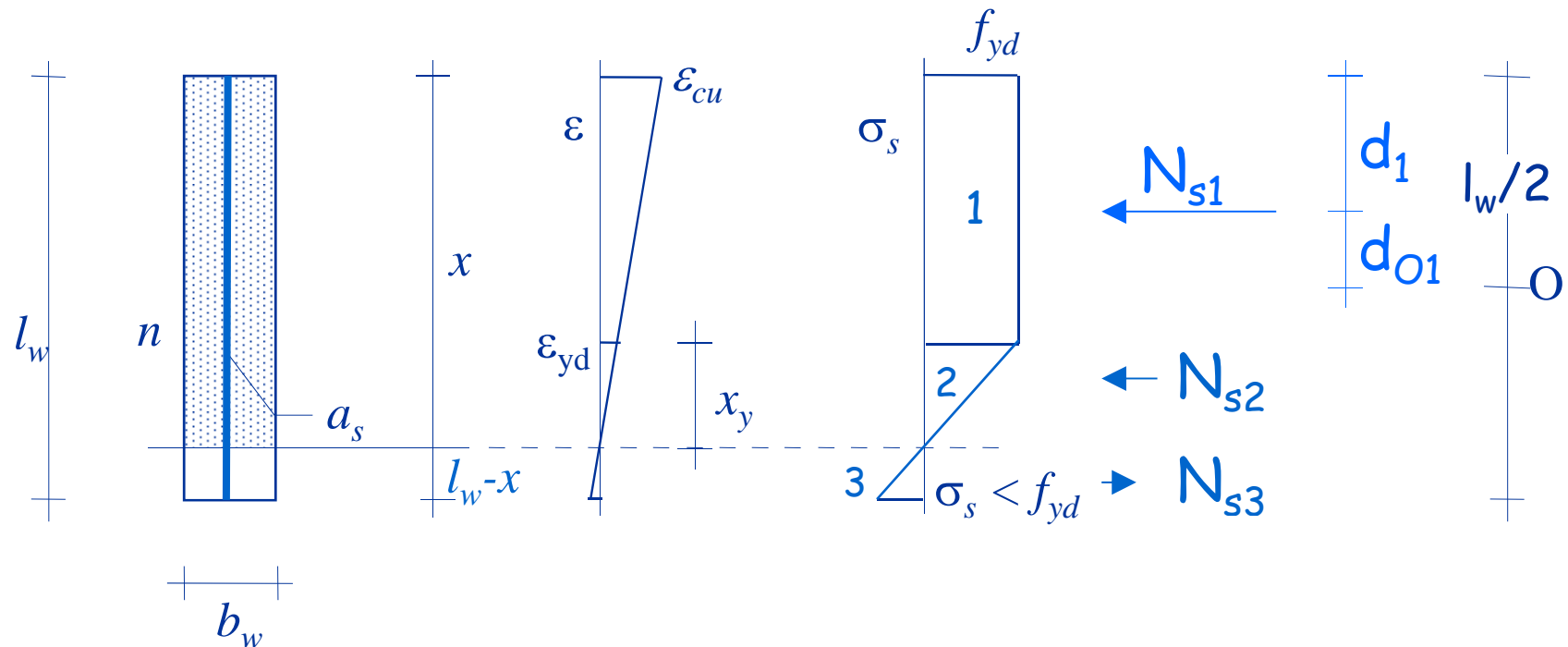
$$x_y = \frac{\epsilon_{yd}}{\epsilon_{cu}} x$$

$$N_c = - \beta b x f_{cd}$$

$$\beta = 0.810$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata

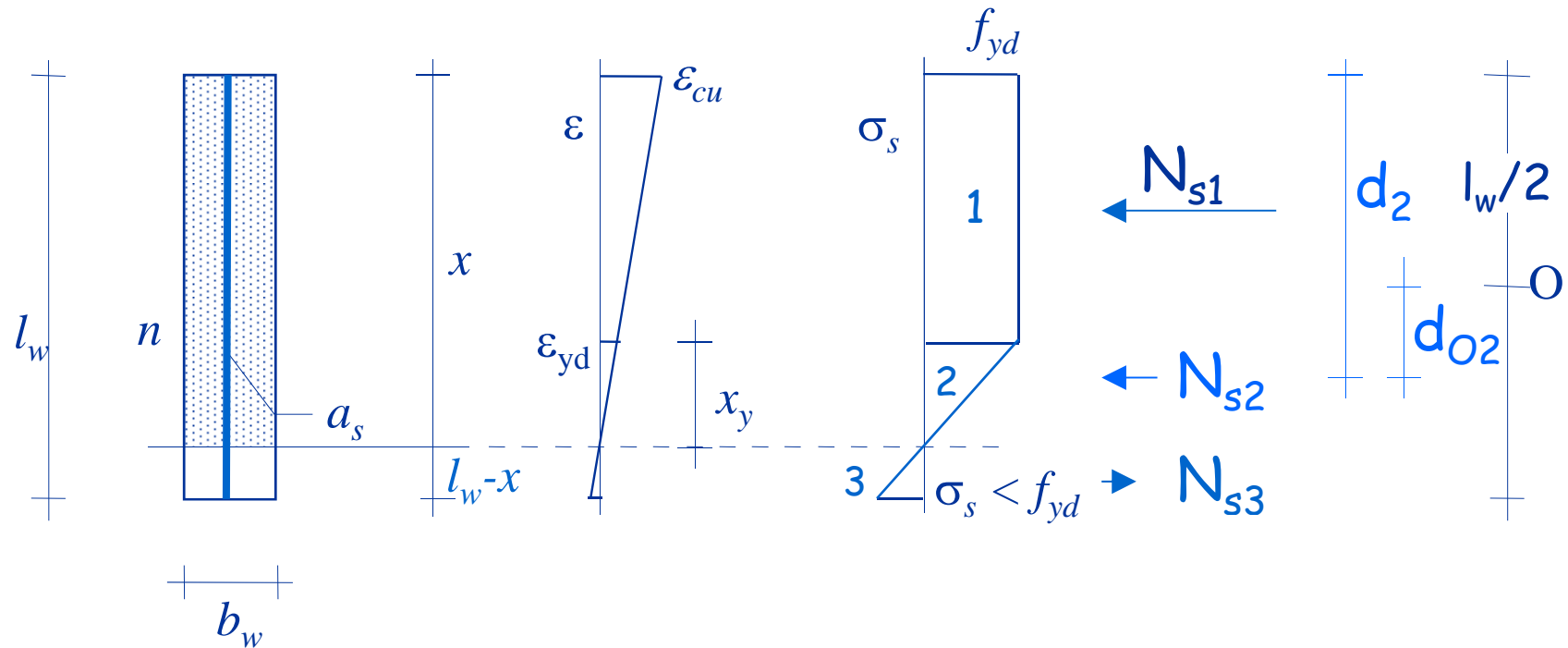


N_{s1} , d_1 e d_{o1} si calcolano come nel caso precedente

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} \quad d_1 = \frac{x - x_y}{2} \quad d_{o1} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata

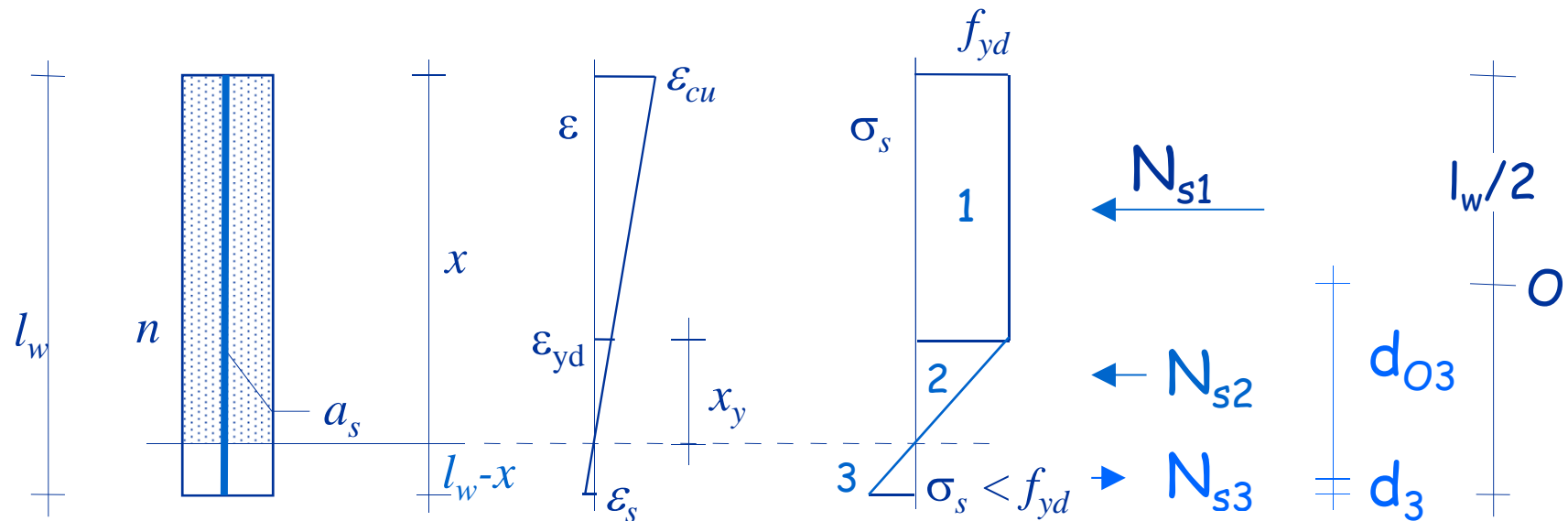


N_{s2} e d_2 si calcolano come nel caso precedente

$$N_2 = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} \quad d_2 = x - \frac{2}{3} x_y \quad d_{O2} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata



$$N_{s3} = \frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s$$

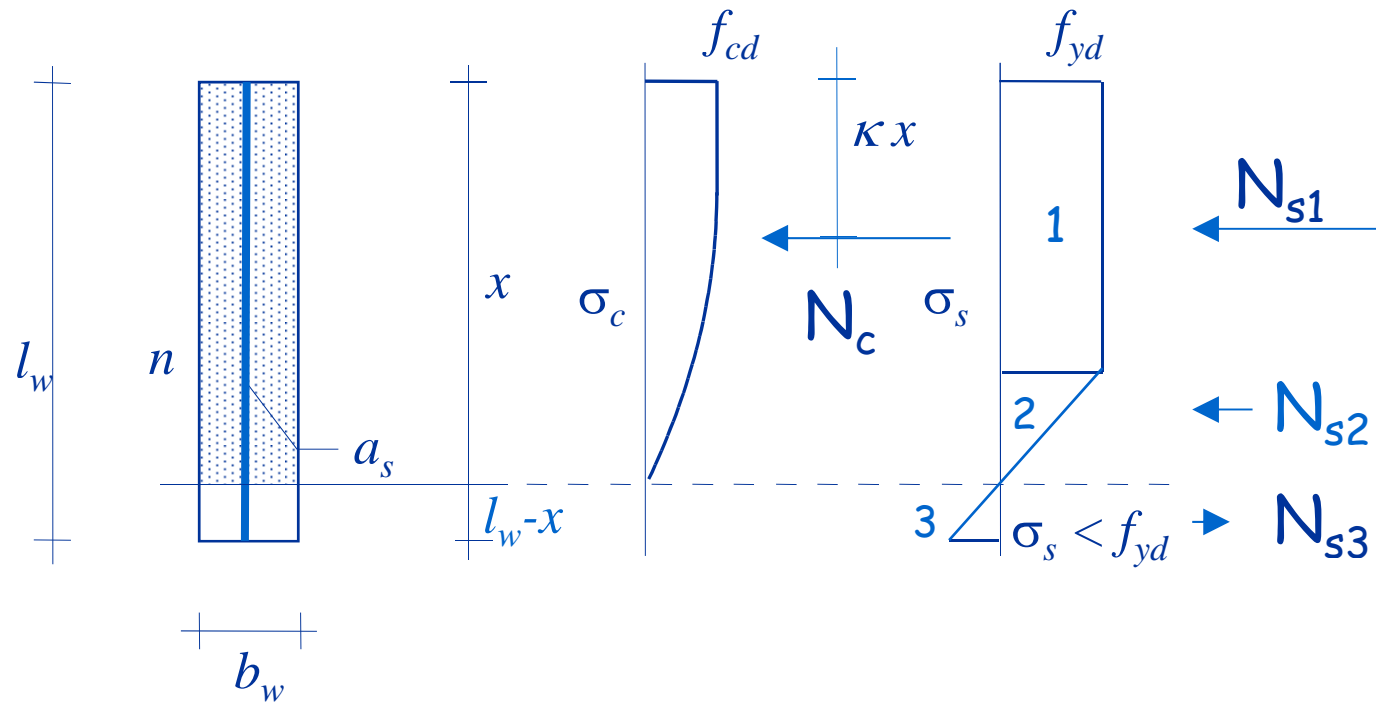
$$\sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{l_w - x}{x_y} f_{yd}$$

$$d_3 = \frac{l_w - x}{3}$$

$$d_{O3} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata



La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s2} + N_{s3} = N_{Ed}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata

... che con qualche passaggio diventa:

$$\left\{ a_s \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2 \varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \right\} x^2 - \left(a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right) x + \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd} = 0$$

ovvero $A x^2 + B x + C = 0$

con

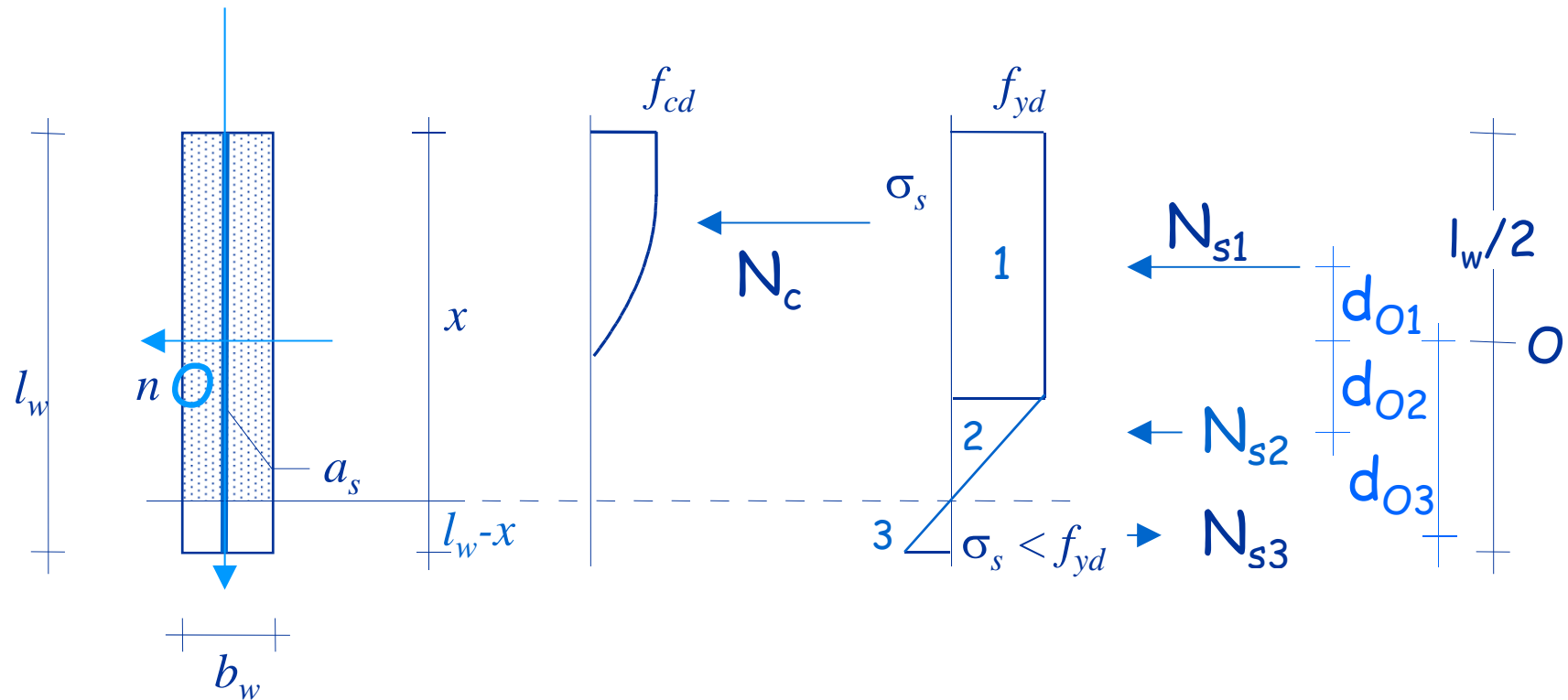
$$A = a_s \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2 \varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd}$$

$$B = - \left(a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right)$$

$$C = \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd}$$

Verifica a flessione composta

armatura in zona tesa non snervata



$$M_{Rd} = N_{s1} d_{O1} + N_{s2} d_{O2} + N_{s3} d_{O3} + N_c (-l_w/2 + k x)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio 2

armatura in zona tesa non snervata ?

Parete 30x400

30 \varnothing 12

$A_{s,tot} = 33.9 \text{ cm}^2$

$a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

$N_{Ed} = -10000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

Esempio 2

individuazione dell'asse neutro

- Se l'armatura tesa è snervata

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} =$$
$$= \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 10000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 2759 \text{ mm} = 275.9 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 275.9 = 146.9 \text{ cm}$$

$$x + x_y = 275.9 + 146.9 = 422.8 \text{ cm} > 400 \text{ cm}$$

L'armatura tesa
non è snervata

Esempio 2

individuazione dell'asse neutro

- Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene
 $x = 276.0 \text{ cm}$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 276.0}{276.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.57 \times 10^{-3}$$

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 276.0 = 146.9 \text{ cm}$$

$$x + x_y = 276.0 + 146.9 = 422.9 \text{ cm} > 400 \text{ cm}$$

... dunque adesso la posizione dell'asse neutro è corretta

Esempio 2

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$N_c = -\beta b_w \times f_{yd} = -0.81 \times 30 \times 276.0 \times 14.1/10 = -9501.4 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 129.1 \times 391.3/10 = -428.4 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 146.9 \times 391.3/10 = -243.9 \text{ kN}$$

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{1.57}{1.86} \times 391.3 = 330.2 \text{ MPa}$$

$$N_{s3} = -\frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s = -0.5 \times 8.48 \times 124.0 \times 330.2/10 = 173.7 \text{ kN}$$

Esempio 2

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$d_{o1} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{276.0 - 129.1 - 400}{2} = -135.5 \text{ cm}$$

$$d_{o2} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2} = 276.0 - \frac{2}{3} 146.9 - \frac{400}{2} = -22.0 \text{ cm}$$

$$d_{o3} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3} = \frac{400}{6} + \frac{276.0}{3} = 158.7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= N_{s1} d_{o1} + N_{s2} d_{o2} + N_{s3} d_{o3} + N_c (-l_w / 2 + k x) = \\ &= 9002.9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

la sezione è verificata

Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura diffusa lungo tutta la parete fornisce un contributo flessionale ridotto a circa il 40% rispetto al caso di armatura concentrata agli estremi

Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione $b_w l_w$) con armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s,max} = 0.4 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

$$m = 2$$

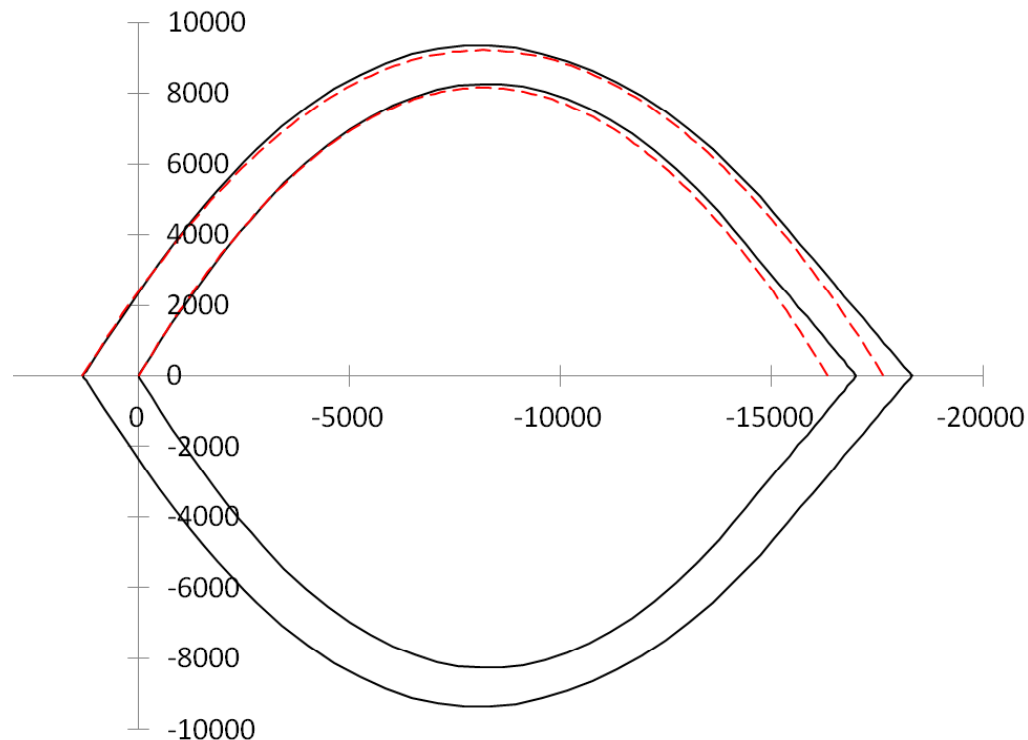
Nota:
per armatura diffusa meglio
usare sempre $m=2$

con $A_{s,par}$ = armatura distribuita (lungo un lato della parete)

Confronto per armatura diffusa

formula approssimata - valori esatti

- Sezione usata come esempio:
differenze tra formula approssimata (in rosso) e
valori esatti (in nero)



Verifica a flessione composta con armatura concentrata - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto $0.2 l_w$

Verifica a flessione composta

con armatura concentrata - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione $b_w l_w$) con armatura concentrata in $0.2 l_w$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

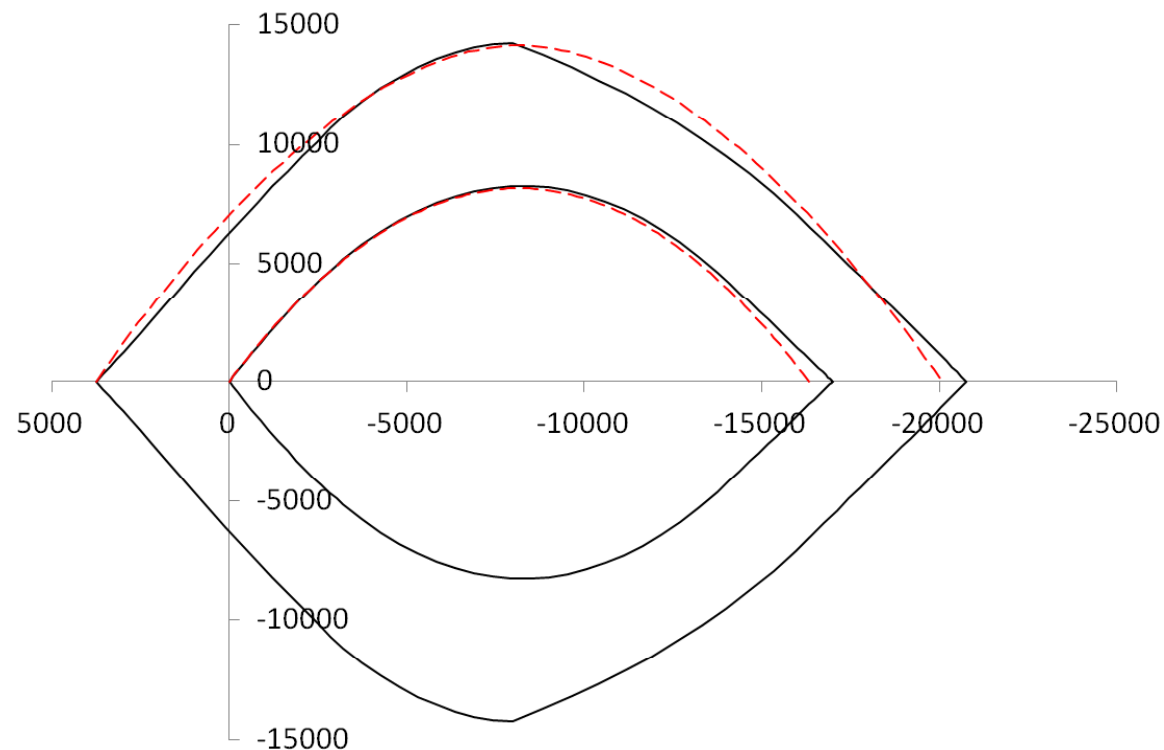
$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

con $A_{s,estr}$ = armatura all'estremità (nel singolo estremo)

Confronto per armatura concentrata

formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con $A_{s,estr}=2\%$:
differenze tra formula approssimata (in rosso) e
valori esatti (in nero)



Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto $0.2 l_w$
- L'armatura diffusa è disposta nel tratto centrale $0.6 l_w$

Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

Formule semplificate nel caso di parete con
armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s-e,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd}$$

$$N_{s-p,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s-e,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd}$$

$$M_{s-p,max} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s-e,max} / N_{c,max}}$$

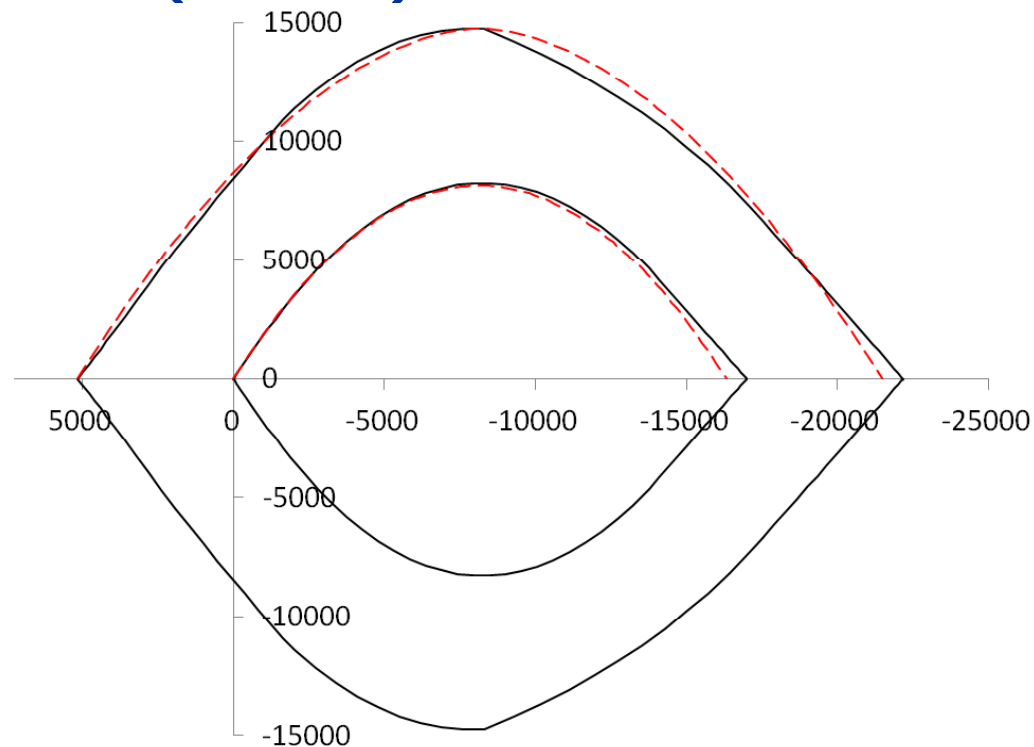
con $A_{s,estr}$ = armatura all'estremità (nel singolo estremo)

$A_{s,par}$ = armatura nel tratto $0.6 l_w$ della parete (su un lato)

Confronto per armatura concentrata

formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con $A_{s,estr}=2\%$ e armatura distribuita 12 \varnothing 16:
differenze tra formula approssimata (in rosso) e valori esatti (in nero)



Progetto della sezione a flessione composta

- Aliquota di momento portata dal calcestruzzo, in funzione di N_{Ed}

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad N_{Ed} = A_c \bar{\sigma}_c \quad N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad v_M \cong 0.5$$

$$\text{se } \bar{\sigma}_c \ll f_{cd} \quad M_{Rd(c,N)} \cong M_{c,max} \left[4 \frac{\bar{\sigma}_c}{f_{cd}} \right] = 0.48 b_w l_w^2 \bar{\sigma}_c$$



$$l_c = 0.2 l_w$$

$$z = 0.8 l_w$$



$$\frac{M_{Rd(c,N)}}{z} \cong 0.6 b_w l_w \bar{\sigma}_c = 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c$$

Progetto della sezione a flessione composta

- Aliquota di momento che deve portare l'armatura

$$N_s = \frac{M_{Rd(s)}}{z} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)}}{z} \quad \text{con} \quad \frac{M_{Rd(c,N)}}{z} \cong 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c$$

$$N_s = A_s f_{yd} = \rho b_w l_c f_{yd} \quad \rho = \frac{A_s}{b_w l_c} \quad \text{Percentuale di armatura cerchiata}$$

$$\begin{aligned} M_{Ed} &= 0.8 l_w (\rho b_w l_c f_{yd} + 3 b_w l_c \bar{\sigma}_c) = \\ &= 0.16 b_w l_w^2 (\rho f_{yd} + 3 \bar{\sigma}_c) \end{aligned}$$

- Formula di progetto

$$l_w = r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}} \quad \text{con} \quad r_s = \frac{1}{\sqrt{0.16 (\rho f_{yd} + 3 \bar{\sigma}_c)}}$$

Progetto della sezione a flessione composta

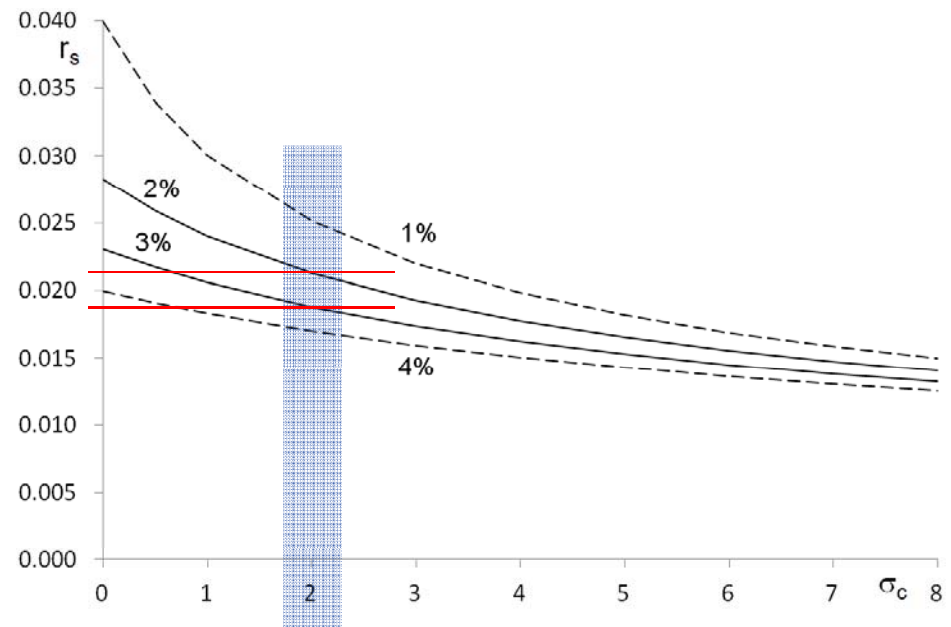
- Formula di progetto

$$I_w = r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}}$$

- Valori consigliati
di r_s

per $\bar{\sigma}_c \cong 2 \text{ MPa}$

$$r_s = 0.018 \div 0.022$$



Progetto della sezione a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a

$$M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}, N_{Ed} = -2500 \text{ kNm (compressione)}$$

- Data l'entità dello sforzo normale si può pensare che sia $\sigma_c \cong 2 \text{ MPa}$
- Provo con $r_s = 0.022$ e $b_w = 0.30 \text{ m}$

$$l_w = r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_w}} = 0.022 \sqrt{\frac{18000}{0.30}} = 5.39 \text{ m}$$

- Scelgo $l_w = 5.50 \text{ m}$
- In questo modo ho $\sigma_c = 1.52 \text{ MPa}$, un po' meno di 2 MPa ma dovrebbe andare bene lo stesso

Progetto dell'armatura a flessione composta

- Si suppone assegnata:
 - la dimensione della sezione
 - l'armatura disposta nel tratto centrale (se non impegnata per altre sollecitazioni)
- Si calcola il momento flettente che può portare il calcestruzzo e l'armatura del tratto centrale
- Si calcola l'armatura di estremità necessaria per portare la restante parte del momento flettente

Progetto dell'armatura a flessione composta

- Momento flettente che può portare il calcestruzzo

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad v_M = 0.48 \cong 0.5$$

- Momento flettente che può portare l'armatura del tratto centrale

$$M_{Rd(s-p)} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

Progetto dell'armatura a flessione composta

- Armatura di estremità necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 I_w f_{yd}}$$

Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$, $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$ (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con
armatura di parete $\varnothing 12/25$ (14.7 cm^2 per lato)
 - Momento flettente portato dal calcestruzzo

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} = 30 \times 550 \times 14.2 \times 10^{-1} = 23430 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} = 0.12 \times 30 \times 550^2 \times 14.2 \times 10^{-3} = 15464 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right] = 6111 \text{ kNm}$$

Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$, $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$ (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con
armatura di parete $\varnothing 12/25$ (14.7 cm^2 per lato)
 - Momento flettente portato dalle barre di parete

$$\begin{aligned} M_{Rd(s-p)} &= 0.2 A_{s,par} I_w f_{yd} = \\ &= 0.2 \times 14.7 \times 550 \times 391.3 \times 10^{-3} = 633 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$, $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$ (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con
armatura di parete $\varnothing 12/25$ (14.7 cm^2 per lato)
 - Armatura necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 l_w f_{yd}} =$$
$$= \frac{18000 - 6111 - 633}{0.8 \times 5.50 \times 391.3} \times 10 = 65.4 \text{ cm}^2$$

Zona cerchiata 30x110; l'armatura è l'1.98%

Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Il confronto col programma EC2 conferma la correttezza del progetto

