

Corso di aggiornamento
NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI
D.M. 14 Gennaio 2008

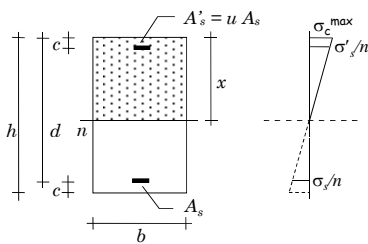
MODULO 2 - PROGETTO E VERIFICA DI ELEMENTI STRUTTURALI IN C.A.

Ordine degli Ingegneri della provincia di Catania
29 ottobre 2008

Edoardo Marino

Verifica di sezioni soggette flessione composta

Verifica - tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature
Coppia M-N

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili

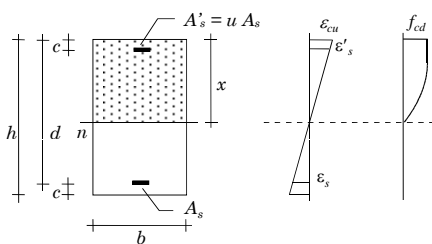
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se N è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se N è di compressione)

Imporre la condizione $I_n = e_n S_n$ se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo (equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

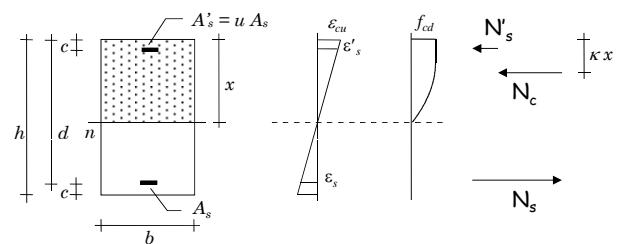
Verifica - stato limite ultimo



Dati:
Geometria della sezione
Armature
Coppia M-N

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

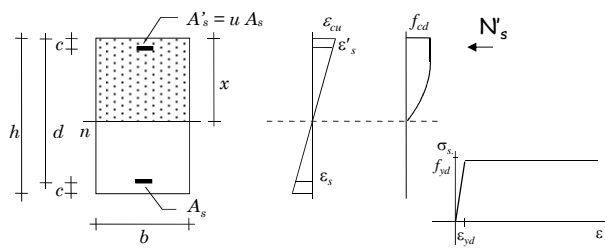
Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = N_{sd}$
(equilibrio alla traslazione)

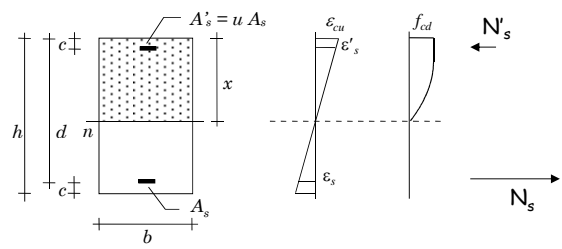
E poi calcolare M_{Rd} , con equilibrio alla rotazione

Risultante delle tensioni armatura compressa (sezione parzializzata)



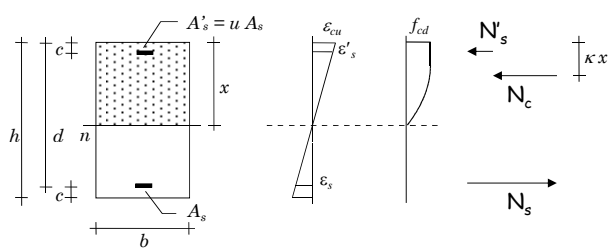
$$\epsilon'_s = \frac{X-c}{X} \epsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} \text{se } \epsilon'_s < \epsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$$

Risultante delle tensioni armatura tesa (sezione parzializzata)



$$\epsilon_s = \frac{d-X}{X} \epsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} \text{se } \epsilon_s < \epsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} &\Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$$

Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione parzializzata)



$$N_c = \beta b X f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Verifica - stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

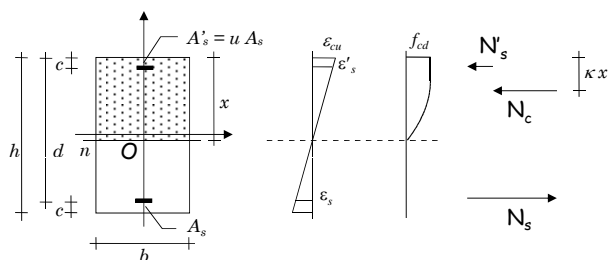
Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$X = \frac{N_{Sd} + (A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

altrimenti si può risolvere per tentativi l'equazione:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Sd}$$

Momento resistente

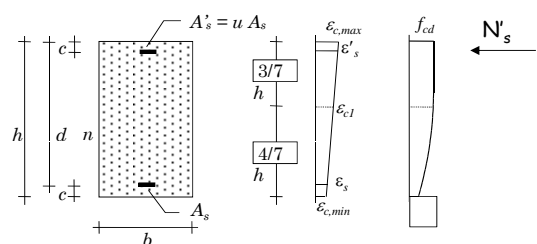


Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa X)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

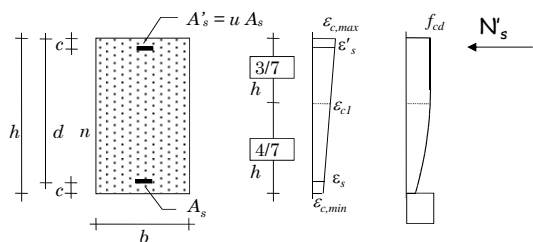
Risultante delle tensioni armatura superiore (sezione tutta compressa)



$$\epsilon'_s = \epsilon_{c1} \left[\frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right]$$

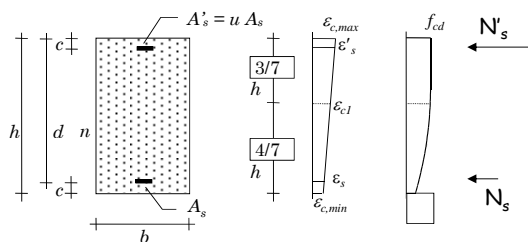
$$\text{dove } \eta_{min} = \frac{\epsilon_{c,min}}{\epsilon_{c1}}$$

Risultante delle tensioni armatura superiore (sezione tutta compressa)



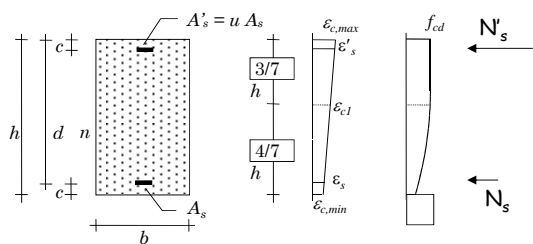
noto $\epsilon'_s \Rightarrow$ se $\epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$
 se $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd}$

Risultante delle tensioni armatura inferiore (sezione tutta compressa)



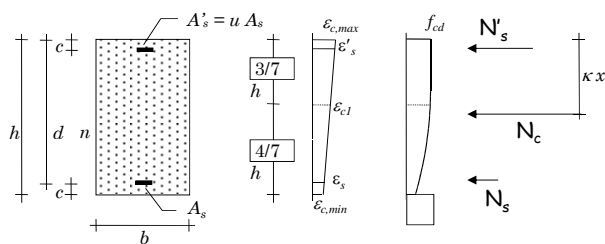
$\epsilon_s = \epsilon_{c1} \left[\frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right]$ dove $\eta_{\min} = \frac{\epsilon_{c,\min}}{\epsilon_{c1}}$

Risultante delle tensioni armatura inferiore (sezione tutta compressa)



noto $\epsilon_s \Rightarrow$ se $\epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$
 se $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd}$

Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione tutta compressa)

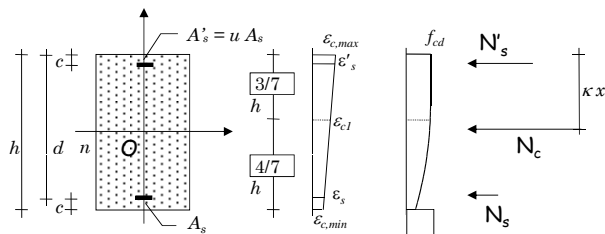


$N_c = \beta b X f_{cd}$ In questo caso β dipende da η_{\min}
 per sezione rettangolare: $\beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{\min})$

Valori di β per sezione rettangolare

η_{\min}	β
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

Momento resistente



Si determina imponendo
 l'equilibrio alla rotazione
 (rispetto al baricentro della
 sezione)

$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa X)$

per sezione rettangolare:
 $\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{\min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{\min})^2}$

Valori di β e κ per sezione rettangolare

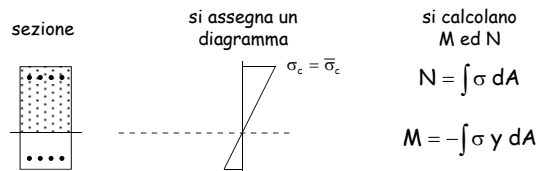
η_{min}	β	κ
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

Domini M-N per flessione composta retta

Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

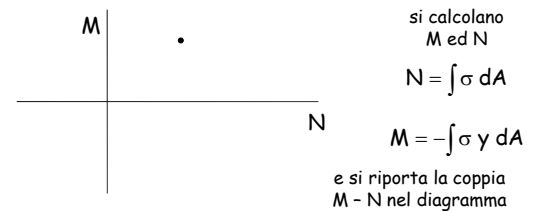
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

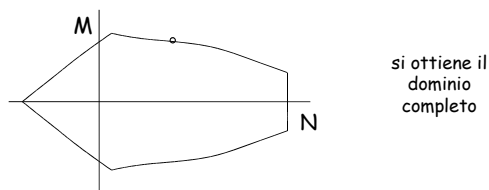
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

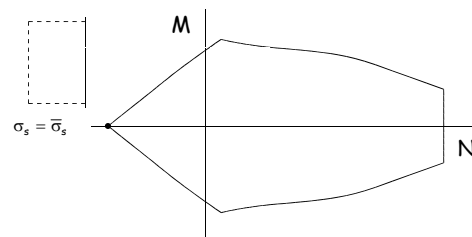
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



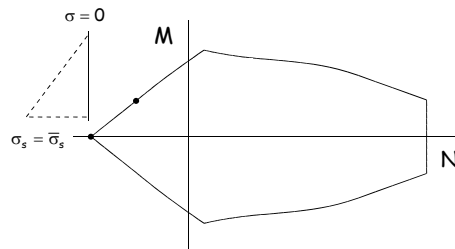
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



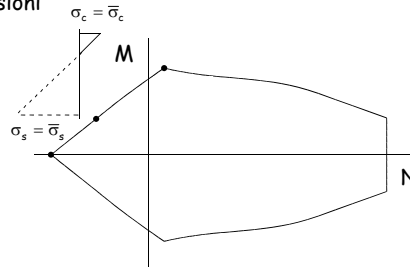
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



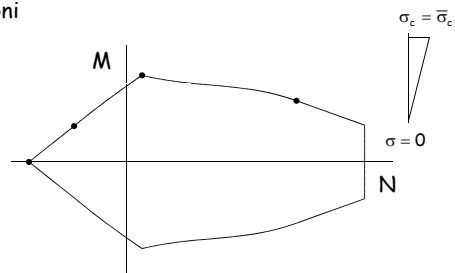
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



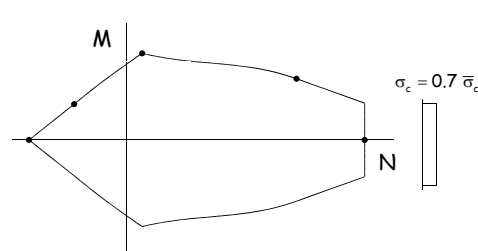
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



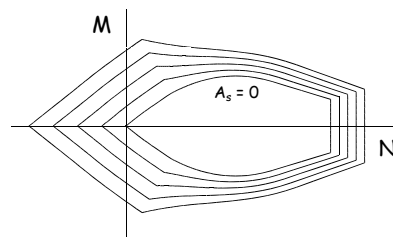
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

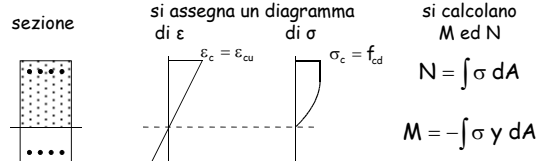
Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a ϵ_{\lim}

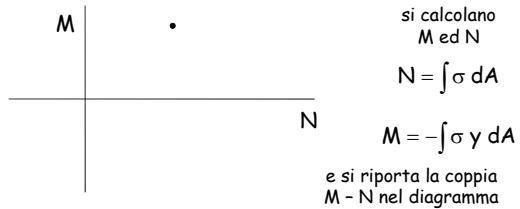
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a $\bar{\epsilon}_{cu}$

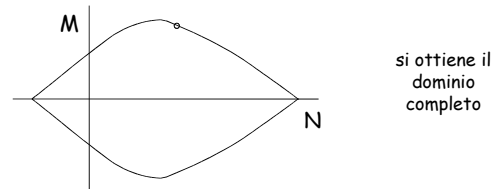
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - stato limite ultimo

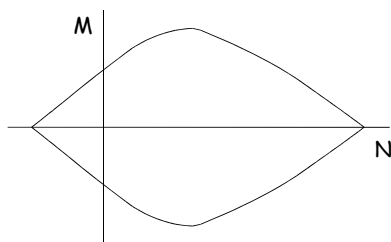
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a $\bar{\epsilon}_{cu}$

Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...

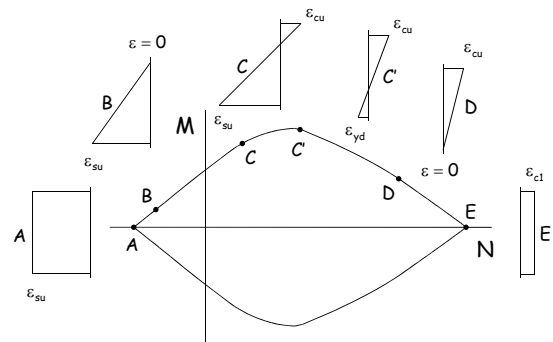


Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni

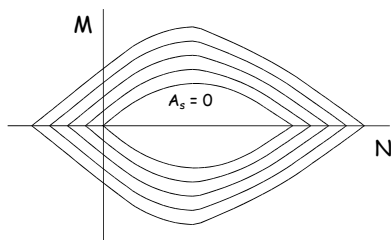


Domini di resistenza - stato limite ultimo



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

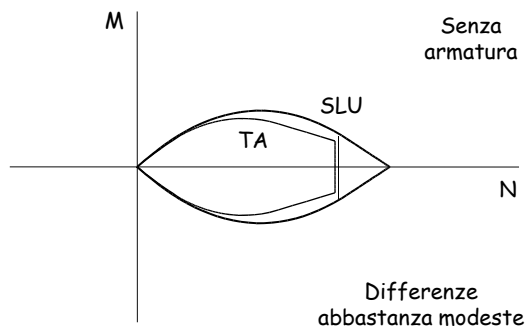


Domini: confronto tra TA e SLU

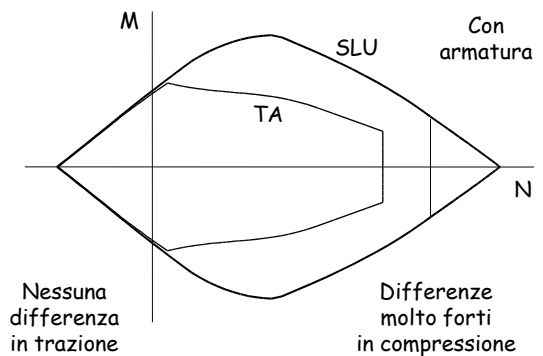
Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (circa 1.4 volte) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio x 1.4)

Domini: confronto tra TA e SLU



Domini: confronto tra TA e SLU

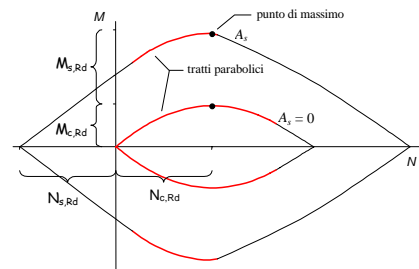


Progetto e verifica allo SLU con i domini M-N

(sezioni rettangolari, $A_s = A'_s$)

Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



Dominio M-N allo SLU

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$M = \beta b \times f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa X \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dX} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa X \right) = 0 \quad X = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \approx 0.60 h$$

Il punto di massimo è individuato da

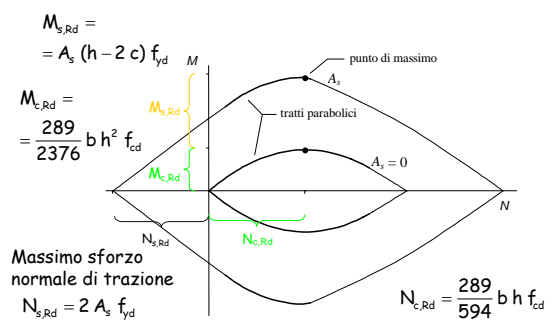
$$N = N_{c,Rd} \quad M = M_{c,Rd} + M_{s,Rd}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h f_{cd}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$$

Dominio M-N allo SLU



Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

Formulazione analitica

Momento resistente:

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \right]$$

con $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

con $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

Formule alternative

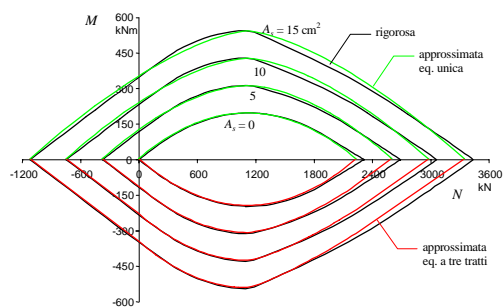
– per $N_{Ed} < 0$ (tensoflessione) $\frac{M_{Ed}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Ed}}{N_{s,Rd}} \leq 1$

– per $0 < N_{Ed} < N_{c,Rd}$ $\frac{M_{Ed} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left(\frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$

– per $N_{Ed} > N_{c,Rd}$ $\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left(\frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1$

con $n = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$

Confronto



Esempio - verifica a pressoflessione

Dati geometrici

Sezione 40x70

$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$

Materiale

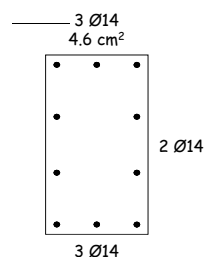
Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

Sollecitazioni

$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$



Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h f_{cd} = 0.486 \times 0.40 \times 0.70 \times 14.2 \times 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 1932 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 14.2 \times 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 338.4 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 391 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,Rd} = 361.2 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 391 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,Rd} = 112.0 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} = 1 + \frac{1932}{1932 + 361.2} = 1.842$$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left| \frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \right] =$$

$$= (338.4 + 112.0) \left[1 - \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} \right] =$$

$$= 408.5 \text{ kNm}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ Sezione verificata

Esempio - verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.842$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{400}{338.4 + 112.0} + \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} =$$

$$= 0.888 + 0.093 = 0.981 \leq 1$$

Sezione verificata

Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Ed,red} = M_{Ed} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi $A_s = \frac{M_{Ed,red}}{z f_{yd}}$

z è il braccio della coppia interna costituita dalle armature $z = h - 2c \cong 0.9 d$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per $0 \leq N_{Ed} \leq N_{c,Rd}$

Esempio - progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$

$$M_{Ed,red} = 400 - 338.4 \left[1 - \left(\frac{1300 - 1932}{1932} \right)^2 \right] = 97.8 \text{ kNm}$$

Armatura necessaria:

$$A_s = \frac{97.8}{0.9 \times 0.66 \times 391} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

Domini M-N
per flessione composta deviata

Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y-M_z-N

- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro

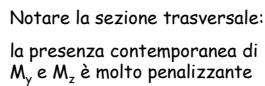
a) deformazioni ϵ b) tensioni σ

- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro



Dominio alle TA

Notare la sezione trasversale:
la presenza contemporanea di M_y e M_z è molto penalizzante



Dominio allo SLU

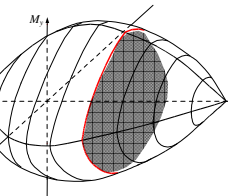
A 3D diagram of a dome-shaped structure, likely representing a shell element. The structure is defined by a series of curved lines. Three axes are shown: a vertical axis labeled M_y , a horizontal axis pointing to the right labeled N , and a diagonal axis pointing down and to the left labeled M_z . A dashed line represents the central axis of the dome.



Dominio allo SLU

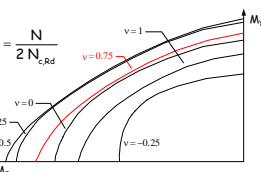


Dominio allo SLU



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

Consiglio:
usare $p = q = 1.5$



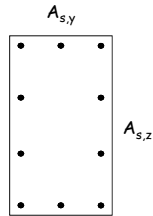
Consiglio:
usare $p = q = 1.5$



Considerazioni

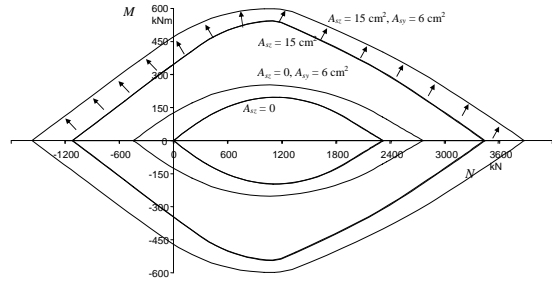
Nel calcolare il momento resistente $M_{Rd,y}$ si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



Considerazioni

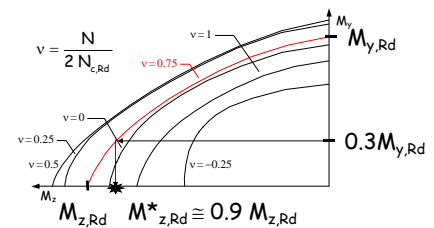
Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$

con $m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$

Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni, e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata