

# La sollecitazione di taglio

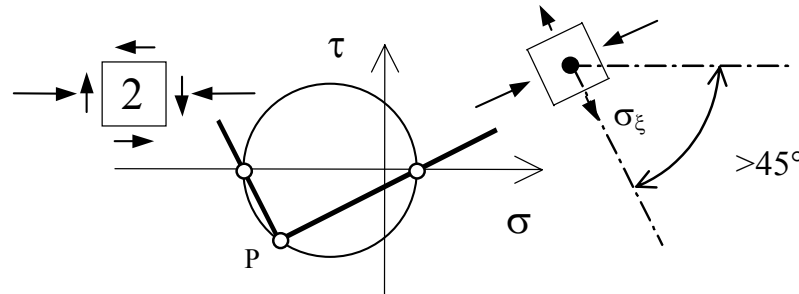
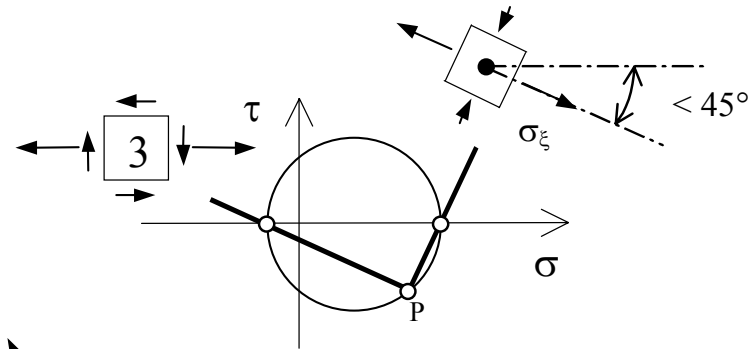
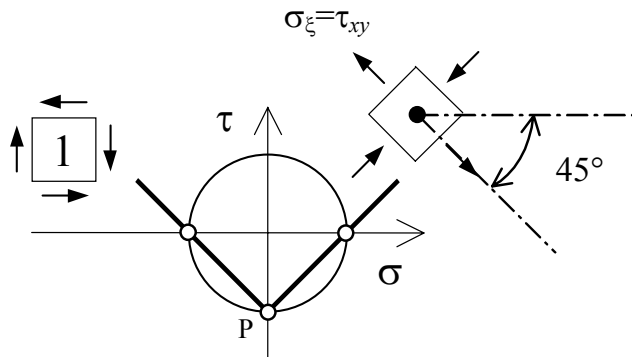
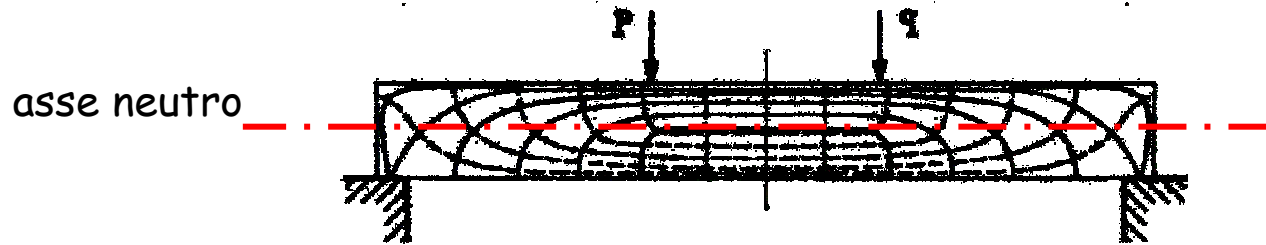
Pier Paolo Rossi

# Interazione taglio-momento flettente

- La sollecitazione di taglio è provocata da una variazione del momento flettente lungo l'asse dell'elemento in esame. A meno di sezioni particolari (ad es. estremità di trave semplicemente appoggiata caricata da forze trasversali) la sollecitazione di taglio è accompagnata sempre da momento flettente.
- Il comportamento degli elementi strutturali soggetti a taglio e momento flettente dipende in generale dall'accoppiamento taglio-momento flettente.
- Solo in casi particolari il comportamento può essere interpretato attraverso l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione singolarmente considerate.

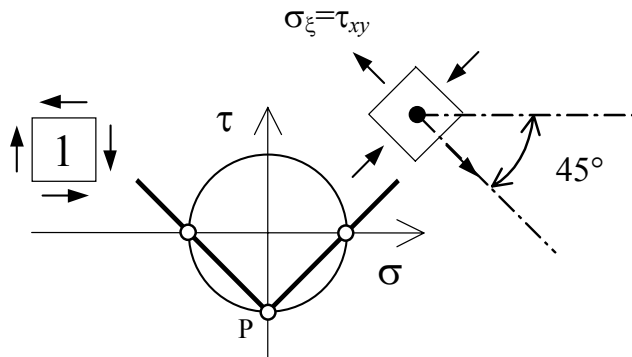
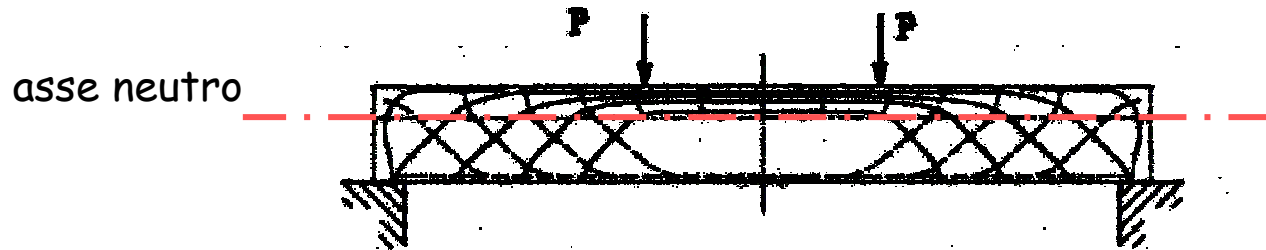
# Valutazione teorica delle direzioni principali di tensione

I° stadio di comportamento

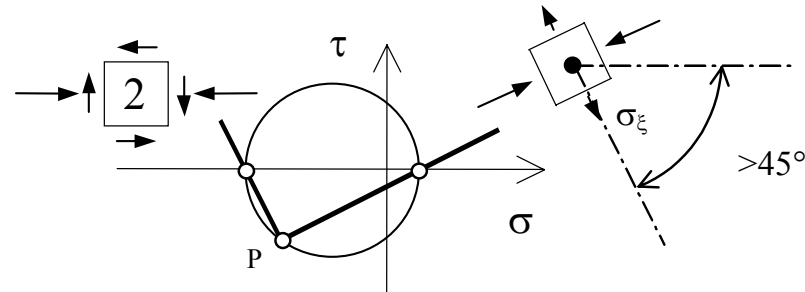


# Valutazione teorica delle direzioni principali di tensione

II° stadio di comportamento



?

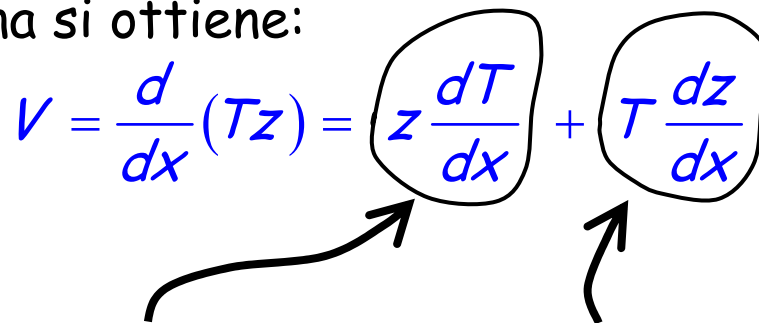


**Incongruenze con le ipotesi classiche  
della teoria tecnica della trave**

# Principali meccanismi di resistenza al taglio

Dall'equazione indefinita dell'equilibrio, esprime il taglio come derivata del momento flettente,

e dalla equivalenza tra momento flettente e prodotto della risultante delle tensioni di trazione (o compressione) per il braccio della coppia interna si ottiene:

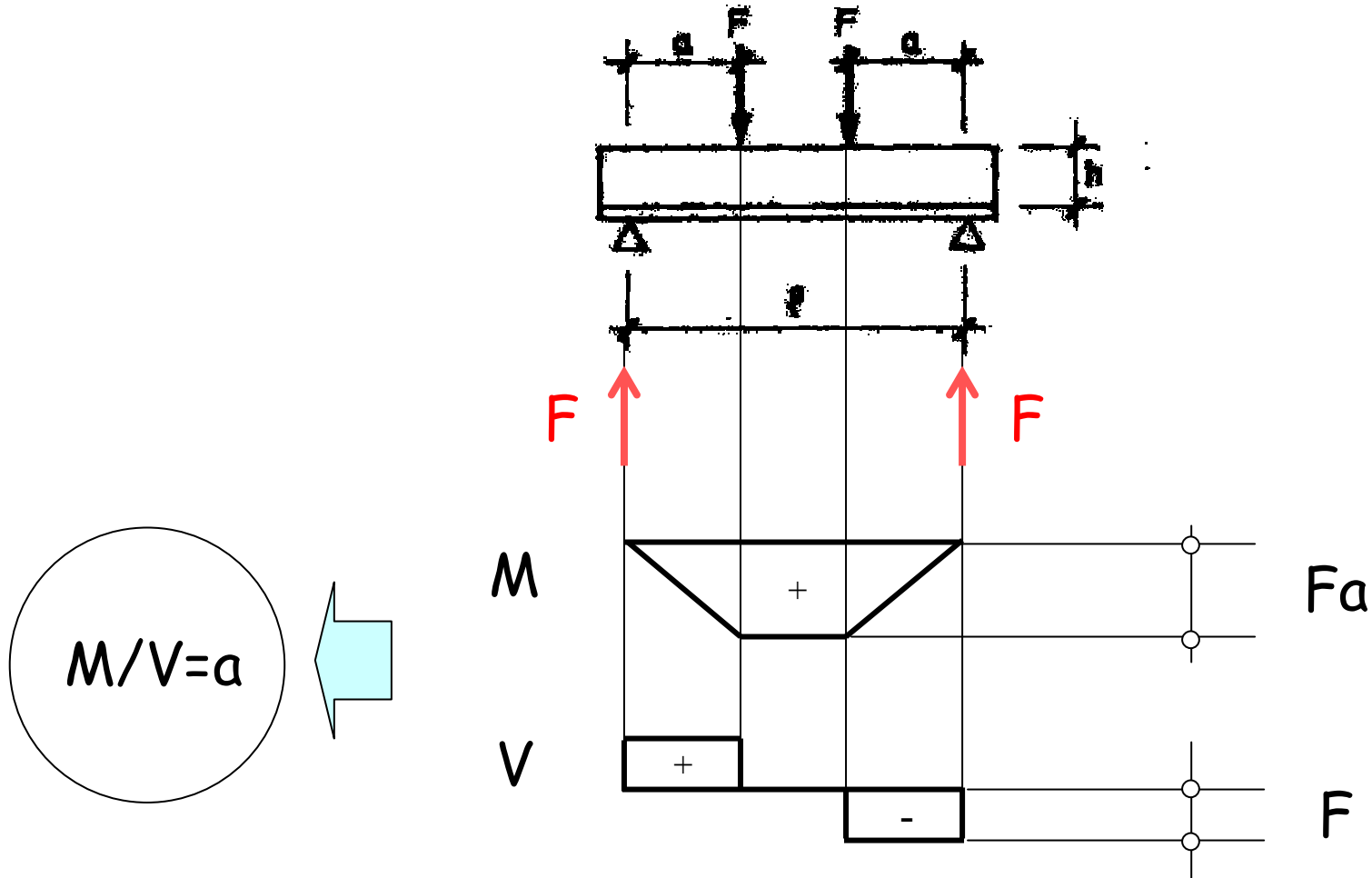
$$V = \frac{d}{dx}(Tz) = z \frac{dT}{dx} + T \frac{dz}{dx}$$


**comportamento  
a trave**

**comportamento  
ad arco**

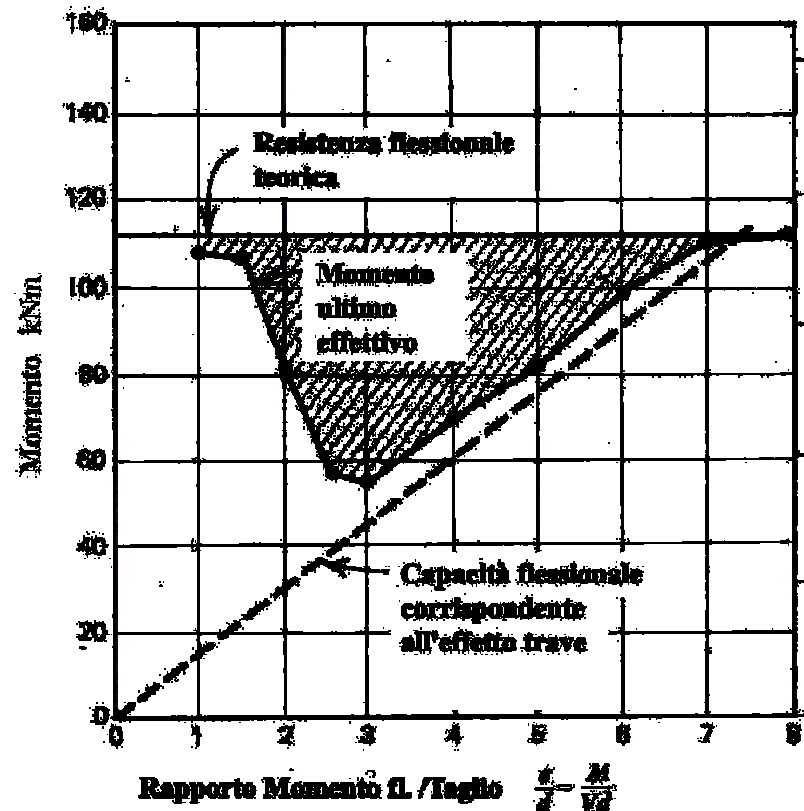
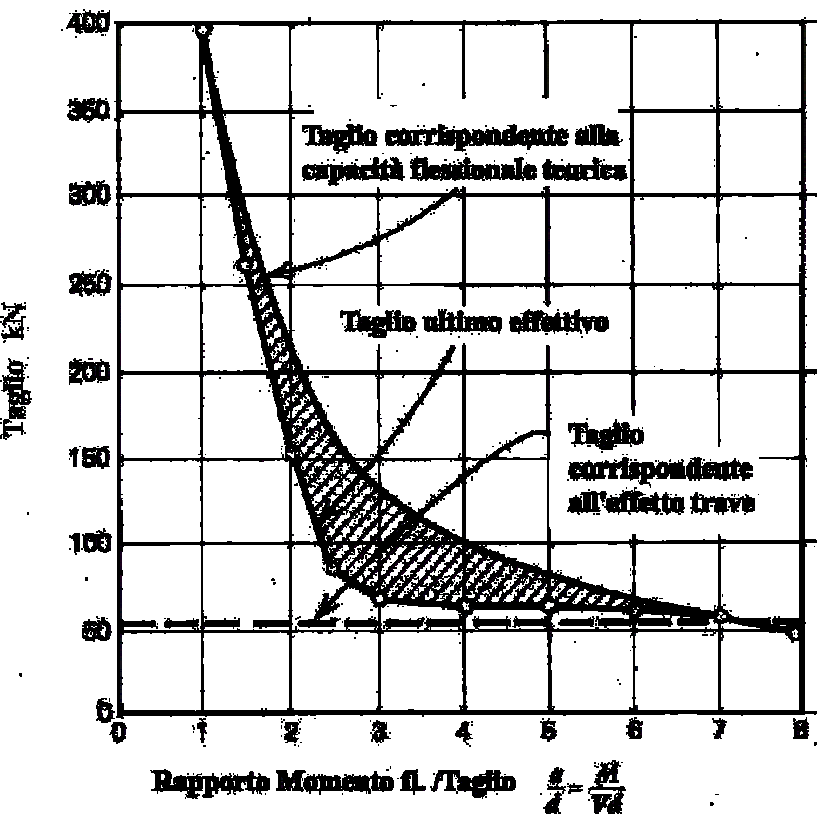
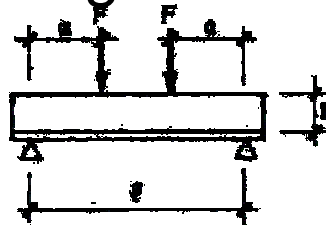
# Sperimentazione di laboratorio

Modello fisico



# Resistenza

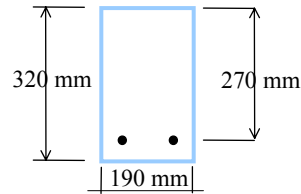
## Travi senza armatura al taglio



# Modelli di fessurazione a collasso

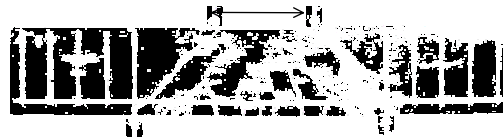
## Travi senza armatura al taglio

$a/d$



*Tipo  
collasso*

1.0



1

1.5



1

2.0



1

2.5



2

3.0



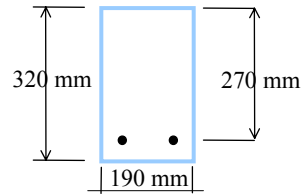
2



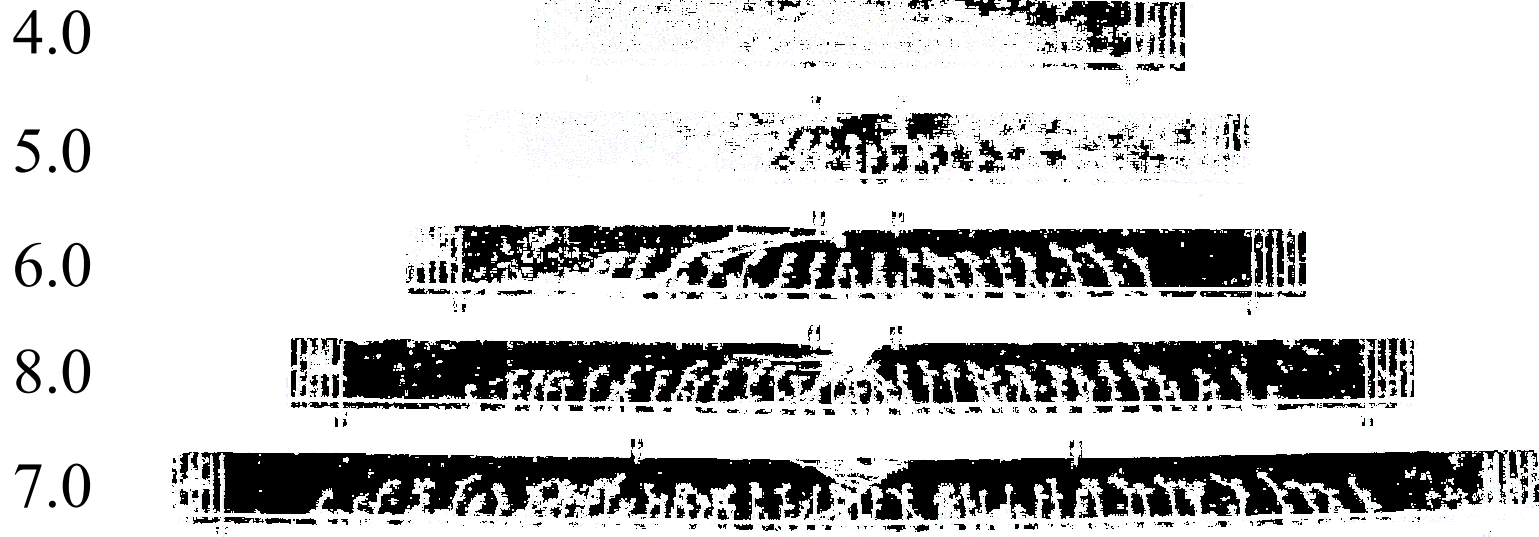
# Modelli di fessurazione a collasso

Travi senza armatura al taglio

$a/d$



*Tipo  
collasso*



2

3

3

4

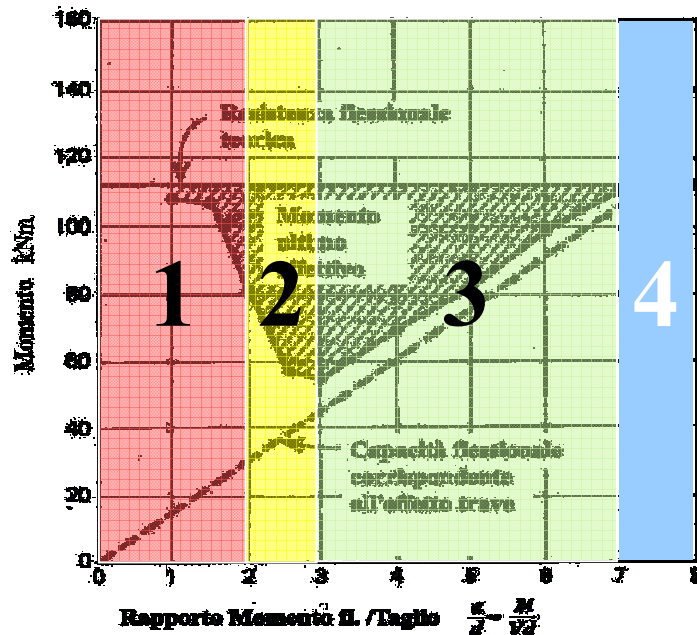
4

(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

# Modalità di collasso

Travi senza armatura al taglio

**Tipo 1.**  
Meccanismo ad arco  
schiacciamento o  
splitting del  
calcestruzzo



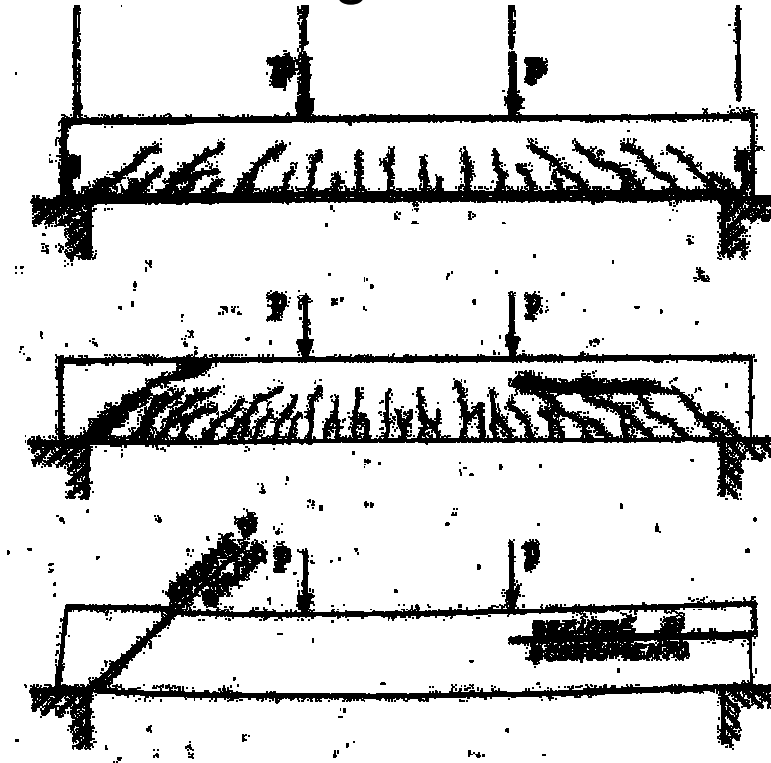
**Tipo 2.**  
Meccanismo ad arco  
per compressione o trazione di origine  
flessionale della zona compressa  
(carico superiore a quello relativo alla fessurazione  
diagonale)

**Tipo 3.**  
Meccanismo di travaso  
al momento o immediatamente dopo  
l'applicazione del carico  
corrispondente alla fessurazione  
diagonale

**Tipo 4.**  
Meccanismo  
puramente flessionale  
al raggiungimento della  
capacità resistente  
flessionale

# Definizione dei meccanismi di collasso da analizzare teoricamente

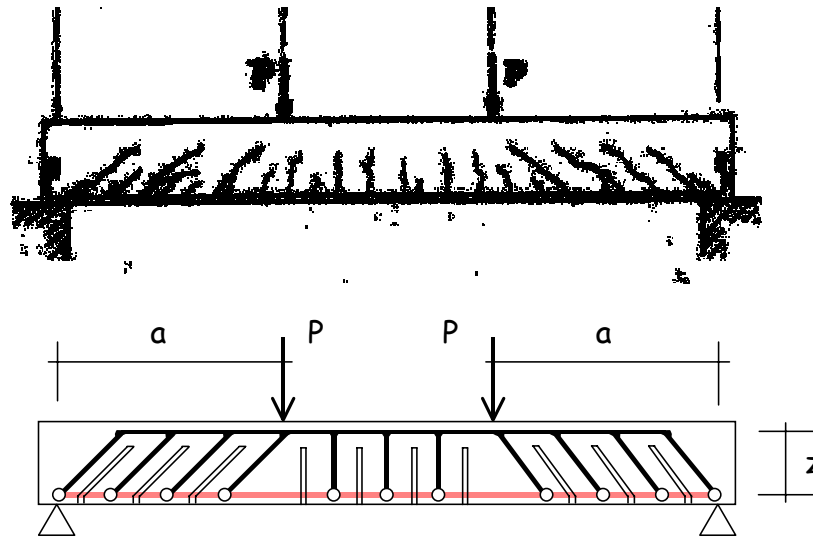
Travi senza armatura al taglio



(tratto da G. Toniolo: Cemento Armato)

# Modello resistente

Travi senza armatura al taglio

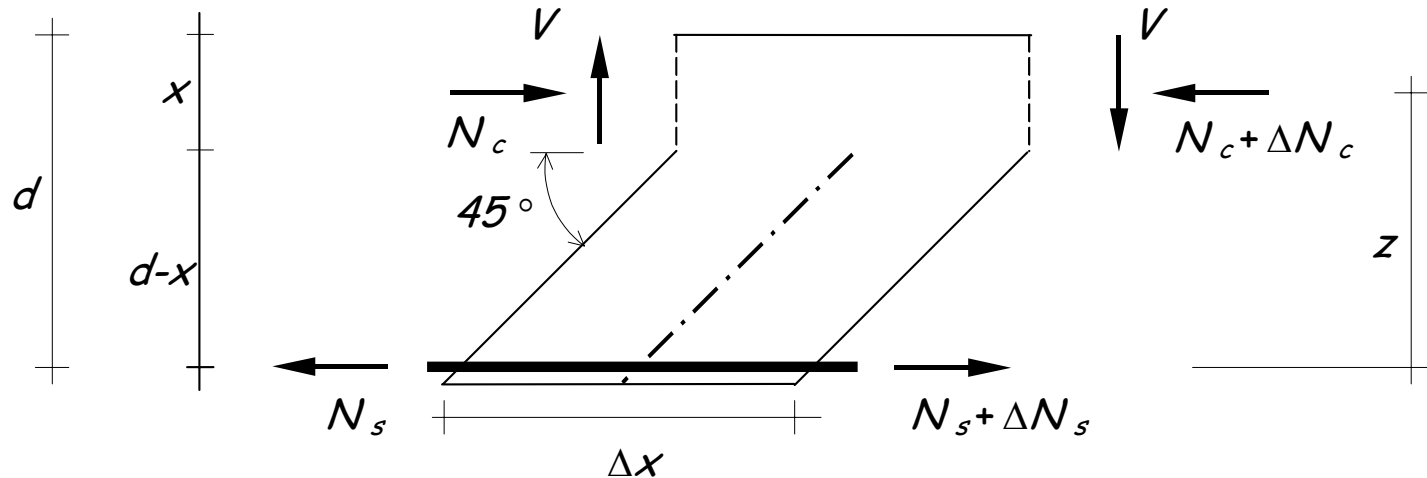


Il modello a pettine interpreta il comportamento a taglio-flessione degli elementi senza armatura al taglio. Esso è costituito da:

- un corrente superiore (costola del pettine)
- elementi diagonali compresi tra le lesioni, inclinati a 45 gradi rispetto alla costola (denti del pettine).
- un corrente inferiore (armatura flessionale)

# Modello a pettine

## Analisi della sollecitazione

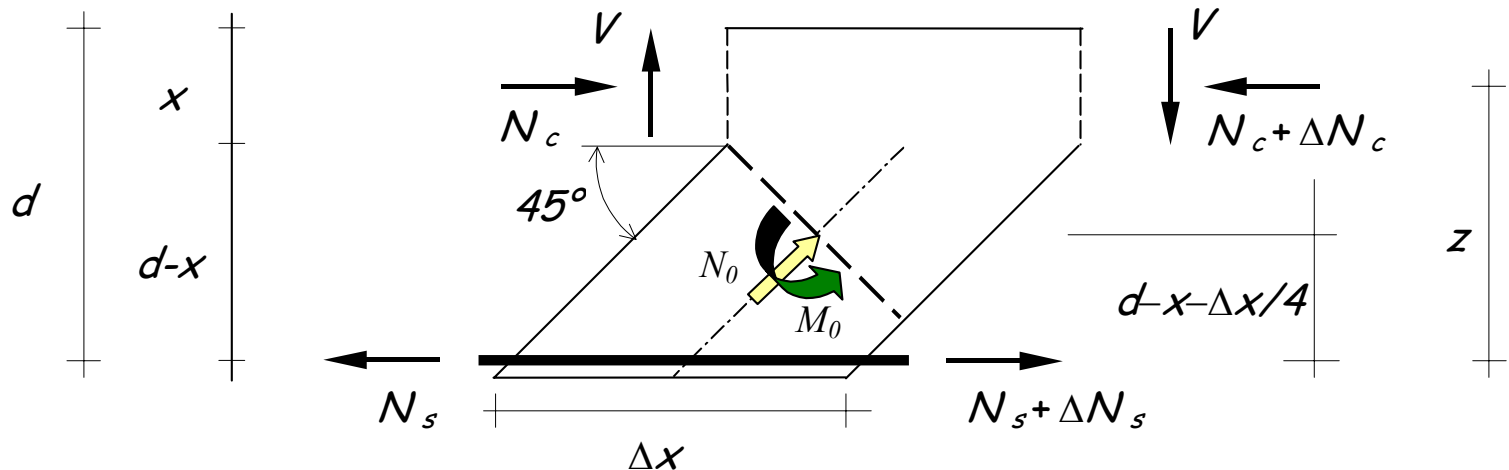


In presenza di fessurazione la variazione di  $N_s$ , bilanciata dalle tensioni di aderenza, esercita un'azione orizzontale  $\Delta N_s$  sul dente del modello a pettine. Ricordando che la variazione del momento flettente è legata al taglio ( $\Delta M = V \Delta x$ ), si ha

$$\Delta N_s = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V \Delta x}{z}$$

# Sezione di scorrimento

## Analisi della sollecitazione

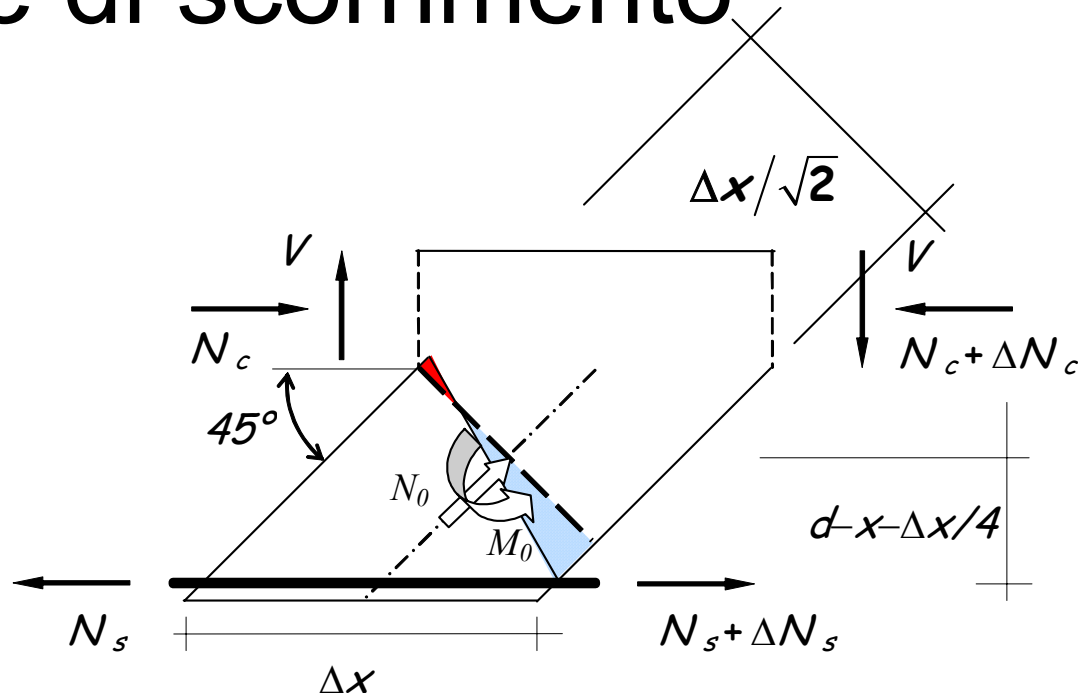


Le caratteristiche della sollecitazione provocate dalla forza  $\Delta N_s$  sulla sezione di incastro del dente valgono:

$$N_0 = -\frac{\Delta N_s}{\sqrt{2}} = -\frac{V \Delta x}{\sqrt{2} z}$$

# Sezione di scorrimento

## Geometria



La sezione resistente ha area

e modulo elastico:  $W = b \left( \Delta x / \sqrt{2} \right)^2 / 6$

La massima tensione di trazione è pari a:

$$\sigma_{+}^{\max} = \frac{N_0}{b \left( \Delta x / \sqrt{2} \right)} - \frac{6 M_0}{b \left( \Delta x / \sqrt{2} \right)^2} = \frac{V}{b z} \left[ -1 + \frac{12 (d - x - \Delta x / 4)}{\Delta x} \right]$$

# Verifica della sezione di scorrimento

In base a considerazioni sperimentali si può però assumere:

$$x = 0.2 \, d$$

$$\Delta x = d$$

Si ottiene così

$$\sigma_{+}^{\max} = \frac{V}{b \, z} \left[ -1 + \frac{12 \, (d - x - \Delta x / 4)}{\Delta x} \right] = \frac{5.6 \, V}{b \, z} = \frac{6.2 \, V}{b \, d}$$

da cui,

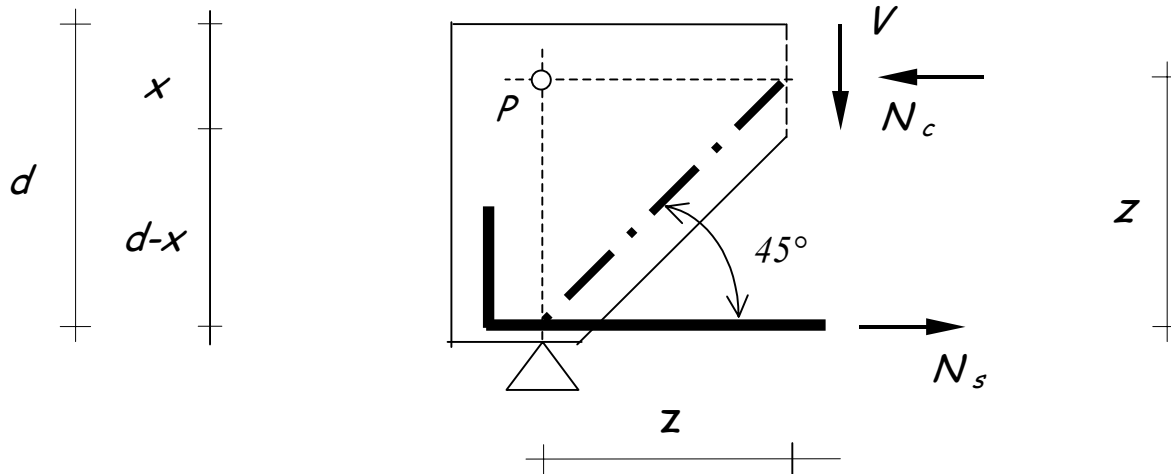
imponendo la massima tensione di trazione eguale alla resistenza a trazione per flessione ( $1.6 \, f_{ctd}$ ) si ha:

$$V_{Rd} = 0.25 \, b \, d \, f_{ctd}$$



# Sezione di stacco

## Analisi della sollecitazione



Se si prende in esame il concio di estremità della trave in corrispondenza dell'appoggio, delimitato dalla prima lesione a taglio, si ricava dall'equilibrio alla rotazione:

$$N_c = V$$

# Sezione di stacco

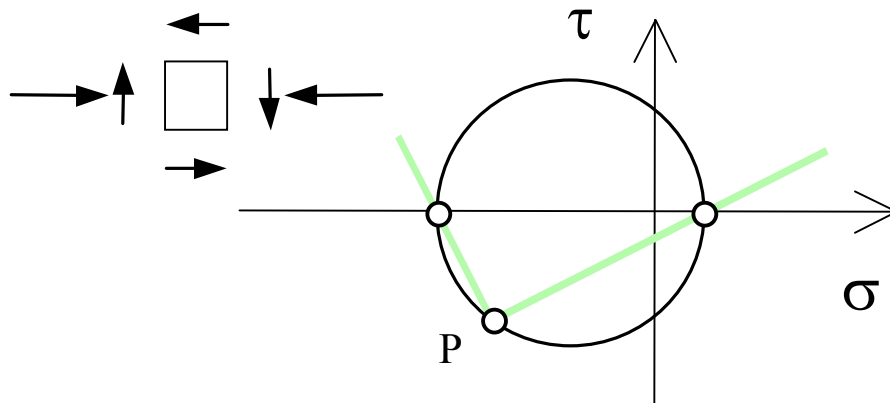
## Analisi della sollecitazione

La sezione del corrente è soggetta a sforzo normale di compressione ed a taglio. Supponendo per semplicità che le tensioni dovute a ciascuna delle caratteristiche di sollecitazione siano costanti nella sezione, si ha:

$$\sigma = \frac{N_c}{b \ x} \quad \tau = \frac{V}{b \ x}$$

e quindi  $\sigma = \tau$ .

Il cerchio di Mohr corrispondente è caratterizzato da:



$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2}$$

# Verifica del corrente compresso

Sostituendo nell'espressione della tensione principale di trazione i valori delle tensioni normali e tangenziali prima determinati si ha:

Se, inoltre, si impone che la tensione principale di trazione sia uguale al valore di resistenza a trazione del calcestruzzo si ottiene un valore limite del taglio pari a:

$$V_{Rd} = 1.6 b \times f_{ctd}$$

Nota: Confrontando il valore ora determinato con quello fornito dalla verifica del dente, si ha che la resistenza del corrente compresso è minore di quella del dente se:

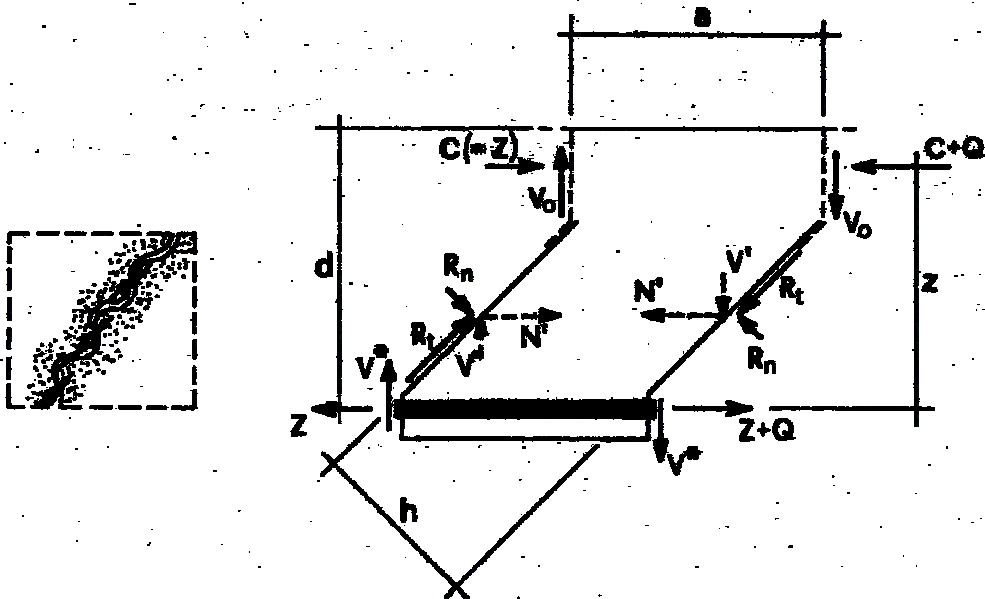
$$1.6 x < 0.25 d \quad \text{ovvero} \quad x < 0.156 d$$

Questa situazione normalmente non si verifica in sezioni soggette a flessione semplice, a meno che l'armatura a flessione non sia estremamente bassa; diventa invece molto probabile se la sezione è soggetta a tensoflessione.

# Altri contributi alla resistenza

## Ingranamento degli inerti

Le lesioni non sono mai perfettamente lisce; quando i denti si deformano a pressoflessione, lo scorrimento tra le due facce della fessura viene limitato dall'attrito dovuto alla scabrosità delle superfici e soprattutto dal contatto diretto tra gli inerti. Le azioni mutue così generate riducono l'entità del momento flettente e limitano la deformazione del dente.



# Altri contributi alla resistenza

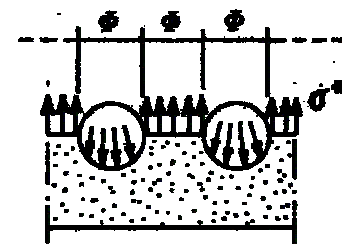
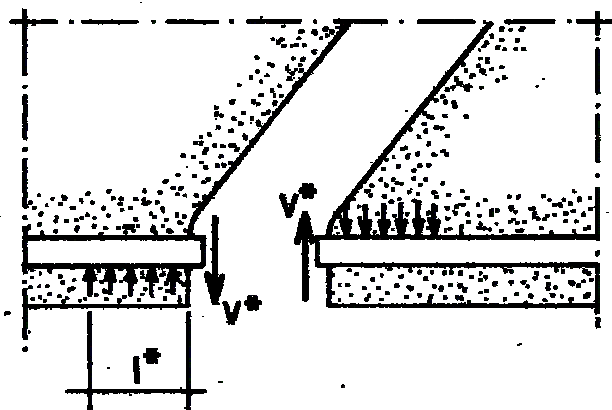
## Ingranamento degli inerti

Questo effetto, detto di *ingranamento degli inerti*, è particolarmente rilevante per travi basse, per le quali le fessure sono particolarmente strette; al crescere dell'altezza della trave l'ampiezza della lesione aumenta e l'effetto dell'ingranamento si riduce.

# Altri contributi alla resistenza

## Effetto spinotto

Lo scorrimento tra le due facce di una fessura comporta anche una deformazione dell'armatura flessionale, mostrata in maniera esageratamente accentuata nella figura. Anche le barre di armatura esercitano quindi un'azione mutua che riduce il momento flettente nel dente e ne aumentano la resistenza (*effetto spinotto*, o *effetto bietta*). L'azione delle barre longitudinali è però limitata dalla possibilità che salti il copriferro ed il suo contributo può essere quantizzato proprio valutando la resistenza del calcestruzzo di ricoprimento.



# Altri contributi alla resistenza

## Effetto dello sforzo assiale

La presenza di uno sforzo assiale di compressione incrementa la resistenza a taglio di una sezione non armata. Esso infatti aumenta le dimensioni del corrente superiore rendendone più difficile la rottura; contemporaneamente i denti del modello a pettine vengono accorciati e si riduce in essi l'effetto flettente. Il contrario accade in presenza di trazione: la diminuzione di dimensione del corrente compresso e l'incremento di flessione nel dente riducono sensibilmente la capacità di portare taglio, rendendo quasi sempre necessaria la disposizione di specifiche armature per il taglio.

# Resistenza di elementi non armati a taglio

1

COMPORTAMENTO  
AD  
ARCO

2

- Resistenza del corrente del modello a pettine
  - + contributi:
    - ingranamento inerti
    - spinotto
- Splitting/schiacciamento del cls

3

COMPORTAMENTO  
A  
TRAVE

- Resistenza del dente del modello a pettine
  - + contributi:
    - ingranamento inerti
    - spinotto



# Elementi non armati a taglio

Eurocodice 2 (4.3.2.3. Elementi che non richiedono armatura a taglio)

La resistenza a taglio di calcolo  $V_{Rd1}$  è data da:

$$V_{Rd1} = \left[ \tau_{Rd} k (1.2 + 40 \rho_l) + |0.15| \sigma_{cp} \right] b_w d$$

$\tau_{Rd}$  resistenza unitaria a taglio di calcolo di riferimento ( $0.25 f_{ctk0.05}$ ) /  $\gamma_c$   
Il valore di  $\gamma_c$  deve di regola essere assunto pari a |1.5|  
(I : |1.5| o |1.6|).

$k$  |1| per elementi in cui più del 50% dell'armatura inferiore è interrotta.  
In caso contrario vale |1.6 - d ≥ 1| ( $d$  in metri);

$\rho$   $\frac{A_{sl}}{b_w d} \leq |0.02|$ ; con  $A_{sl}$  area delle armature di trazione che si estende  
per non meno di  $d + l_{b,net}$  oltre la sezione considerata.

$b_w$  larghezza minima della sezione lungo l'altezza efficace;

$\sigma_{cp}$   $N_{Sd} / A_c$ , con  $N_{Sd}$  forza longitudinale nella sezione dovuta ai carichi o alla precompressione (compressione positiva).

# Elementi non armati a taglio

Eurocodice 2 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

## Carichi concentrati

Vicino agli appoggi, dove la configurazione di carichi concentrati e la reazione di appoggio è tale che una parte dei carichi può essere trasferita all'appoggio per compressione diretta (appoggio diretto), si può ammettere un incremento della resistenza a taglio  $V_{Rd1}$ .

Il raggiungimento di  $V_{Rd1}$  dipende in modo significativo da un appropriato ancoraggio delle armature tese da una parte e dall'altra di ogni possibile piano di rottura.

# Elementi non armati a taglio

Eurocodice 2 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

Perché si tenga conto dell'incremento della resistenza a taglio devono, di regola, essere soddisfatte le seguenti condizioni:

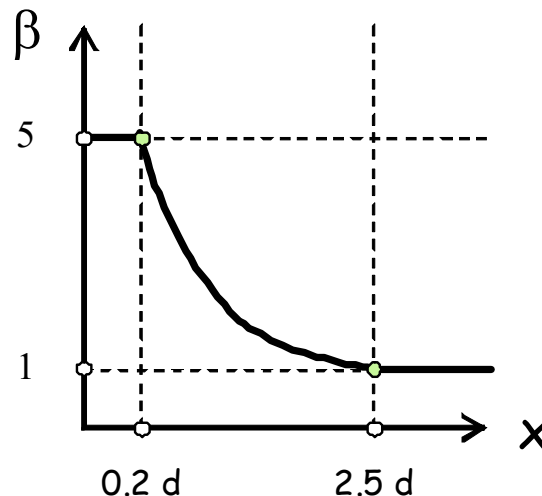
- a) il carico e le reazioni di appoggio sono tali da creare una compressione diagonale nell'elemento (appoggio diretto);
- b) ad un appoggio di estremità tutta l'armatura tesa richiesta alla distanza pari a  $2,5 d$  dall'appoggio deve, di regola, essere ancorata all'interno dell'appoggio;
- c) ad un appoggio intermedio l'armatura tesa richiesta al filo dell'appoggio deve di regola proseguire per almeno  $2,5 d + l_{b,net}$  nella campata.

# Elementi non armati a taglio

## Eurocodice 2 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

Per elementi senza armatura a taglio e quando le condizioni stabilite sono soddisfatte, è permesso un incremento della resistenza a taglio, solo per i carichi concentrati situati ad una distanza  $x \leq 2,5 d$  dal filo dell'appoggio.

Unicamente a tal fine il valore  $\tau_{Rd}$  nella equazione nella stima di  $V_{Rd1}$  può essere moltiplicato per un fattore  $\beta$  pari a:



$$\beta = 2,5 d/x$$

con

$$1,0 \leq \beta \leq 5,0$$

# Elementi non armati a taglio

Eurocodice 2 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

Quando questo incremento viene considerato,  $V_{Rd1}$  e l'armatura a taglio devono di regola essere calcolati in tutte le sezioni critiche sulla distanza  $2,5 d$  dal filo dell'appoggio, adottando invece  $\beta = 1,0$  dal lato della campata per i carichi concentrati pertinenti. La massima armatura a taglio così ottenuta deve, di regola, essere disposta sull'intera distanza pari a  $2,5 d$  dall'appoggio.

Nel caso in cui il carico dominante su una trave sia un carico concentrato vicino a un appoggio, tale procedura può condurre ad adottare l'armatura minima per tutta la trave. Occorre allora essere prudenti, e il progettista potrà fare riferimento, per la resistenza, al valore di  $V_{Rd1}$  non incrementato.

# Elementi non armati a taglio

Eurocodice 2 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

## Carichi uniformemente distribuiti

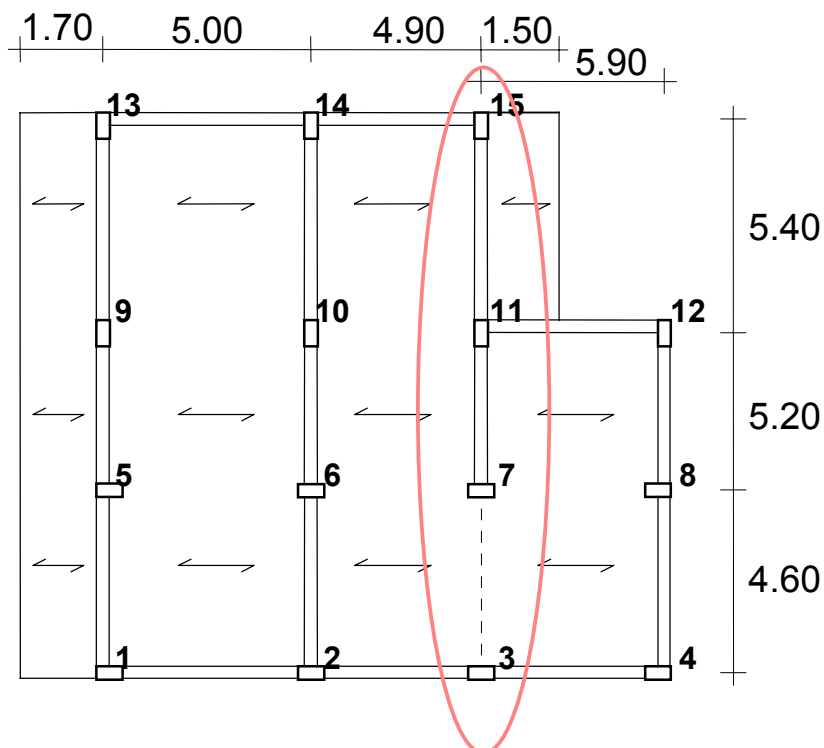
A causa dell'incremento di resistenza dovuto al trasferimento diretto dei carichi vicini agli appoggi, per travi o piastre con carico uniformemente distribuito sarà generalmente cautelativo assumere nel tratto terminale il valore di  $V_{sd}$  calcolato alla distanza  $d$  da un appoggio diretto.

# Applicazione

## Edificio esaminato

### Tipologia:

- edificio per civile abitazione
- sei elevazioni



### Struttura portante

- in cemento armato con struttura intelaiata

### Materiali:

- calcestruzzo Rck 25 MPa
- acciaio FeB 44 k

### Altezze d'interpiano:

- 4.00 m al primo ordine,
- 3.00 m agli altri ordini

### Solai:

- con travetti in cemento armato gettati in opera e laterizi

### Azioni sollecitanti

- carichi verticali e vento

# Applicazione

Tagli nelle travi del I impalcato

## **Carichi verticali ed azione del vento**

Sezione	Cond. n .1	Cond. n .2	Cond. n .3	Cond. n .4	Inviluppo
3	111.9	77.9	109.0	78.6	111.9
7sx	-176.0	-132.4	-179.0	-131.6	-179.0
7dx	122.8	161.9	170.4	155.2	170.4
11sx	-124.2	-173.0	-164.4	-179.7	-179.7
11dx	185.7	141.9	140.3	192.0	192.0
15	-129.7	-84.9	-86.5	-123.4	-129.7

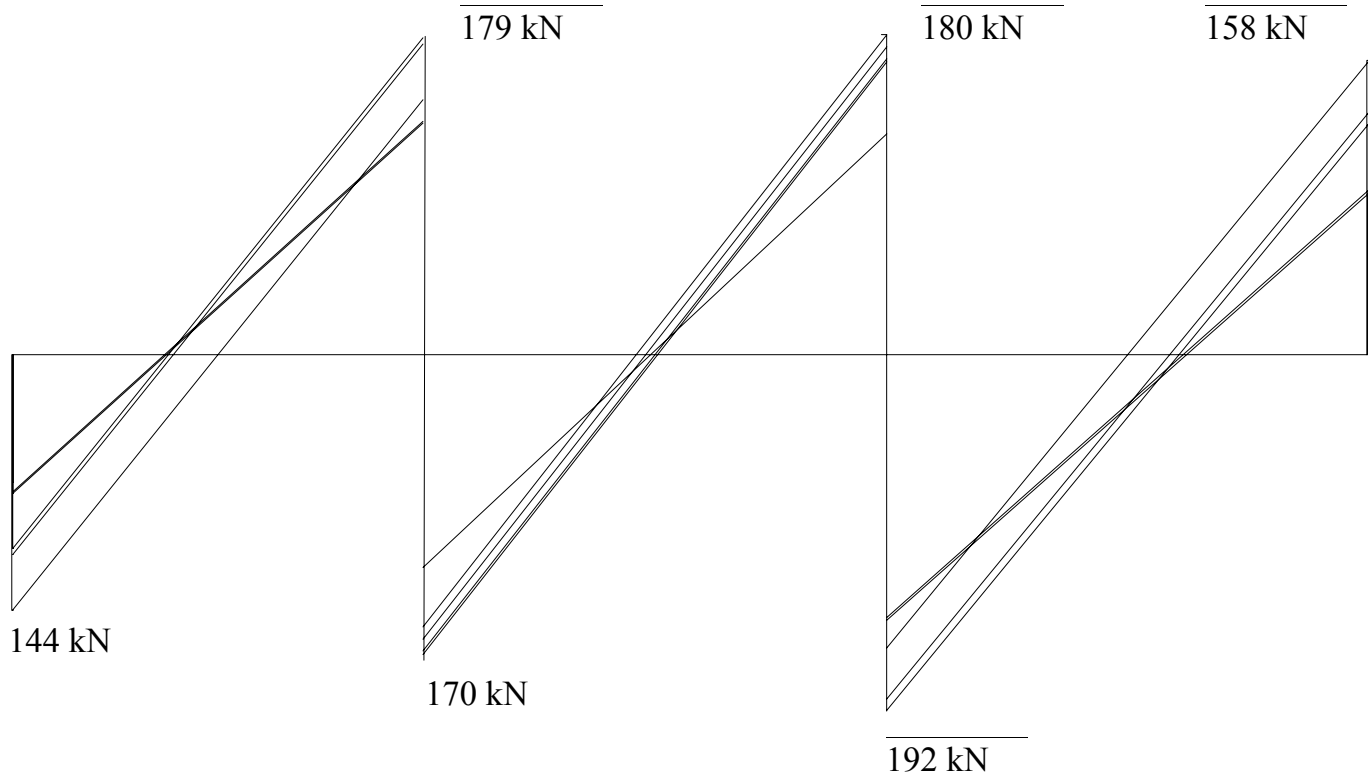
(i tagli sono espressi in kN)



# Applicazione

Sollecitazioni nelle travi del I impalcato

## Diagramma del taglio



carichi verticali e da vento

# Applicazione

Calcolo di  $V_{Rd1}$

Si è innanzitutto calcolato il valore di  $V_{Rd1}$ , resistenza del calcestruzzo in assenza di armatura a taglio, per controllare in quale zona è necessario un calcolo esplicito dell'armatura a taglio.

$$V_{Rd1} = \left[ \tau_{Rd} k (1.2 + 40 \rho_l) + |0.15| \sigma_{cp} \right] b_w d$$

# Applicazione

## Calcolo di $V_{Rd1}$

1. Vista la dipendenza del  $V_{Rd1}$  dall'armatura longitudinale, per non ripetere tale calcolo per tutte le sezioni, lo si è effettuato una volta per tutte (separatamente per trave emergente e trave a spessore) utilizzando un valore minimo di armatura ( $3\varnothing 14 = 4.62 \text{ cm}^2$ ).

2. Si valuta la resistenza unitaria a taglio di calcolo di riferimento sulla base delle indicazioni fornite dal D.M. 9/1/96

$$\tau_{Rd} = 0.25 f_{ctd} = 0.253 \text{ N/mm}^2$$

**Attenzione:** la Tabella proposta all'interno dell'Eurocodice 2 non è in accordo con i valori della resistenza a trazione del calcestruzzo determinati secondo D.A.N.

Prospetto 4.8 - Valori di  $\tau_{Rd}$  (N/rnm<sup>2</sup>) con  $\gamma_c = | 1.5 | (| : 1.5 | \text{ o } | 1.6 |)$   
per diverse resistenze del calcestruzzo

	$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$\gamma_c = 1.5$	$\tau_{Rd}$	0.18	0.22	0.26	0.30	0.34	0.37	0.41	0.44	0.48
$\gamma_c = 1.6$	$\tau_{Rd}$	0.17	0.21	0.24	0.28	0.32	0.35	0.38	0.41	0.45

# Applicazione

Calcolo di  $V_{Rd1}$

$$V_{Rd1} = \left[ \tau_{Rd} k (1.2 + 40 \rho_l) + |0.15| \sigma_{cp} \right] b_w d$$

TRAVE EMERGENTE (b=30 cm ; h=50 cm)

$d=46$  cm

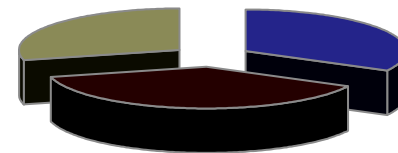
$\rho_l = A_{sl}/b_w d = 4.62/(0.30 \cdot 0.46) = 0.003348$

$k = |1.6-d|=1.6-0.46 = 1.14$

$V_{Rd1} = 53.0$  kN

Modello a  
pettine  
29%

Ingranamento  
inerti  
33%



Effetto  
spinotto  
38%

# Applicazione

Calcolo di  $V_{Rd1}$

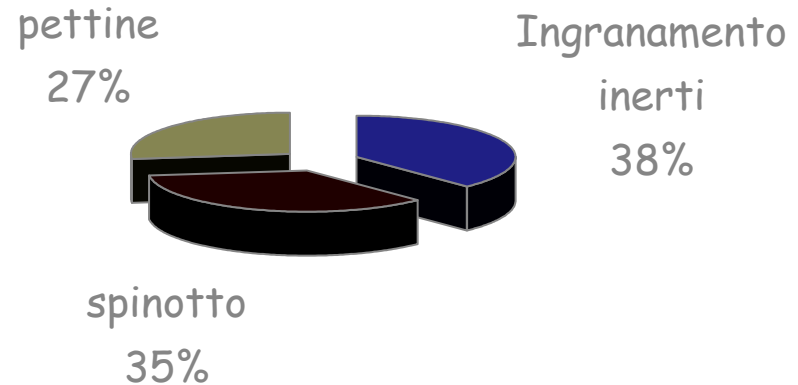
**TRAVE A SPESSORE** (b=80 cm ; h=24 cm)

$$d=20 \text{ cm}$$

$$\rho_l = A_{sl}/b_w d = 4.62/(0.80 \cdot 0.20) = 0.002888$$

$$k = |1.6 - d| = 1.6 - 0.20 = 1.40$$

$$V_{Rd1} = 83.7 \text{ kN}$$



*Attenzione: La larghezza  $b$  considerata nella verifica a taglio della trave a spessore è calcolata secondo l'impostazione dell'Eurocodice 2 per la verifica a punzonamento. La larghezza non può essere superiore alla somma di larghezza pilastro e tre volte l'altezza utile del solaio (in questo caso  $30 + 3 \times 20 = 90 \text{ cm}$ ).*

# Applicazione

Sia per la trave emergente che per quella a spessore risulta

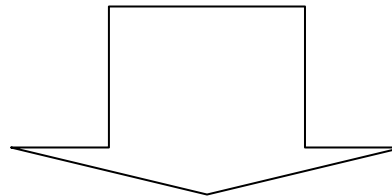
$$V_{sd} > V_{Rd1}$$

essendo

Trave a spessore

$V_{sd}$   
179 kN

$V_{Rd1}$   
83.7 kN



Trave emergente

$V_{sd}$   
192 kN

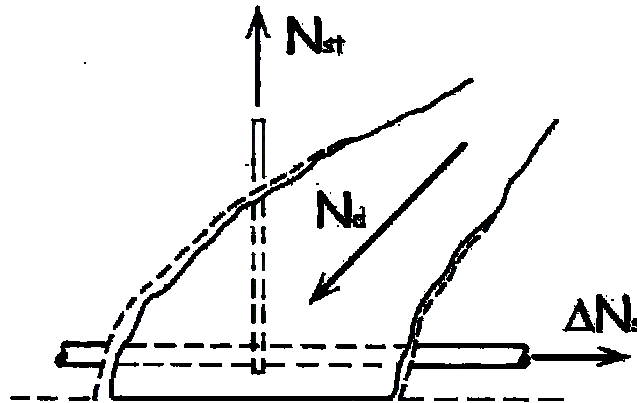
$V_{Rd1}$   
53.0 kN

OCCORRE ARMATURA A TAGLIO

# Elementi con armatura a taglio

## Osservazioni generali

- La presenza dell'armatura a taglio non muta sostanzialmente il meccanismo di resistenza al taglio precedentemente descritto.
- Le mensole di calcestruzzo (denti del modello a pettine), principali elementi del comportamento a trave, sono tuttavia ora vincolate dall'armatura trasversale.



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

# Elementi con armatura a taglio

## Importanza delle armature trasversali

La presenza delle armature trasversali:

1. Migliora l'effetto spinotto;
2. Diminuisce le tensioni di trazione da flessione nelle sezioni di incastro delle mensole (denti del pettine);
3. Limita l'apertura delle fessure diagonali in campo elastico, dunque preservando e migliorando il trasferimento del taglio per effetto ingranamento degli inerti;
4. Confina e dunque aumentando la resistenza a compressione di zone sollecitate da comportamento ad arco;
5. Impedisce il cedimento dell'ancoraggio, allorché fessure da splitting si sviluppano nelle zone di ancoraggio.



# Meccanismi resistenti

Travi senza armatura al taglio

La resistenza della trave in presenza di armatura trasversale  
risulta governata dal:

**comportamento  
a trave**

**comportamento  
ad arco**

**+**

**comportamento  
a trave reticolare**

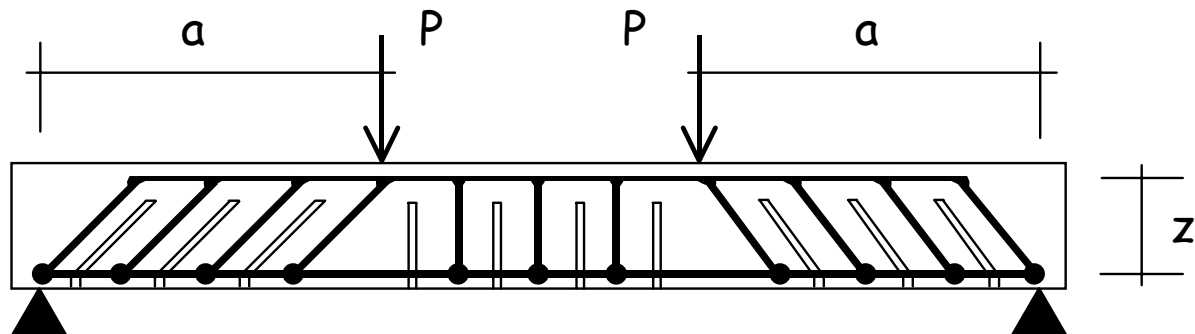
# Modello resistente

## Travi con armatura trasversale

Il comportamento a collasso a taglio-flessione degli elementi con armatura al taglio risulta individuato dal modello reticolare.

Esso è costituito da:

- un corrente superiore (calcestruzzo);
- elementi diagonali compressi (calcestruzzo);
- elementi diagonali tesi (armatura trasversale);
- un corrente inferiore (armatura flessionale);



# Elementi con armatura a taglio

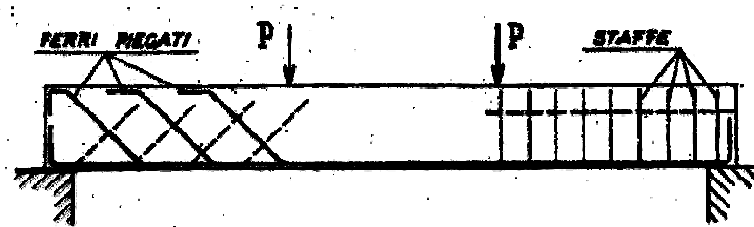
## Osservazioni sui modelli meccanici

- Il modello di traliccio, proposto da Mörsch ed utilizzato per il metodo delle tensioni ammissibili, fa in realtà riferimento ad una situazione ben diversa da quella di materiale omogeneo ed isotropo, perché le diagonali compresse (puntone inclinati di calcestruzzo) sono individuate dalle fessure provocate dal taglio. Appare quindi logico utilizzare tale modello anche nell'ambito delle verifiche allo stato limite ultimo.
- Occorre però notare che il modello proposto da Mörsch è un traliccio isostatico, nel quale tutte le aste sono incernierate nei nodi. Nella realtà il puntone diagonale compresso è incastrato al corrente superiore; appare quindi più corretto tenere conto di tale vincolo utilizzando un modello di traliccio iperstatico.

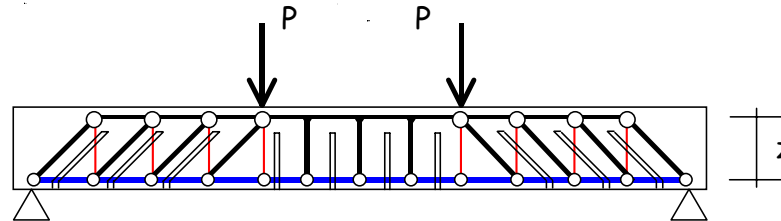
# Elementi con armatura a taglio

## Modelli meccanici

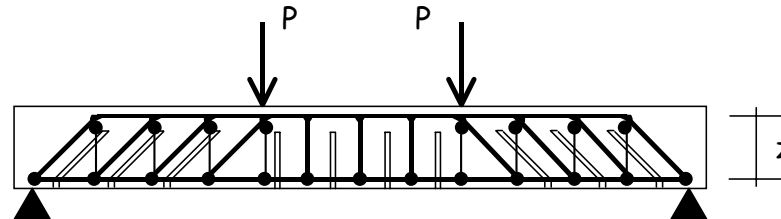
Trave armata  
a taglio



*Traliccio  
isostatico*



*Traliccio  
iperstatico*



# Calcolo del taglio resistente di travi armate a taglio

SE

$$V_{sd} > V_{Rd1}$$

è richiesta armatura a taglio

Il calcolo del taglio resistente di elementi armati a taglio e' basato sui valori:

- $V_{Rd2}$  Massima forza di taglio di calcolo che può essere sopportata senza rottura delle bielle compresse convenzionali di calcestruzzo
- $V_{Rd3}$  Forza di taglio di calcolo che può essere sopportata da un elemento con armatura a taglio, il cui collasso è attivato dallo snervamento dell'armatura a taglio

# Calcolo del taglio resistente di travi armate a taglio

Metodi di normativa per il calcolo di  $V_{Rd2}$  e  $V_{Rd3}$

- **Metodo normale**
- **Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio**

**IN OGNI CASO**

**il taglio resistente di elementi armati a taglio  
e' fornito dal minore tra**

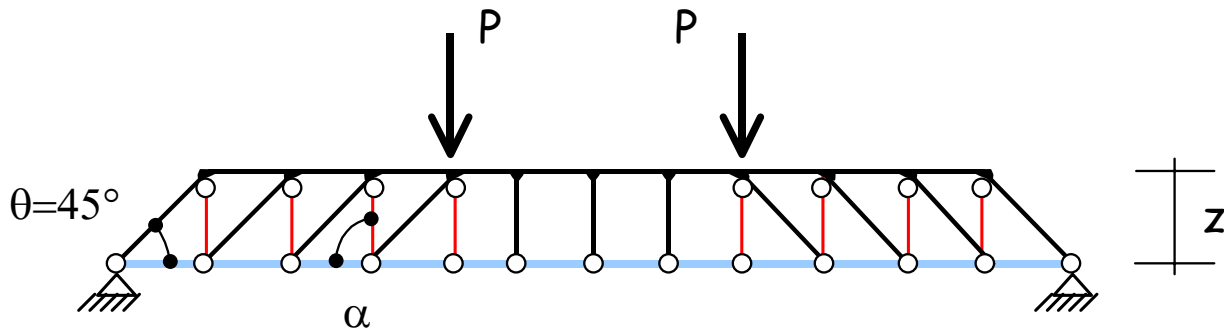
**$V_{Rd2}$  e  $V_{Rd3}$**

# Metodo Normale

## Ipotesi

- Traliccio iperstatico
- Diagonali in calcestruzzo incastrate nel corrente compresso ed inclinate a  $45^\circ$ .

N.B. nella trattazione si indicherà genericamente con  $\alpha$  l'inclinazione di tali elementi rispetto all'orizzontale, essendo quindi  $\alpha=45^\circ$  per i sagomati e  $\alpha=90^\circ$  per le staffe



# Metodo Normale

## Sollecitazione della diagonale in calcestruzzo

Lo schema è iperstatico, ma nel valutare la resistenza a compressione del puntone si può ritenere trascurabile il momento flettente, data la piccola entità delle deformazioni ed il fatto che la rigidezza estensionale è molto maggiore di quella flessionale.

La forza di compressione nel puntone è quindi data, in base alla condizione di equilibrio, da

$$N_d = \frac{V}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \ V$$

Poiché la distanza tra i puntoni, misurata in orizzontale, è pari a  $z (1 + \cot \alpha)$ , la loro sezione trasversale ha altezza  $z (1 + \cot \alpha)$  e larghezza  $b$ .

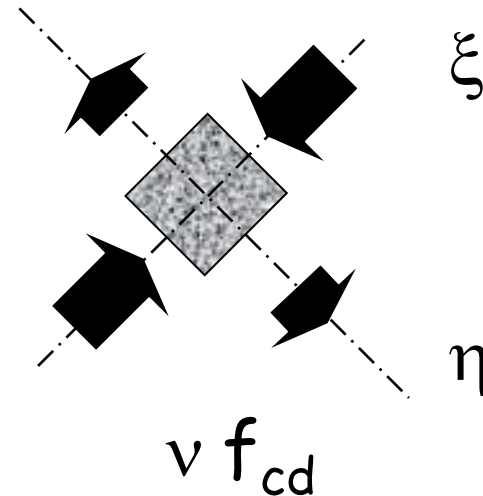
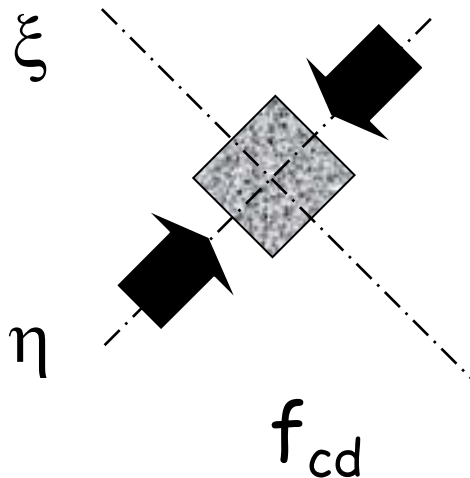


# Metodo Normale

## Schiacciamento del puntone

La rottura per schiacciamento interviene allorché la tensione normale eguaglia il valore  $\nu f_{cd}$ , essendo  $\nu$  un opportuno fattore di riduzione valutato secondo Eurocodice 2 come:

$$\nu = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0,5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$



# Metodo Normale

## Schiacciamento del puntone

La rottura a compressione è dunque regolata dalla relazione:

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{2} V}{b z (1 + \cot \alpha) / \sqrt{2}} = v f_{cd}$$

ed interviene per un valore del taglio, generalmente indicato col simbolo  $V_{Rd2}$

$$V_{Rd2} = \frac{1}{2} v f_{cd} b z (1 + \cot \theta)$$

N.B. L'Eurocodice 2, nell'imporre questa formula, precisa che si deve utilizzare cautelativamente il valore  $\alpha=90^\circ$  (e quindi  $\cot \alpha=0$ ) in presenza di sagomati, perché la piega della sagomatura induce localmente valori più elevati di tensione nel calcestruzzo.

# Metodo Normale

## Snervamento dell'armatura

Per valori non molto elevati delle azioni esterne, sullo schema di traliccio iperstatico sono preponderanti le azioni assiali mentre sono trascurabili i momenti flettenti nel puntone. Quando nell'armatura a taglio si raggiunge la tensione di snervamento, gli ulteriori incrementi di carico producono un incremento della sollecitazione flessionale nel puntone inclinato, fino alla sua rottura, mentre l'armatura si deforma a tensione costante. Il valore del taglio che porta alla rottura, che indichiamo con  $V_{Rd3}$ , è quindi somma del valore  $V_{wd}$  che si avrebbe in uno schema iperstatico e dell'aliquota  $V_{cd}$  dovuta alla resistenza del puntone compresso

$$V_{Rd3} = V_{wd} + V_{cd}$$

# Metodo Normale

## Snervamento dell'armatura

La forza di trazione nella diagonale tesa del traliccio è data, in base alle condizioni di equilibrio, da

$$N_d = \frac{V}{\sin \alpha}$$

Se si indica con  $A_{sw}$  l'area di armatura a taglio disposta in un tratto  $\Delta x$ , l'area della diagonale tesa è

$$A_d = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z (1 + \cot \alpha)$$

Imponendo che la tensione nella diagonale,  $N_d / A_d$ , sia pari a  $f_{yd}$  si determina il taglio che provoca lo snervamento dell'armatura

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (1 + \cot \alpha) \sin \alpha$$

# Metodo Normale

Eurocodice 2 vers. 1993

Procedura di verifica

$$V_{Sd} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} V_{Rd2} \\ V_{Rd3} \end{array} \right.$$

- $V_{Rd2} = \frac{1}{2} v f_{cd} b z (1 + \cot \alpha)$
- $V_{Rd3} = V_{wd} + V_{cd}$  essendo  $\left\{ \begin{array}{l} V_{wd} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (1 + \cot \alpha) \sin \alpha \\ V_{cd} = V_{Rd1} \end{array} \right.$

# Metodo Normale

Eurocodice 2 vers. 1993

## Procedura di progetto

Spesso la procedura di progetto riguarda unicamente l'armatura a taglio, essendo la sezione progettata a momento flettente o sforzo normale.

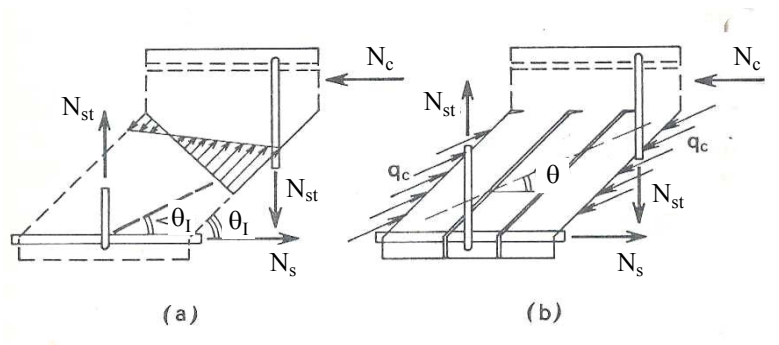
Normalmente, dunque, si controlla 'in primis' che il  $V_{Rd2}$  sia inferiore al taglio agente  $V_{Sd}$ . Successivamente, imponendo il  $V_{Rd3}$  eguale al taglio agente  $V_{Sd}$ , si determina la minima quantità di armatura al taglio necessaria al rispetto delle condizioni di resistenza.

$$V_{Rd3} = V_{Sd} \Rightarrow V_{wd}^{min} = V_{Sd} - V_{Rd1} \quad \text{da cui:}$$

- $$\left( \frac{A_{sw}}{\Delta x} \right)^{min} = \frac{V_{wd}^{min}}{z f_{yd} (1 + \cot \alpha) \sin \alpha}$$

# Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

Le prove di carico condotte su travi, fino alla rottura per taglio, mostrano che l'inclinazione rispetto all'orizzontale delle isostatiche di compressione tende a diminuire dopo lo snervamento dell'armatura a taglio. Ciò può essere giustificato teoricamente pensando che quando le armature sono snervate tendono ad esserci sensibili scorrimenti lungo le lesioni a taglio e che per l'ingranamento degli inerti viene così trasmessa una tensione tangenziale  $\tau_1$ .



# Metodo dell'inclinazione variabile

## Ipotesi

- Traliccio isostatico
- Diagonali in calcestruzzo incernierate nel corrente compresso ed inclinate di un angolo non superiore a  $45^\circ$ .

N.B. nella trattazione si indicherà genericamente con  $\theta$  l'angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale delle diagonali compresse e con  $\alpha$  l'angolo di inclinazione delle armature trasversali, essendo quindi  $\alpha=45^\circ$  per i sagomati e  $\alpha=90^\circ$  per le staffe.



# Metodo dell'inclinazione variabile

## Schiacciamento del puntone

Il contributo del puntone di calcestruzzo è valutato non rendendo lo schema iperstatico bensì considerando variabile l'inclinazione del puntone stesso.

La resistenza a schiacciamento del puntone può essere valutata immediatamente, generalizzando l'espressione determinata per il metodo normale. Si ha infatti:

$$N_{\text{pun}} = \frac{V}{\sin \theta}$$

e l'altezza della sezione del puntone è

Quindi il taglio che porta a rottura il puntone è

$$V_{\text{Rd2}} = \frac{v f_{\text{cd}} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

essendo  $1 + \cot^2 \theta = 1/\sin^2 \theta$

# Metodo dell'inclinazione variabile

## Snervamento dell'armatura

La forza che agisce nell'armatura inclinata vale ancora

$$N_{\text{diag}} = \frac{V}{\sin \alpha}$$

mentre l'area della diagonale tesa è, in funzione dell'area di armatura a taglio  $A_{sw}$  disposta in un tratto  $\Delta x$ ,

$$A_{\text{diag}} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z (\cot \theta + \cot \alpha)$$

Il taglio che provoca lo snervamento dell'armatura è quindi

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

# Metodo dell'inclinazione variabile

## Osservazioni

Dalle due espressioni :

$$V_{Rd2} = \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

si può notare che se, a partire da un'inclinazione del puntone  $\theta=45^\circ$  (cioè  $\cot \theta=1$ ), si riduce il valore di  $\theta$  (e cresce  $\cot \theta$ ) si ha una riduzione di  $V_{Rd2}$  ed un aumento di  $V_{Rd3}$ .

# Metodo dell'inclinazione variabile

Eurocodice 2 vers. 1993

Nelle applicazioni pratiche occorre però mettere un limite inferiore a  $\theta$ , ovvero un limite superiore a  $\cot \theta$

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.2.4.4.)

- L'angolo  $\theta$  tra il puntone compresso e l'asse longitudinale è limitato a:

$$|0,4| < \cot \theta < |2,5| \quad (\text{I: } |1,0| < \cot \theta < |2,0| )$$

per travi con armature longitudinali non interrotte, e a:

$$|0,5| < \cot \theta < |2,0| \quad (\text{I: } |1,0| < \cot \theta < |2,0| )$$

per travi con armature longitudinali interrotte.

Altri valori di  $\theta$  possono essere usati a condizione che possano essere giustificati.

# Metodo dell'inclinazione variabile

Eurocodice 2 vers. 1993

Procedura di verifica

$$V_{Sd} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} V_{Rd2} \\ V_{Rd3} \end{array} \right.$$

- $$V_{Rd2} = \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$
- $$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

# Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

## Procedura di progetto

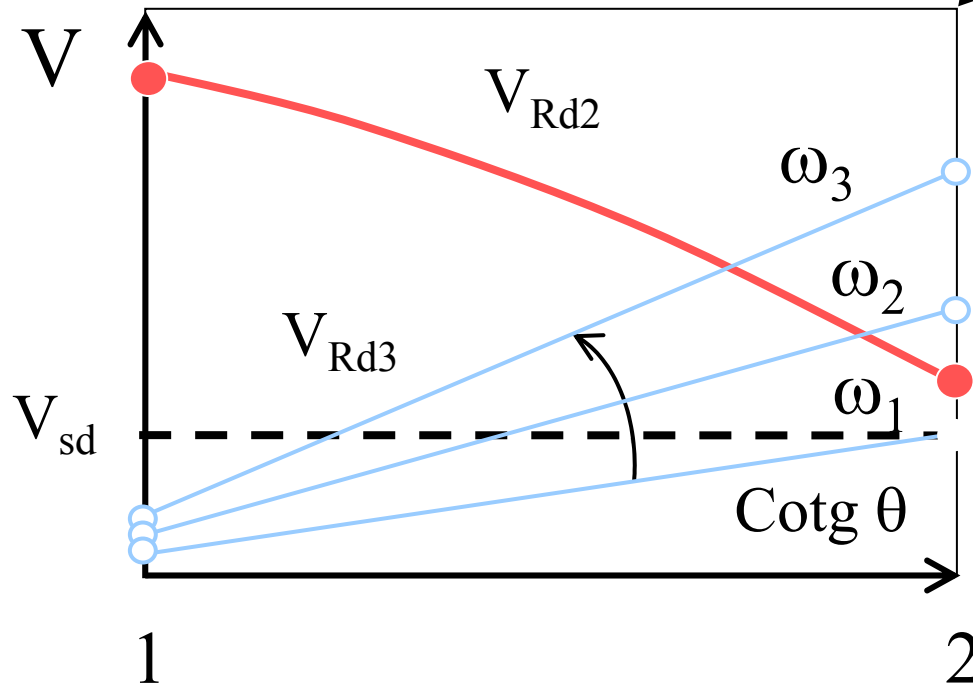
Dopo aver accertato che è necessaria armatura a taglio ( $V_{Sd} > V_{Rd1}$ ), si calcola il valore di  $V_{Rd2}$ , resistenza del puntone di calcestruzzo in corrispondenza di  $\cot\theta=2$ .

# Progetto dell'armatura a taglio

Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

1

$$V_{Rd2}(\cotg \theta = 2) \geq V_{sd}$$



$$V_{Rd2} = \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

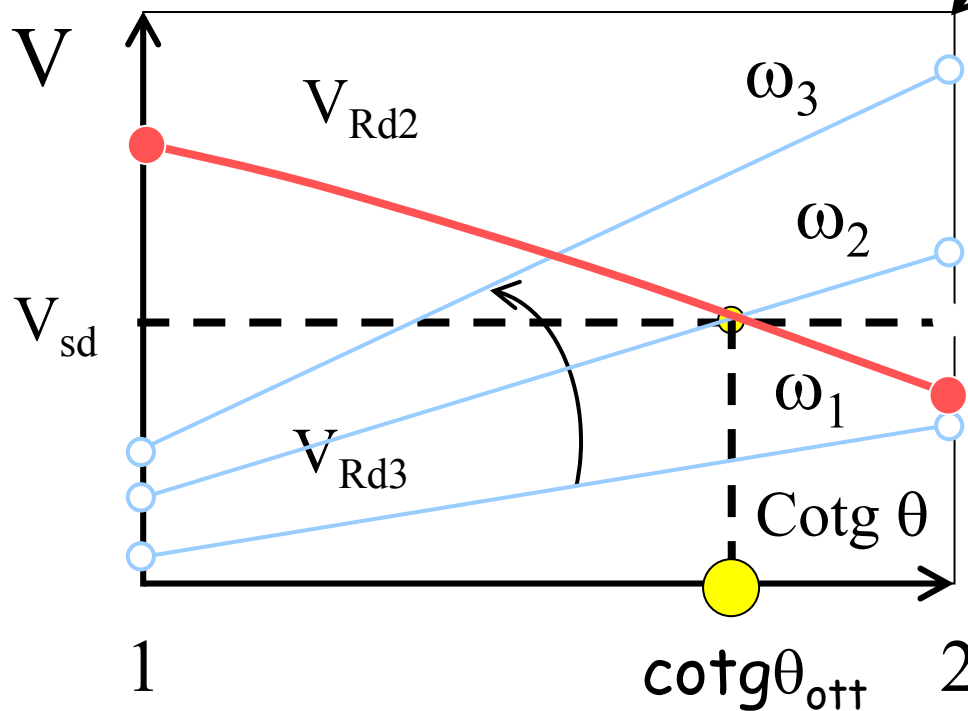
$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

# Progetto dell'armatura a taglio

Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

2

$$V_{Rd2}(\cotg \theta = 2) < V_{sd}$$



$$V_{Rd2} = \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$



# Calcolo dell'armatura a taglio

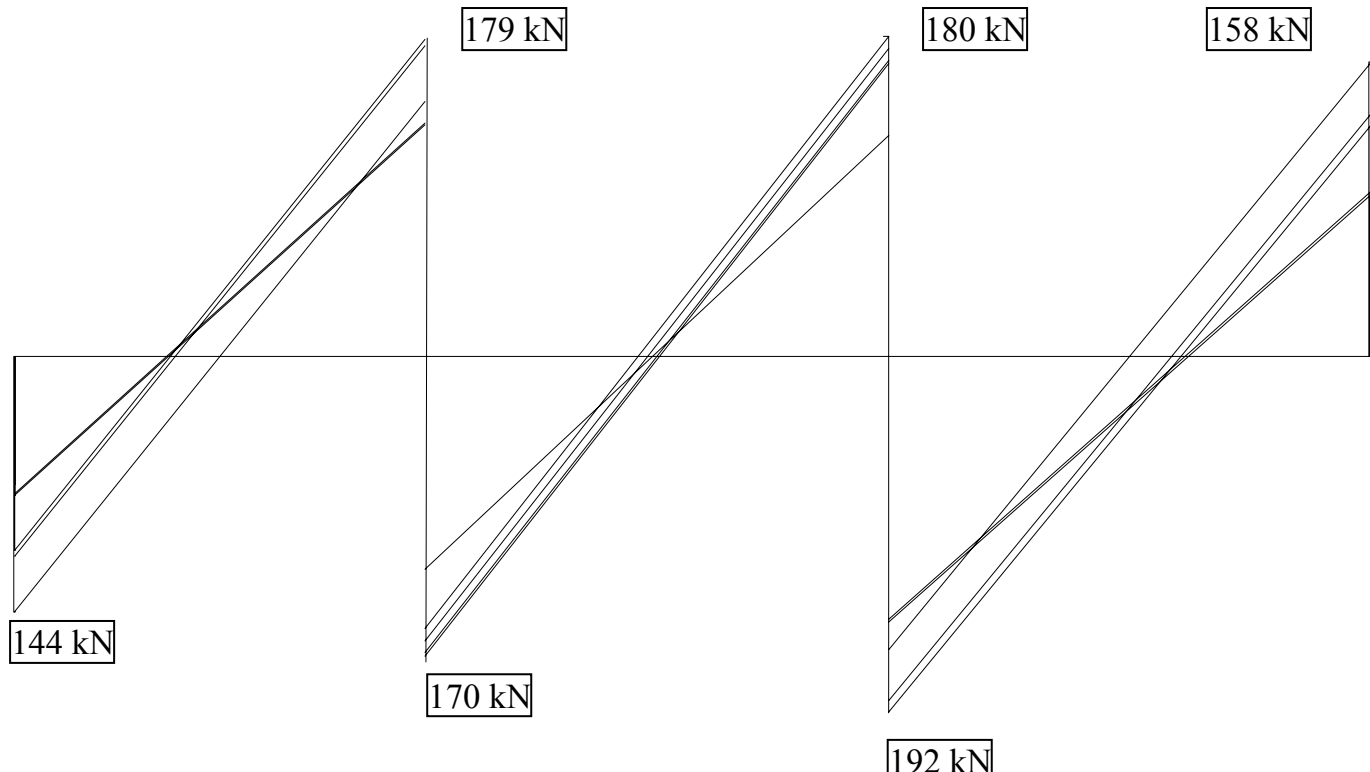
Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.2.4.4)

- (4) Per determinare il minimo quantitativo di armature a taglio, per tensioni di taglio basse o medie, i limiti superiori dati per  $\cot \theta$  nel punto (1) governano di norma il progetto. Per tensioni di taglio più elevate, il più grande valore di  $\cot \theta$  (corrispondente al minimo quantitativo di armatura) può essere determinato uguagliando la forza di taglio di progetto  $V_{Sd}$  a  $V_{Rd2}$ . Il valore di  $\cot \theta$  può anche essere scelto in modo da ottimizzare il progetto, per esempio riducendo al minimo il quantitativo totale di armatura.

# Applicazione

Sollecitazioni nelle travi del I impalcato

## Diagramma del taglio carichi verticali e da vento



# Applicazione

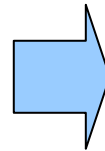
## Calcolo dell'armatura a taglio

Il taglio massimo che sollecita la trave emergente vale:

$$V_{Sd} = 192.0 \text{ kN}$$

### Tensioni ammissibili

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd} / 1.5}{z \bar{\sigma}_s} = 12.1 \text{ cm}^2 / \text{m}$$



**Staffe  $\phi 8/8$**

# Applicazione

## Calcolo dell'armatura a taglio

Il taglio massimo che sollecita la trave emergente vale:

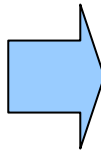
$$V_{Sd} = 192.0 \text{ kN}$$

### Metodo normale

$$V_{Rd2} = \frac{b_w z v f_{cd}}{2} = 480.2 \text{ kN}$$

$$V_{wd} = V_{Rd3} - V_{cd} = 192.0 - 53.0 = 139.0 \text{ kN}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{wd}}{z f_{ywd}} = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$$



**Staffe  $\phi 8/11$**

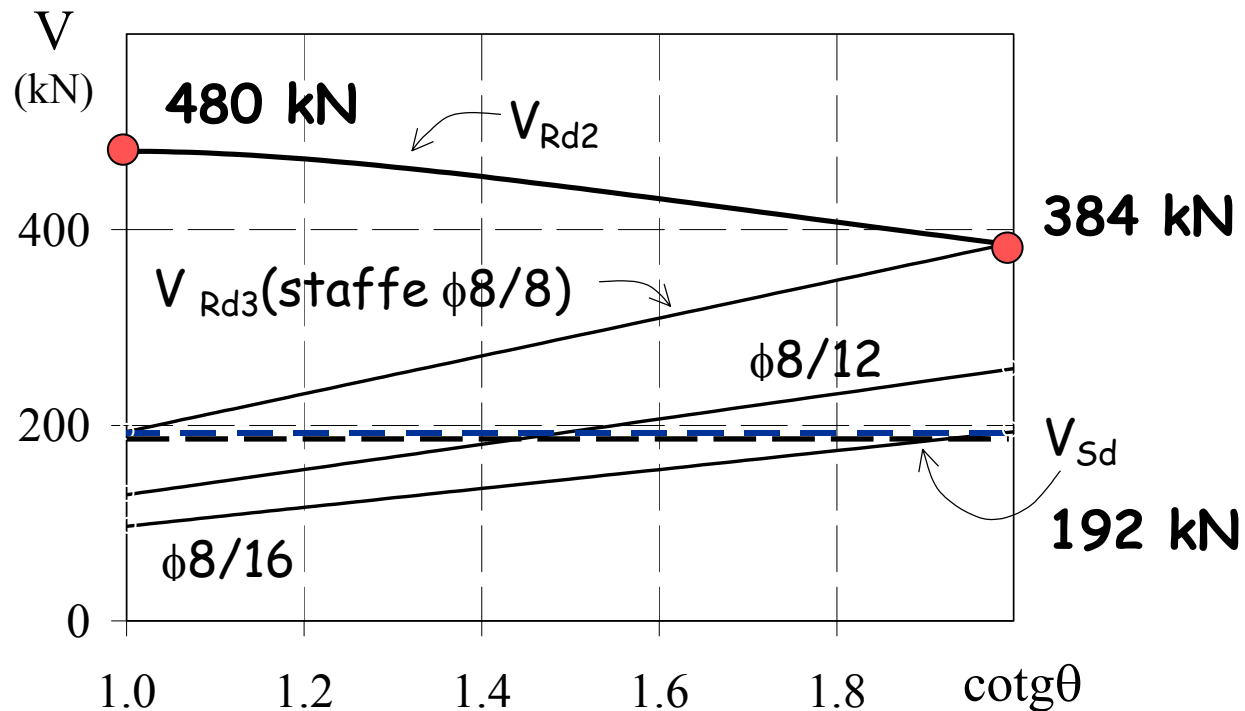
# Applicazione

Calcolo dell'armatura a taglio (inclinazione variabile)

1

$$V_{Rd2} = \frac{b z v f_{cd}}{(\cot \theta + \tan \theta)}$$

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$



# Applicazione

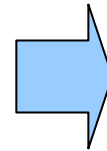
## Calcolo dell'armatura a taglio

Consideriamo il caso di una **sezione fortemente sollecitata a taglio** ( $V_{Sd}$  prossimo a  $V_{Rd2}$ ):

$$V_{Sd} = 450.0 \text{ kN}$$

## Tensioni ammissibili

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd} / 1.5}{z \bar{\sigma}_s} = 28.4 \text{ cm}^2 / \text{m}$$



**Staffe  $\phi 8/7$   
a 4 bracci**

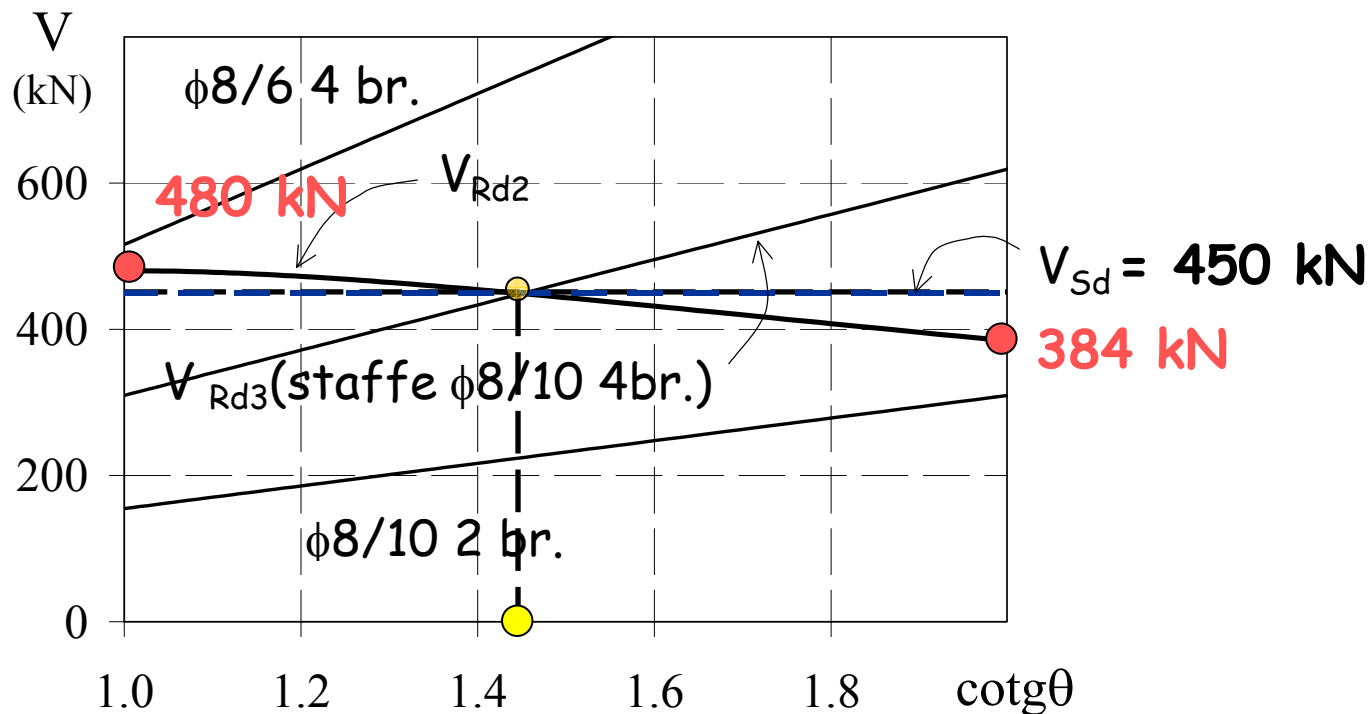
# Applicazione

Calcolo dell'armatura a taglio (inclinazione variabile)

2

$$V_{Rd2} = \frac{b z v f_{cd}}{(\cot \theta + \tan \theta)}$$

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$



# Applicazione

Calcolo dell'armatura a taglio

## TRAVE EMERGENTE (b=30 cm; h=50 cm)

$V_{Sd,max}$ (kN)	$V_{Rd1}$ (kN)	$V_{Rd2}$ (kN)	Staffe	bracci	cot $\theta$	$V_{Rd3}$ (kN)
192.0	53.0	384.2	Ø8/15	2	2	207.5
			Ø8/25	2	2	124.5

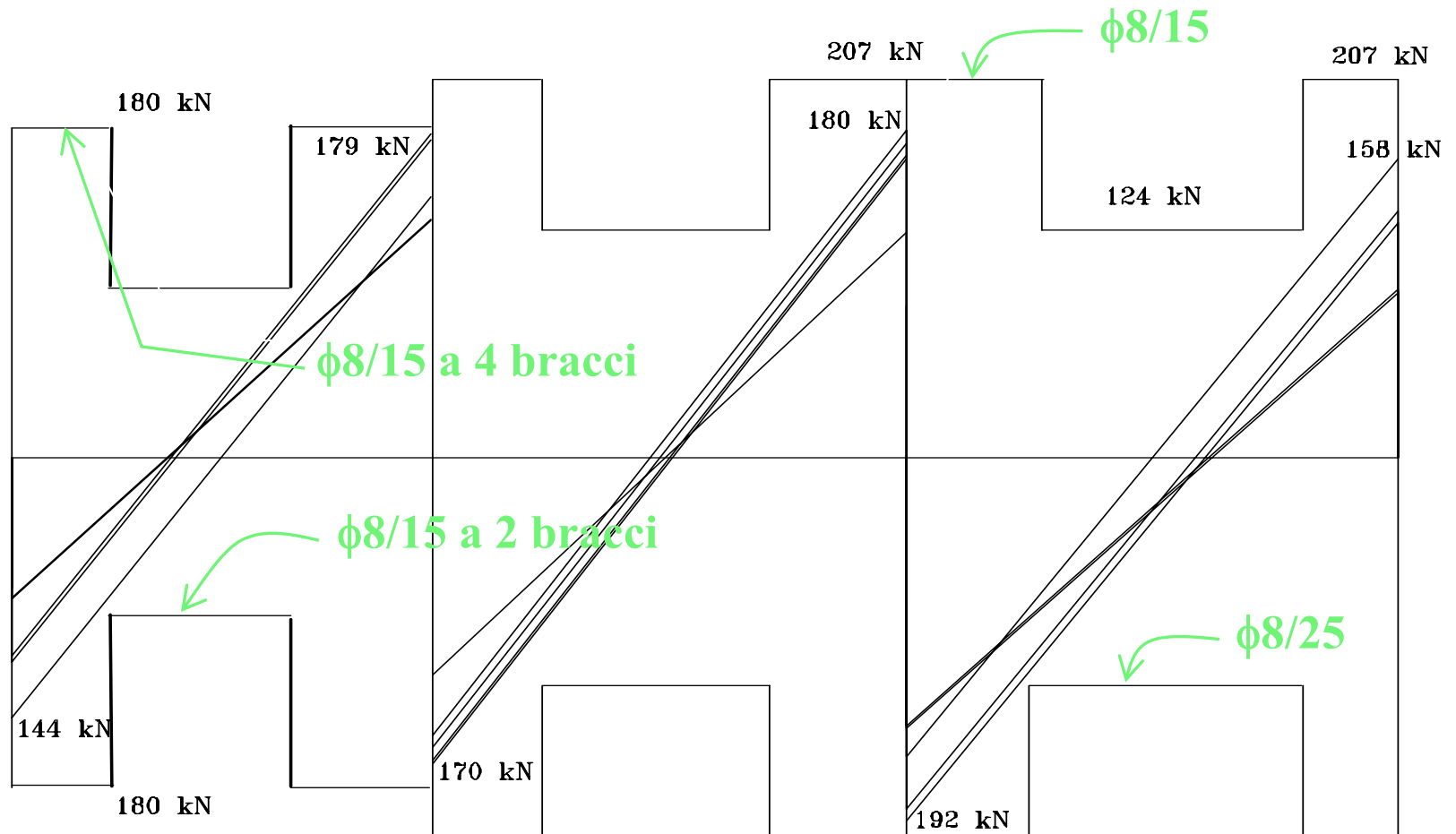
## TRAVE A SPESSORE (b=80 cm; h=24 cm)

$V_{Sd,max}$ (kN)	$V_{Rd1}$ (kN)	$V_{Rd2}$ (kN)	Staffe	bracci	cot $\theta$	$V_{Rd3}$ (kN)
179.0	83.7	501.1	Ø8/15	4	2	180.4
			Ø8/15	2	2	90.2



# Applicazione

## Diagramma del taglio



# Armatura a taglio

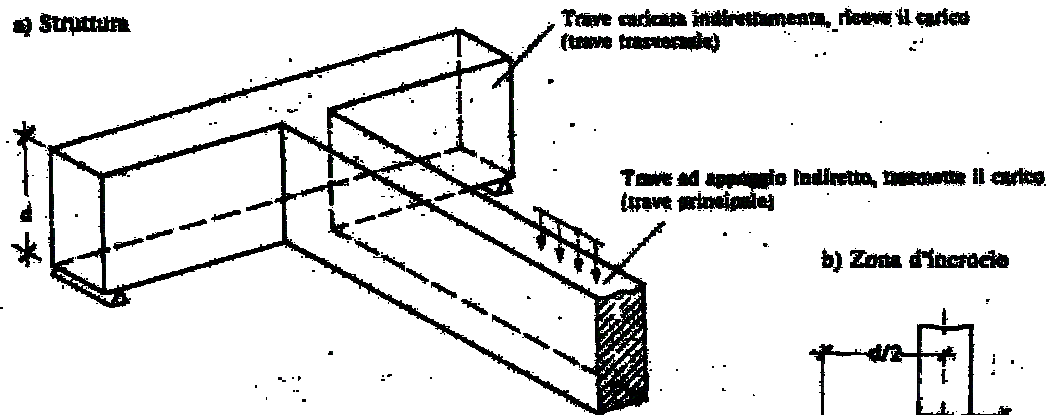
Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.2.2. Metodo di calcolo a taglio)

- P(1) Nelle travi le armature rialzate non devono essere utilizzate come armature a taglio se non in combinazione con staffe. Almeno il 50% del valore di  $V_{sd}$  deve essere assorbito da staffe verticali.
- P(2) Dove siano impiegate armature a taglio inclinate, l'angolo tra le armature e l'asse longitudinale della trave non deve, di regola, essere minore di  $45^\circ$ .
- P(3) Dove il carico non agisca all'estradosso della trave, o quando l'appoggio non sia all'intradosso della trave, si devono disporre ulteriori armature per riportare gli sforzi all'estradosso del traliccio resistente.

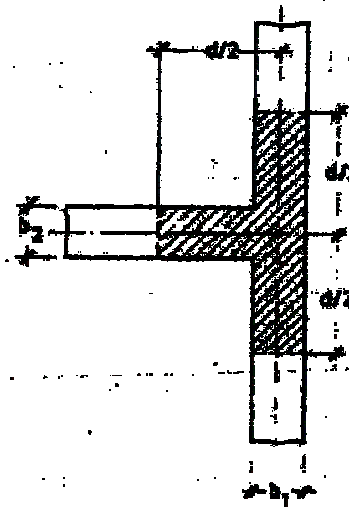
# Introduzione del carico

## Appoggio indiretto

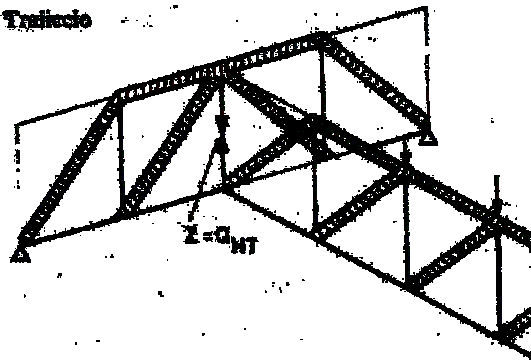
a) Struttura



b) Zona d'incrocio



c) Traliccio



# Armatura a taglio

Eurocodice 2 ver. 1993 (4.3.2.4.2. Elementi di altezza costante)

- P(1) Per la verifica a taglio si considera l'elemento come costituito da membrature compresse e tese separate da una distanza pari al braccio di leva interno  $z$ . La zona di taglio ha profondità  $z$  e larghezza  $b_w$ . Il braccio di leva è calcolato perpendicolarmente alle armature longitudinali ignorando l'effetto delle armature rialzate.
- (2-3) ....
- (4) Alla disposizione delle armature a taglio si applicano le seguenti prescrizioni:
- percentuale minima di armatura a taglio;
  - limitazione delle aperture delle fessure nell'anima;
  - disposizione delle armature a taglio.

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.2.2. Armature a taglio delle travi)

- (2) L'armatura a taglio può essere costituita da una combinazione di:
- staffe che racchiudono le armature longitudinali tese e la zona compressa;
  - barre rialzate;
  - assemblaggi di armature a taglio in forma di gabbie, graticci, ecc., realizzati con barre ad aderenza migliorata, messi in opera senza contenere le armature longitud., ma che devono essere adeguatamente ancorati in zona tesa e compressa.
- (3) Le staffe saranno ancorate in modo efficace. Sono ammesse giunzioni per sovrapposizione di bracci vicini alla superficie dell'elemento solo per armature ad aderenza migliorata.

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.2.2. Armature a taglio delle travi)

(5) Il rapporto di armatura a taglio è dato dall'equazione:

$$\rho_w = A_{sw} / s \cdot b_w \cdot \sin \alpha$$

$\rho_w$  è il rapporto di armatura a taglio;

$A_{sw}$  è l'area dell'armatura a taglio sulla lunghezza  $s$ ;

$s$  è il passo dell'armatura a taglio;

$b_w$  è la larghezza dell'anima dell'elemento;

$\alpha$  è l'angolo tra l'armatura a taglio e l'armatura principale (per staffe verticali  $\alpha=90^\circ$  e  $\sin \alpha=1$ ).

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.2.2. Armature a taglio delle travi)

- (5) I valori minimi del rapporto di armatura a taglio  $\rho_w$  sono forniti dal prospetto:

Prospetto 5.5 - Valori minimi di  $\rho_w$

Classi di calcestruzzo*	Classi di acciaio		
	S220	S400	S500
Da C12/15 a C20/25	0,0016	0,0009	0,0007
Da C25/30 a C35/45	0,0024	0,0013	0,0011
Da C40/50 a C50/60	0,0030	0,0016	0,0013
* Come assunto in progetto.			

# Applicazione

Limiti per l'armatura a taglio

## ARMATURE A TAGLIO DELLE TRAVI

### TRAVE EMERGENTE

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin \alpha} = \frac{2 \times 0.5}{25 \times 30 \times 1} = 1.3 \times 10^{-3} > 0.9 \times 10^{-3}$$

### TRAVE A SPESSORE

**2 bracci**  $\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin \alpha} = \frac{2 \times 0.5}{15 \times 80 \times 1} = 0.7 \times 10^{-3} < 0.9 \times 10^{-3}$

**4 bracci**  $\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin \alpha} = \frac{4 \times 0.5}{15 \times 80 \times 1} = 1.5 \times 10^{-3} > 0.9 \times 10^{-3}$



# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.2.2. Armature a taglio delle travi)

- (5) Quando le armature a taglio sono realizzate con barre tonde lisce il loro diametro non deve di regola essere maggiore di 12 mm.
- (7) Il massimo passo longitudinale  $s_{max}$  di insiemi successivi di staffe o di armature è definito dalle seguenti condizioni:
- se :  $V_{Sd} \leq 1/5 V_{Rd2}$   $s_{max} = 0,8 d \leq 300 \text{ mm}$
  - se :  $1/5 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 2/3 V_{Rd2}$   $s_{max} = 0,6 d \leq 300 \text{ mm}$
  - se :  $V_{Sd} > 2/3 V_{Rd2}$   $s_{max} = 0,3 d \leq 200 \text{ mm}$

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.2.2. Armature a taglio delle travi)

- (8) La massima distanza longitudinale fra barre rialzate è data dall'equazione:

$$s_{max} = | \underline{0.6} | d(1 + \cot \alpha)$$

- (9) Il massimo passo trasversale  $s_{max}$  dei bracci di un insieme di staffe a taglio non deve di regola essere maggiore di:

- se :	$V_{Sd} \leq 1/5 V_{Rd2}$	$s_{max} \leq d \quad \text{o} \quad   \underline{800 \text{ mm}}  $
- se :	$1/5 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 2/3 V_{Rd2}$	$s_{max} = 0,6 d \leq 300 \text{ mm}$
- se :	$V_{Sd} > 2/3 V_{Rd2}$	$s_{max} = 0,3 d \leq 200 \text{ mm}$

# Applicazione

## Calcolo dell'armatura a taglio

Il passo massimo longitudinale  $s_{\max}$  delle staffe dipende dal rapporto del taglio sollecitante  $V_{sd}$  e taglio limite  $V_{Rd2}$ .

### TRAVE EMERGENTE

Il taglio agente agli estremi della trave emergente supera sempre il valore  $0.2 V_{Rd2}$ , arrivando fino a quasi  $0.5 V_{Rd2}$ .

Il limite del passo diventa in tal caso  $s_{\max} = 0.6 d = 27.6 \text{ cm}$ . Si sono quindi disposte staffe  $\varnothing 8/15$  agli estremi e  $\varnothing 8/25$  in campata.

# Applicazione

## Calcolo dell'armatura a taglio

Il passo massimo longitudinale  $s_{\max}$  delle staffe dipende dal rapporto del taglio sollecitante  $V_{Sd}$  e taglio limite  $V_{Rd2}$ .

### TRAVE A SPESSORE

Il taglio agente per la maggior parte della trave a spessore non supera il valore  $0.2 V_{Rd2}$ , che richiede un passo massimo  $s_{\max} = 0.8 d = 16.0 \text{ cm}$ . All'estremo 7 si arriva a  $0.4 V_{Rd2}$ , che impone  $s_{\max} = 0.6 d = 12.0 \text{ cm}$ .

All'estremo 7 la distanza trasversale dei bracci di un insieme di staffe a taglio non deve di regola essere maggiore di  $s_{\max} = 0.6 d = 12.0 \text{ cm}$ . Quindi in una trave larga 90 cm bisognerebbe disporre almeno 8 bracci.

# Influenza dello sforzo normale

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.2.2 Metodo di calcolo a taglio)

- (4) Se l'elemento è soggetto a una compressione assiale, il taglio resistente  $V_{Rd2}$ , di regola, deve essere ridotto secondo la seguente equazione:

$$V_{Rd2,red} = 1.67 V_{Rd2} \left( 1 - \frac{\sigma_{cp,eff}}{f_{cd}} \right) \leq V_{Rd2}$$

dove:

$A_{s2}$  è l'area dell'armatura che risulta compressa allo stato limite ultimo:

$\sigma_{cp,eff}$  è la tensione media efficace nel calcestruzzo dovuta alla forza assiale eguale a:

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.1.2.2 Arm. trasversali nei pilastri)

- (1) Il diametro delle armature trasversali (staffe, risvolti o armature elicoidali) deve, di regola, essere non minore di | 6 mm | o di | un quarto | del diametro massimo delle barre longitudinali, assumendo il valore maggiore fra i due; il diametro dei fili delle reti elettrosaldate formanti armature trasversali deve, di regola, essere non minore di | 5 mm |.
- (2) Le armature trasversali devono, di regola, essere adeguatamente ancorate.

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.1.2.2 Arm. trasversali nei pilastri)

- (3) La distanza tra le armature trasversali di un pilastro non deve di regola essere maggiore della minore delle tre seguenti:
- 12 volte il minimo diametro delle barre longitudinali;
  - il lato minore della sezione del pilastro;
  - 300 mm.
- (4) La distanza sarà ridotta secondo un fattore | 0,6 |:
- i) in sezioni posizionate al di sopra o al di sotto di una trave o di una piastra per un tratto pari alla maggiore dimensione della sezione del pilastro;
  - ii) in prossimità delle giunzioni per sovrapposizione se il massimo diametro delle barre è maggiore di | 14 mm |.

# Armatura a taglio

Eurocodice 2 vers. 1993 (5.4.1.2.2 Arm. trasversali nei pilastri)

- (5) Dove le barre longitudinali cambiano direzione (per esempio nelle variazioni di sezione) la distanza tra le armature trasversali sarà calcolata considerando le forze trasversali che si generano.
- (6) Ciascuna barra longitudinale (o gruppo di barre longitudinali) posta in uno spigolo deve essere tenuta in posizione da una armatura trasversale.
- (7) Un massimo di | 5 | barre situate in uno spigolo o in prossimità di esso può essere assicurato contro l'instabilità da ciascuna serie di armature trasversali dello stesso tipo.



Fine