Workshop

Progetto di edifici antisismici con struttura in c.a.

Catania

aula IT del DAU

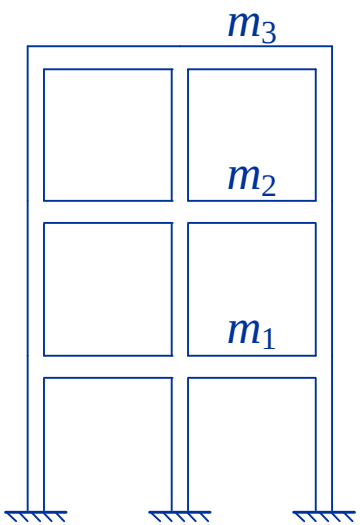
10-20 settembre 2013

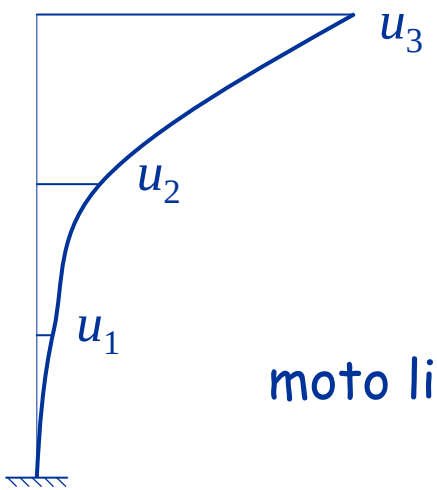
08 – Risposta elastica di schemi a più gradi di libertà

Strutture a più gradi di libertà

Le strutture reali hanno più gradi di libertà (dinamici)

- Per un telaio piano si possono assumere come parametri gli spostamenti dei traversi





L'equazione del moto è in questo caso un sistema di equazioni differenziali

moto libero non smorzato

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0$$

moto forzato

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

Moto di oscillazione libera
(trattazione matematica)

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0$$

La soluzione, in caso di moto libero, è un insieme di funzioni armoniche

$$u_i(t) = \phi_{i,j}\,\cos(\omega_j\,t)$$

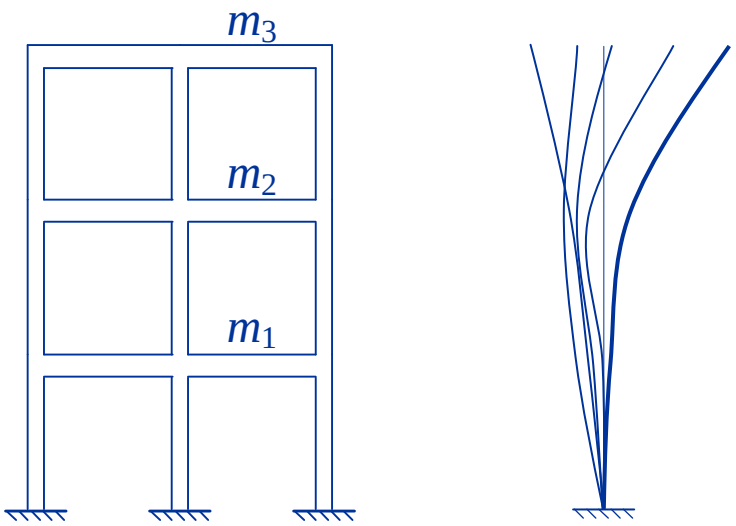
a condizione che sia $\det(\mathbf{k} - \omega_j^2\,\mathbf{m}) = 0$

Da questa si ricavano le frequenze angolari ω_j e quindi i periodi T_j (autovalori) e le deformate ϕ (autovettori)

Modi di oscillazione libera
(significato fisico)

Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare ...

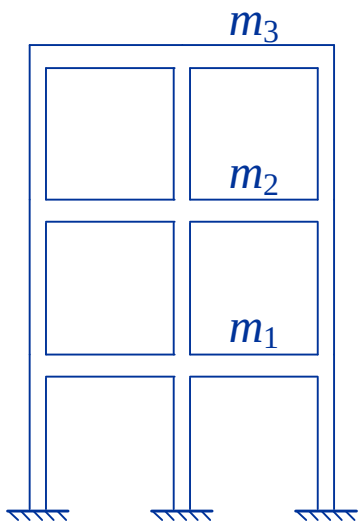


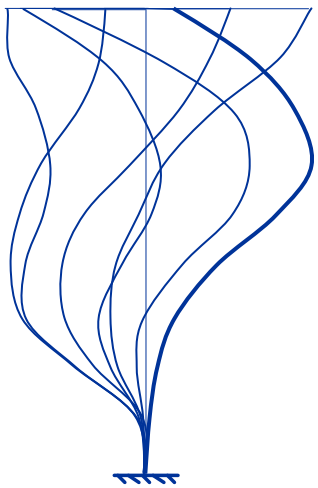
... la struttura si muove in maniera disordinata

Modi di oscillazione libera
(significato fisico)

Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare ...





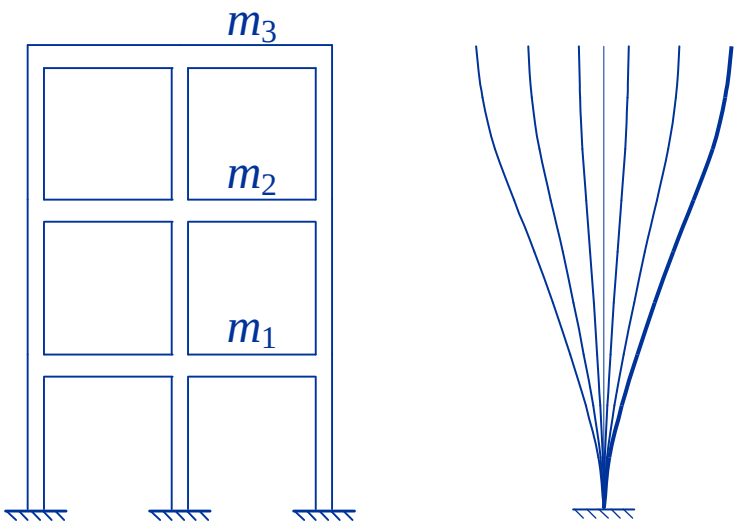
... la struttura si muove in maniera disordinata

altro esempio

Modi di oscillazione libera
(significato fisico)

Questo è un "modo di oscillazione libera"

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...



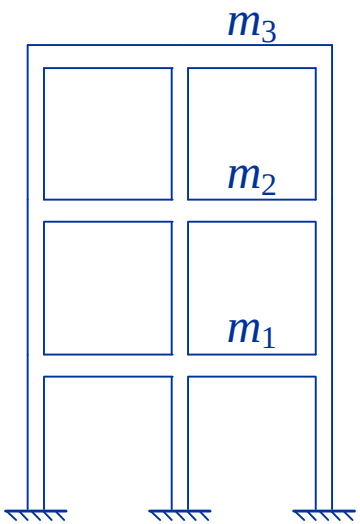
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

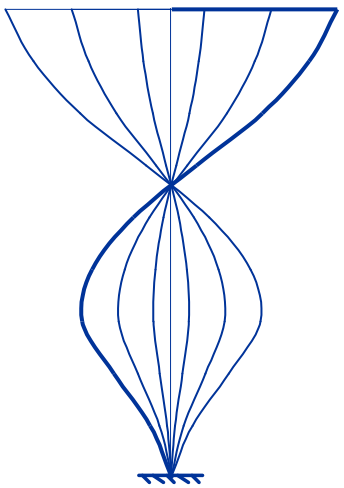
T = periodo di oscillazione libera

Modi di oscillazione libera
(significato fisico)

Questo è un "modo di oscillazione libera"

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...





altro esempio

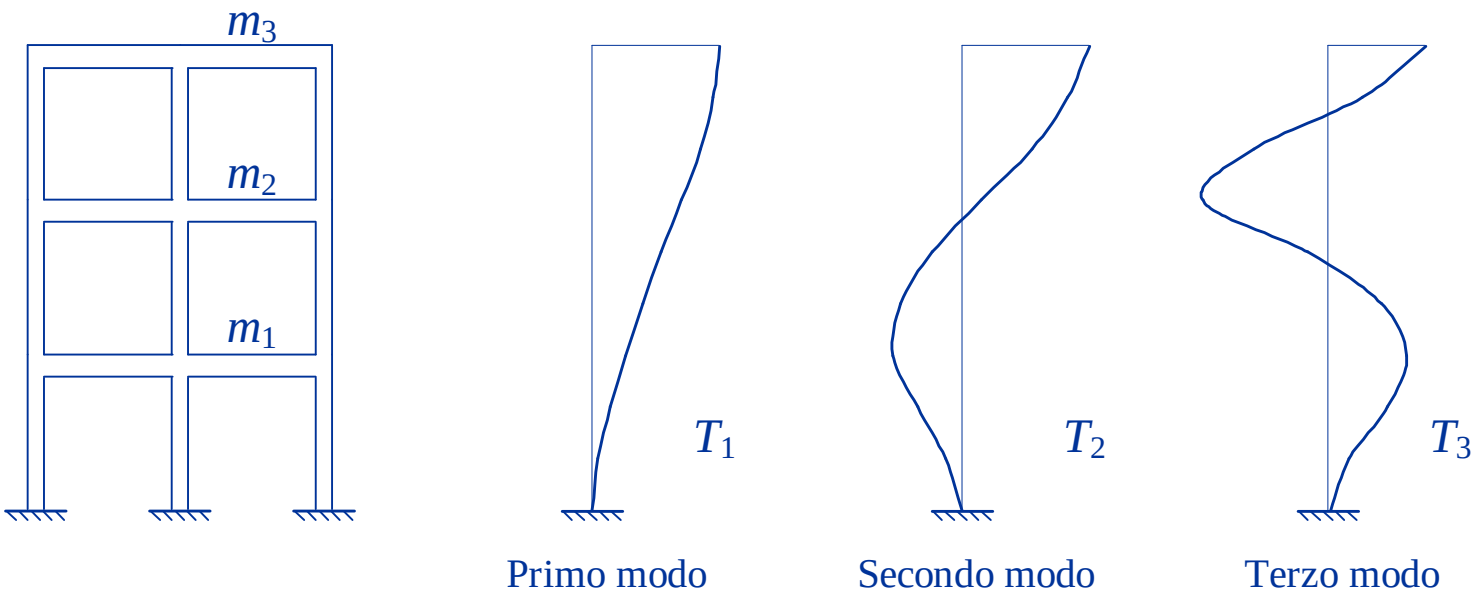
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

T = periodo di oscillazione libera

Modi di oscillazione libera

Telaio piano (con traversi inestensibili):

numero di modi di oscillazione libera = numero di piani



Moto forzato
(trattazione matematica)

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

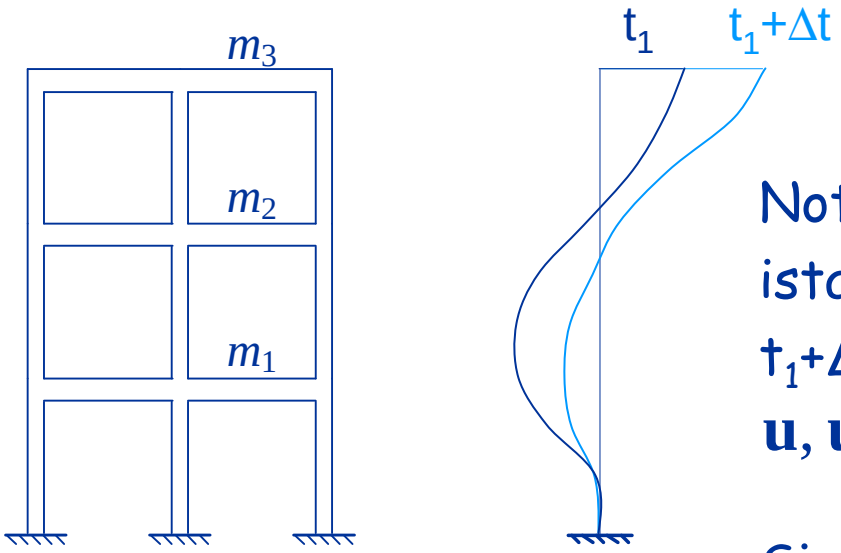
$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

Se la forzante non è armonica il sistema di equazioni deve essere risolto per via numerica

Moto forzato
(trattazione matematica)

Risoluzione per via numerica

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

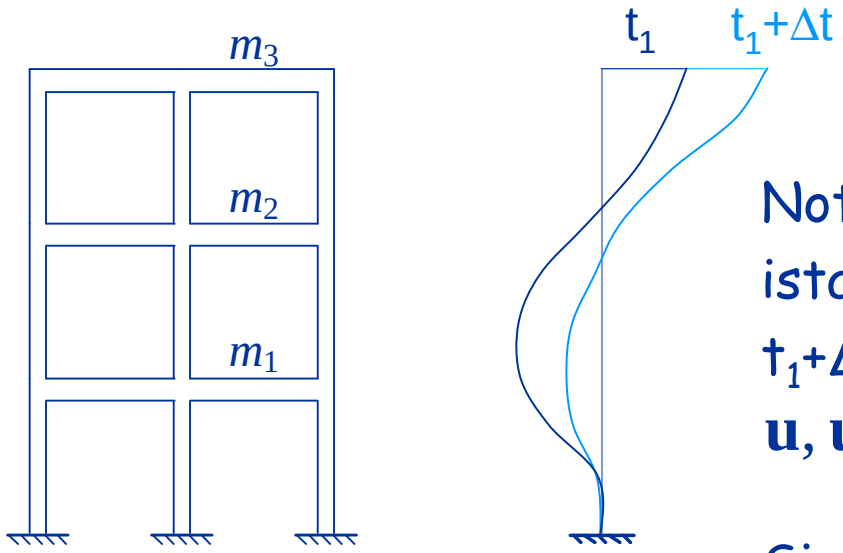


Noti i valori di $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ in un certo istante t_1 ed il valore di $\ddot{u}_g$ tra t_1 e $t_1+\Delta t$ si possono ricavare i valori di $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ nell'istante $t_1+\Delta t$

Si ottiene la risposta nel tempo, istante dopo istante (time history)

Moto forzato
(trattazione matematica)

Questo tipo di analisi è consentito dalla normativa ed è detto analisi dinamica (lineare), con valutazione della storia della risposta



Noti i valori di $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ in un certo istante t_1 ed il valore di $\ddot{u}_g$ tra t_1 e $t_1+\Delta t$ si possono ricavare i valori di $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ nell'istante $t_1+\Delta t$

Si ottiene la risposta nel tempo, istante dopo istante (time history)

Possibili approcci per valutare la risposta elastica

Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta (istante per istante)

Analisi modale con spettro di risposta, per valutare la massima risposta

Analisi statica, per valutare in maniera approssimata la massima risposta

NTC08, punto 7.3

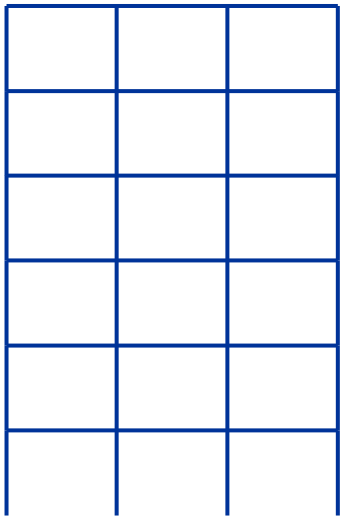
Analisi dinamica,
con valutazione della storia della risposta

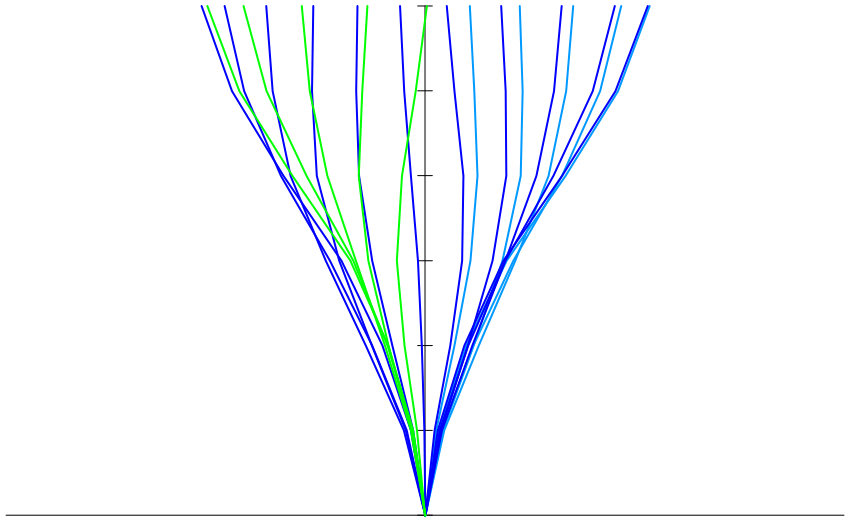
- Se il sistema ha n gradi di libertà (dinamici) il suo moto è descritto con n funzioni spostamento u (quindi con un vettore di funzioni $\mathbf{u}$)
- L'equazione di equilibrio dinamico è

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

  che è formalmente simile a quella di un oscillatore semplice (ma in realtà è un sistema di equazioni differenziali)
- Risolverla numericamente (cioè determinare la risposta istante per istante) è possibile ma è matematicamente oneroso

Risposta dinamica elastica





La struttura si deforma nel tempo

La forma della deformata varia nel tempo

Analisi dinamica,
con valutazione della storia della risposta

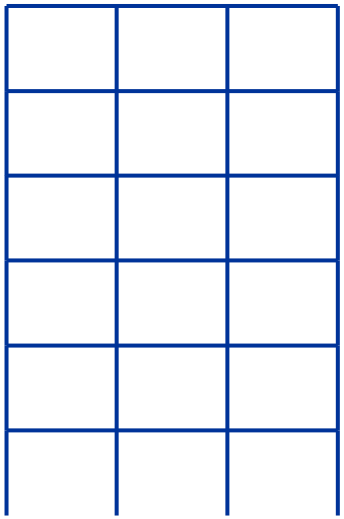
- Determinare la risposta istante per istante è possibile ma è matematicamente oneroso

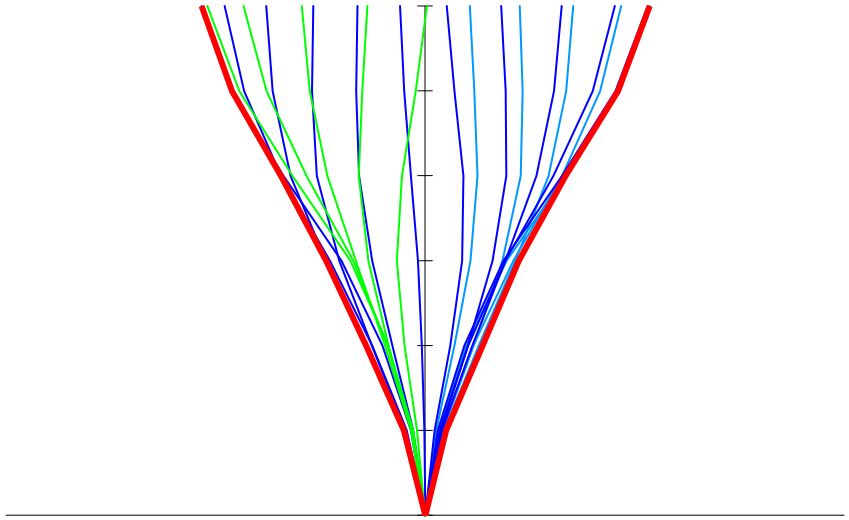
Ma ci serve veramente?

- In realtà a noi interessano i massimi spostamenti e le massime sollecitazioni

Per ottenere questi si può usare
un procedimento più semplice:
l'analisi modale (con spettro di risposta)

Analisi modale
(con spettro di risposta)





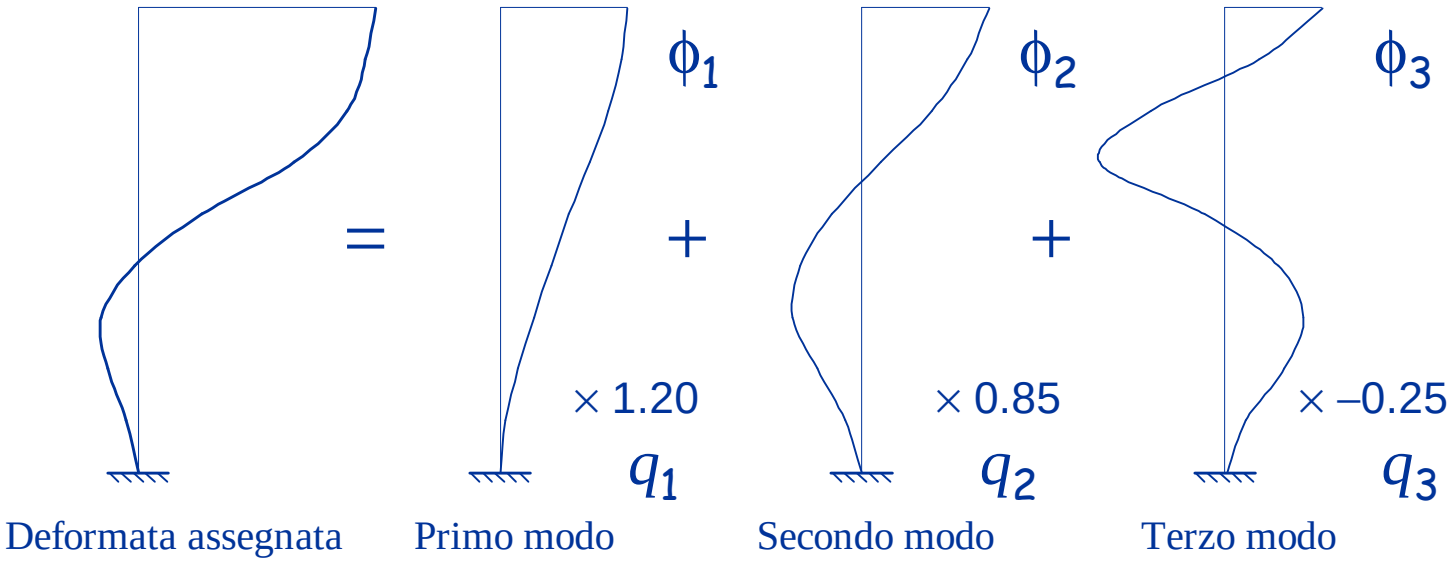
La struttura si deforma nel tempo

La forma della deformata varia nel tempo

L'analisi modale fornisce l'inviluppo degli spostamenti, delle sollecitazioni, ecc.

Equazione del moto
(trattazione matematica)

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



$$\mathbf{u} = \phi\, \mathbf{q}$$

Equazione del moto:
moto libero non smorzato

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\,\mathbf{q} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = 0$$

Nelle matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice

Equazione del moto:
moto libero con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\,\mathbf{q} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = 0$$

In molti casi anche la matrice $\mathbf{C}$ è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate
(sistemi classicamente smorzati)

Equazione del moto:
risposta ad un accelerogramma

L'equazione del moto $$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

diventa $$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = -\phi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_j + 2\,\xi_j\,\omega_j\,\dot{q}_j + \omega_j^2\,q_j = -\Gamma_j\,\ddot{u}_g$$

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_{i,j}^2}$$

Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per Γ_j

Coefficiente di partecipazione modale:
indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante

Equazione del moto:
risposta ad un accelerogramma

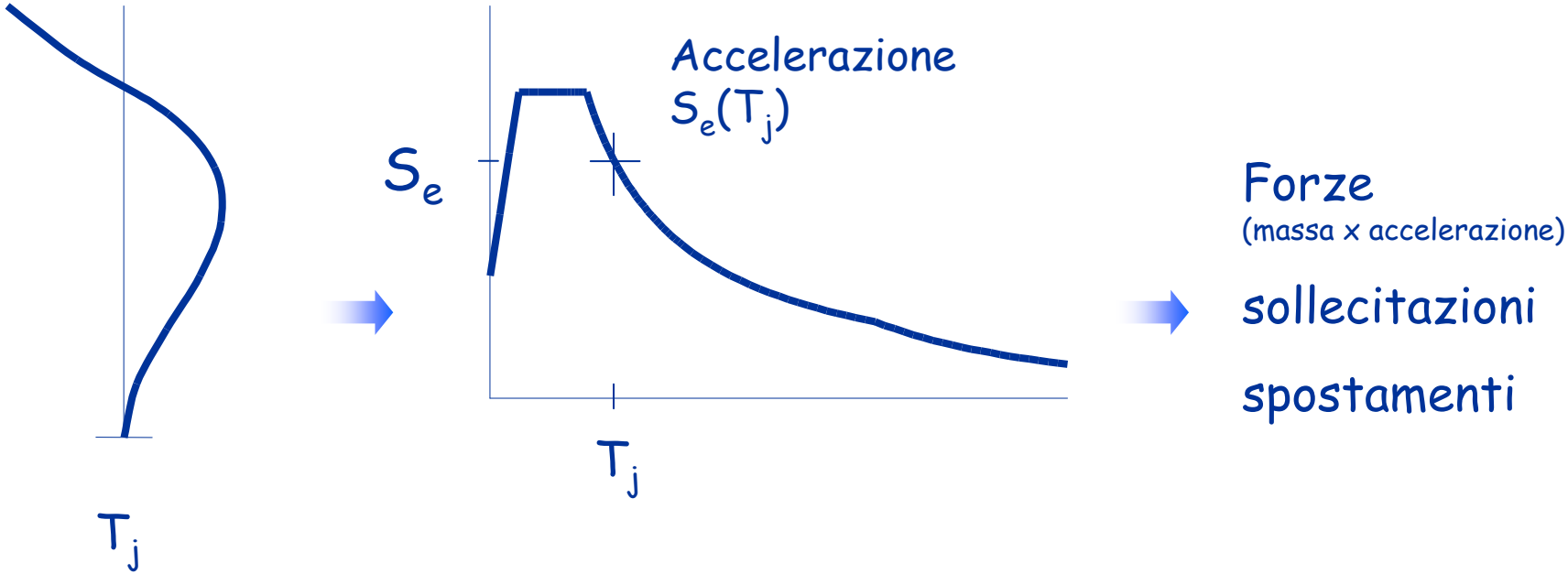
Contributo di un singolo modo:

- La struttura che oscilla secondo uno dei suoi "modi" si comporta come un oscillatore semplice
- È possibile ricavare di conseguenza un insieme di forze e calcolare le sollecitazioni prodotte

- Il contributo di quel "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un coefficiente di partecipazione modale o – in maniera più chiara – in funzione della massa partecipante

Equazione del moto:
contributo di un modo

Per valutare la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo uno dei suoi modi di oscillazione …



Equazione del moto:
contributo di un modo

$S_e(T_j)$ = ordinata spettrale corrispondente al periodo T_j

Il taglio alla base corrispondente al modo j è

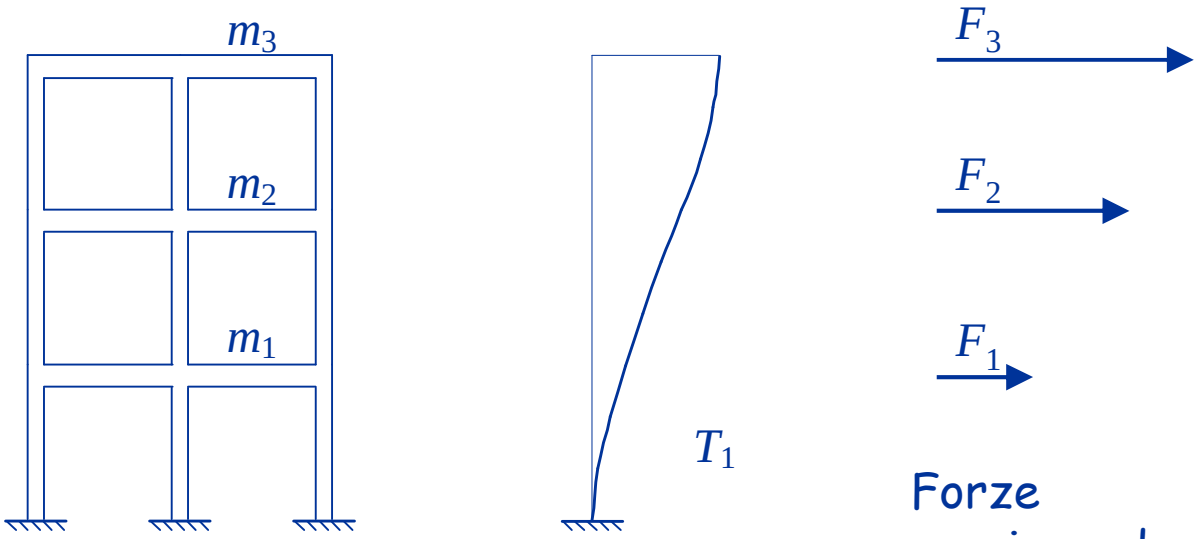
$$V_{b,j} = M_j^* \, S_e(T_j)$$

M_j^* è detta massa partecipante

$$M_j^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j} \, \Gamma_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j}^2}$$

Equazione del moto:
contributo di un modo

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali

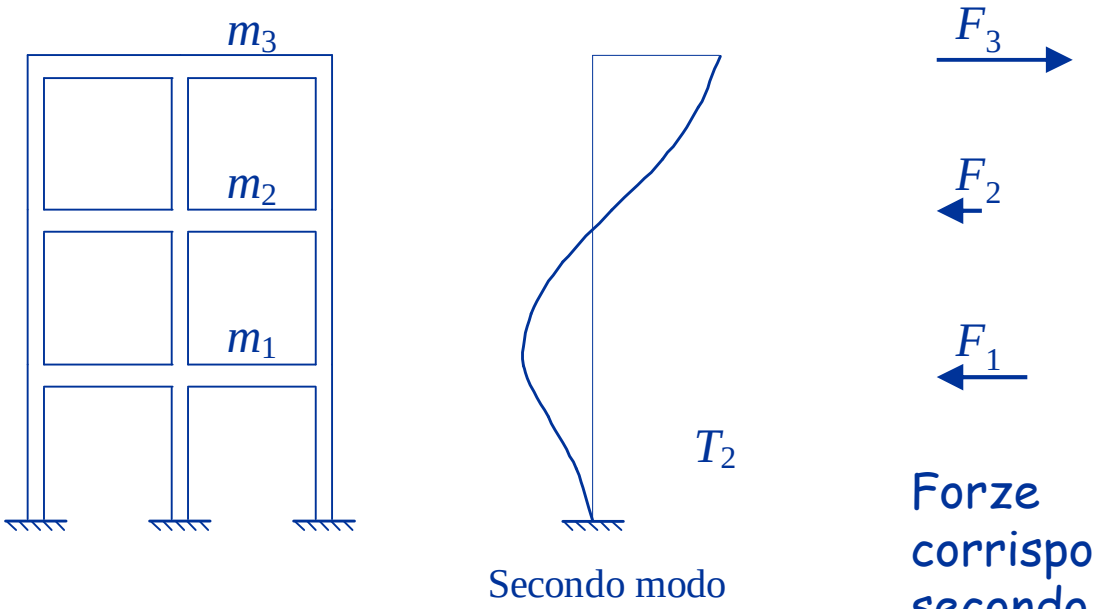


Primo modo

Forze corrispondenti al primo modo

Equazione del moto:
contributo di un modo

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali



Secondo modo

Forze corrispondenti al secondo modo

Analisi modale
con spettro di risposta

Se si considerano più modi, ciascuno con la sua deformata reale, si ha l'analisi modale (con spettro di risposta)

- Il contributo di ciascun "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un coefficiente di partecipazione modale o – in maniera più chiara – in funzione della massa partecipante
- La somma delle masse partecipanti di tutti i modi è pari alla massa totale della struttura
  (per questo motivo si parla in genere di masse partecipanti come percentuale della massa totale)

Analisi modale
con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
- CQC = combinazione quadratica completa

Analisi modale
con spettro di risposta

Combinazione dei risultati:

- È opportuno usare sempre la CQC

$$E = \left(\sum_j \sum_i \rho_{ij} \cdot E_i \cdot E_j\right)^{1/2}$$

con:

E_j valore dell'effetto relativo al modo j;

ϱ_{ij} coefficiente di correlazione tra il modo i e il modo j, calcolato con formule di comprovata validità quale:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \cdot \xi_j}\left(\beta_{ij} \cdot \xi_i + \xi_j\right) \cdot \beta_{ij}^{3/2}}{\left(1-\beta_{ij}^{\ 2}\right)^2 + 4 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \beta_{ij}\left(1+\beta_{ij}^2\right) + 4 \cdot \left(\xi_i^2 + \xi_j^2\right) \cdot \beta_{ij}^2} \qquad [7.3.5a]$$

che, nel caso di uguale smorzamento dei modi i e j, si esprime come:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2\beta_{ij}^{3/2}}{\left(1+\beta_{ij}\right) \cdot \left[\left(1-\beta_{ij}\right)^2 + 4\xi^2\beta_{ij}\right]} \qquad [7.3.5b]$$

$\xi_{i,j}$ smorzamento viscoso dei modi i e j;

β_{ij} è il rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia i-j di modi ($\beta_{ij} = T_j/T_i$).

NTC13, punto 7.3.3.1

Analisi modale
con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
- CQC = combinazione quadratica completa

- Attenzione: nel fare la combinazione si perde il segno (che può essere utile);
  ma se c'è un modo prevalente si può assegnare a ciascun valore il segno che esso ha nel modo prevalente

Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:
- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso ve

Gli altri r a minori. Essi dann effetto minore ri

In gener odi da:
- raggiun %
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

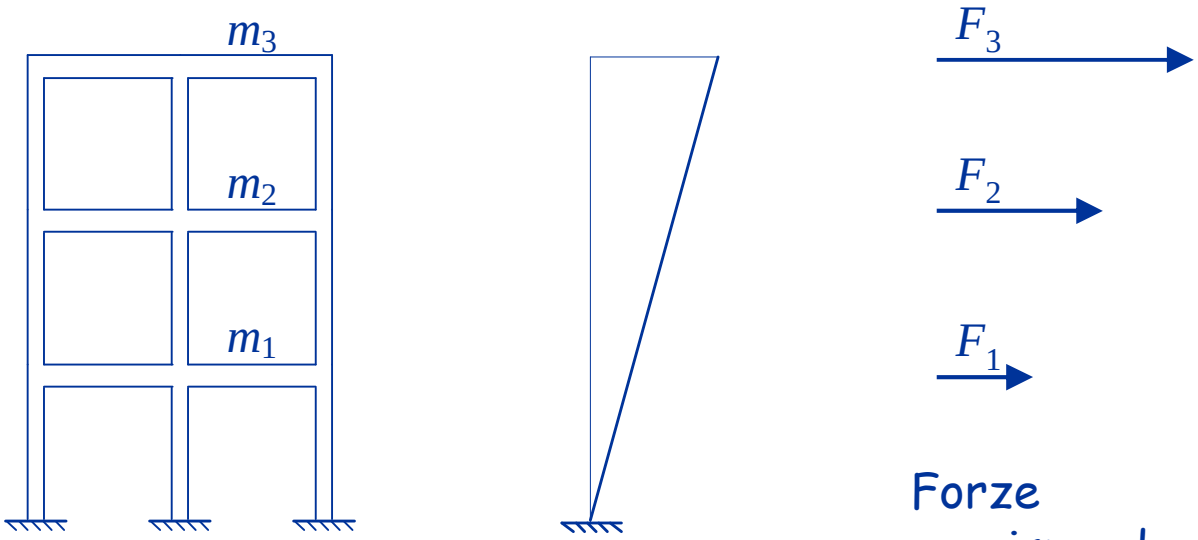
Il primo modo è nettamente predominante

↓

Possiamo fare ulteriori semplificazioni

Analisi statica

Se si considera solo un modo (il primo), assumendo per esso una deformata lineare, si ha la cosiddetta analisi statica

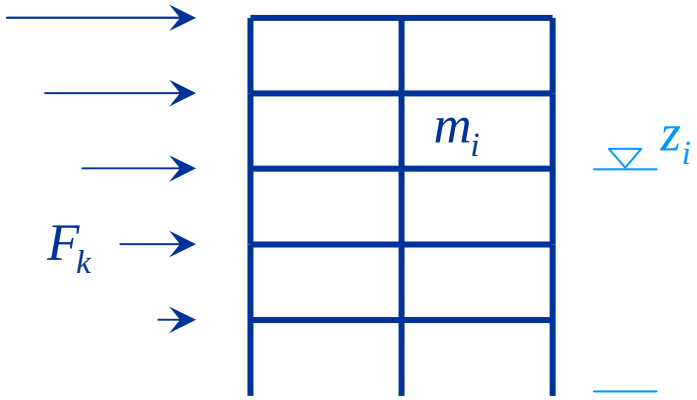


Forze corrispondenti alla forma lineare

Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k \, z_k \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, z_i} S_e(T_1)$$



Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

$$T_1 = C_1 \, H^{3/4}$$

Le forze possono essere ridotte con λ=0.85 se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

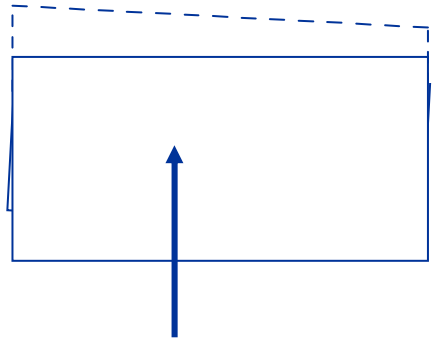
- L'analisi statica ha un significato fisico facilmente comprensibile (applicare alla struttura un insieme di forze orizzontali)
- In molti casi l'analisi statica fornisce risultati quasi uguali o leggermente cautelativi rispetto all'analisi modale
- L'analisi statica può però presentare seri problemi:
  - per strutture non regolari
  - per strutture molto deformabili

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

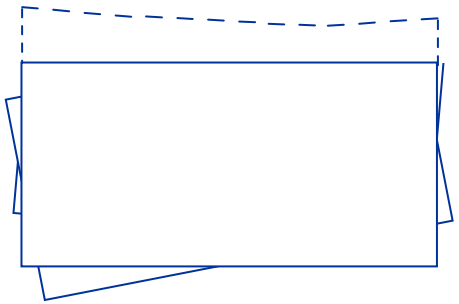
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con forti rotazioni, non va bene

Analisi modale



modo 1

modo 2

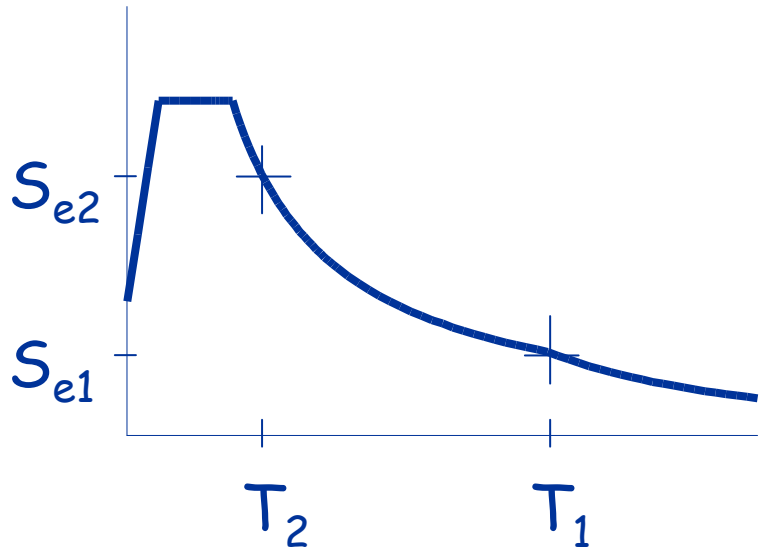
inviluppo

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto

accelerazione molto bassa, non cautelativa



Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile (o, meglio, corretta con la formula di Rayleigh)

La norma prevede un coefficiente riduttivo λ che rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

La NTC08 vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera 2.5 T_C
- la struttura è irregolare in altezza

Nota: il riferimento all'irregolarità in altezza non è coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

Questo è un primo esempio di come la normativa tratti in maniera poco corretta gli aspetti connessi alla regolarità (o mancanza di regolarità)

NTC08, punto 7.3.3.2

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

La NTC08 vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera 2.5 T_C
- la struttura è irregolare in altezza

Nota: il riferimento all'irregolarità in altezza non è coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

La NTC13, più correttamente, consente l'analisi statica "per le sole costruzioni la cui risposta sismica, in ogni direzione principale, non dipenda significativamente dai modi di vibrare superiori"

NTC08, punto 7.3.3.2

NTC13, punto 7.3.2

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

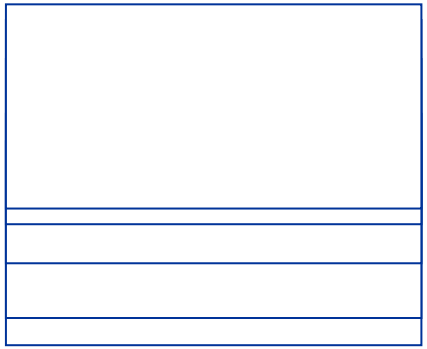
- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura

Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:
- n modi di traslazione in una direzione



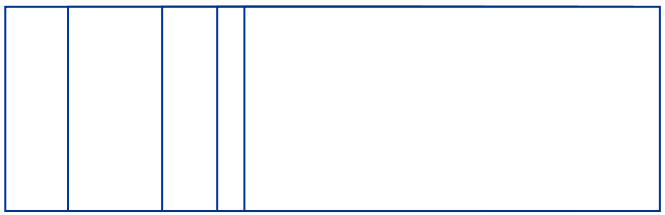
Vista dell'edificio, dall'alto

Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione



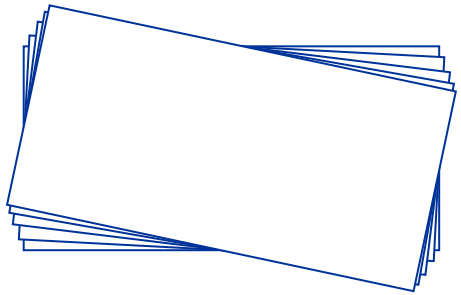
Vista dell'edificio, dall'alto

Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione



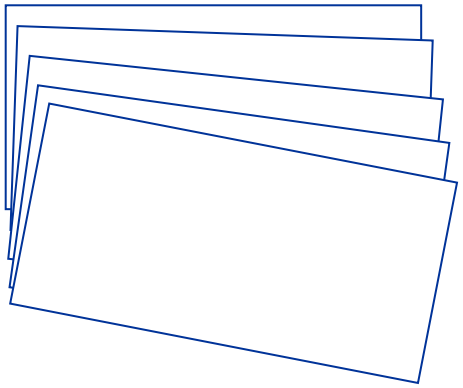
Vista dell'edificio, dall'alto

Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono accoppiati



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale

senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera è molto maggiore

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura
- Ma l'analisi modale può essere difficile da interpretare

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma
- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo
- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura
- Ma l'analisi modale può essere difficile da interpretare
- Con l'analisi modale si perde il segno dei risultati

Considerazioni:
analisi statica o analisi modale?

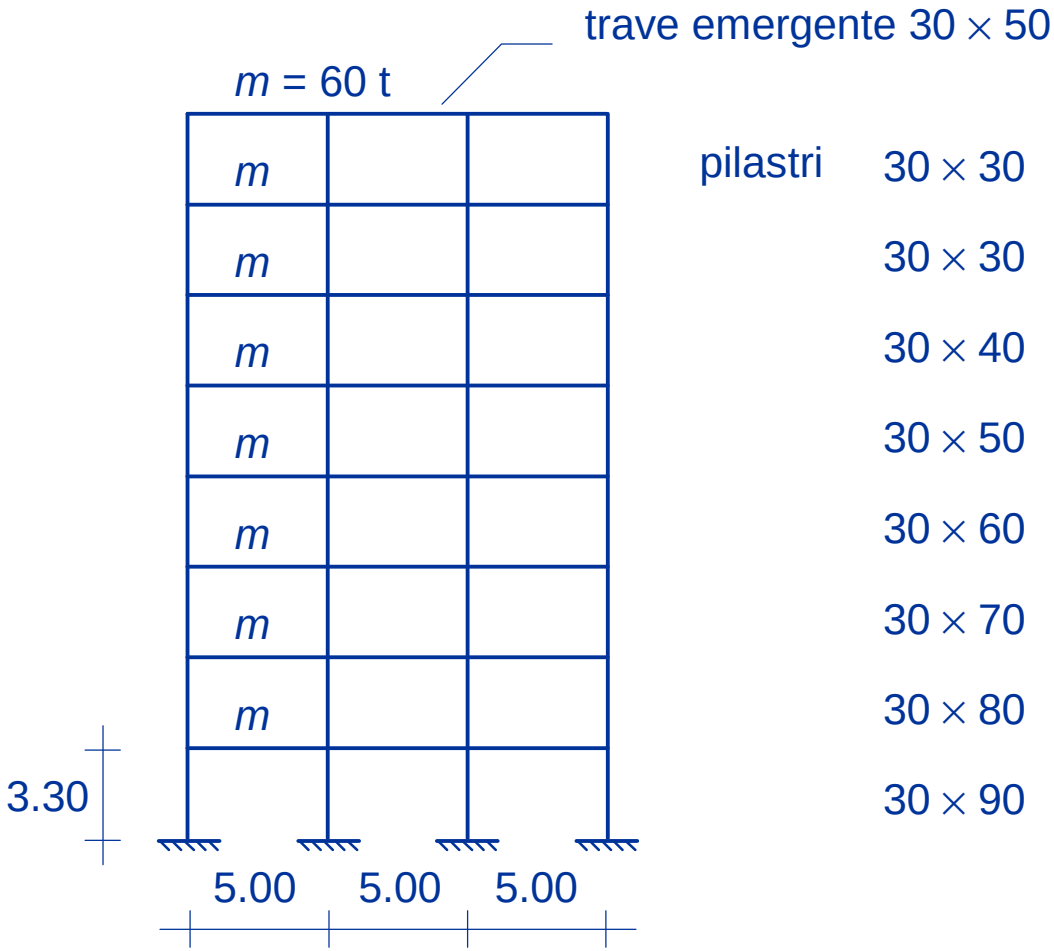
Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)

Esempio

Confronto analisi statica - modale

Confronto analisi statica - modale
Edificio con travi emergenti



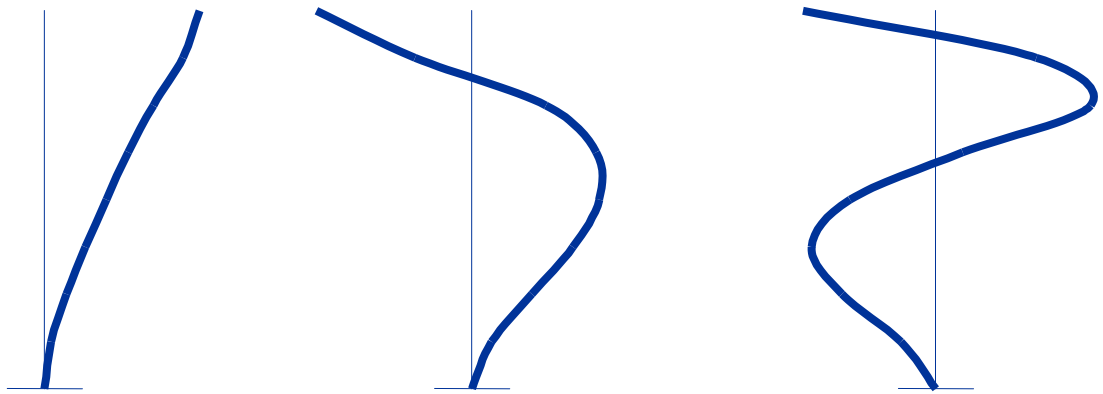
Zona 3
$a_g = 0.15\ g$

Suolo B

Classe di duttilità B

Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti

Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.183 s	0.461 s	0.259 s
S_e	0.0484 g	0.1145 g	0.1145 g
M*/M	70.1 %	13.7 %	5.1 %

Forze statiche - modali [kN]

Edificio con travi emergenti

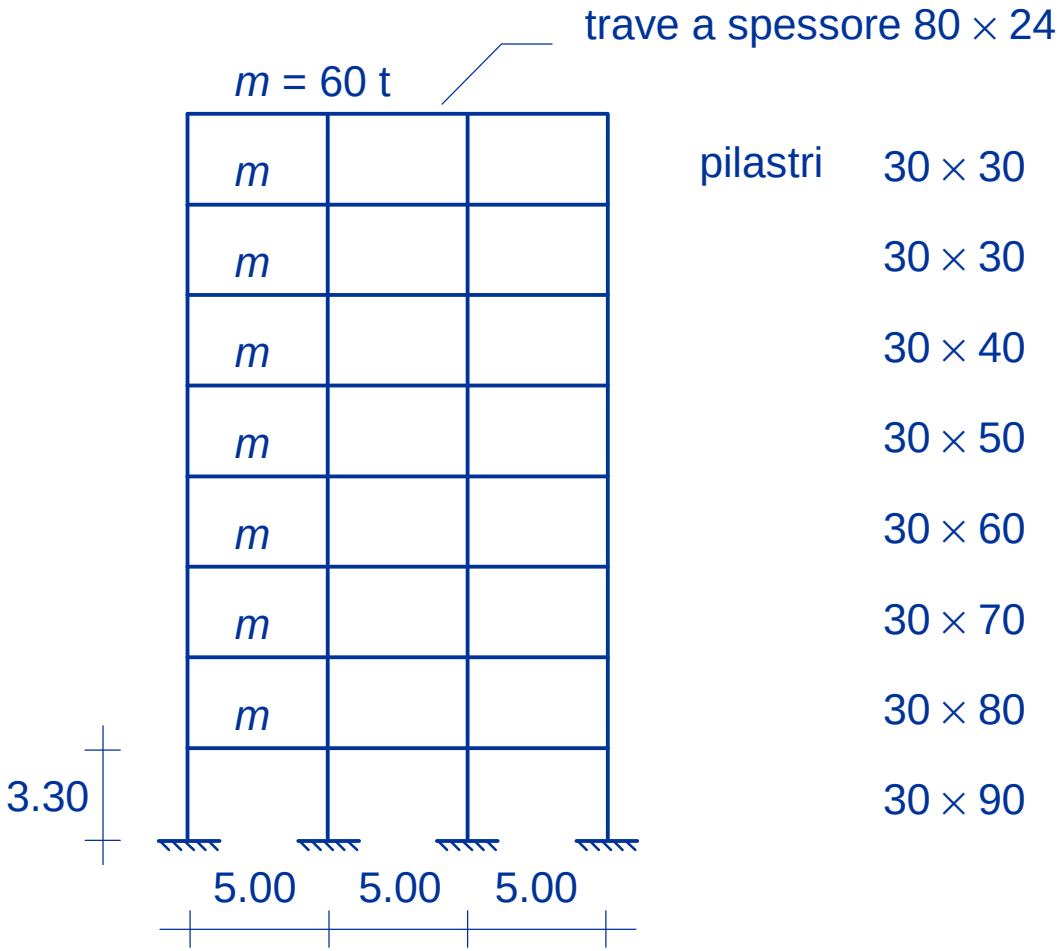
	modale			analisi
piano	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	40.0	-39.1	19.5	50.6
7	35.8	-14.4	-14.9	44.3
6	28.1	18.6	-22.8	38.0
5	21.7	31.3	-4.0	31.6
4	16.0	32.1	12.5	25.3
3	10.6	25.4	18.2	19.0
2	5.7	15.1	13.7	12.7
1	1.8	5.0	5.1	6.3

Tagli statici - modali [kN]
Edificio con travi emergenti

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	59.2	50.6	-14.5
7	92.9	94.9	2.2
6	111.1	132.9	19.6
5	127.6	164.5	28.9
4	144.8	189.9	31.1
3	161.7	208.8	29.2
2	173.7	221.5	27.5
1	178.1	227.8	27.9

Confronto analisi statica - modale

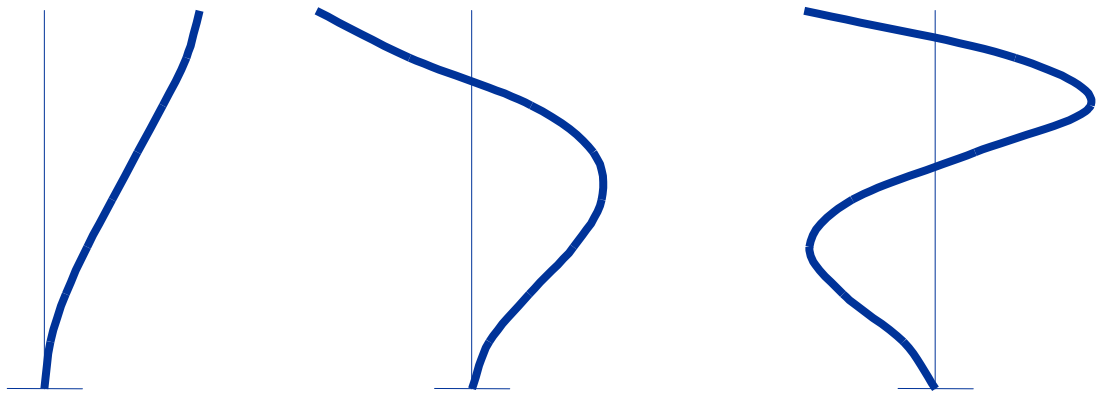
Edificio con travi a spessore



pilastri	30 × 30
	30 × 30
	30 × 40
	30 × 50
	30 × 60
	30 × 70
	30 × 80
	30 × 90

Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti

Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.738 s	0. 604 s	0. 328 s
S_e	0. 0329 g	0. 0947 g	0. 1145 g
M*/M	70.9 %	11.8 %	5.4 %

Forze statiche - modali [kN]

Edificio con travi a spessore

	modale			analisi
piano	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	26.3	-30.3	20.4	34.5
7	24.1	-12.2	-12.5	30.1
6	20.1	11.6	-24.2	25.8
5	15.9	23.6	-6.2	21.5
4	11.5	25.4	12.9	17.2
3	7.3	19.9	19.6	12.9
2	3.6	11.2	14.4	8.6
1	1.0	3.4	5.0	4.3

Tagli statici - modali [kN]

Edificio con travi a spessore

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	45.0	34.5	-23.4
7	66.4	64.6	-2.7
6	78.7	90.4	15.0
5	89.6	112.0	25.0
4	100.0	129.2	29.2
3	112.3	142.1	26.5
2	121.9	150.7	23.6
1	125.3	155.0	23.7