

# La sollecitazione di torsione

Pier Paolo Rossi

# CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

- TORSIONE PER EQUILIBRIO

allorché le forze esterne possono essere equilibrate unicamente attraverso l'attivazione di una resistenza a torsione.

- TORSIONE PER CONGRUENZA

allorché le forze esterne possono essere equilibrate anche a seguito di una variazione del vincolo mutuo e quindi attraverso caratteristiche della sollecitazione diverse dalla torsione.

# IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

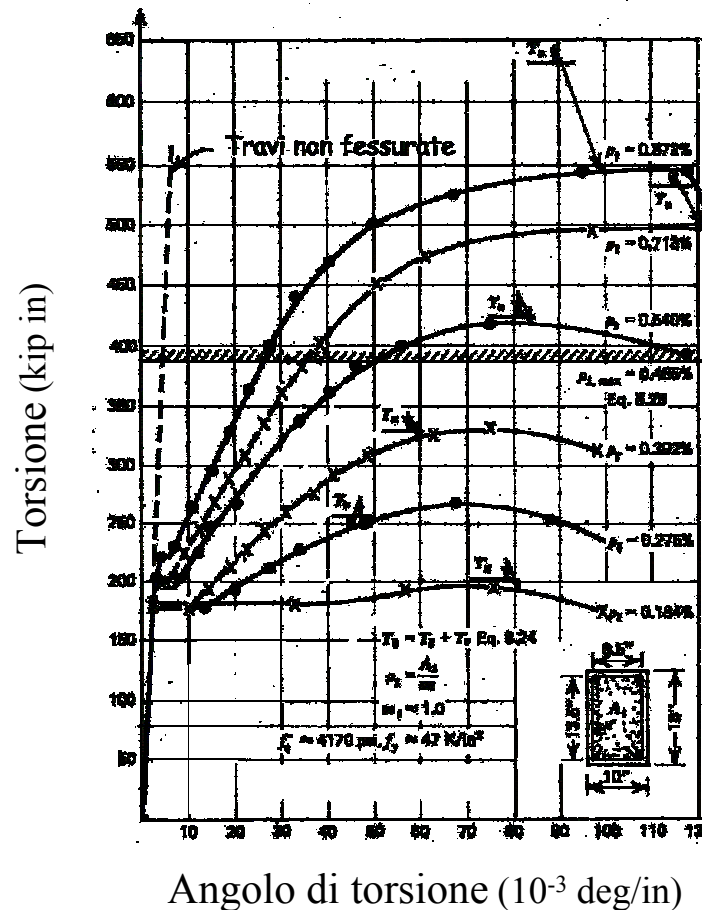
## **I° stadio di comportamento**

1. La torsione, fin quando l'elemento in c.a. non è fessurato, è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo. Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

## **II° stadio di comportamento**

2. Quando le tensioni principali di trazione nel calcestruzzo attingono il valore di rottura, subentra una radicale modifica del meccanismo resistente, con l'instaurarsi di un quadro fessurativo specifico, e con l'intervento diretto delle armature metalliche.

# IL COMPORTAMENTO A TORSIONE



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

# IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

## II° stadio di comportamento

3. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le fessure nel calcestruzzo risultano inclinate di un angolo pari all'incirca a  $45^\circ$ , e si sviluppano con un andamento a spirale lungo la superficie del solido.



(tratto da F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

# IL COMPORTAMENTO A TORSIONE

## II° stadio di comportamento

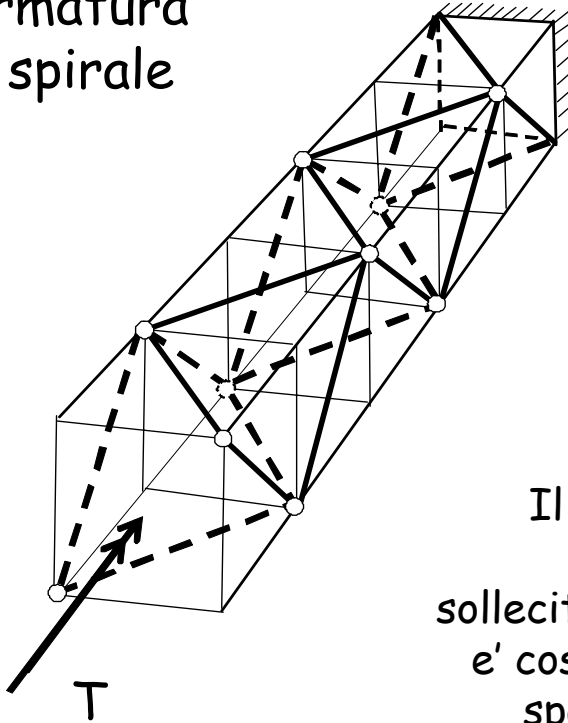
4. Inoltre, solo uno strato di calcestruzzo, vicino alla superficie esterna dell'elemento e relativamente poco spesso,

5. Su ogni parete della trave può essere ipotizzato un traliccio del tutto analogo a quello di Mörsch, costituito da bielle di conglomerato inclinate di  $45^\circ$  rispetto all'asse della trave, ivi tangenti alle isostatiche di compressione, ed armature contenute nello spessore  $t$  della parete tubolare fittizia, che possono essere costituite da un'elica inclinata a  $45^\circ$  rispetto all'asse della trave e tangenti alle isostatiche di trazione, o da barre parallele all'asse della trave e a staffe ad esse normali.

Il traliccio tubolare (modello di Rausch) si ipotizza isostatico.

# IL MODELLO DI RAUSCH

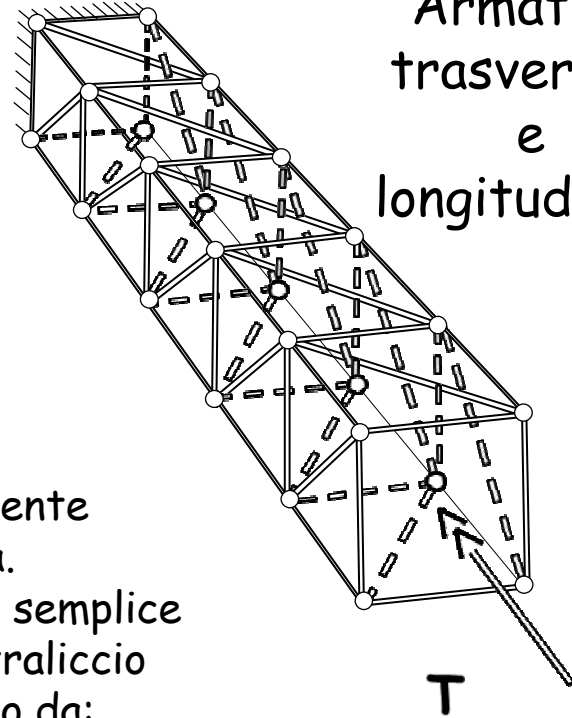
Armatura  
a spirale



Il modello resistente  
di travi in c.a.  
sollecitate a torsione semplice  
e' costituito da un traliccio  
spaziale composto da:

**correnti longitudinali**  
**diagonali tese** (armatura a spirale)  
**diagonali compresse** (calcestruzzo)

Armatura  
trasversale  
e  
longitudinale



**correnti longitudinali**  
**(staffe) montanti tesi**  
**(calcestruzzo) diagonali compresse**

# VERIFICHE DI SICUREZZA

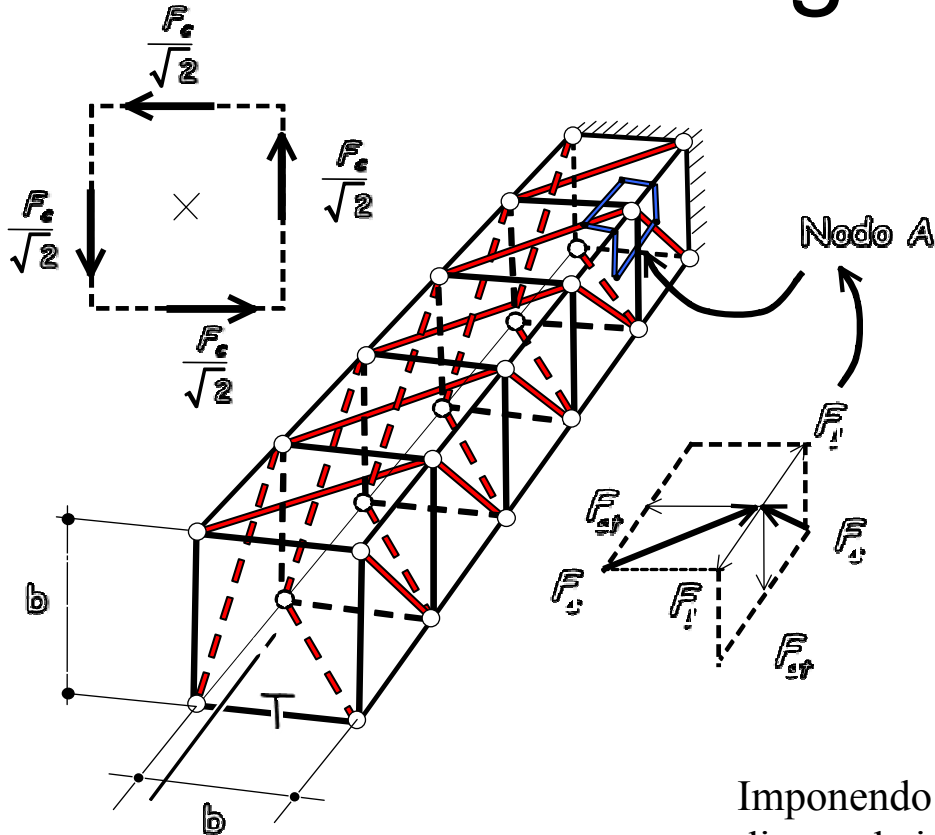
Nella logica degli stati limite la verifica di sicurezza strutturale viene ricondotta alla verifica dei quattro stati limite ultimi:

- Rottura per compressione delle bielle di calcestruzzo;
- Snervamento delle staffe;
- Snervamento dell'armatura longitudinale;
- Cedimenti degli ancoraggi o di nodi dell'elemento strutturale.



# Il modello resistente in presenza di

## staffe e ferri longitudinali ( $\theta=45^\circ$ )



Dall'equilibrio alla traslazione del nodo A si ha:

$$\frac{F_c}{\sqrt{2}} = F_{st} \quad \frac{F_c}{\sqrt{2}} = F_l$$

Dall'equilibrio alla rotazione del generico tronco si ha:

$$4 \frac{F_c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{2} = T \quad \text{quindi} \quad F_c = \frac{T}{\sqrt{2} b}$$

La tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo vale:

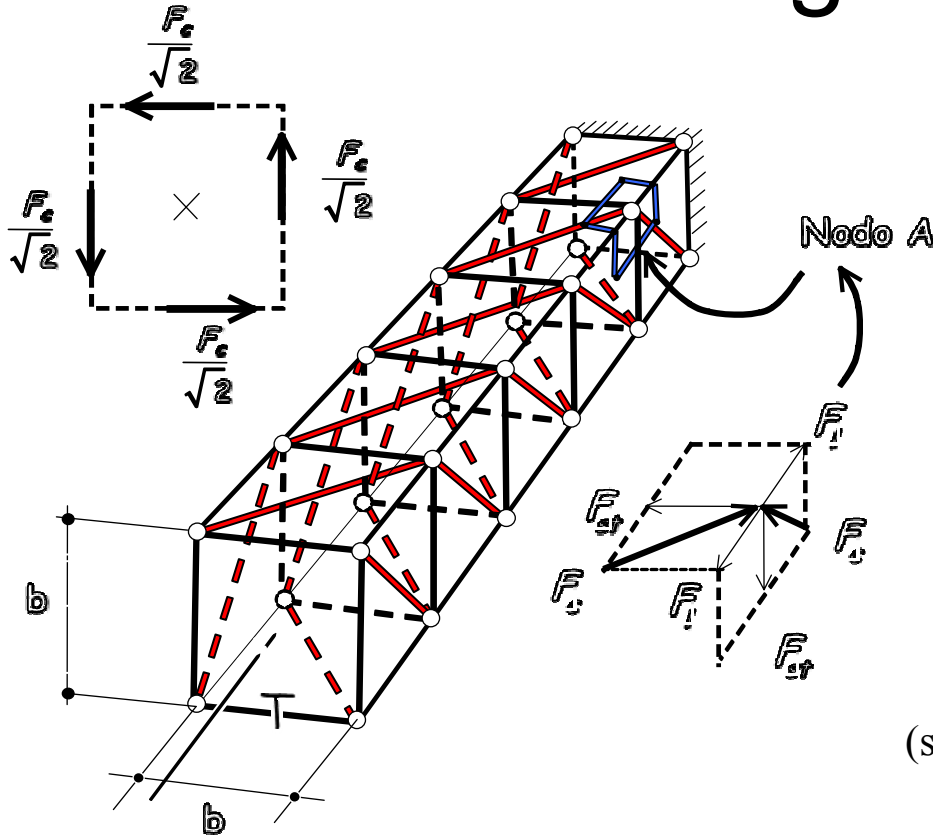
$$\sigma_c = \frac{T}{\sqrt{2} b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{b t} = \frac{T}{b^2 t}$$

Imponendo per la tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo il suo valore ultimo si ha:

$$T_{Rd1} = v f_{cd} t A_k$$

# Il modello resistente in presenza di

## staffe e ferri longitudinali ( $\theta=45^\circ$ )



La tensione nelle staffe e nell'armatura longitudinale vale:

(staffe)

$$\sigma_{st} = \frac{T \Delta x}{2 b^2 A_{st}}$$

(arm. longitudinale)

$$\sigma_l = \frac{2T}{b A_{sl}}$$

Imponendo per la tensione di trazione dell'armatura il suo valore di snervamento si ha:

(staffe) 
$$T_{Rd2} = 2 A_k f_{ywd} \frac{A_{st}}{\Delta x}$$

(arm. long.) 
$$T_{Rd2} = \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k}$$

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

(5) Il momento torcente di calcolo deve, di regola, soddisfare le due condizioni seguenti:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd1}$$

$$T_{Sd} \leq T_{Rd2}$$

$T_{Rd1}$  massimo momento torcente che può essere sopportato dalle bielle compresse

$T_{Rd2}$  massimo momento torcente che può essere sopportato dall'armatura

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

- (6) Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd1} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

- $t$  spessore di parete equivalente  $\leq A / u$   
 $A$  area totale della sezione retta racchiusa dal perimetro esterno  
 $u$  perimetro esterno  
 $A_k$  area compresa all'interno della linea media della sezione trasversale a pareti sottili  
 $\theta$  angolo tra le bielle di calcestruzzo e l'asse longitudinale della trave

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

(6) Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd1} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

essendo:

$$v = 0.7 * (0.7 - f_{ck} / 200) \geq 0.35 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Questo valore di  $v$  si applica se ci sono staffe solo lungo il perimetro esterno dell'elemento. Se si dispongono staffe chiuse su entrambi le facce di ciascun elemento della sezione cava equivalente, o di ciascun elemento di una sezione a cassone:

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

$$T_{Rd2} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

$u_k$  è il perimetro dell'area  $A_k$ ;

$s$  è il passo delle staffe;

$f_{ywd}$  è la tensione di snervamento di calcolo delle staffe;

$f_{yld}$  è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura longitudinale  $A_{sl}$ ;

$A_{sw}$  è l'area della sezione trasversale delle staffe;

$A_{sl}$  è l'area aggiuntiva di acciaio longitudinale richiesta per la torsione.

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.1.)

Dalla relazione

$$T_{Rd2} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

posto  $T_{Sd} = T_{Rd2}$ , le aree aggiuntive di staffe e di barre longitudinali per torsione sono fornite dalle equazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2A_k f_{ywd} \cot \theta}$$

$$A_{lw} = \frac{T_{Sd} u_k \cot \theta}{2A_k f_{yld}}$$

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.)

## 4.3.3.2.1. Procedimento generale

Si usa lo stesso procedimento descritto per la torsione pura per definire una sezione chiusa equivalente a pareti sottili. Le tensioni normali e tangenziali in tale sezione si determinano con i metodi di calcolo convenzionali elastico o plastico.

Quando siano state calcolate le tensioni, l'armatura necessaria in ogni punto della sezione a pareti sottili può essere determinata con le formule per lo stato di tensione biassiale. Analogamente può essere determinata la tensione del calcestruzzo.

L'armatura così trovata, se non è praticamente realizzabile, può essere sostituita con un'altra disposizione staticamente equivalente, a condizione che gli effetti di tale modifica siano presi in conto nelle zone vicine a fori e alle estremità della trave.



# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.)

## 4.3.3.2.1. Procedimento generale

La tensione nel calcestruzzo risultante da taglio e torsione combinati nelle singole pareti della sezione equivalente a pareti sottili non deve, di regola, essere maggiore di  $\sigma_c = v f_{cd}$ .

Per sezioni a cassone, con armatura su entrambe le facce di ogni parete, nel caso di tensioni tangenziali originate da taglio e torsione combinati  $v$  può essere assunto pari a

$$v = (0,7 - f_{ck}/200) \geq 0,5.$$

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

## Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Le armature longitudinali richieste per flessione e torsione devono, di regola, essere determinate separatamente.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- nella zona tesa per flessione, l'armatura longitudinale di torsione va di regola aggiunta a quella richiesta per resistere alla flessione e alle forze assiali;
- nella zona compressa per flessione, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

## Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Nelle zone in cui la torsione è combinata con un momento flettente significativo possono insorgere tensioni principali critiche nella zona di compressione, in particolare nelle travi a cassone. In tali casi la tensione principale di compressione non deve di regola essere maggiore di  $\alpha f_{cd}$ , essendo tale tensione ricavata dalla compressione longitudinale media per flessione e dalla tensione tangenziale dovuta alla torsione, assunta pari a

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

## Torsione combinata con taglio

Il momento torcente di calcolo e il taglio di calcolo applicato,  $T_{Sd}$  e  $V_{Sd}$  rispettivamente, devono di regola soddisfare la seguente condizione:

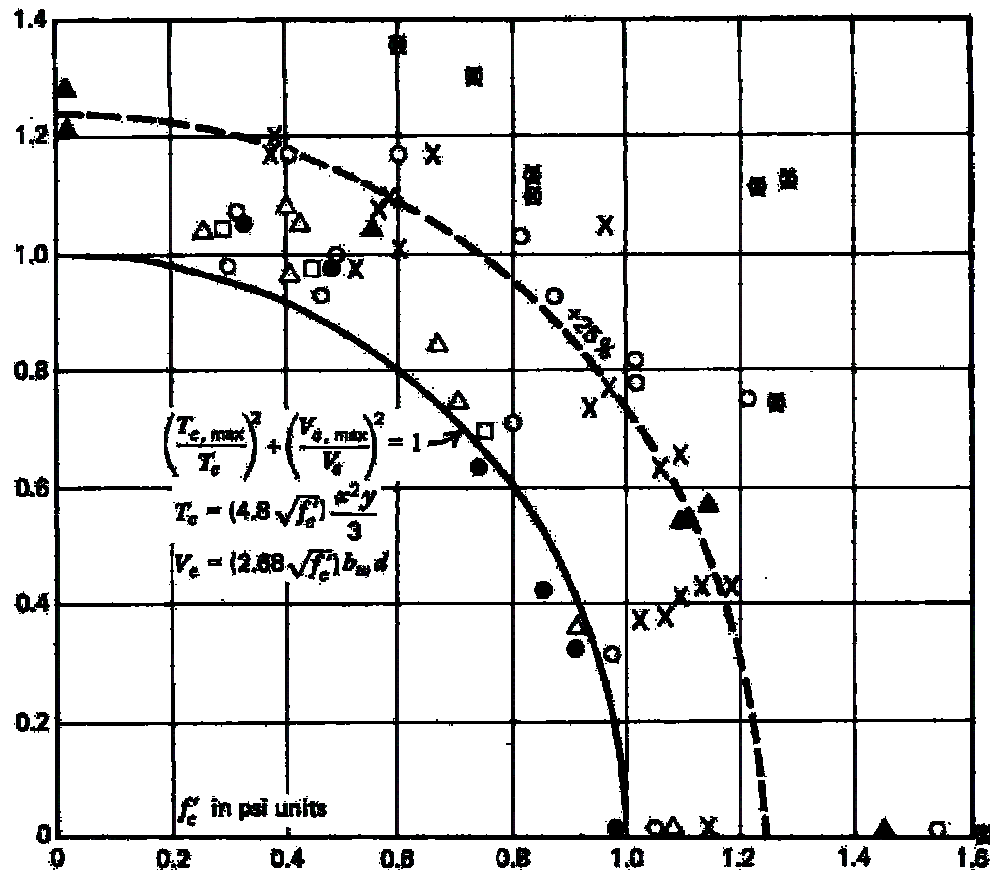
$$\left[ \frac{T_{Sd}}{T_{Rd1}} \right]^2 + \left[ \frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} \right]^2 \leq 1$$

$T_{Rd1}$  è il momento resistente torcente di calcolo,

$V_{Rd2}$  è il taglio resistente di calcolo relativo a una biella inclinata di un angolo  $\theta$

# EFFETTI COMBINATI

Torsione - taglio



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

## Torsione combinata con taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente, per la torsione secondo e per il taglio.

L'angolo  $\theta$  delle bielle equivalenti di calcestruzzo è lo stesso sia per la torsione che per il taglio.

# EFFETTI COMBINATI

Eurocodice 2 vers. 1993 (4.3.3.2.2 Procedimento semplificato)

## Torsione combinata con taglio

Per una sezione piena approssimativamente rettangolare non è necessaria armatura a taglio e a torsione, tranne l'armatura minima, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$T_{Sd} \leq \frac{V_{Sd} b_w}{4,5}$$

$$V_{Sd} \left[ 1 + \frac{4.5 T_{Sd}}{V_{Sd} b_w} \right] \leq V_{Rd1}$$

# APPLICAZIONE

Valori caratteristici e di calcolo dei carichi

## AZIONI AGENTI

$$q = (1.4 \cdot g_k \cdot l_1 + 1.5 \cdot q_k \cdot l_1)_b + (1.4 \cdot g_k)_t + (1.4 \cdot g_k)_{tom}$$

$$q = 34.85 \text{ kN/m}$$

$$m_t = (1.4 \cdot g_k \cdot l_1 + 1.5 \cdot q_k \cdot l_1) \cdot l_1 / 2$$

$$m_t = 16.62 \quad \text{kNm/m}$$

## SOLLECITAZIONI

$$M_t = m_t \cdot l_7 / 2 = 16.62 \times 5.2 / 2 = 43.21 \text{ kNm}$$

$$V = q \cdot l_7 / 2 = 34.85 \times 5.2 / 2 = 90.61 \text{ kN}$$



# APPLICAZIONE

Effetti combinati di Torsione e Taglio

## VERIFICA DELLA SEZIONE

Il momento torcente di calcolo ed il taglio di calcolo sollecitanti  $T_{Sd}$  e  $V_{Sd}$  devono soddisfare la seguente relazione:

$$(T_{Sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{Sd}/V_{Sd2})^2 \leq 1$$

# APPLICAZIONE

## Effetti combinati di Torsione e Taglio

### Calcolo $V_{Rd2}$ (per elementi armati a taglio)

$$V_{Rd2} = v f_{cd} b_w 0.9 d / (\cot \theta + \tan \theta)$$

$b_w$ [cm]	$h$ [cm]	$d$ [cm]	$v$
30	60	56	0.60

### Calcolo $T_{Rd1}$

$$T_{Rd1} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

$A$ [cm <sup>2</sup> ]	$u$ [cm]	$t$ [cm]	$A_k$ [cm <sup>2</sup> ]	$u_k$ [cm]	$v$
1800	180	8.0	1144	148	0.42

# APPLICAZIONE

## Effetti combinati di Torsione e Taglio

Il momento torcente di calcolo ed il taglio di calcolo sollecitanti  $T_{Sd}$  e  $V_{Sd}$  devono soddisfare la seguente relazione:

$$(T_{Sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{Sd}/V_{Sd2})^2 \leq 1$$

### Verifica del calcestruzzo

$V_{Sd} = 90.61 \text{ kN}$ ,  $T_{Sd} = 43.21 \text{ kNm}$

Cot $\theta$	$V_{Rd2} \text{ [kN]}$	$T_{Rd1} \text{ [kNm]}$	$(T_{Sd}/T_{Rd1})^2 + (V_{Sd}/V_{Sd2})^2$
2.00	470.7	39.9	1.21
1.68	517.8	43.9	1.00
1.00	588.3	49.9	0.77

# APPLICAZIONE

## Effetti combinati di Torsione e Taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente per la torsione e per il taglio

### Armature a taglio

Posto:  $V_{Rd3} = V_{Sd} = 90.61 \text{ kN}$

Staffe:  $A_S/s = V_{Rd3} / (0.9 d f_{yd} \cot \theta)$

Staffe	$\cot \theta$
2.86 cm <sup>2</sup> /m	1.68
4.81 cm <sup>2</sup> /m	1.00

# APPLICAZIONE

## Effetti combinati di Torsione e Taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente per la torsione e per il taglio

### Armature a torsione

Posto:  $T_{Rd2} = T_{Sd} = 43.21 \text{ kNm}$

Staffe:  $A_{Sw}/s = T_{Rd2} / 2 A_k f_{yd} \cot \theta$

Ferri longitudinali:  $A_{lw} = T_{Rd2} u_k \cot \theta / 2 A_k f_{yd}$

Staffe	ferri long.	$\cot \theta$
3.00 cm <sup>2</sup> /m	12.6 cm <sup>2</sup>	1.68
5.05 cm <sup>2</sup> /m	7.48 cm <sup>2</sup>	1.00

# APPLICAZIONE

## Valutazioni sulla scelta di $\theta$

La **quantità di staffe** da disporre in un tronco di trave lungo 1 m si ottiene sommando quelle ottenute dai calcoli a torsione e taglio. La quantità di staffe necessaria per il taglio va' divisa per il numero di bracci.

$$\frac{A_{sw}^{totale}}{s} = \frac{1}{2} \frac{A_{sw}^{taglio}}{s} + \frac{A_{sw}^{torsione}}{s}$$

$\cot \theta$	$A_{sw}^{taglio} / 2 s$	$A_{sw}^{tors} / s$	$A_{sw}^{tot} / s$	Barre
1.68	1.43 cm <sup>2</sup> /m	3.00 cm <sup>2</sup> /m	4.43 cm <sup>2</sup> /m	ϕ 8 / 11
1.00	2.41 cm <sup>2</sup> /m	5.05 cm <sup>2</sup> /m	7.46 cm <sup>2</sup> /m	ϕ 8 / 6

# APPLICAZIONE

## Valutazioni sulla scelta di $\theta$

La **quantità di staffe** da disporre in un tronco di trave lungo 1 m si ottiene sommando quelle ottenute dai calcoli a torsione e taglio. La quantità di staffe necessaria per il taglio va' divisa per il numero di bracci.

$$\frac{A_{sw}^{totale}}{s} = \frac{1}{2} \frac{A_{sw}^{taglio}}{s} + \frac{A_{sw}^{torsione}}{s}$$

Tenendo conto che la lunghezza della staffa  $L_w$  è di 176 cm e delle quantità prima calcolate si ottiene il peso delle staffe disposte in un tronco di trave lungo 1 m:

$$P^{staffe} = \frac{A_{sw}^{totale}}{s} \times L_w \times \gamma_{acciaio}$$

# APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di  $\theta$

Armatura longitudinale

$\cot \theta$	$A_{lw}$	Barre
1.68	12.60 cm <sup>2</sup>	9 $\phi 14$
1.00	7.48 cm <sup>2</sup>	5 $\phi 14$

Moltiplicando  $A_{sw}$  per la lunghezza del tronco (1 m) per  $\gamma_{acciaio}$  si ottiene il peso dell'armatura longitudinale disposta.



# APPLICAZIONE

Valutazioni sulla scelta di  $\theta$

## **Peso dell'acciaio impiegato (kg)**

$\cot \theta$	Staffe	Arm. long.	Totale
1.68	6.1	9.8	15.9
1.00	10.5	5.8	16.3

# Metodi di calcolo a torsione

(Eurocodice 2 vers. 1993 - 4.3.3.1.)

(8) .....

(9) Per torsione pura valgono i seguenti requisiti di disposizione delle armature:

- percentuale minima di armatura (5.4.2.2);
- limitazione dell'apertura delle fessure (4.4.2);
- disposizione dell'armatura (5.4.2.3).

# Limiti per la torsione nelle travi

(Eurocodice 2 vers. 1993 – 5.4.2)

## 5.4.2.3. ARMATURE A TORSIONE

- (1) Le staffe per la torsione devono di regola essere o chiuse e ancorate per sovrapposizione e formare un angolo di  $90^\circ$  con l'asse dell'elemento strutturale.
- (2) Le prescrizioni fornite in 5.4.2.2, punti da (3) a (6), sono valide anche per le barre longitudinali e per le staffe di travi soggette a torsione.
- (3) La distanza longitudinale fra le staffe di torsione non deve di regola essere maggiore di  $|u_k/8|$

# Limiti per la torsione nelle travi

(Eurocodice 2 vers. 1993 – 5.4.2)

## 5.4.2.3. ARMATURE A TORSIONE

- (4) La distanza indicata nel precedente punto (3) dovrà anche soddisfare i requisiti di cui in (7) di 5.4.2.2 per quanto riguarda la massima distanza delle staffe.
- (5) Le barre longitudinali devono di regola essere disposte in modo tale che ci sia almeno una barra per angolo, essendo le rimanenti uniformemente distribuite lungo il perimetro delle staffe e distanti fra loro non più di  $| 350 \text{ mm } |$ .

Fine