Workshop

Progetto di edifici antisismici con struttura in c.a.

Catania

aula IT del DAU

10-20 settembre 2013

03 – Risposta elastica di schema a un grado di libertà

In che modo valutiamo
l'effetto del sisma su una struttura?

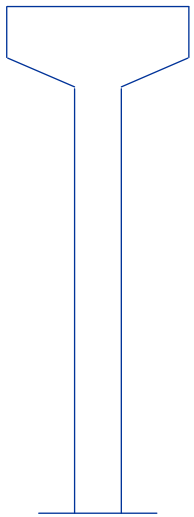
Risposta sismica

Schemi a un grado di libertà in campo elastico

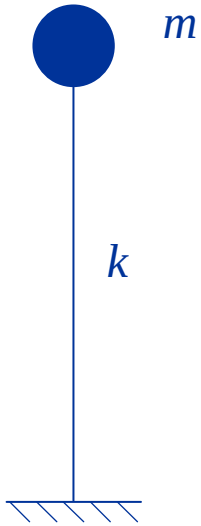
Struttura a un grado di libertà

Serbatoio pensile

Foto



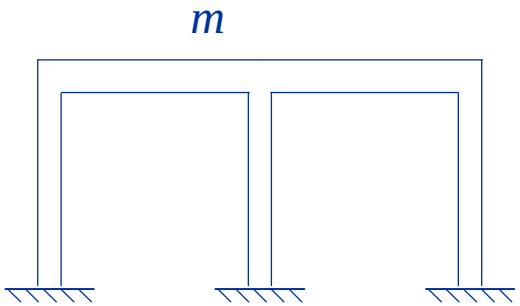
Disegno schematico



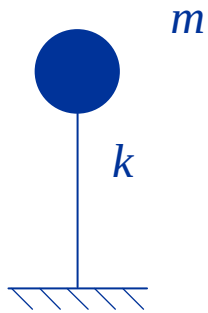
Modello di calcolo

Struttura a un grado di libertà

Telaio monopiano



Disegno schematico



Modello di calcolo

Oscillazioni libere

Esempio: altalena

Spostando il sedile dell'altalena e poi lasciandolo libero, esso oscilla con un periodo T ben preciso

Oscillazioni libere

Esempio: altalena

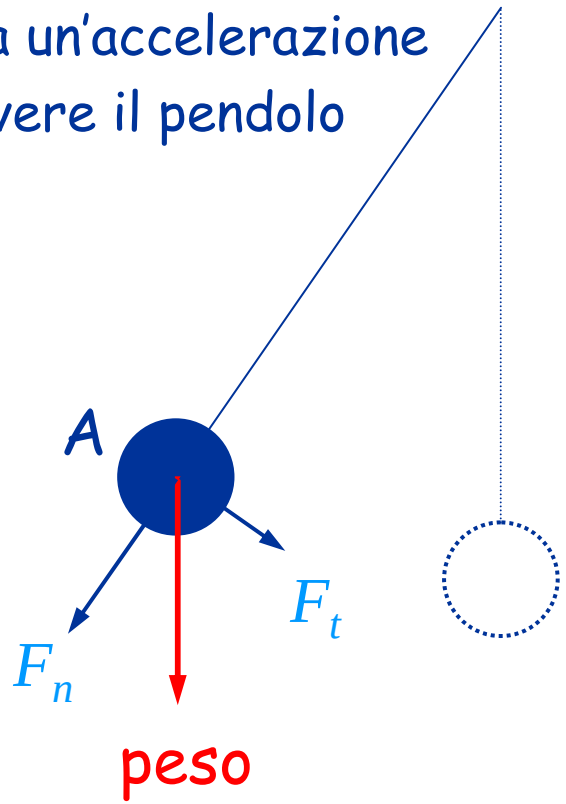
Spostando il sedile dell'altalena e poi lasciandolo libero, esso oscilla con un periodo T ben preciso

Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

F_n assorbita dall'asta del pendolo

F_t che provoca un'accelerazione che fa muovere il pendolo

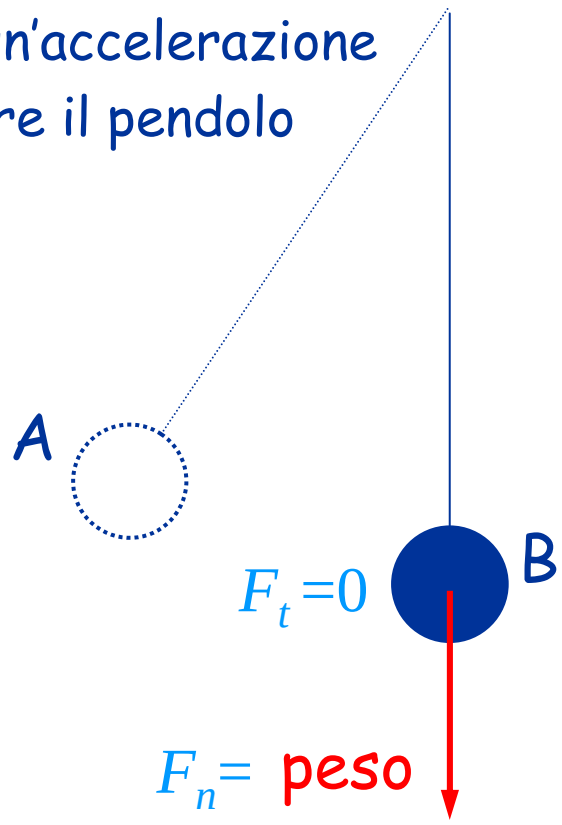


Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

F_n assorbita dall'asta del pendolo

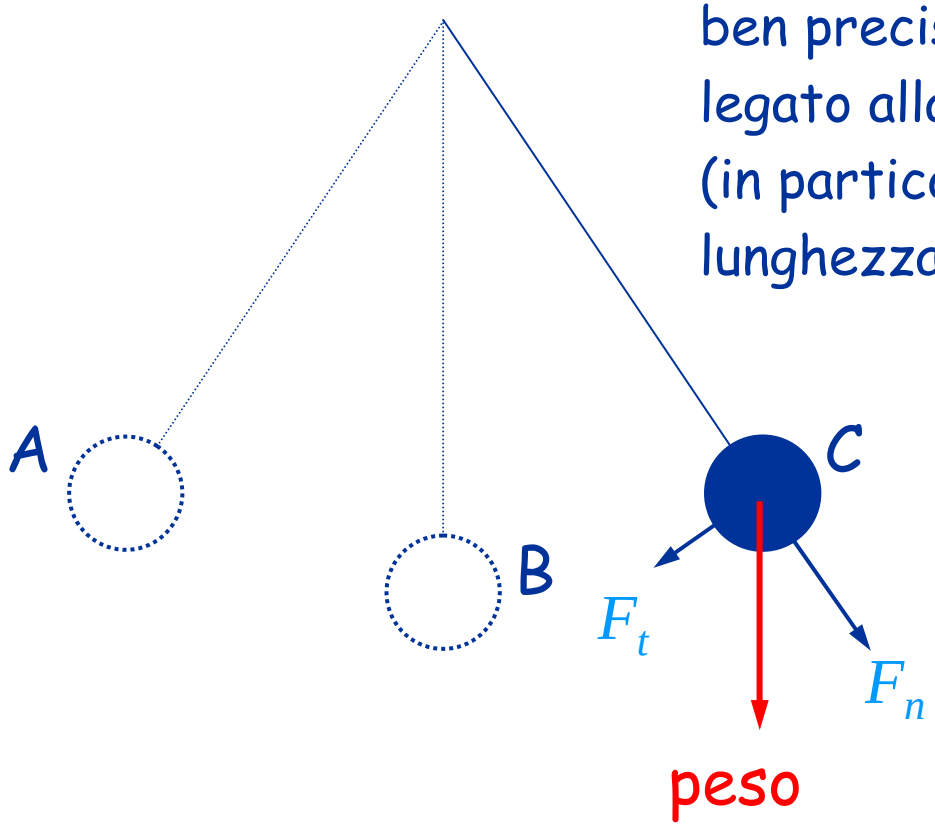
F_t che provoca un'accelerazione che fa muovere il pendolo



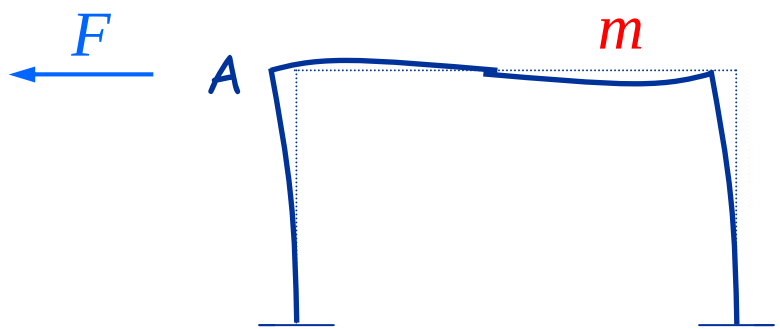
B) In questa posizione la velocità è massima (quando inizia a risalire rallenta) ma l'accelerazione è nulla perché $F_t = 0$

Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

Il pendolo oscilla con un periodo T ben preciso, legato alla geometria (in particolare, alla lunghezza dell'asta)



Oscillazioni libere
telaio monopiano

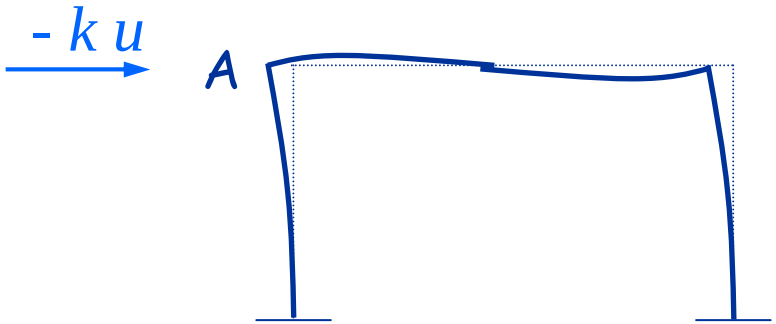


A) Per deformare il telaio in questa posizione occorre applicare una forza F, uguale ed opposta alla forza elastica che tende a riportare il telaio alla posizione indeformata (forza di richiamo elastico).

Equilibrio statico

$$F = k\ u$$

Oscillazioni libere
telaio monopiano



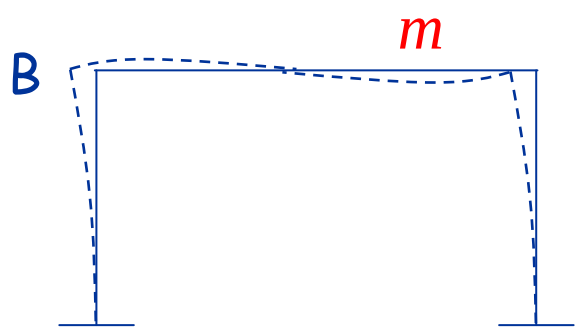
Quando si lascia libero il telaio, agisce solo la forza di richiamo elastico, che provoca un'accelerazione.

Equilibrio dinamico

$$-k\,u = m\,a \qquad\qquad m\,\ddot{u} + k\,u = 0$$

Oscillazioni libere

telaio monopiano



Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + k\,u = 0$$

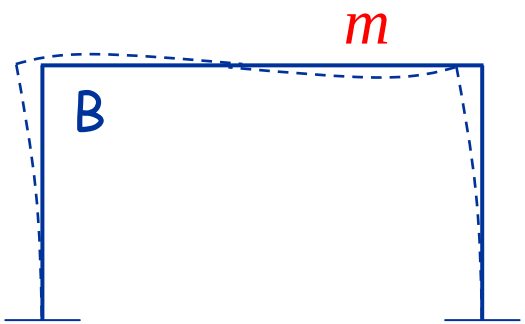
equilibrio dinamico

L'equazione differenziale può essere risolta analiticamente.

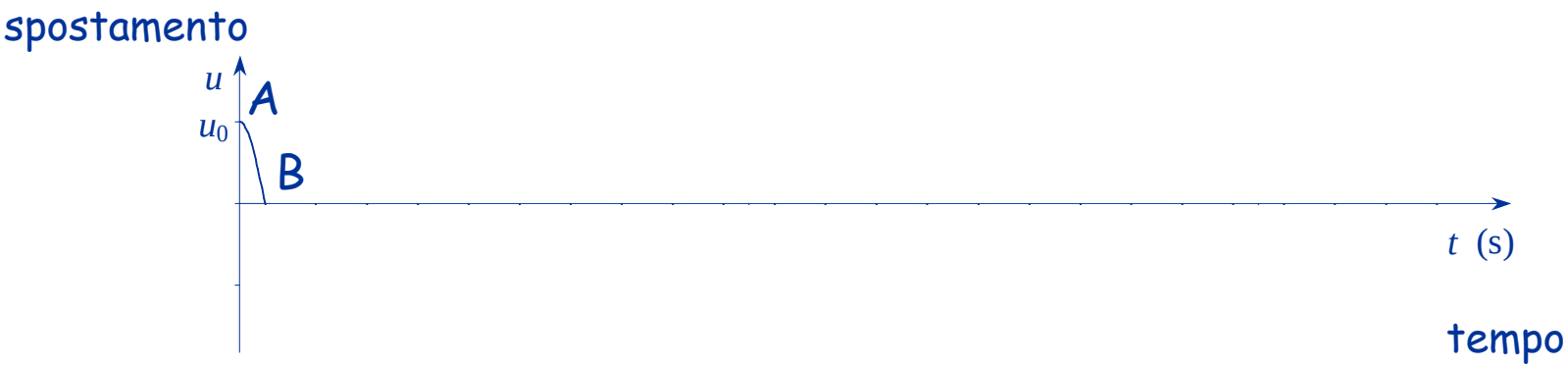
La soluzione è una funzione trigonometrica (seno, coseno)

Oscillazioni libere

telaio monopiano

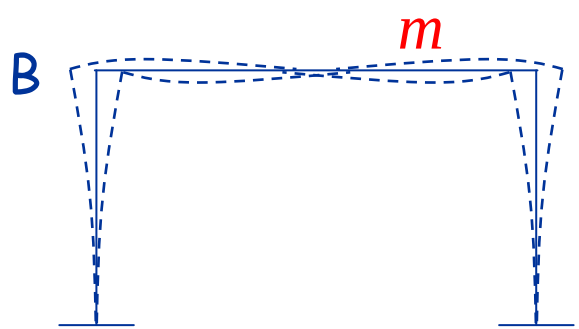


B) Tornato nella posizione indeformata, la velocità è massima e l'accelerazione nulla (come la forza di richiamo elastico).



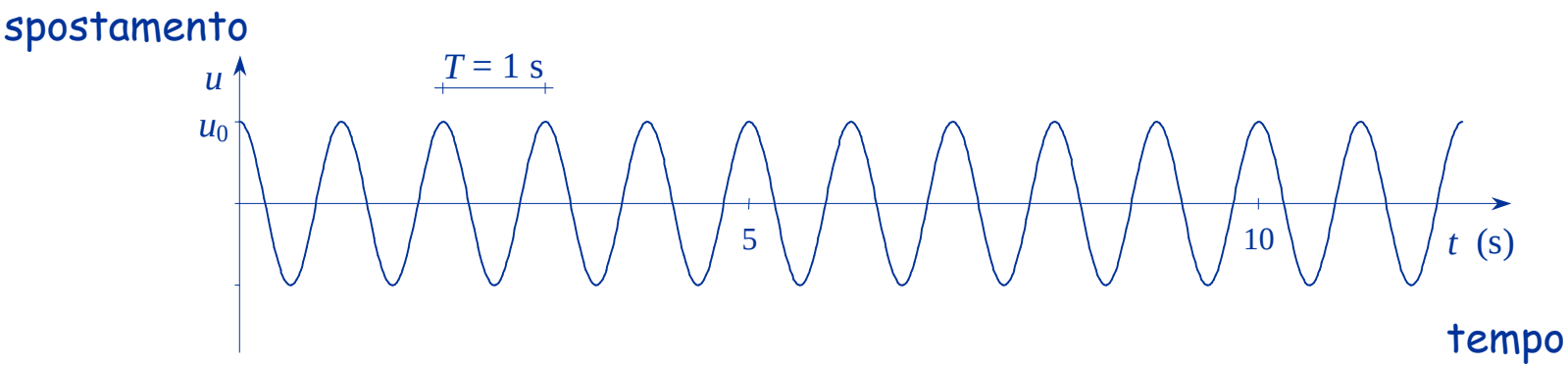
Oscillazioni libere

telaio monopiano

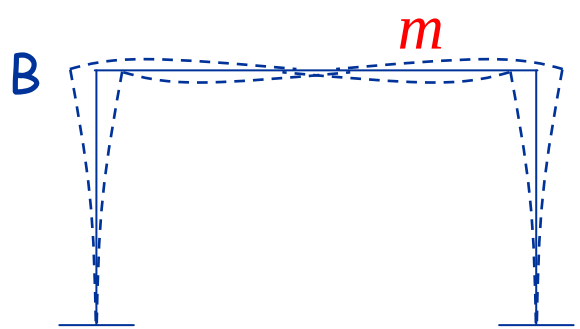


Il telaio oscilla con un periodo ben preciso, legato alla massa ed alla rigidezza del telaio

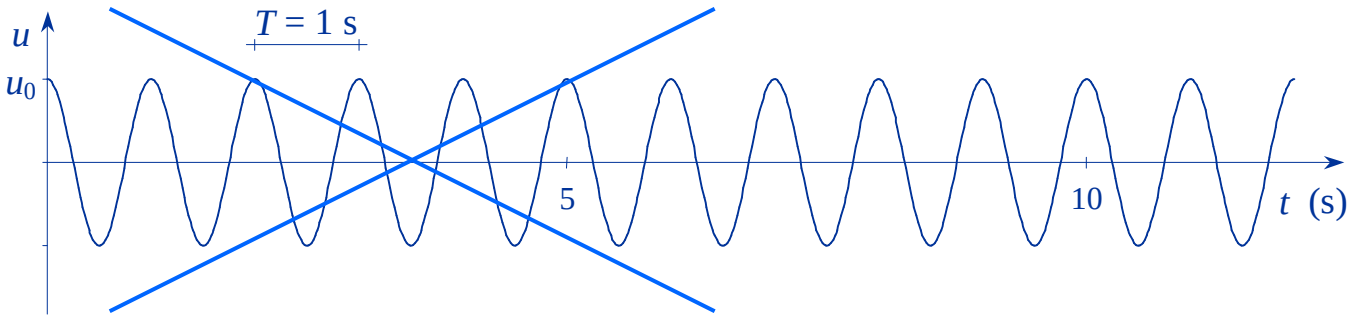
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



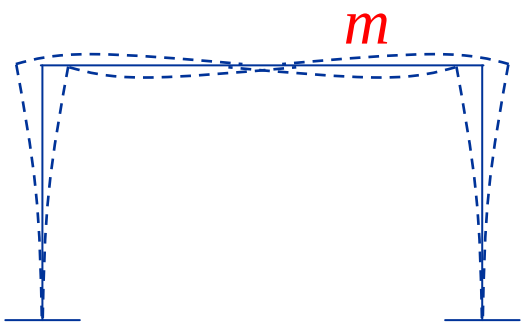
Oscillazioni libere con smorzamento
telaio monopiano



In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)



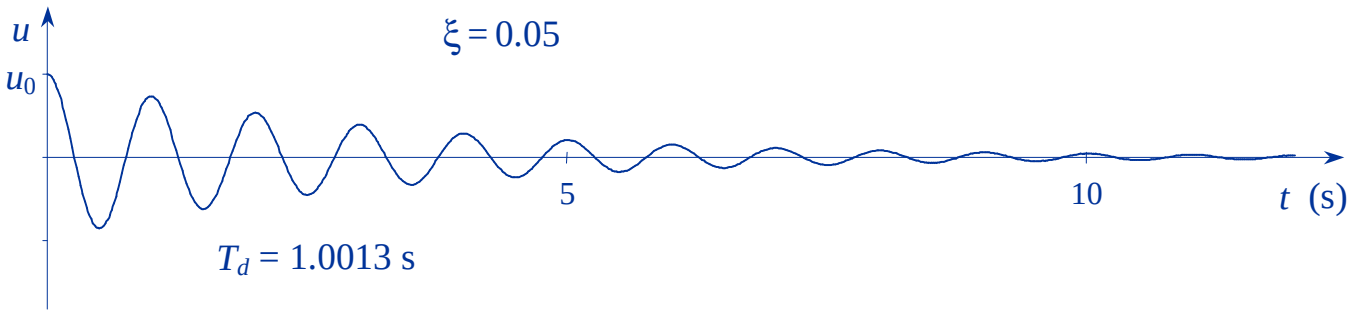
Oscillazioni libere con smorzamento
telaio monopiano



Equazione del moto:

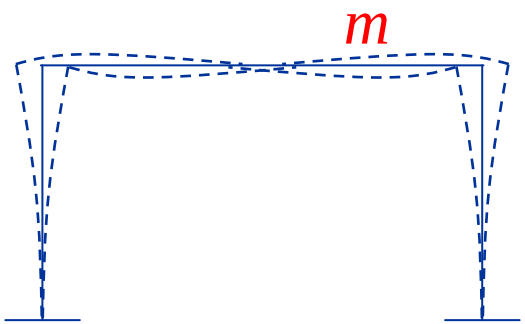
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

Lo smorzamento è legato alla variazione di spostamento (velocità)



Oscillazioni libere con smorzamento

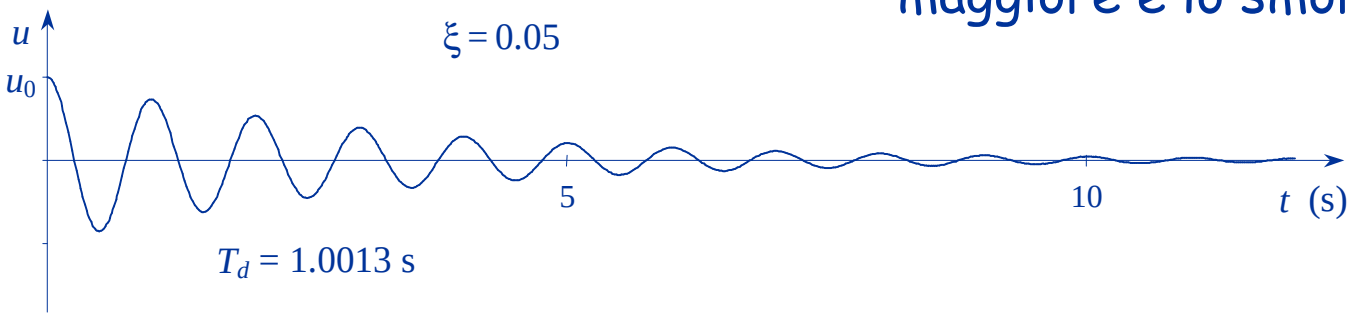
telaio monopiano



Equazione del moto:

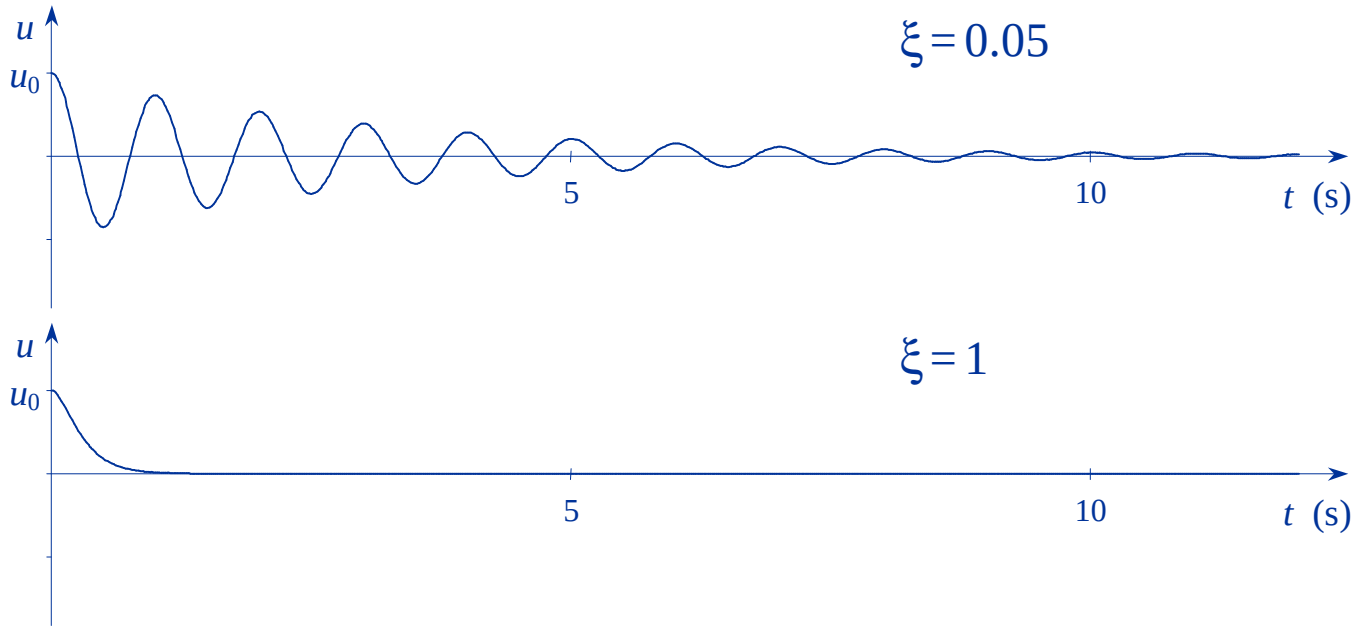
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



Oscillazioni libere con smorzamento

telaio monopiano



Si indica col termine "smorzamento critico" quel valore per il quale il sistema raggiunge lo stato di quiete senza oscillare

Lo smorzamento viene di solito indicato come percentuale ξ dello smorzamento critico

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k\ m}}$$

Smorzamento – negli edifici

Dipende da:

- Elementi non strutturali (tramezzi, tompagni) molto
- Non linearità del materiale poco

Edifici in cemento armato, con tramezzi in muratura:

- Si può assumere un valore di smorzamento percentuale $\xi = 0.05$

Edifici in acciaio, con tramezzatura leggera:

- È consigliabile usare un valore minore di $\xi = 0.05$

Edifici isolati alla base, con isolatori in gomma:

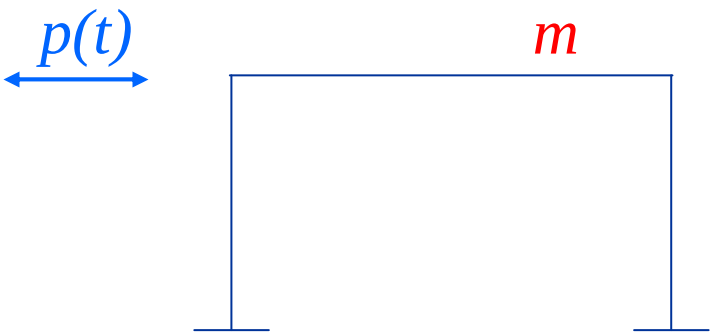
- Si può usare un valore maggiore di $\xi = 0.05$

Oscillazioni forzate

Esempio: altalena

Dando (in maniera periodica) una piccola spinta al sedile dell'altalena,
le oscillazioni si amplificano sempre di più

Oscillazioni forzate
telaio monopiano



Equazione del moto:

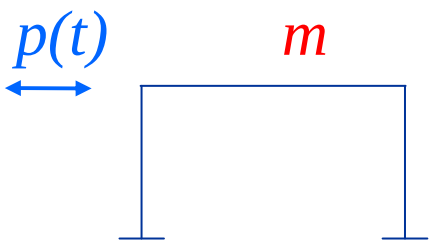
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = p(t)$$

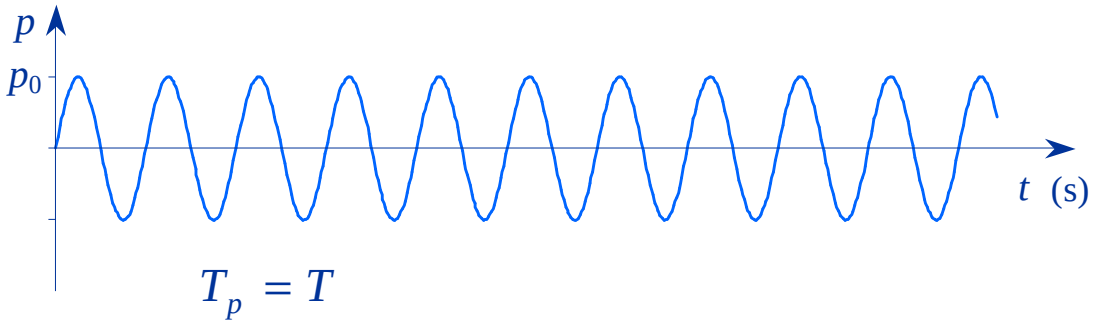
Nell'equazione del moto compare un nuovo termine (l'azione forzante)

Se la forzante è armonica (seno, coseno) è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale

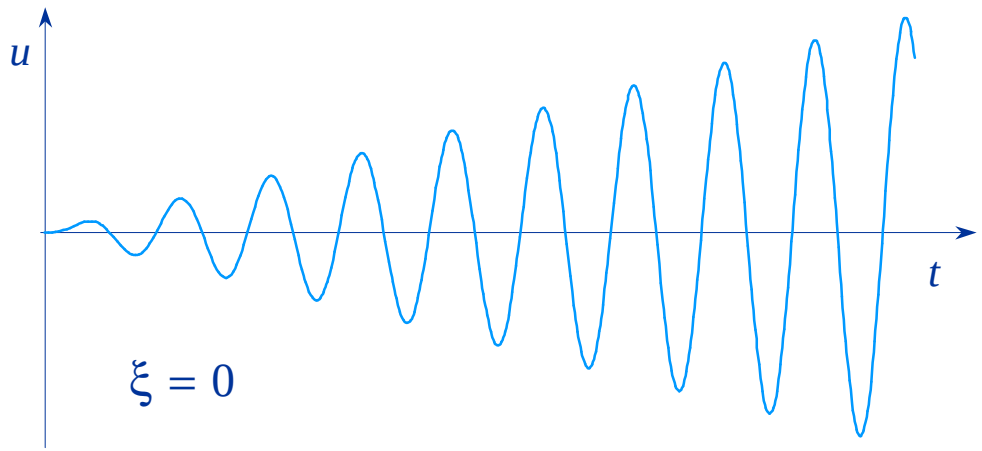
Oscillazioni forzate

telaio monopiano, forzante armonica (periodica)



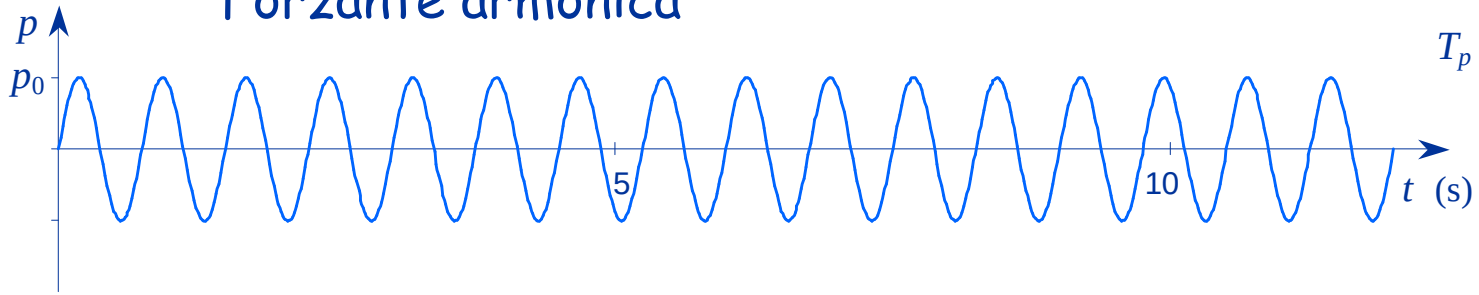


Se il periodo della forzante coincide con quello del sistema, in assenza di smorzamento il moto si amplifica sempre più



risonanza

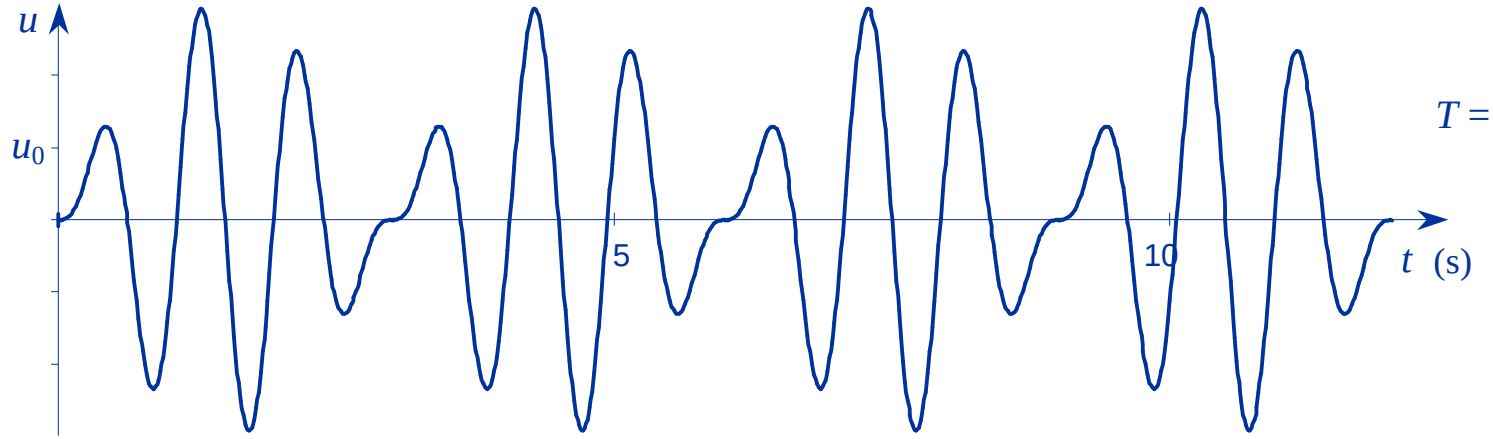
Forzante armonica



$T_p = 0.75$ s

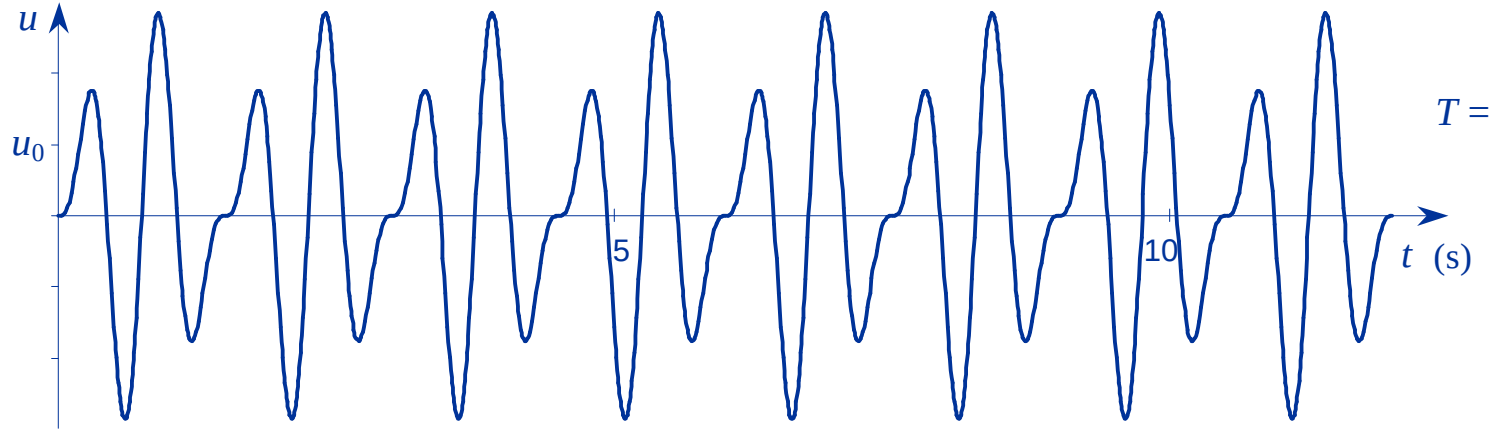
Risposta, senza smorzamento

$T_p \neq T$



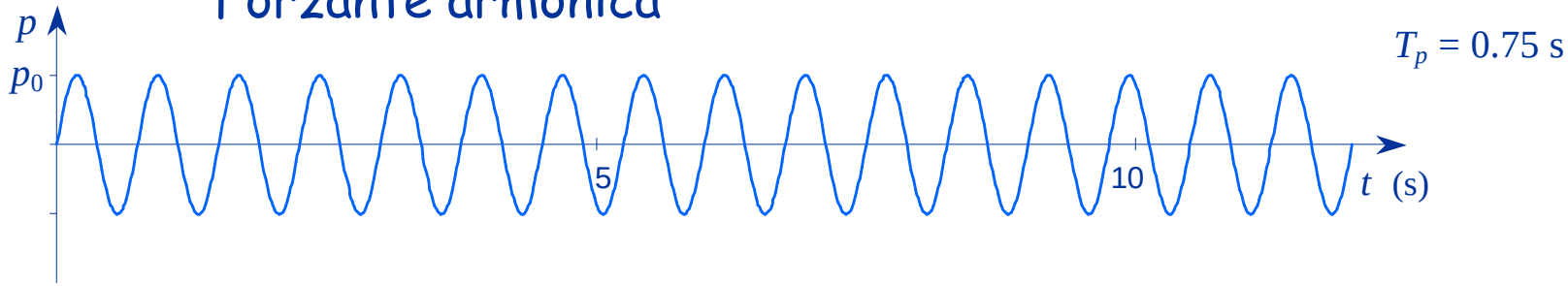
$T = 1.0$ s

— moto totale



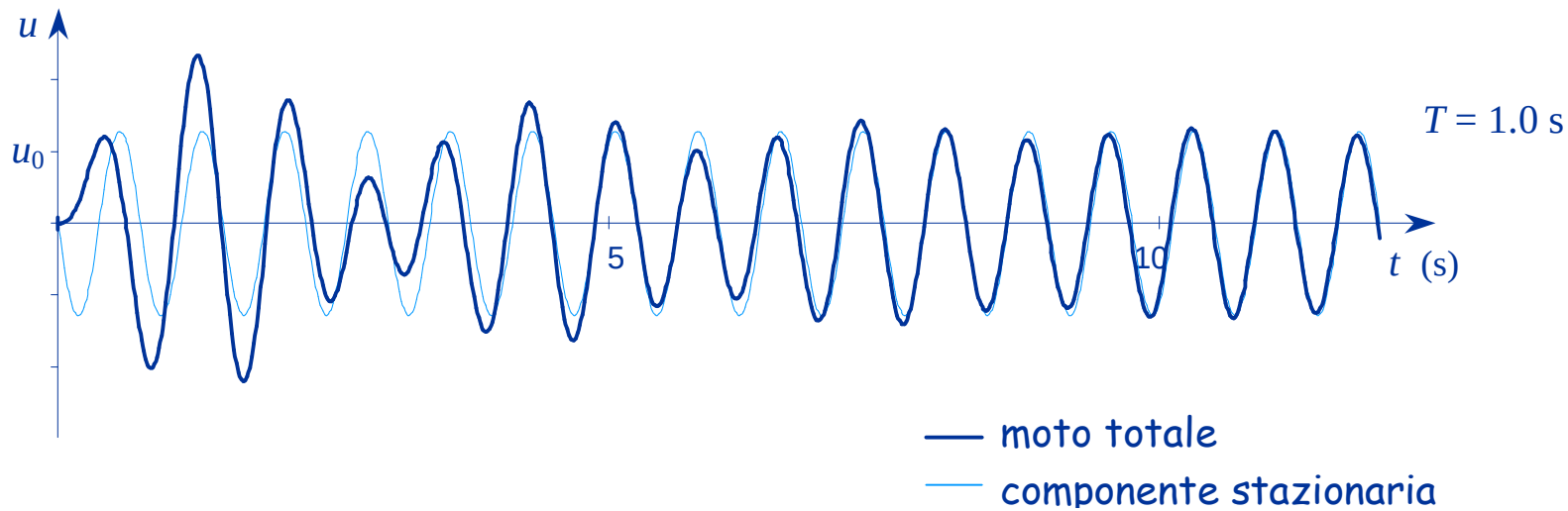
$T = 0.5$ s

Forzante armonica



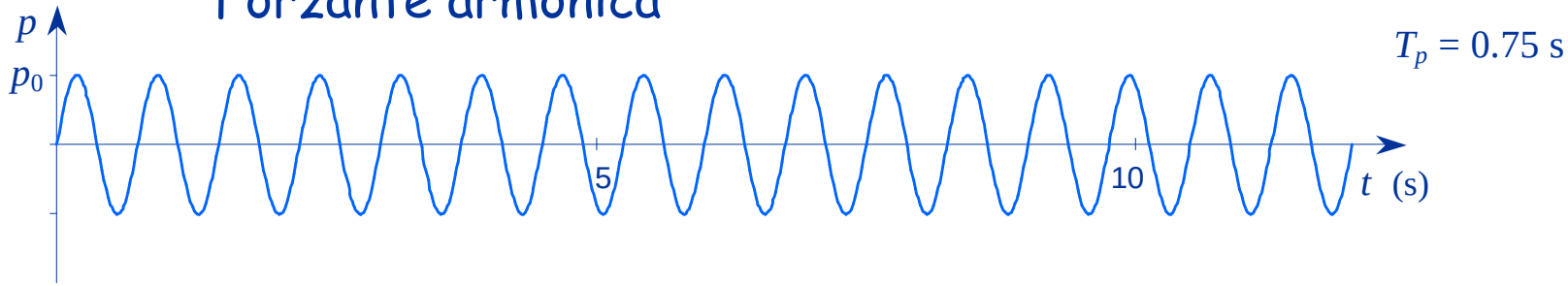
Risposta, con smorzamento $\xi = 5\%$

$T_p \neq T$



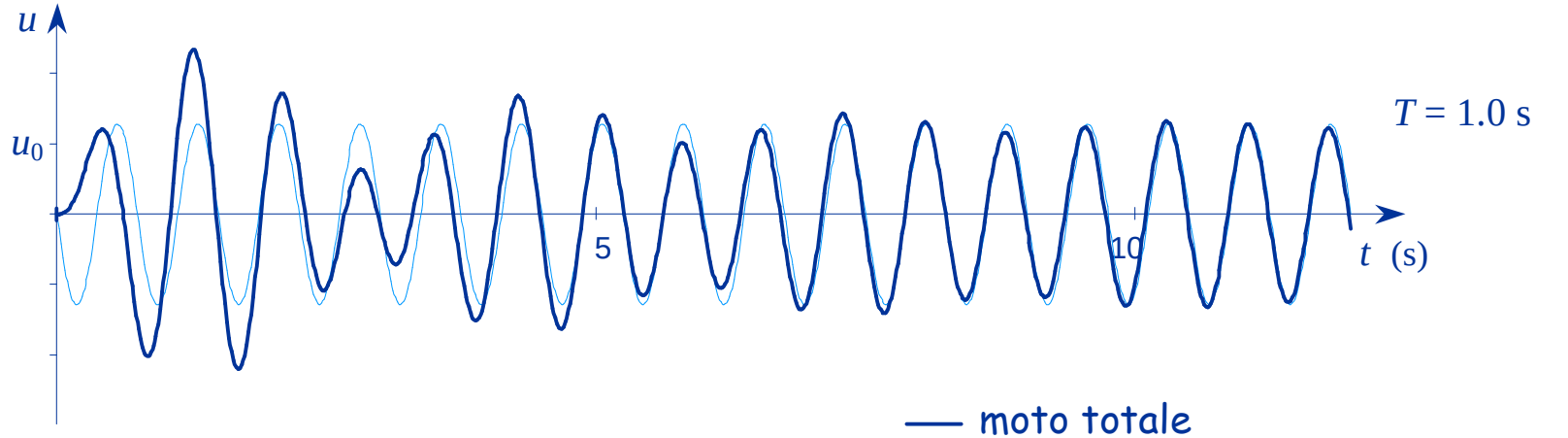
Il moto è somma di una componente armonica che ha lo stesso periodo della forzante ed ampiezza costante(componente stazionaria)
e di una componente che ha lo stesso periodo del sistema ma ampiezza che si riduce man mano (componente transitoria)

Forzante armonica



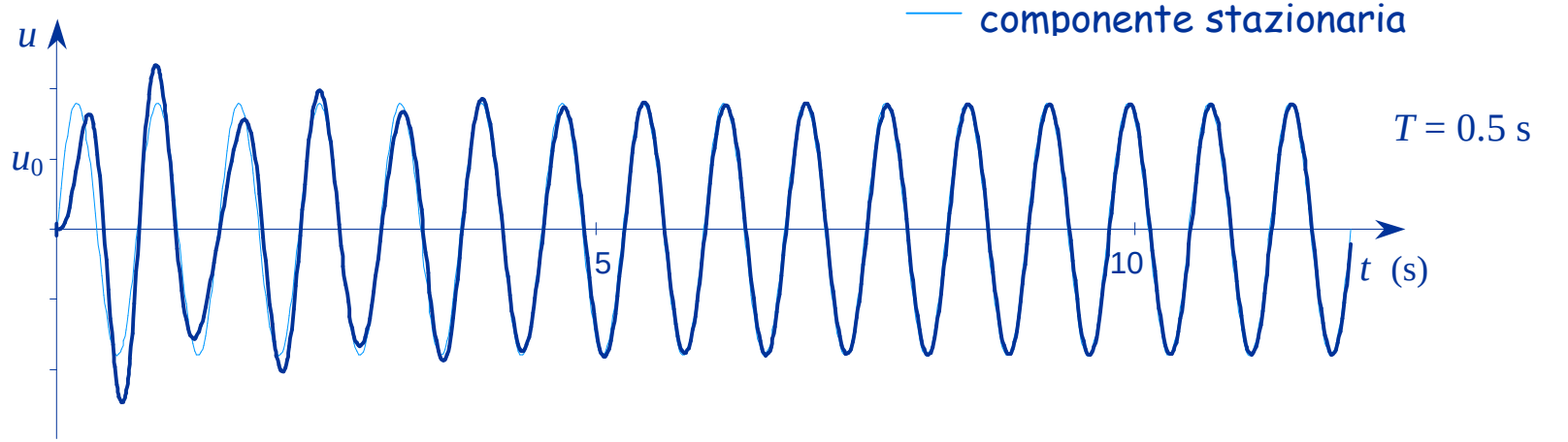
Risposta, con smorzamento $\xi = 5\%$

$T_p \neq T$

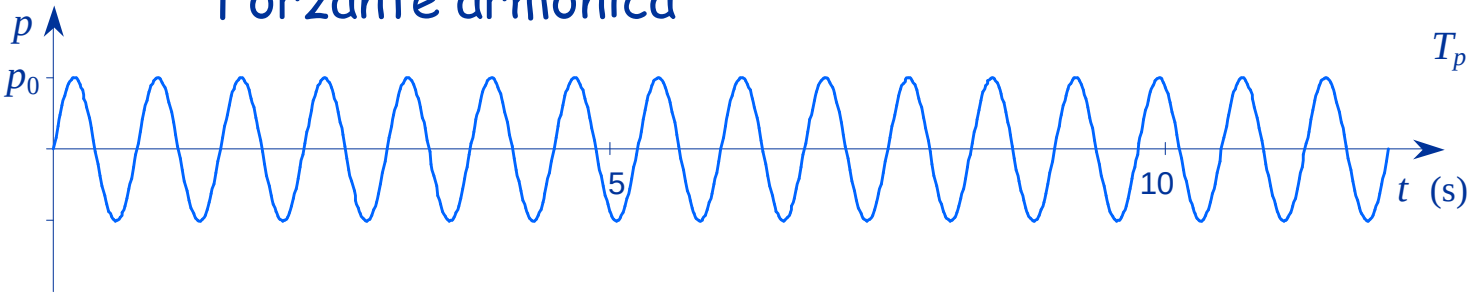


moto totale

componente stazionaria

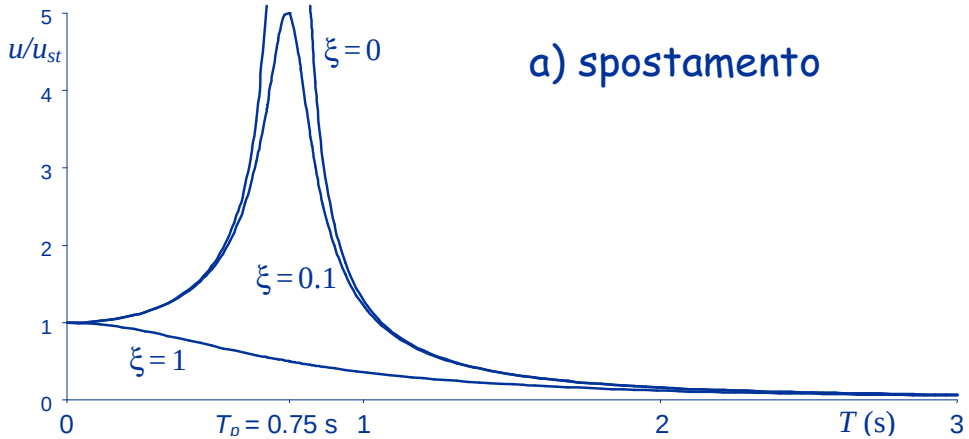


Forzante armonica

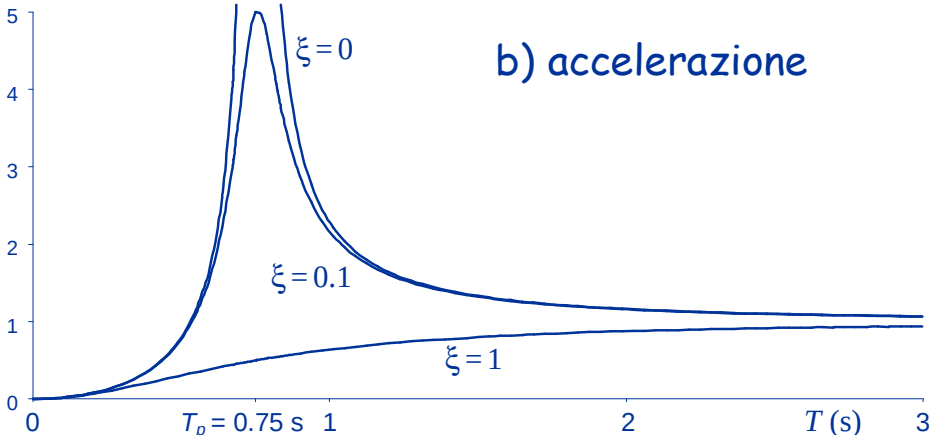


$T_p = 0.75$ s

Il moto viene amplificato o ridotto, in funzione del periodo proprio e dello smorzamento del sistema

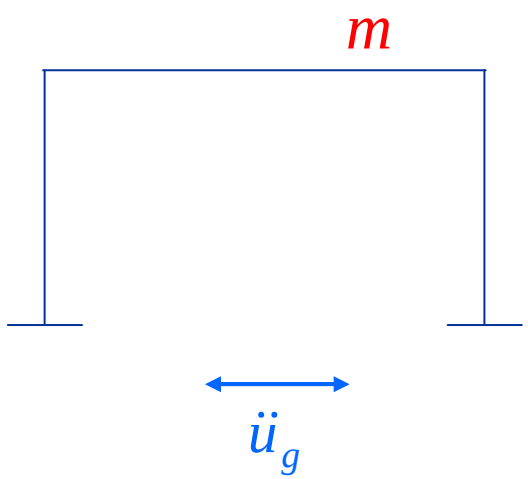


a) spostamento



b) accelerazione

Oscillazioni forzate
(moto del terreno)



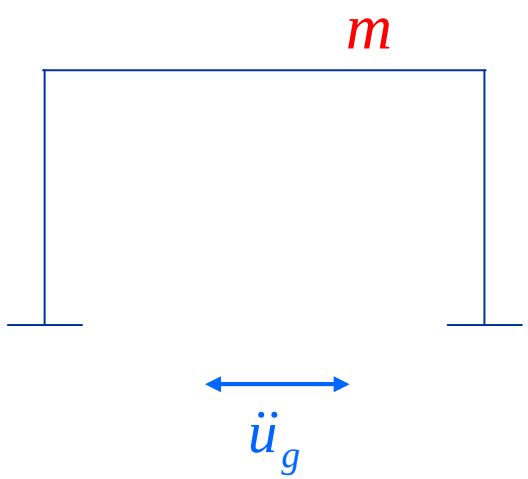
Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\,\ddot{u}_g$$

Cambia (formalmente)
il termine noto
nell'equazione del moto

Il problema è sostanzialmente
identico a quello del moto con
forzante applicata al traverso

Oscillazioni forzate
(moto del terreno)

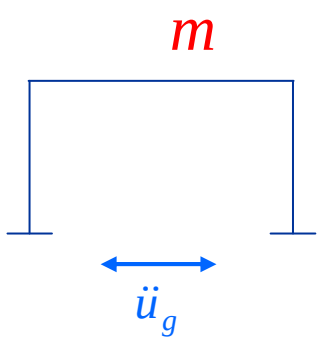


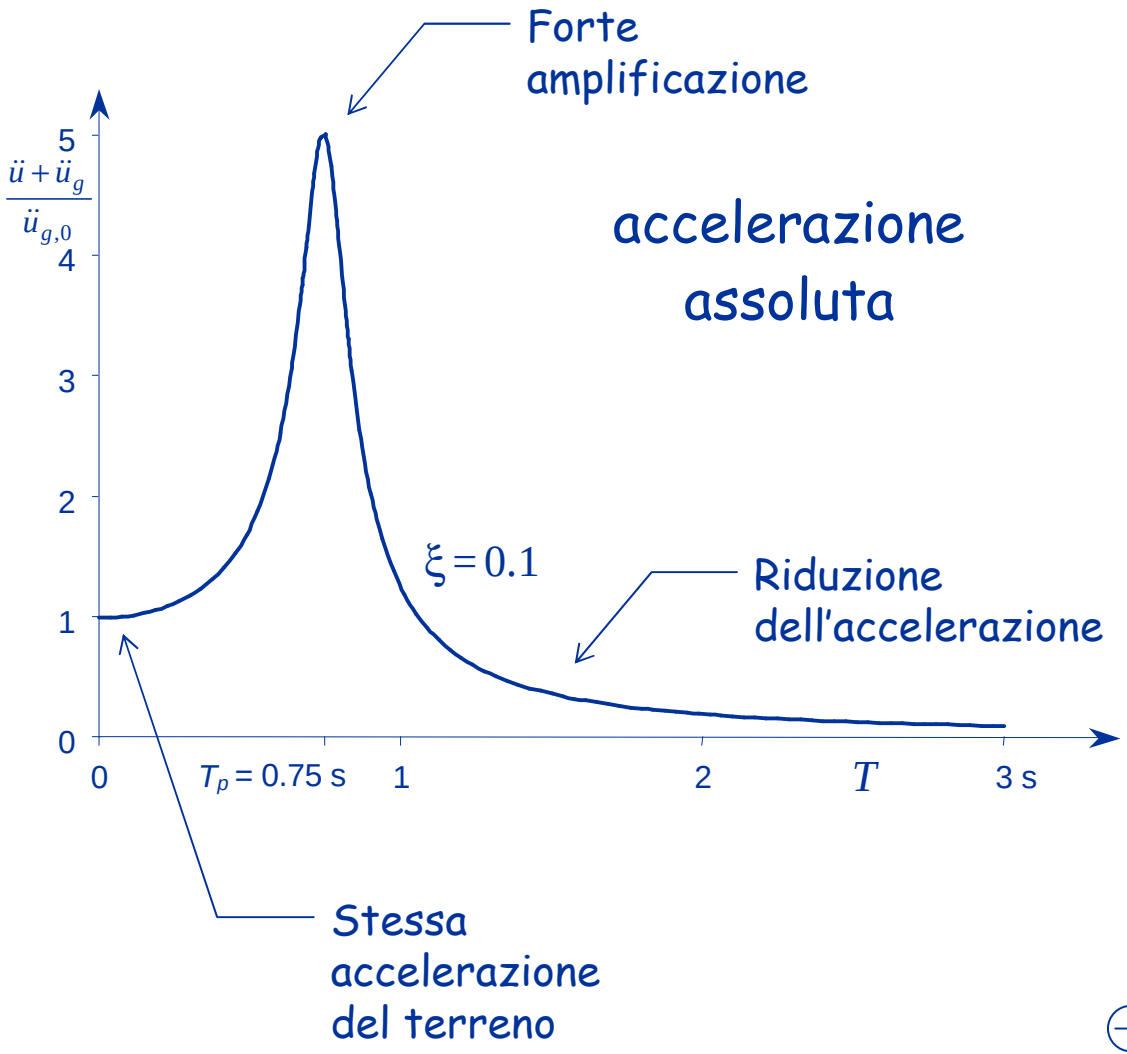
Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\,\ddot{u}_g$$

Se la forzante è armonica (seno, coseno) è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale

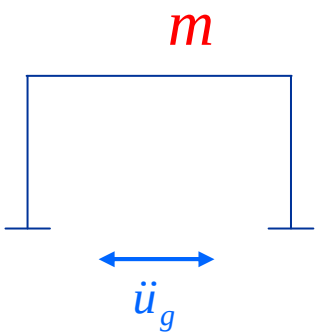
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - armonico)

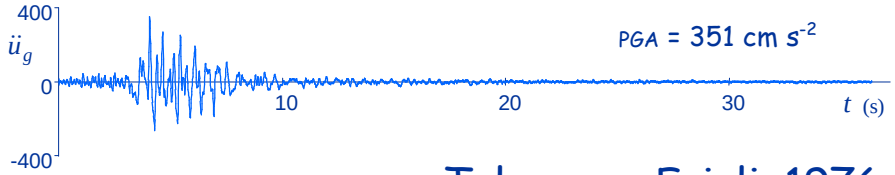




Si noti, in particolare, l'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio

Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





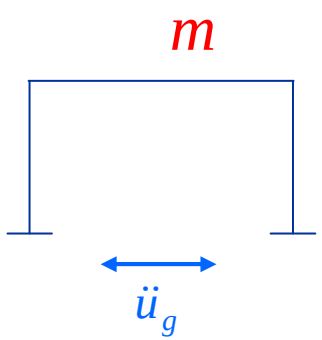
Tolmezzo, Friuli, 1976

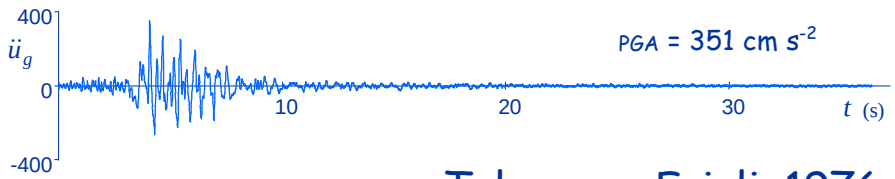
Input sismico: accelerogramma

Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\,\ddot{u}_g$$

Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





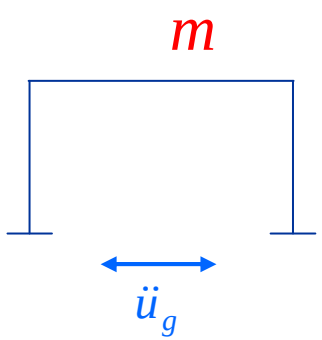
Tolmezzo, Friuli, 1976

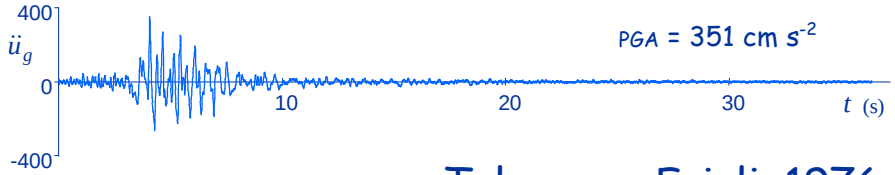
È possibile determinare numericamente la risposta ad un accelerogramma

Noti i valori di $u, \dot{u}, \ddot{u}$ in un certo istante t_1 ed il valore di $\ddot{u}_g$ tra t_1 e $t_1+\Delta t$ si possono ricavare i valori di $u, \dot{u}, \ddot{u}$ nell'istante $t_1+\Delta t$

Si ottiene la risposta nel tempo (time history)

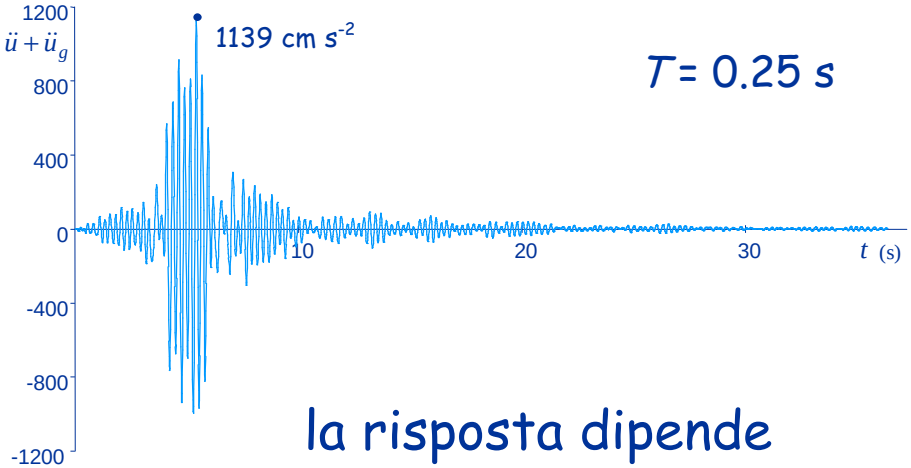
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





Tolmezzo, Friuli, 1976

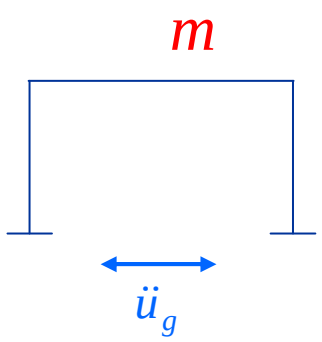
È possibile determinare numericamente la risposta ad un accelerogramma

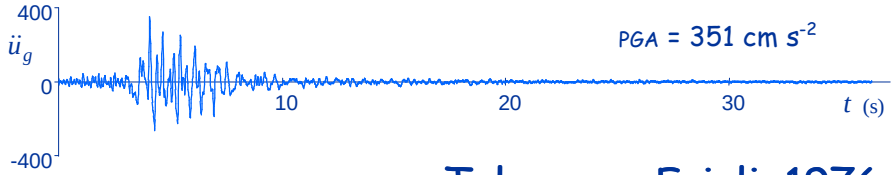


T = 0.25 s

la risposta dipende dal periodo T dell'oscillatore

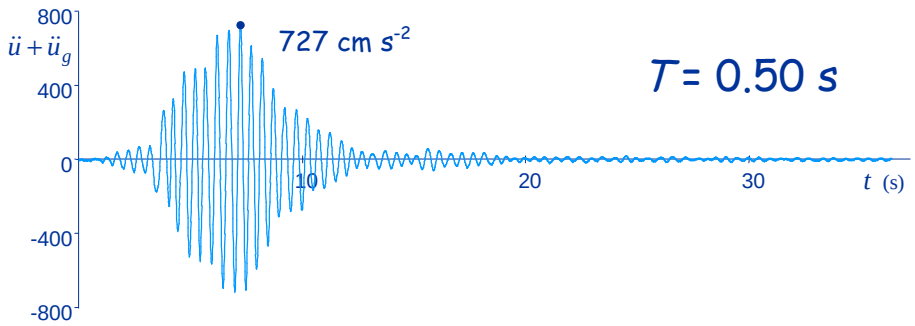
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





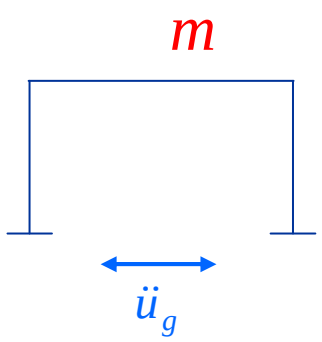
Tolmezzo, Friuli, 1976

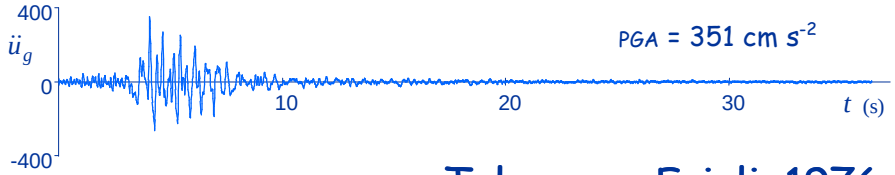
Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



T = 0.50 s

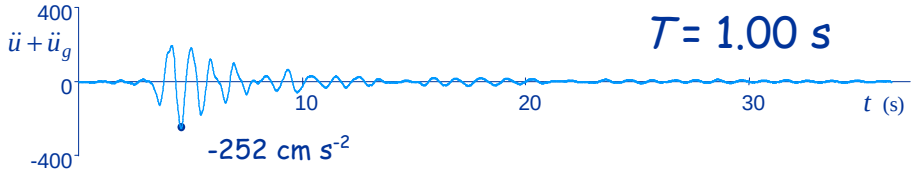
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





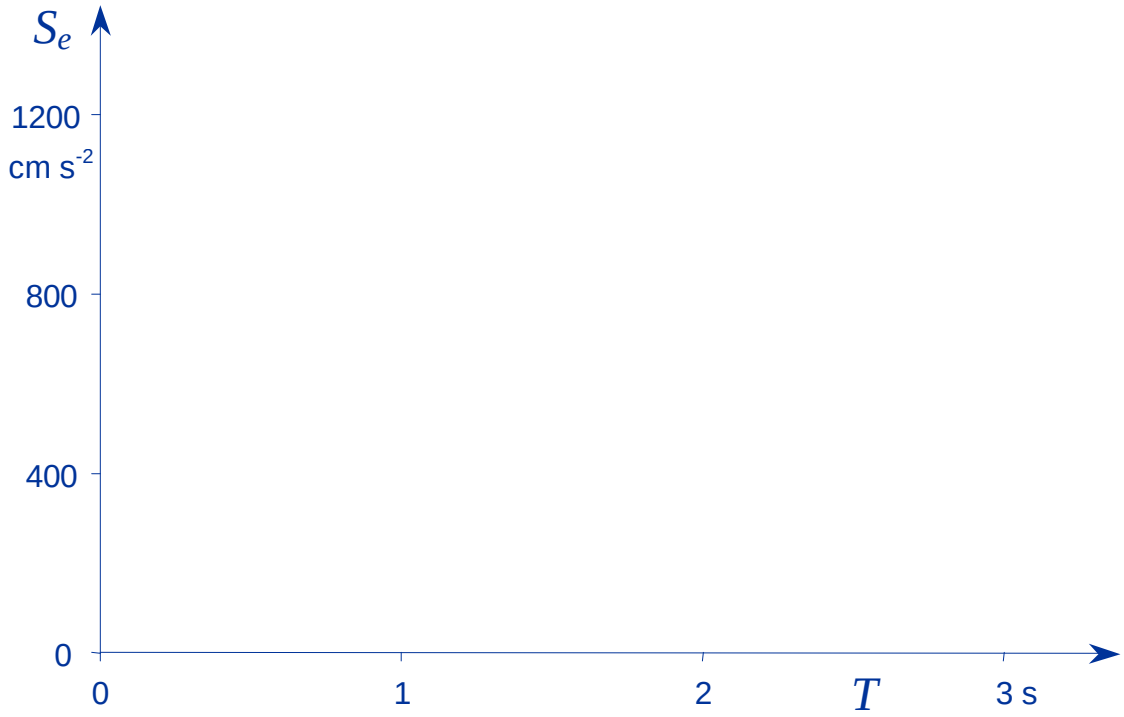
Tolmezzo, Friuli, 1976

Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

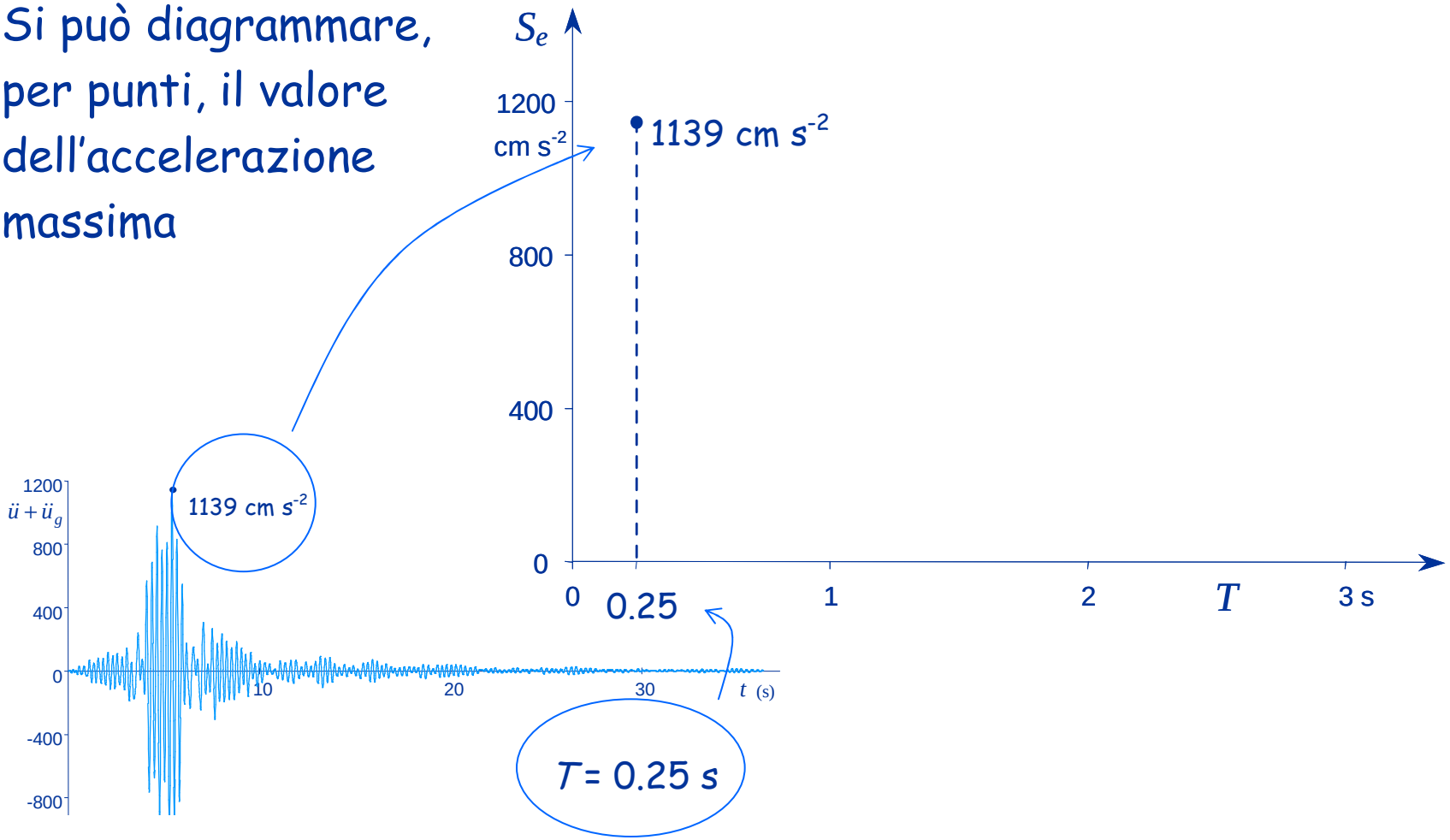
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima per schemi con periodo diverso



In genere ci interessa la risposta massima, non quello che succede istante per istante

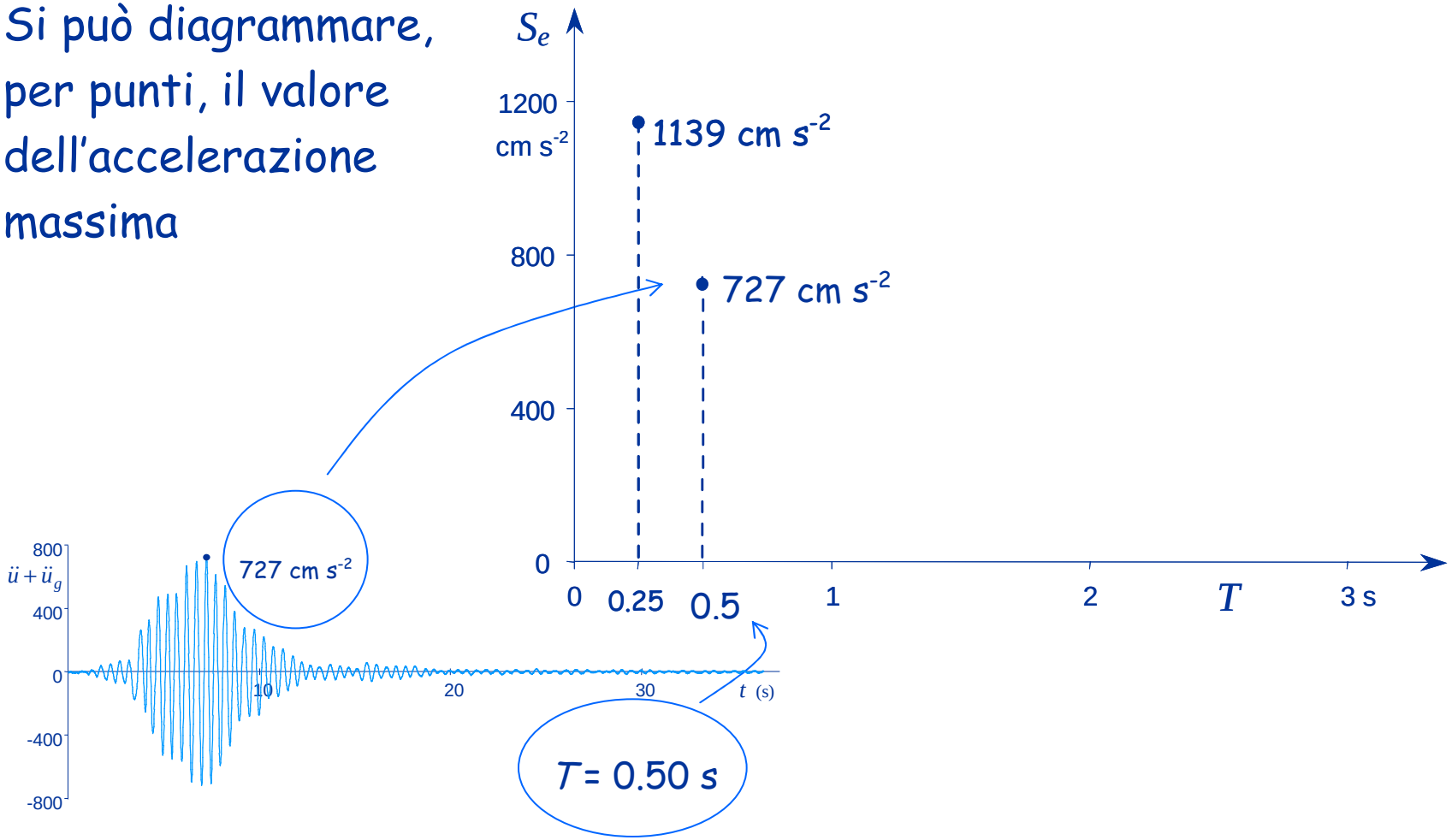
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



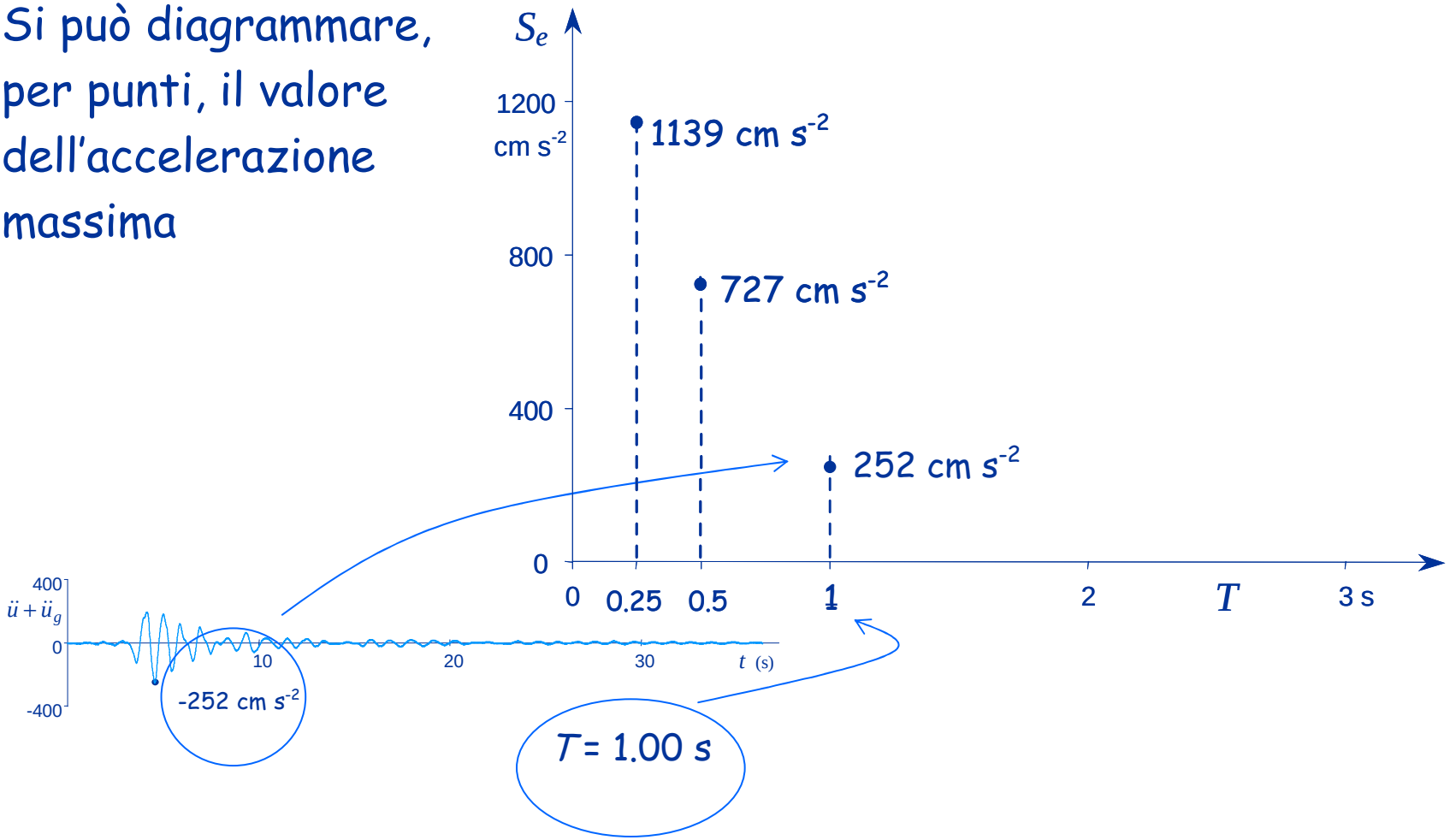
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

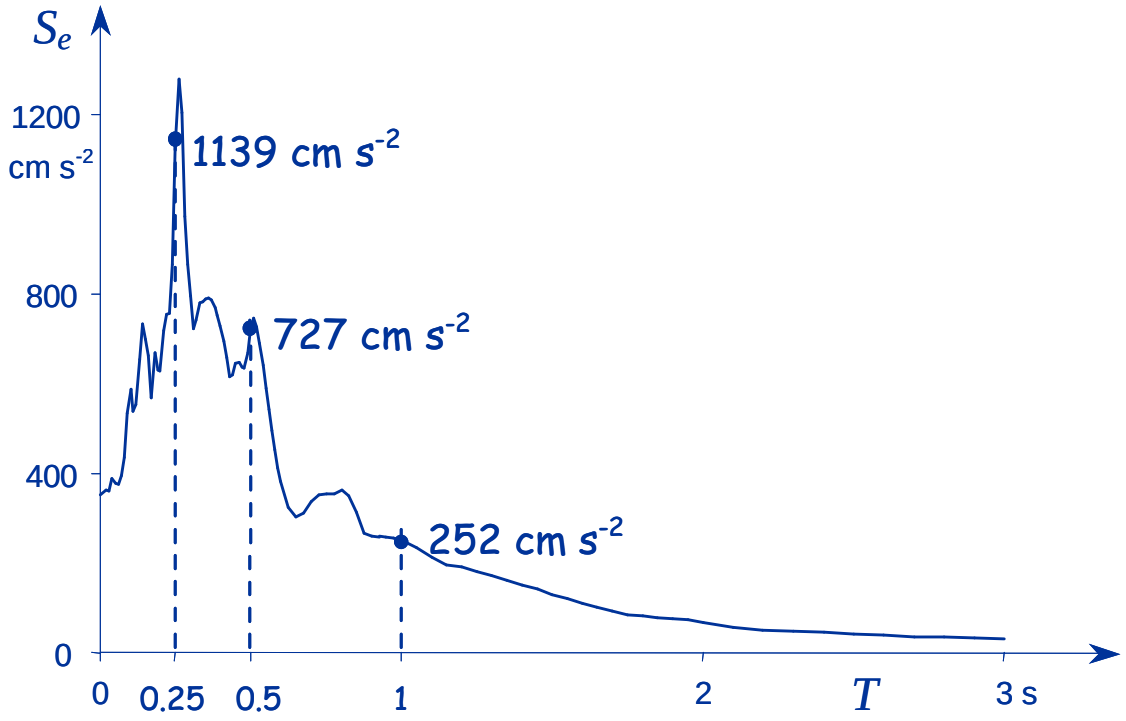
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate

Spettro di risposta

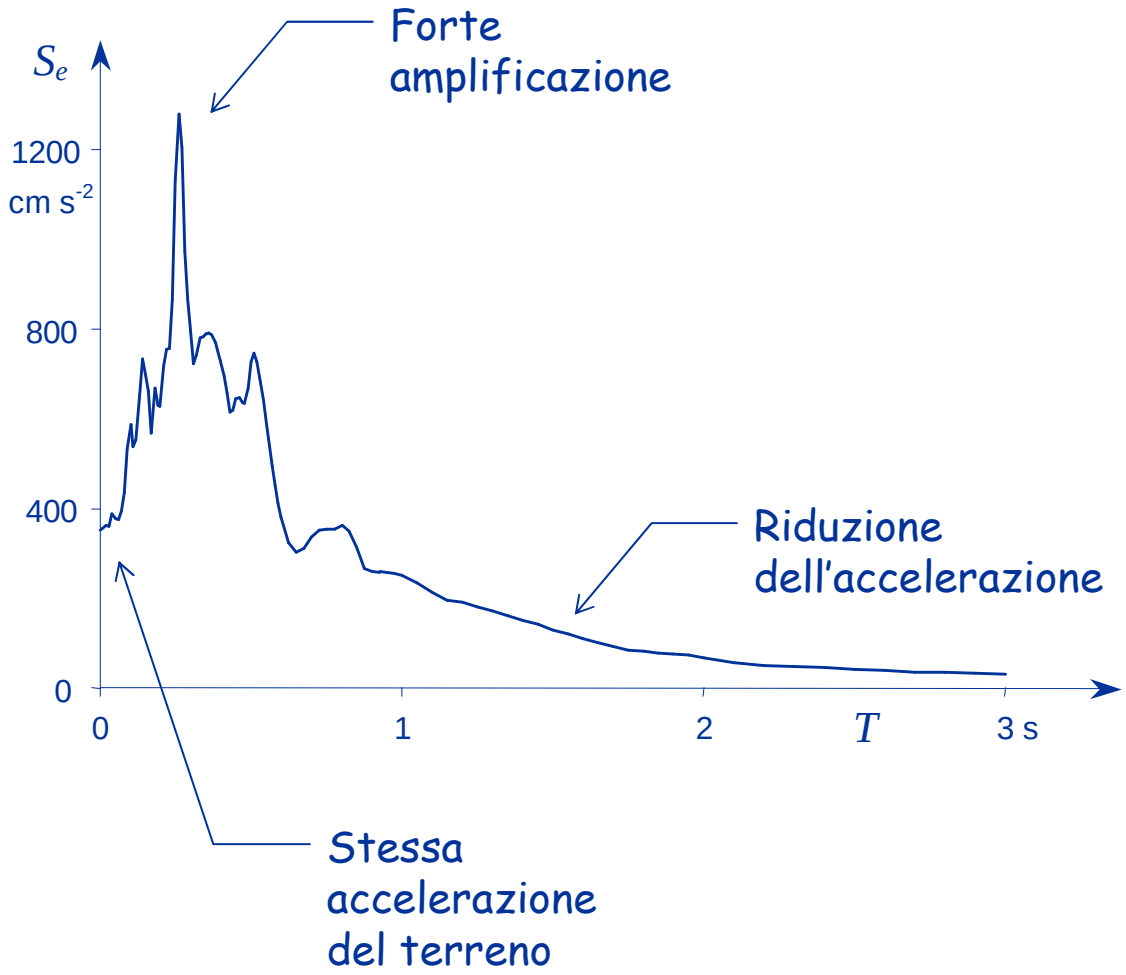
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Il diagramma ottenuto unendo i vari punti viene detto "spettro di risposta" (in termini di accelerazione)

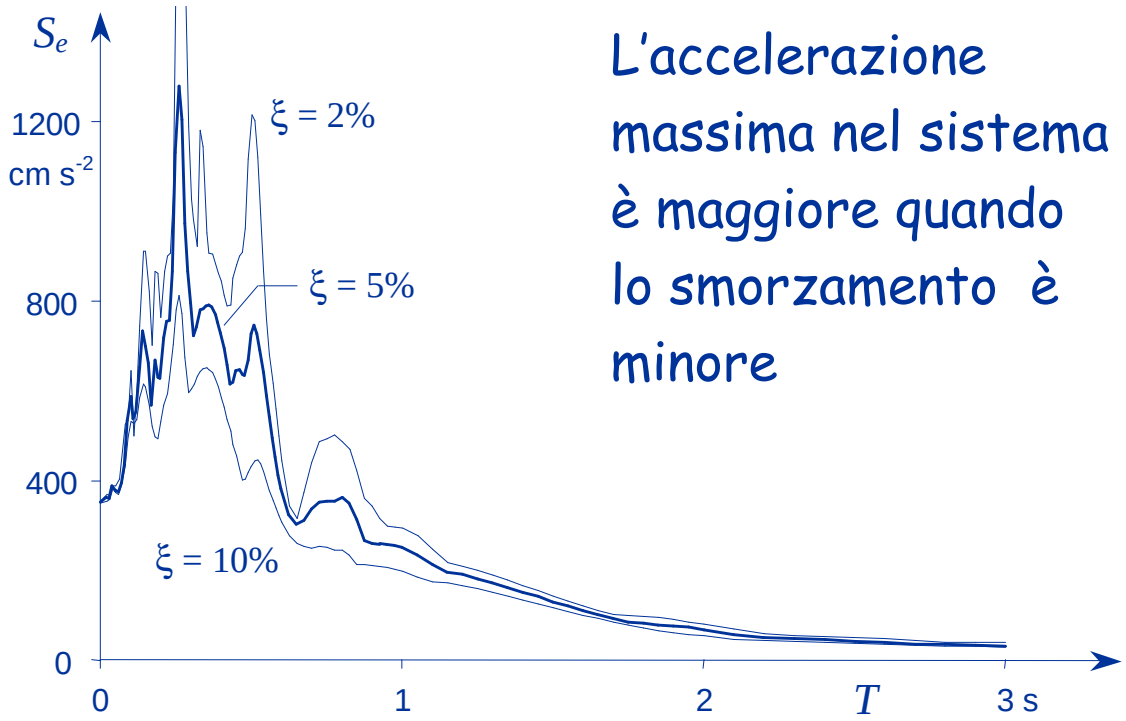
Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (accelerazione)

L'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio ha un andamento ben preciso



Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (accelerazione)

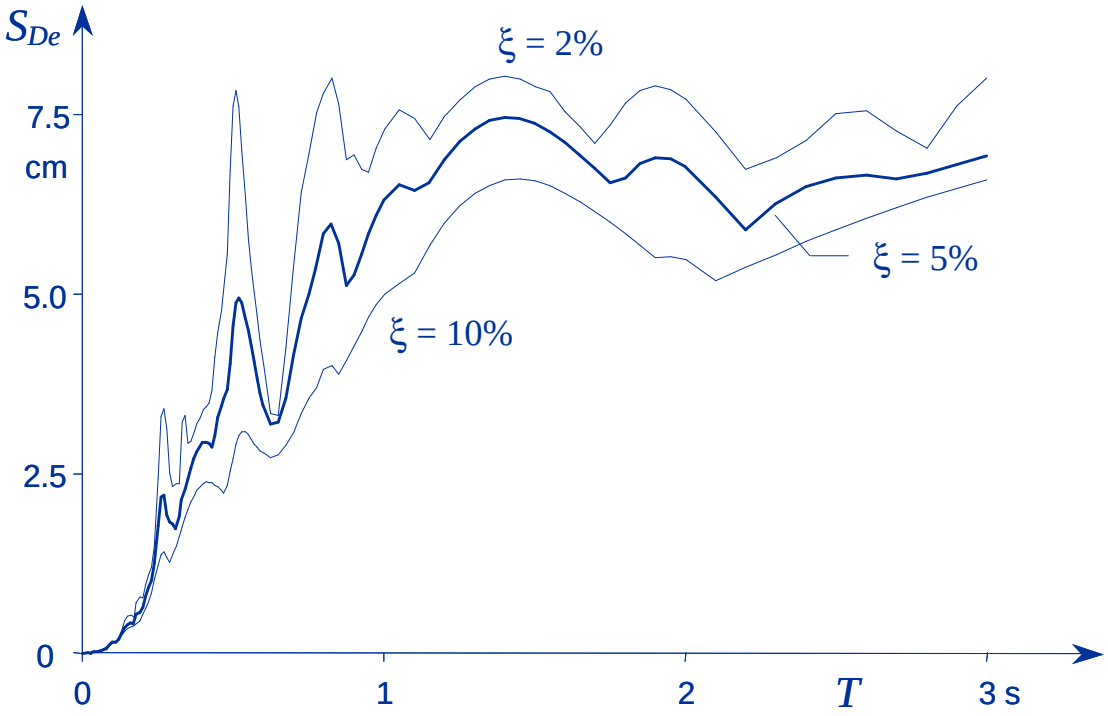
Al variare dello smorzamento si ottengono diverse curve



L'accelerazione massima nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore

Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (spostamento)

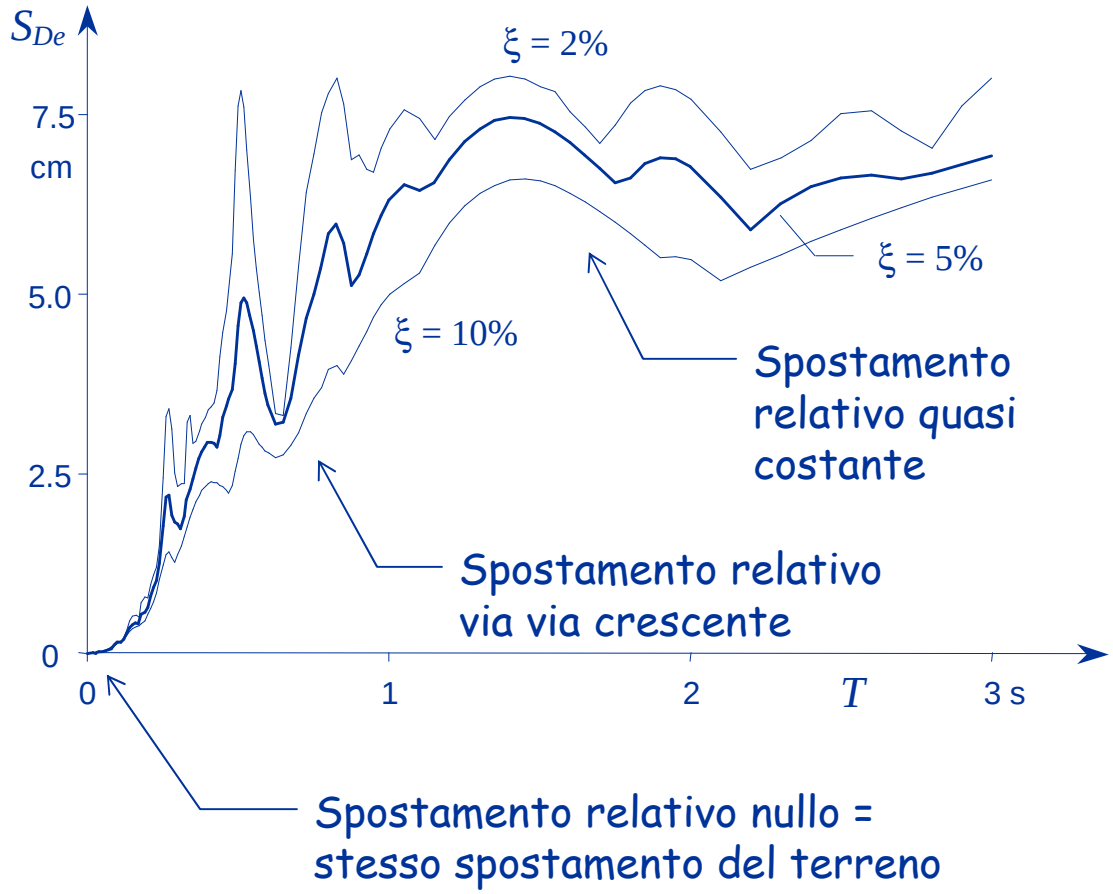
Allo stesso modo si può diagrammare lo spostamento relativo massimo in funzione del periodo



Il diagramma così ottenuto viene detto "spettro di risposta" (in termini di spostamento)

Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (spostamento)

Si noti l'andamento dello spostamento relativo massima in funzione del periodo proprio



Lo spostamento massimo nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore

Oscillazioni forzate

Spettri di risposta (accelerazione-spostamento)

Nota:

- Se lo smorzamento fosse nullo, accelerazione massima e spostamento massimo si raggiungerebbero nello stesso istante
- Con i reali smorzamenti il valore massimo dell'accelerazione assoluta è vicino ma non identico al valoree che si ha nell'istante in cui si ha lo spostamento massimo (questo è detto pseudo-accelerazione massima)

  La differenza è comunque trascurabile
- I valori dello spettro in termini di spostamento e pseudo-accelerazione sono legati analiticamente dalla relazione

$$\left|\ddot{u} + \ddot{u}_g\right| = \left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 u$$

Relazione tra i valori massimi
di spostamento relativo e accelerazione assoluta

Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\,\ddot{u}_g$$

Quando lo spostamento relativo u è massimo la sua derivata è nulla

$$u = u_{\max} \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = 0$$

Si ha allora:

$$m\,\ddot{u} + k\,u_{\max} = -m\,\ddot{u}_g$$

$$k\,u_{\max} = -m\,(\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

$$\left|\ddot{u} + \ddot{u}_g\right| = \frac{k}{m}\,u_{\max} = \left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 u_{\max}$$

perché $\quad T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Relazione tra i valori massimi
di spostamento relativo e accelerazione assoluta

La quantità $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 u$

viene detta pseudoaccelerazione

Essa coincide con l'accelerazione assoluta quando lo smorzamento è nullo

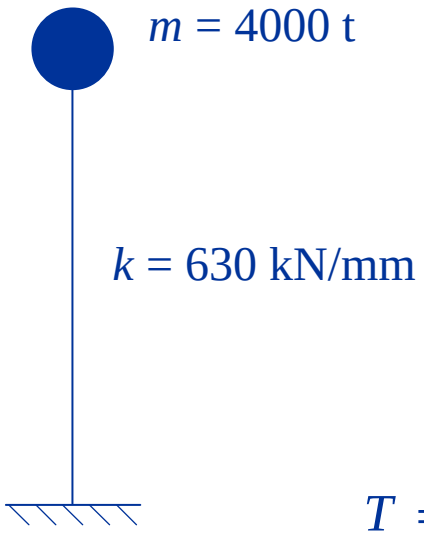
L'accelerazione assoluta massima e la pseudoaccelerazione massima a rigore sono diverse, ma in sostanza sono praticamente coincidenti

La relazione $$\left|\ddot{u} + \ddot{u}_g\right| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 u$$

consente di passare dai valori massimi dello spostamento a quelli massimi dell'accelerazione assoluta, e viceversa

A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

Conoscendo massa e rigidezza possiamo determinare il periodo proprio

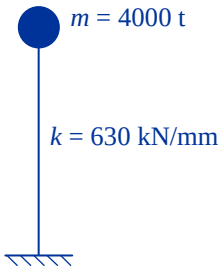
$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4000 \times 10^3}{630 \times 10^6}} =$$

$$= 0.5 \text{ s}$$

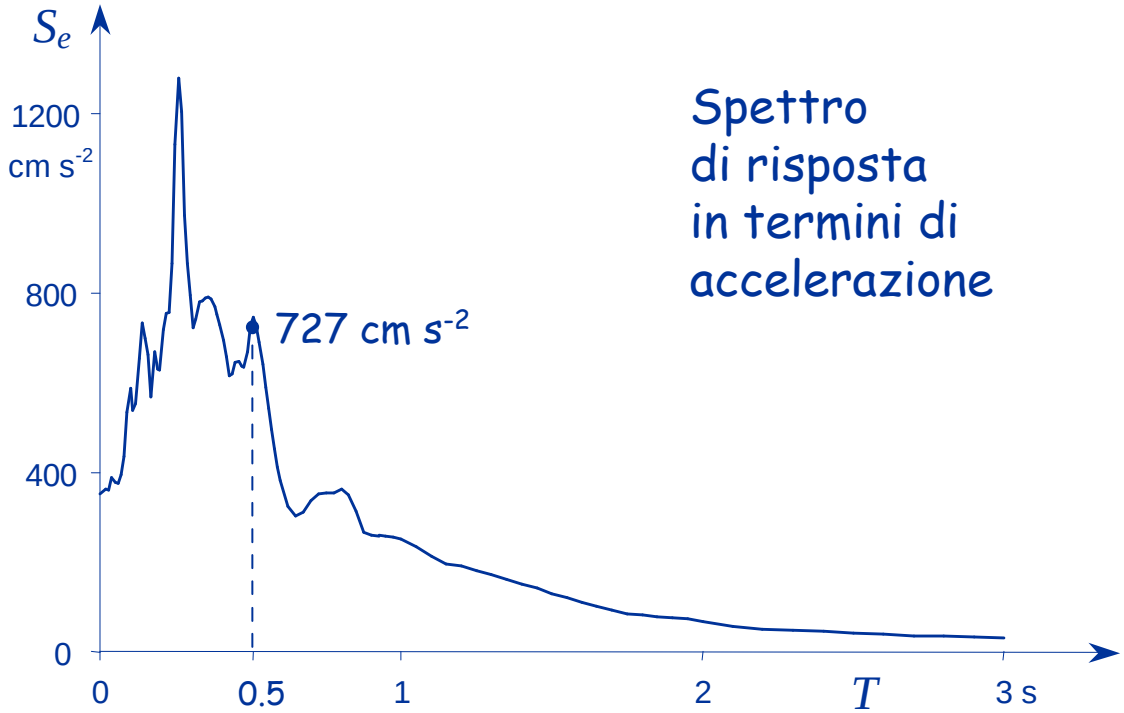
A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s

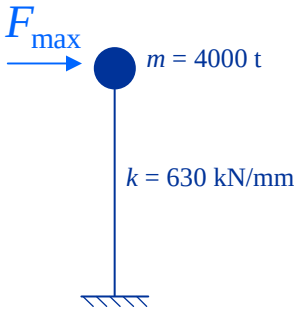


Spettro
di risposta
in termini di
accelerazione

Noto il periodo proprio, possiamo leggere
dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{max} = 7.27 \text{ m s}^{-2} = 0.74 \text{ g}$

A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s

Ma dall'accelerazione possiamo ricavare anche la massima forza d'inerzia

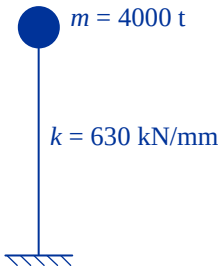
$$F_{max} = m\, a_{max} = 4000 \times 7.27 = 29000 \text{ kN}$$

e quindi le massime sollecitazioni nella struttura, i massimi spostamenti, ecc.

Idea base del calcolo sismico:
valutare il comportamento dinamico applicando forze statiche

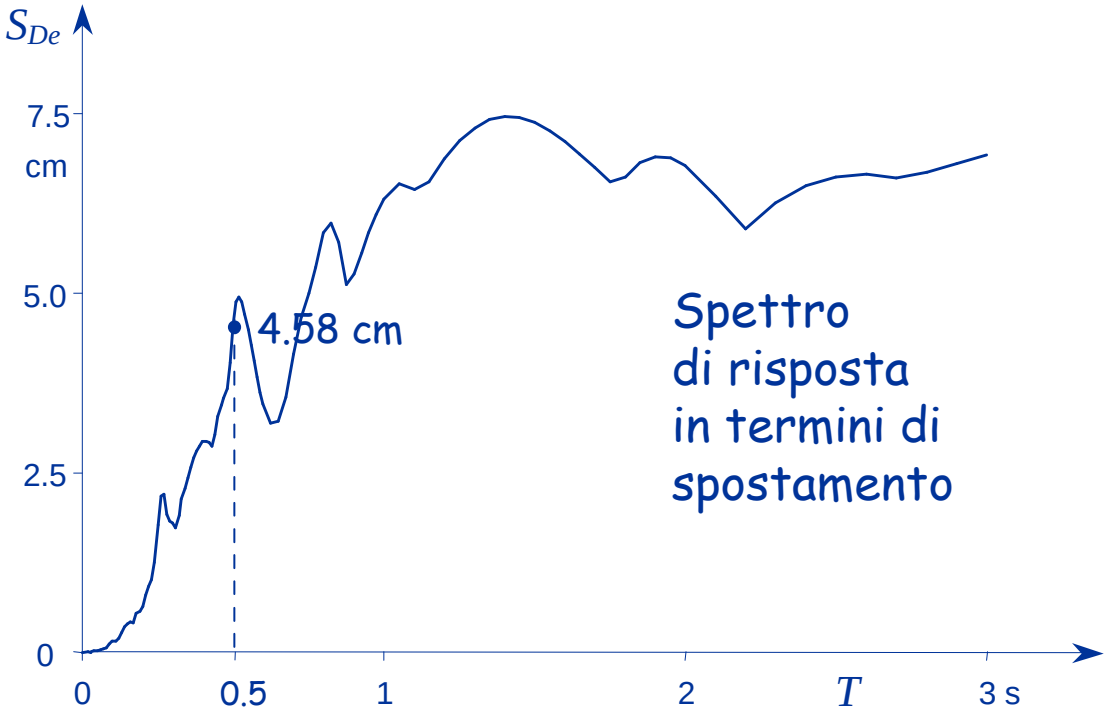
A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s



Spettro
di risposta
in termini di
spostamento

Lo spostamento relativo massimo può essere calcolato risolvendo lo schema strutturale con le forze orizzontali applicate

oppure dallo spettro di risposta in termini di spostamento

$u_{max} = 4.58$ cm