

Corsi di aggiornamento

Progettazione in zona sismica

**Procedure semplificate e calcoli manuali  
per il controllo dell'ordine di grandezza  
dei risultati ottenuti dal programma di calcolo**

02 - Rigidezza laterale (o traslazionale)

Vasto

30 settembre - 1 ottobre 2016

Aurelio Ghersi

# Rigidezza, resistenza, duttilità

- Sono tre parole chiave nella progettazione strutturale ...  
ma non sono banali o scontate, come potrebbero sembrare
- Nella presentazione precedente si è data una idea base della **rigidezza**, valida ancor prima di avere dimensioni degli elementi strutturali (e quindi in fase di progettazione)
- Ora se ne fa un approfondimento, che serve solo dopo aver definito le dimensioni di tali elementi

# Elementi resistenti alle azioni orizzontali

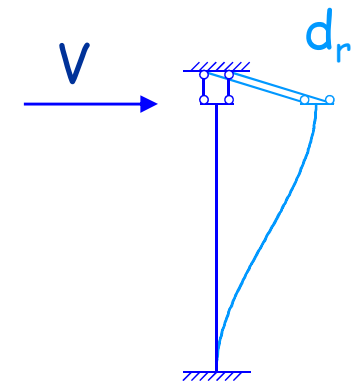
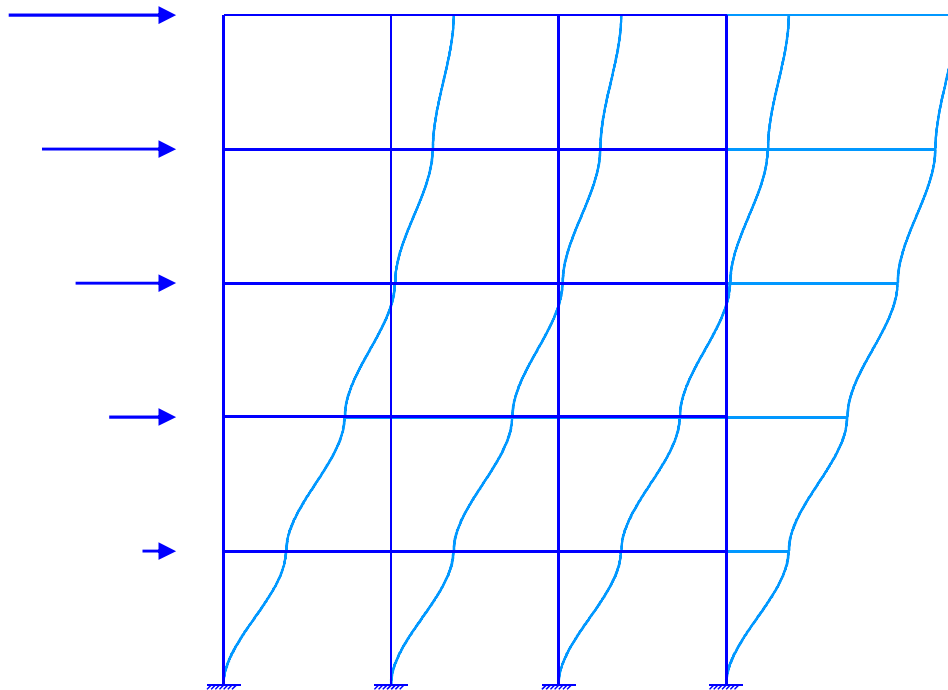
In genere nelle strutture si hanno travi sia emergenti che a spessore e pilastri rettangolari, che possono essere orientati col lato più lungo in una delle due dimensioni della pianta

I singoli pilastri assorbono un'aliquota dell'azione sismica minore o maggiore in proporzione alla loro rigidezza

In che modo si può stimare la rigidezza?

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide



Modello  
di calcolo

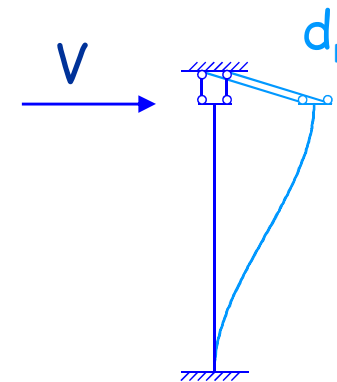
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide

$$d_r = \frac{V L_p^3}{12 E I_p}$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3}$$

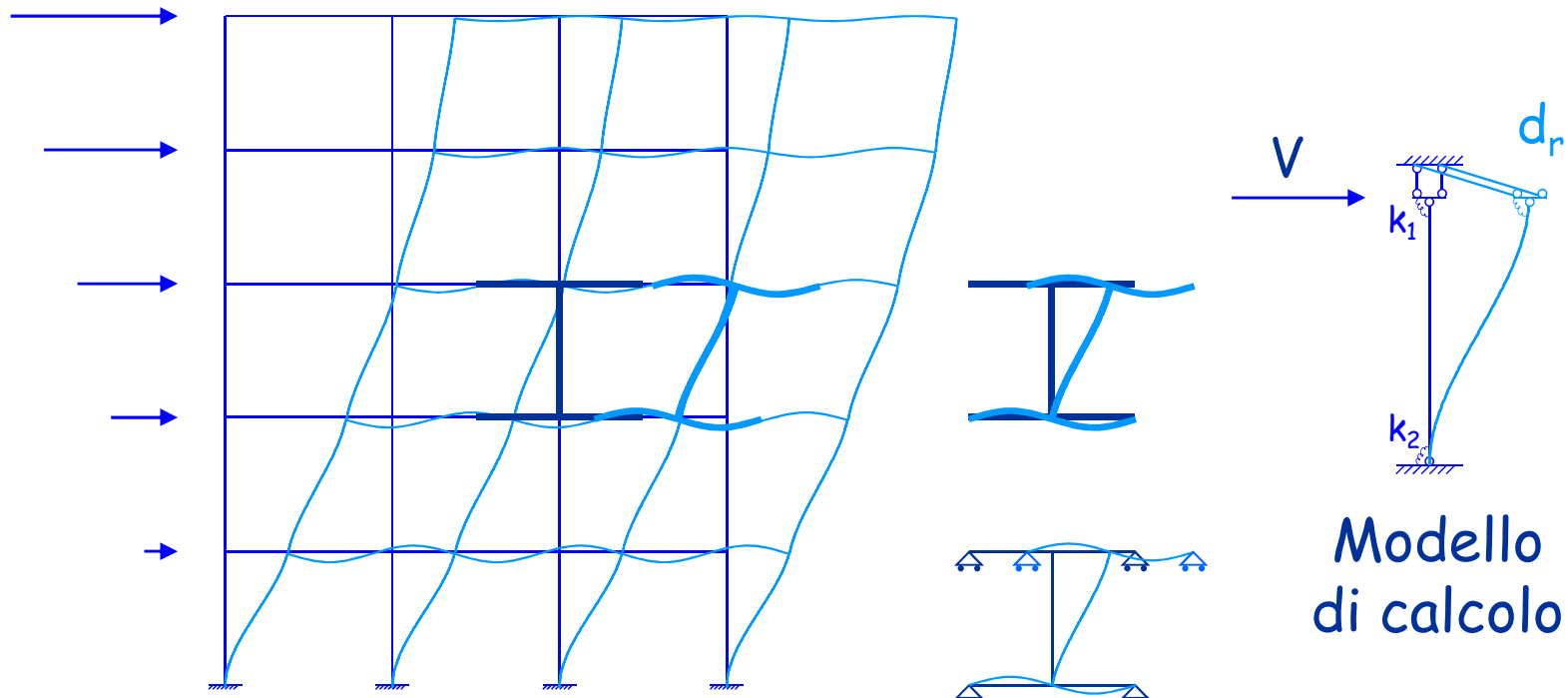
La rigidezza è proporzionale al momento d'inerzia della sezione



Modello  
di calcolo

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili



# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

$$k_1 = \frac{12 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

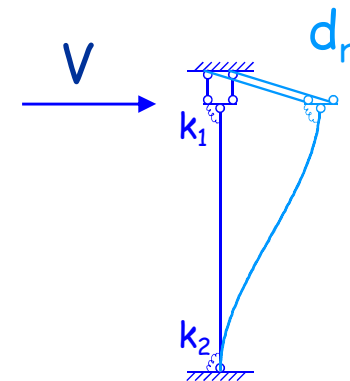


ma poiché la trave serve da vincolo anche al pilastro di sopra, prendo la metà (nel caso di piani intermedi)

$$k_1 = \frac{6 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

$$k_2 = \frac{6 E I_{t,\text{inf}}}{L_t}$$

pongo  $r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t}$   $r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$

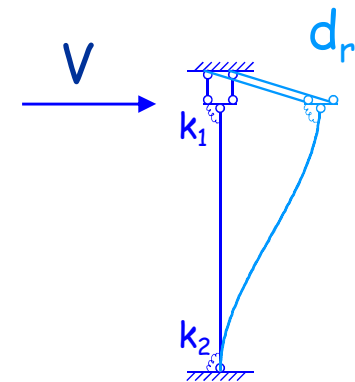


Modello  
di calcolo

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

$$\begin{aligned}d_r &= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2 / 6}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&\cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \quad \text{se } r_1 \cong r_2\end{aligned}$$



Modello  
di calcolo

Lo spostamento dipende anche  
dalla rigidezza delle travi



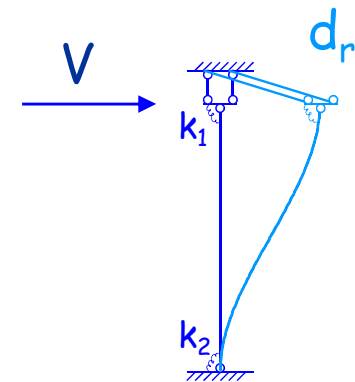
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

In maniera semplificata, spostamento e rigidezze si possono esprimere direttamente con

$$d_r \cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right) \right]$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right)}$$



Modello di calcolo

# Rigidezza

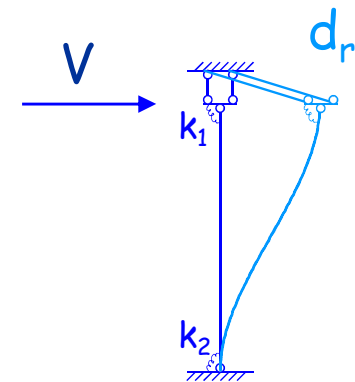
- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

Ora preferisco però usare sempre l'espressione generale

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6}}$$

$$\text{con } r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t} \quad r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$$

Note: dimezzare  $r$  se vi è solo il pilastro sup. o inf.  
 $r = 0$  se la trave è infinitamente rigida (incastro)



Modello  
di calcolo

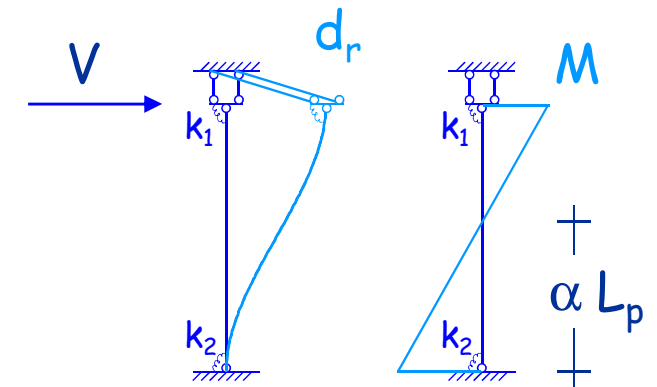
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

Dallo schema si può ottenere anche la  
posizione del punto di nullo di  $M$

Dista dalla base  $\alpha L_p$ , con

$$\alpha = 0.5 \frac{1 + r_1 / 3}{1 + r_1 / 6 + r_2 / 6}$$



Modello  
di calcolo

Note: dimezzare  $r$  se vi è solo il pilastro sup. o inf.  
 $r = 0$  se la trave è infinitamente rigida (incastro)

# Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

|                   |       |            |
|-------------------|-------|------------|
| pilastro          | 30x70 | $l=3.20$ m |
| travi             | 30x60 | $l=4.50$ m |
| $k = 30.60$ kN/mm |       |            |

|                   |       |            |
|-------------------|-------|------------|
| pilastro          | 70x30 | $l=3.20$ m |
| travi             | 30x60 | $l=4.50$ m |
| $k = 12.88$ kN/mm |       |            |

|                  |       |            |
|------------------|-------|------------|
| pilastro         | 30x70 | $l=3.20$ m |
| travi            | 60x24 | $l=4.50$ m |
| $k = 5.36$ kN/mm |       |            |

Vedi file Excel Rigidezza

# Rigidezza

Esempio, con solo travi a spessore:

|                  |       |            |
|------------------|-------|------------|
| pilastro         | 30x70 | $l=3.20$ m |
| travi            | 60x28 | $l=4.00$ m |
| $k = 9.19$ kN/mm |       |            |

|                  |       |            |
|------------------|-------|------------|
| pilastro         | 70x30 | $l=3.20$ m |
| travi            | 60x28 | $l=4.00$ m |
| $k = 6.50$ kN/mm |       |            |

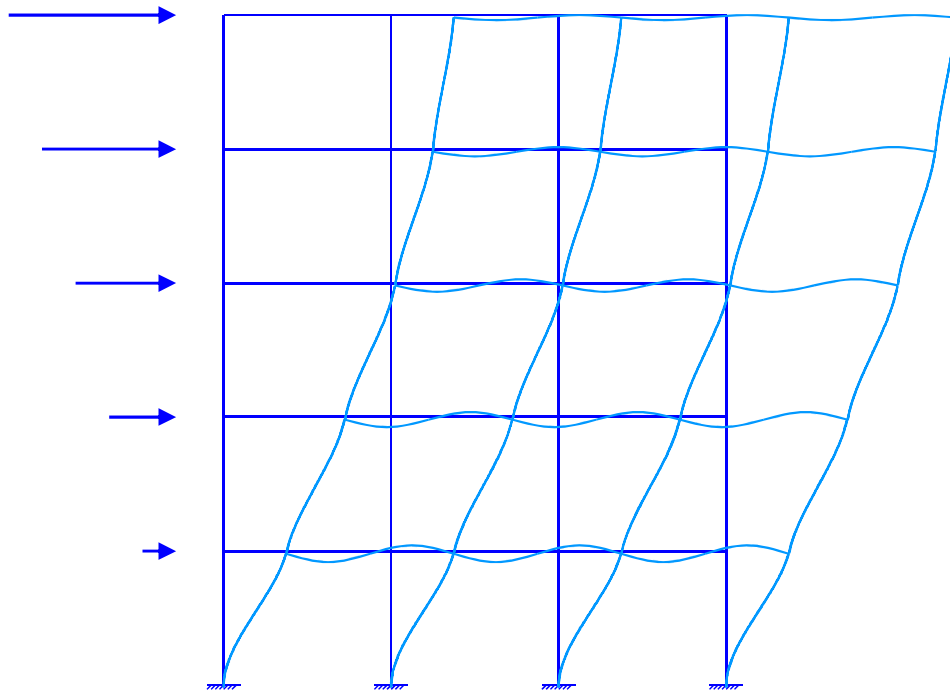
|                  |       |            |
|------------------|-------|------------|
| pilastro         | 30x70 | $l=3.20$ m |
| una sola trave   | 60x28 | $l=4.00$ m |
| $k = 4.82$ kN/mm |       |            |

Vedi file Excel Rigidezza

# Rigidezza

Nota:

- Le formule sono ricavate nell'ipotesi di rotazione uguale per tutti i nodi



Cadono in difetto se vi sono forti variazioni tra un pilastro e l'altro

In particolare nel caso di un pilastro di piatto tra due pilastri di coltello



In questo caso la rotazione del nodo centrale può essere nulla; valutare la rigidezza del pilastro centrale senza riduzioni

# Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

|                   |       |            |
|-------------------|-------|------------|
| pilastro          | 30x70 | $l=3.20$ m |
| travi             | 30x60 | $l=4.50$ m |
| $k = 30.60$ kN/mm |       |            |

|                   |       |            |
|-------------------|-------|------------|
| pilastro          | 70x30 | $l=3.20$ m |
| travi             | 30x60 | $l=4.50$ m |
| $k = 12.88$ kN/mm |       |            |

|                   |                 |            |
|-------------------|-----------------|------------|
| pilastro          | 70x30           | $l=3.20$ m |
| travi             | $\infty$ rigide |            |
| $k = 18.17$ kN/mm |                 |            |

Vedi file Excel Rigidezza

# Foglio di calcolo Rigidezza

|  |       |     |   |  |  |   |  |  |
|--|-------|-----|---|--|--|---|--|--|
| <b>Superiormente</b><br>esiste un pilastro al di sopra ▼             |       |     | <b>pilastro</b><br>b 30 cm<br>h 70 cm<br>Lp 3.20 m                      |  |  | k (t=inf) 98.92 kN/mm<br>riduzione 0.309      |  |  |
|  |       |     |   |  |  | k 30.60 kN/mm                                 |  |  |
| <b>Inferiormente</b><br>esiste un pilastro al di sotto ▼             |       |     |   |  |  | punto di nullo di M a 0.500 da base           |  |  |
| <b>Travi superiori e inferiori</b><br>diverse tra loro ▼             |       |     | <b>travi superiori</b><br>trave sx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt 4.50 m   |  |  | trave dx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt 4.50 m   |  |  |
| <b>Travi a destra e sinistra</b><br>due, dx e sx, diverse tra loro ▼ |       |     | <b>travi inferiori</b><br>trave sx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt come sup |  |  | trave dx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt come sup |  |  |
| E  | 31500 | MPa |   |  |  |   |  |  |

In **rosso** i dati da inserire

Caselle a discesa per selezionare le possibili situazioni

In **blu** i risultati forniti



# Foglio di calcolo Rigidezza

| Superiormente                             |   |
|---|---|
| esiste un pilastro al di sopra            | ▼ |
| non esiste pilastro al di sopra           |   |
| esiste un pilastro al di sopra            |   |
| la trave superiore è infinitamente rigida |   |

$r_1$  si dimezza

caso standard

$r_1 = 0$

| Inferiormente                             |   |
|---|---|
| esiste un pilastro al di sotto            | ▼ |
| non esiste pilastro al di sotto           |   |
| esiste un pilastro al di sotto            |   |
| la trave inferiore è infinitamente rigida |   |
| il pilastro è incastrato alla base        |   |

$r_2$  si dimezza

caso standard

$r_2 = 0$

| Travi superiori e inferiori |   |
|-----------------------------|---|
| diverse tra loro            | ▼ |
| uguali tra loro             |   |
| diverse tra loro            |   |

| Travi a destra e sinistra      |   |
|--------------------------------|---|
| due, dx e sx, diverse tra loro | ▼ |
| una sola                       |   |
| due, dx e sx, diverse tra loro |   |
| due, dx e sx, uguali tra loro  |   |

# Foglio di calcolo Rigidezza



Nota: nel foglio di calcolo è inserita una protezione, per evitare che si inseriscano valori in celle sbagliate. La protezione è senza password e può essere rimossa se si vuole modificare il file

# Foglio di calcolo Rigidezza

|  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <b>Superiormente</b><br>non esiste pilastro al di sopra            |  |  | <b>pilastro</b><br>b 30 cm<br>h 70 cm<br>Lp 3.20 m                        |  |  | k (t=inf) 98.92 kN/mm<br>riduzione 0.383   |  |  | non esiste pilastro al di sopra<br>esiste un pilastro al di sopra<br>la trave superiore è infinitamente rigida                                       |  |  |
| <b>Inferiormente</b><br>esiste un pilastro al di sotto             |  |  |   |  |  | punto di nullo di M a 0.440 da base  |  |  | non esiste pilastro al di sotto<br>esiste un pilastro al di sotto<br>la trave inferiore è infinitamente rigida<br>il pilastro è incastrato alla base |  |  |
| <b>Travi superiori e inferiori</b><br>uguali tra loro              |  |  | <b>travi (inf=sup)</b><br>trave sx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt 4.50 m     |  |  | trave dx<br>b 30 cm<br>h 60 cm<br>Lt 4.50 m  |  |  | uguali tra loro<br>diverse tra loro  |  |  |
| <b>Travi a destra e sinistra</b><br>due, dx e sx, diverse tra loro |  |  |   |  |  |  |  |  | una sola<br>due, dx e sx, diverse tra loro<br>due, dx e sx, uguali tra loro  |  |  |
| E 31500 MPa  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
| lp 857500 cm4<br>E lp / Lp 8.44E+07 kN mm                          |  |  | sx 60 lt,sup 1080000 cm4<br>60 E lt,s / Lt 7.56E+07 kN mm<br>4.50 r1 1.12 |  |  | 30 30 dx 30 lt,inf 540000 cm4<br>60 60 E lt,i / Lt 3.78E+07 kN mm<br>4.50 4.50 r2 2.23 |  |  |  |  |  |

Nel foglio sono presenti zone che contengono valori intermedi di calcolo, da non modificare (sono visibili in carattere grigio chiaro)

# Ma è questa in realtà la rigidità?

- Attenzione:  
le riflessioni che seguono possono aprire la mente a nuovi orizzonti,  
ma potrebbero anche nuocere gravemente alla salute mentale

# Ma è questa in realtà la rigidezza?

Idea base, finora seguita nel valutare la rigidezza:

- La lunghezza dell'asta va da nodo a nodo
- La sezione trasversale dell'asta è pari alla sezione geometrica (esempio: 30x70)

termini di riferimento:

In realtà bisognerebbe tener conto del fatto che:

- Il nodo (parte di sovrapposizione tra trave e pilastro) ha dimensioni non trascurabili ed è abbastanza rigido, la parte di asta che si deforma è quella tra i fili esterni dei nodi
- Il calcestruzzo dell'asta si fessura, la parte tesa non deve essere considerata nel valutare la rigidezza

offset

rigidezza fessurata

# Ma è questa in realtà la rigidezza?

## Offset (o "tratti rigidi")

- I programmi commerciali spesso li inseriscono automaticamente nel modello, principalmente per motivi geometrici (compensare il disassamento delle aste e mostrare una immagine "verosimile" della struttura)
- La presenza di offset fa aumentare la rigidezza delle aste in funzione del cubo del rapporto tra lunghezza nominale e lunghezza netta  
esempio: se i tratti rigidi sono complessivamente  $1/10$  della lunghezza dell'asta la sua rigidezza aumenta di quasi il 40%;  
se sono  $1/5$  la rigidezza è quasi raddoppiata, cioè aumentata del 100%

# Ma è questa in realtà la rigidezza?

## Rigidezza fessurata

- La norma dice di considerarla

“In caso non siano effettuate analisi specifiche, la rigidezza ... può essere ridotta fino al 50% della rigidezza dei corrispondenti elementi non fessurati, tenendo debitamente conto dell'influenza della sollecitazione assiale permanente” (NTC08, punto 7.2.6)

- La riduzione dovrebbe essere differenziata tra i singoli elementi, non effettuata in maniera uguale per tutti
- Mancano indicazioni “ufficiali” su come quantizzarla

# Ma è questa in realtà la rigidezza?

Quanto dobbiamo preoccuparcene?

- Offset e rigidezza fessurata hanno effetti opposti, che in parte si compensano (se sono considerati entrambi)
- Usare solo offset e niente rigidezza fessurata o non usare offset e considerare la rigidezza fessurata può portare a risultati diversi
- ... ma probabilmente il comportamento ultimo di strutture progettate bene (cioè rispettando le gerarchie di resistenze) non è molto condizionato da questo problema