

La sollecitazione di torsione

Pier Paolo Rossi

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

Occorre distinguere i seguenti due tipi di torsione:

- **TORSIONE PER EQUILIBRIO**
allorché le forze esterne possono essere equilibrate unicamente attraverso l'attivazione di una resistenza a torsione.
- **TORSIONE PER CONGRUENZA**
allorché le forze esterne possono essere equilibrate anche a seguito di una variazione del vincolo mutuo e quindi attraverso caratteristiche della sollecitazione diverse dalla torsione.

IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

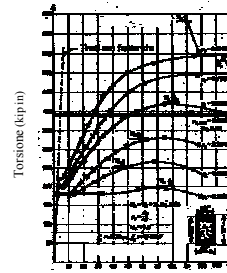
I° stadio di comportamento

1. La torsione, fin quando l'elemento in c.a. non è fessurato, è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo. Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

II° stadio di comportamento

2. Quando le tensioni principali di trazione nel calcestruzzo attingono il valore di rottura, subentra una radicale modifica del meccanismo resistente, con l'instaurarsi di un quadro fessurativo specifico, e con l'intervento diretto delle armature metalliche.

IL COMPORTAMENTO A TORSIONE



Angolo di torsione (10^{-3} deg/in)
(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

II° stadio di comportamento

3. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le fessure nel calcestruzzo risultano inclinate di un angolo pari all'incirca a 45° , e si sviluppano con un andamento a spirale lungo la superficie del solido.



(tratto da F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

II° stadio di comportamento

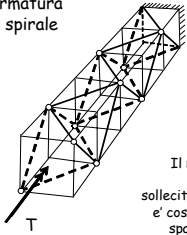
4. Inoltre, solo uno strato di calcestruzzo, vicino alla superficie esterna dell'elemento e relativamente poco spesso,

5. Su ogni parete della trave può essere ipotizzato un traliccio del tutto analogo a quello di Mörsch, costituito da bielle di conglomerato inclinate di 45° rispetto all'asse della trave, ivi tangenti alle isostatiche di compressione, ed armature contenute nello spessore t della parete tubolare fittizia, che possono essere costituite da un'elica inclinata a 45° rispetto all'asse della trave e tangenti alle isostatiche di trazione, o da barre parallele all'asse della trave e a staffe ad esse normali.

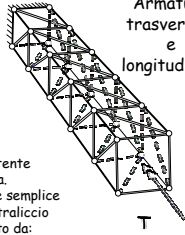
Il traliccio tubolare (modello di Rausch) si ipotizza isostatico.

IL MODELLO DI RAUSCH

Armatura
a spirale



Armatura
trasversale
e
longitudinale



Il modello resistente
di travi in c.a.
sollecitate a torsione semplice
e' costituito da un traliccio
spaziale composto da:

correnti longitudinali
diagonali tese (armatura a spirale)
diagonali compresse (calcestruzzo)

correnti longitudinali
(staffe) montanti tesi
(calcestruzzo) diagonali compresse

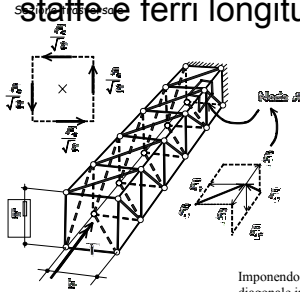
(ispirata a F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

VERIFICHE DI SICUREZZA

Nella logica degli stati limite la verifica di sicurezza strutturale viene ricondotta alla verifica dei quattro stati limite ultimi:

- Rottura per compressione delle bielle di calcestruzzo;
- Snervamento delle staffe;
- Snervamento dell'armatura longitudinale;
- Cedimenti degli ancoraggi o di nodi dell'elemento strutturale.

Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ($\theta=45^\circ$)



Dall'equilibrio alla traslazione del nodo A si ha:

$$\frac{F_c}{\sqrt{2}} = F_u, \quad \frac{F_c}{\sqrt{2}} = F_t$$

Dall'equilibrio alla rotazione del generico tronco si ha:

$$4 \frac{F_c}{\sqrt{2}} \frac{b}{2} = T \quad \text{quindi} \quad F_c = \frac{T}{\sqrt{2} b}$$

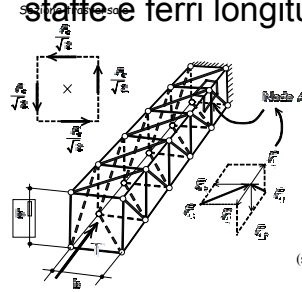
La tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo vale:

$$\sigma_c = \frac{T}{\sqrt{2} b} \frac{\sqrt{2}}{b} = \frac{T}{b^2}$$

Imponendo per la tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo il suo valore ultimo si ha:

$$T_{Rd1} = v f_{cd} t A_k$$

Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ($\theta=45^\circ$)



La tensione nelle staffe e nell'armatura longitudinale vale:

$$\sigma_u = \frac{T \Delta x}{2 b^2 A_u} \quad (\text{staffe})$$

$$(\text{arm. longitudinale}) \quad \sigma_i = \frac{2 T}{b A_i}$$

Imponendo per la tensione di trazione dell'armatura il suo valore di snervamento si ha:

$$(\text{staffe}) \quad T_{Rd2} = 2 A_k f_{ywd} \frac{A_u}{\Delta x}$$

$$(\text{arm. long.}) \quad T_{Rd2} = \frac{2 A_k f_{yld} A_w}{u_k}$$

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

(5) Il momento torcente di calcolo deve, di regola, soddisfare le due condizioni seguenti:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd1}$$

$$T_{Sd} \leq T_{Rd2}$$

T_{Rd1} massimo momento torcente che può essere sopportato dalle bielle compresse

T_{Rd2} massimo momento torcente che può essere sopportato dall'armatura

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

(6) Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd1} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

t spessore di parete equivalente $\leq A / u$

A area totale della sezione retta racchiusa dal perimetro esterno

u perimetro esterno

A_k area compresa all'interno della linea media della sezione trasversale a pareti sottili

θ angolo tra le bielle di calcestruzzo e l'asse longitudinale della trave

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

- (6) Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd2} = 2 v f_{cd} A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

essendo:

$$v = 0.7 * (0.7 - f_{ck} / 200) \geq 0.35 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Questo valore di v si applica se ci sono staffe solo lungo il perimetro esterno dell'elemento. Se si dispongono staffe chiuse su entrambi le facce di ciascun elemento della sezione cava equivalente, o di ciascun elemento di una sezione a cassone:

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

$$T_{Rd2} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 A_k f_{ywd} A_{sw} \cot \theta}{s} \\ \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

u_k è il perimetro dell'area A_k ;

s è il passo delle staffe;

f_{ywd} è la tensione di snervamento di calcolo delle staffe;

f_{yld} è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura longitudinale A_{sl} ;

A_{sw} è l'area della sezione trasversale delle staffe;

A_{sl} è l'area aggiuntiva di acciaio longitudinale richiesta per la torsione.

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

Dalla relazione

$$T_{Rd2} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 A_k f_{ywd} A_{sw} \cot \theta}{s} \\ \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

posto $T_{Sd} = T_{Rd2}$, le aree aggiuntive di staffe e di barre longitudinali per torsione sono fornite dalle equazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_k f_{ywd} \cot \theta} \quad A_{lw} = \frac{T_{Sd} u_k \cot \theta}{2 A_k f_{yld}}$$

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.)

4.3.3.2.1. Procedimento generale

Si usa lo stesso procedimento descritto per la torsione pura per definire una sezione chiusa equivalente a pareti sottili. Le tensioni normali e tangenziali in tale sezione si determinano con i metodi di calcolo convenzionali elastico o plastico.

Quando siano state calcolate le tensioni, l'armatura necessaria in ogni punto della sezione a pareti sottili può essere determinata con le formule per lo stato di tensione biassiale. Analogamente può essere determinata la tensione del calcestruzzo.

L'armatura così trovata, se non è praticamente realizzabile, può essere sostituita con un'altra disposizione staticamente equivalente, a condizione che gli effetti di tale modifica siano presi in conto nelle zone vicine a fori e alle estremità della trave.

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.)

4.3.3.2.1. Procedimento generale

La tensione nel calcestruzzo risultante da taglio e torsione combinati nelle singole pareti della sezione equivalente a pareti sottili non deve, di regola, essere maggiore di $\sigma_c = v f_{cd}$.

Per sezioni a cassone, con armatura su entrambe le facce di ogni parete, nel caso di tensioni tangenziali originate da taglio e torsione combinati v può essere assunto pari a

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5.$$

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Le armature longitudinali richieste per flessione e torsione devono, di regola, essere determinate separatamente.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- **nella zona tesa per flessione**, l'armatura longitudinale di torsione va di regola aggiunta a quella richiesta per resistere alla flessione e alle forze assiali;
- **nella zona compressa per flessione**, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Nelle zone in cui la torsione è combinata con un momento flettente significativo possono insorgere tensioni principali critiche nella zona di compressione, in particolare nelle travi a cassone. In tali casi la tensione principale di compressione non deve di regola essere maggiore di αf_{cd} , essendo tale tensione ricavata dalla compressione longitudinale media per flessione e dalla tensione tangenziale dovuta alla torsione, assunta pari a

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

Torsione combinata con taglio

Il momento torcente di calcolo e il taglio di calcolo applicato, T_{sd} e V_{sd} rispettivamente, devono di regola soddisfare la seguente condizione:

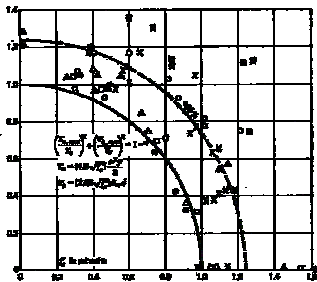
$$\left[\frac{T_{sd}}{T_{Rd1}} \right]^2 + \left[\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} \right]^2 \leq 1$$

T_{Rd1} è il momento resistente torcente di calcolo,

V_{Rd2} è il taglio resistente di calcolo relativo a una biella inclinata di un angolo θ

EFFETTI COMBINATI

Torsione - taglio



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

Torsione combinata con taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente, per la torsione secondo e per il taglio.

L'angolo θ delle bielle equivalenti di calcestruzzo è lo stesso sia per la torsione che per il taglio.

EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

Torsione combinata con taglio

Per una sezione piena approssimativamente rettangolare non è necessaria armatura a taglio e a torsione, tranne l'armatura minima, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$T_{sd} \leq \frac{V_{sd} b_w}{4,5}$$

$$V_{sd} \left[1 + \frac{4,5 T_{sd}}{V_{sd} b_w} \right] \leq V_{Rd1}$$

APPLICAZIONE

Valori caratteristici e di calcolo dei carichi

AZIONI AGENTI

$$q = (1,4 \cdot g_k \cdot l_1 + 1,5 \cdot q_k \cdot l_1)_b + (1,4 \cdot g_k)_t + (1,4 \cdot g_k)_{lom}$$

$$q = 34,85 \text{ kN/m}$$

$$m_t = (1,4 \cdot g_k \cdot l_1 + 1,5 \cdot q_k \cdot l_1) \cdot l_1 / 2$$

$$m_t = 16,62 \text{ kNm/m}$$

SOLLECITAZIONI

$$M_k = m_t \cdot l_1 / 2 = 16,62 \times 5,2 / 2 = 43,21 \text{ kNm}$$

$$V = q \cdot l_1 / 2 = 34,85 \times 5,2 / 2 = 90,61 \text{ kN}$$

APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

VERIFICA DELLA SEZIONE

Il momento torcente di calcolo ed il taglio di calcolo sollecitanti T_{sd} e V_{sd} devono soddisfare la seguente relazione:

$$(T_{sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{sd}/V_{sd2})^2 \leq 1$$

APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

Calcolo V_{Rd2} (per elementi armati a taglio)

$$V_{Rd2} = v f_{cd} b_w 0.9 d / (\cot \theta + \tan \theta)$$

b_w [cm]	h [cm]	d [cm]	v
30	60	56	0.60

Calcolo T_{Rd1}

$$T_{Rd1} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

A [cm ²]	u [cm]	t [cm]	A_k [cm ²]	u_k [cm]	v
1800	180	8.0	1144	148	0.42

APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

Il momento torcente di calcolo ed il taglio di calcolo sollecitanti T_{sd} e V_{sd} devono soddisfare la seguente relazione:

$$(T_{sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{sd}/V_{sd2})^2 \leq 1$$

Verifica del calcestruzzo

$$V_{sd} = 90.61 \text{ kN}, T_{sd} = 43.21 \text{ kNm}$$

Cot θ	V_{Rd2} [kN]	T_{Rd1} [kNm]	$(T_{sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{sd}/V_{sd2})^2$
2.00	470.7	39.9	1.21
1.68	517.8	43.9	1.00
1.00	588.3	49.9	0.77

APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente per la torsione e per il taglio

Armature a taglio

$$\text{Posto: } V_{Rd3} = V_{sd} = 90.61 \text{ kN}$$

$$\text{Staffe: } A_{s/s} = V_{Rd3} / (0.9 d f_{yd} \cot \theta)$$

Staffe	cot θ
2.86 cm ² /m	1.68
4.81 cm ² /m	1.00

APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente per la torsione e per il taglio

Armature a torsione

$$\text{Posto: } T_{Rd2} = T_{sd} = 43.21 \text{ kNm}$$

$$\text{Staffe: } A_{sw}/s = T_{Rd2} / 2 A_k f_{yd} \cot \theta$$

$$\text{Ferri longitudinali: } A_{lw} = T_{Rd2} u_k \cot \theta / 2 A_k f_{yd}$$

Staffe	ferri long.	cot θ
3.00 cm ² /m	12.6 cm ²	1.68
5.05 cm ² /m	7.48 cm ²	1.00

APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di θ

La **quantità di staffe** da disporre in un tronco di trave lungo 1 m si ottiene sommando quelle ottenute dai calcoli a torsione e taglio. La quantità di staffe necessaria per il taglio va divisa per il numero di bracci.

$$\frac{A_{sw}^{totale}}{s} = \frac{1}{2} \frac{A_{sw}^{taglio}}{s} + \frac{A_{sw}^{torsione}}{s}$$

cot θ	$A_{sw}^{taglio} / 2s$	A_{sw}^{tors} / s	A_{sw}^{tot} / s	Barre
1.68	1.43 cm ² /m	3.00 cm ² /m	4.43 cm ² /m	ϕ 8 / 11
1.00	2.41 cm ² /m	5.05 cm ² /m	7.46 cm ² /m	ϕ 8 / 6

APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di θ

La **quantità di staffe** da disporre in un tronco di trave lungo 1 m si ottiene sommando quelle ottenute dai calcoli a torsione e taglio. La quantità di staffe necessaria per il taglio va divisa per il numero di bracci.

$$\frac{A_{sw}^{totale}}{s} = \frac{1}{2} \frac{A_{sw}^{taglio}}{s} + \frac{A_{sw}^{torsione}}{s}$$

Tenendo conto che la lunghezza della staffa L_w è di 176 cm e delle quantità prima calcolate si ottiene il peso delle staffe disposte in un tronco di trave lungo 1 m:

$$P_{staffe} = \frac{A_{sw}^{totale}}{s} \times L_w \times \gamma_{acciaio}$$

APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di θ

Armatura longitudinale

	$\cot \theta$	A_w	Barre
	1.68	12.60 cm ²	9 $\phi 14$
	1.00	7.48 cm ²	5 $\phi 14$

Moltiplicando A_{sw} per la lunghezza del tronco (1 m) per $\gamma_{acciaio}$ si ottiene il peso dell'armatura longitudinale disposta.

APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di θ

Peso dell'acciaio impiegato (kg)

$\cot \theta$	Staffe	Arm. long.	Totale
1.68	6.1	9.8	15.9
1.00	10.5	5.8	16.3

Metodi di calcolo a torsione

(Eurocodice 2 vers. 1993 - 4.3.3.1.)

(8)

(9) Per torsione pura valgono i seguenti requisiti di disposizione delle armature:

- percentuale minima di armatura (5.4.2.2);
- limitazione dell'apertura delle fessure (4.4.2);
- disposizione dell'armatura (5.4.2.3).

Limiti per la torsione nelle travi

(Eurocodice 2 vers. 1993 - 5.4.2)

5.4.2.3. ARMATURE A TORSIONE

- (1) Le staffe per la torsione devono di regola essere o chiuse e ancorate per sovrapposizione e formare un angolo di 90° con l'asse dell'elemento strutturale.
- (2) Le prescrizioni fornite in 5.4.2.2, punti da (3) a (6), sono valide anche per le barre longitudinali e per le staffe di travi soggette a torsione.
- (3) La distanza longitudinale fra le staffe di torsione non deve di regola essere maggiore di $|u_k/8|$

Limiti per la torsione nelle travi

(Eurocodice 2 vers. 1993 - 5.4.2)

5.4.2.3. ARMATURE A TORSIONE

- (4) La distanza indicata nel precedente punto (3) dovrà anche soddisfare i requisiti di cui in (7) di 5.4.2.2 per quanto riguarda la massima distanza delle staffe.
- (5) Le barre longitudinali devono di regola essere disposte in modo tale che ci sia almeno una barra per angolo, essendo le rimanenti uniformemente distribuite lungo il perimetro delle staffe e distanti fra loro non più di $|350 \text{ mm}|$.

Fine