Dalla dinamica
alla normativa sismica

Sistemi a un grado di libertà:
studio del comportamento elastico

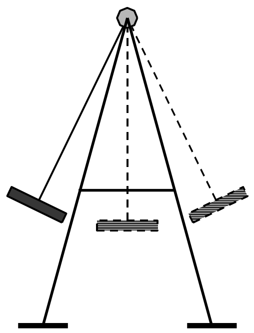
Catania, 1 aprile 2004

Bruno Biondi

Aurelio Ghersi

Oscillazioni libere

Esempio: altalena



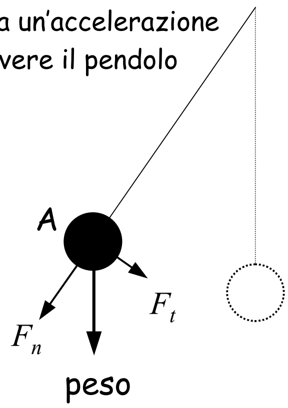
Spostando il sedile dell'altalena e poi lasciandolo libero, esso oscilla con un periodo T ben preciso

Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

F_n assorbita dall'asta del pendolo

F_t che provoca un'accelerazione che fa muovere il pendolo

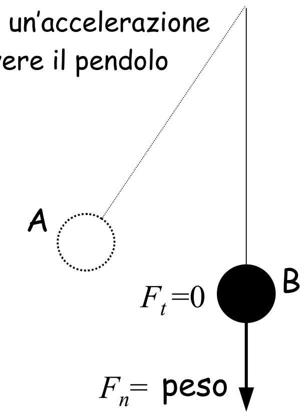


Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

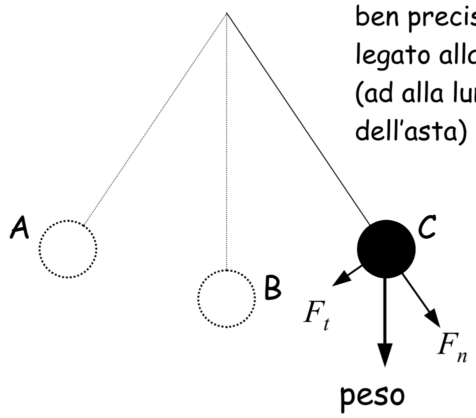
F_n assorbita dall'asta del pendolo

F_t che provoca un'accelerazione che fa muovere il pendolo



B) In questa posizione la velocità è massima (quando inizia a risalire rallenta) ma l'accelerazione è nulla perché F_t = 0

Oscillazioni libere
pendolo (esempio: altalena)

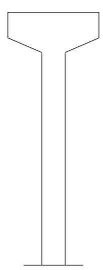


Il pendolo oscilla con un periodo T ben preciso, legato alla massa (ad alla lunghezza dell'asta)

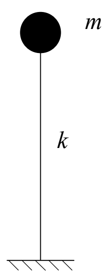
Oscillazioni libere
struttura a un grado di libertà

Serbatoio pensile

Foto



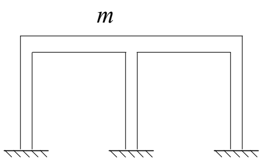
Disegno schematico

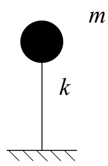


Modello di calcolo

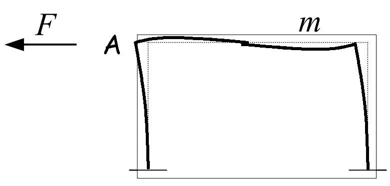
Oscillazioni libere
struttura a un grado di libertà

Telaio monopiano





Oscillazioni libere
telaio monopiano

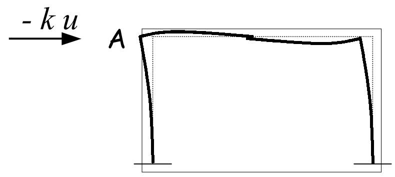


A) Per deformare il telaio in questa posizione occorre applicare una forza F, uguale ed opposta alla forza elastica che tende a riportare il telaio alla posizione indeformata (forza di richiamo elastico).

Equilibrio statico

$$F = k\ u$$

Oscillazioni libere
telaio monopiano



Lo spostamento è funzione del tempo

$$u = u(t)$$

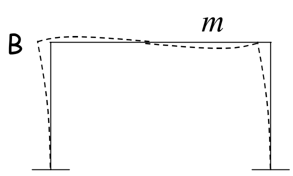
$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2 u(t)}{d t^2}$$

Quando si lascia libero il telaio, agisce solo la forza di richiamo elastico, che provoca un'accelerazione.

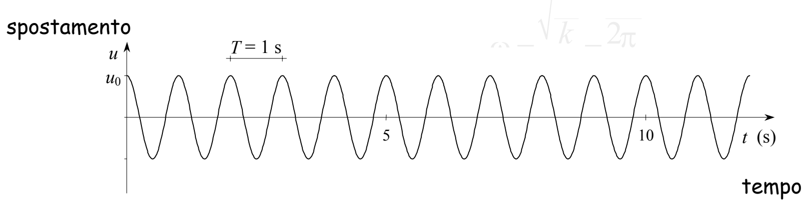
Equazione di equilibrio dinamico

$$-k\, u(t) = m\, a(t) \qquad m\, \ddot{u}(t) + k\, u(t) = 0$$

Oscillazioni libere
telaio monopiano

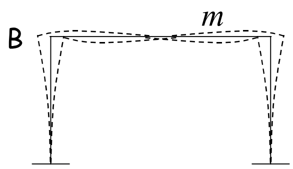


B) Tornato nella posizione indeformata, la velocità è massima e l'accelerazione nulla (come la forza di richiamo elastico).

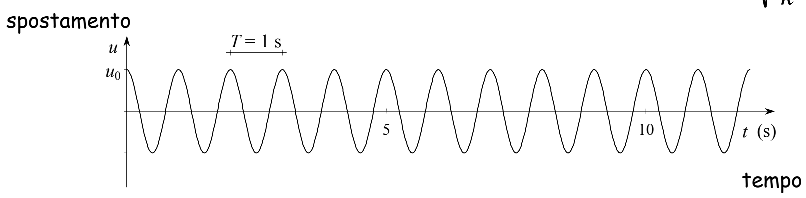


Oscillazioni libere
telaio monopiano

Il telaio oscilla con un periodo ben preciso, legato alla massa ed anche alla rigidezza del telaio

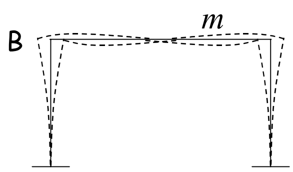


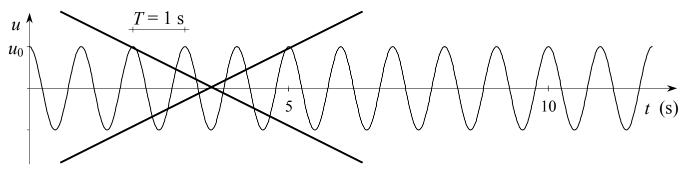
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Oscillazioni libere con smorzamento
telaio monopiano

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)



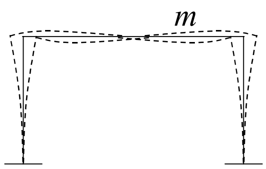


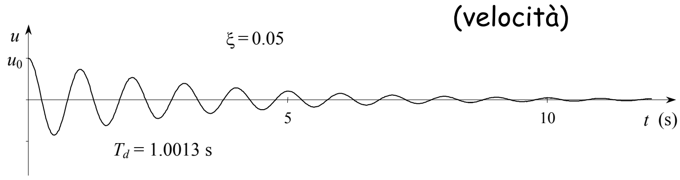
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano

Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

La forza di smorzamento si suppone legato alla variazione di spostamento (velocità)



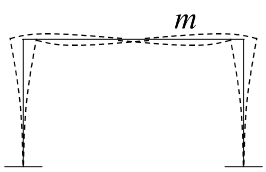


Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano

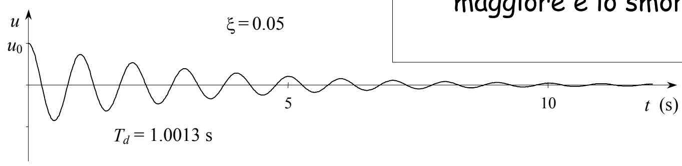
$$u(t) = \exp\{-\xi\omega t\}\left[c_1 \operatorname{sen}(\omega_d t) + c_2 \cos(\omega_d t)\right]$$

Equazione del moto:

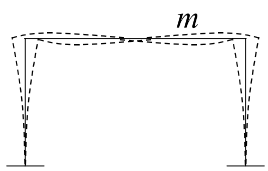
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$



L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



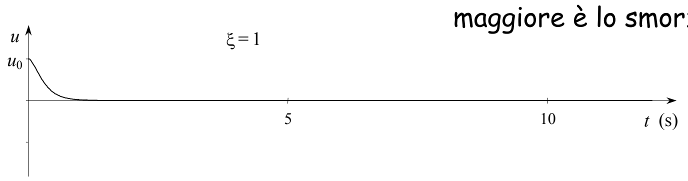
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



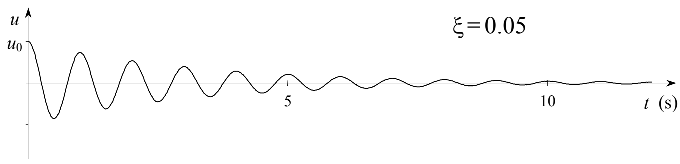
Equazione del moto:

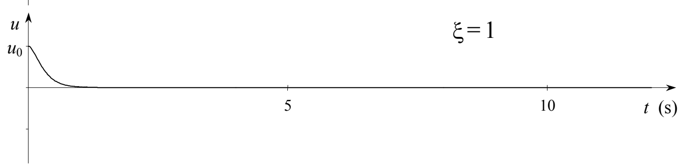
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano





Si indica col termine "smorzamento critico" quel valore per il quale il sistema raggiunge lo stato di quiete senza oscillare

Lo smorzamento viene di solito indicato come percentuale ξ dello smorzamento critico $\xi = \dfrac{c}{2\sqrt{k\,m}}$

Smorzamento – negli edifici

Dipende da:

- Elementi non strutturali (tramezzi, tompagni) molto
- Non linearità del materiale di meno

Edifici in cemento armato, con tramezzi in muratura:

- Si può assumere un valore di smorzamento percentuale $\xi = 0.05$

Edifici in acciaio, con tramezzatura leggera:

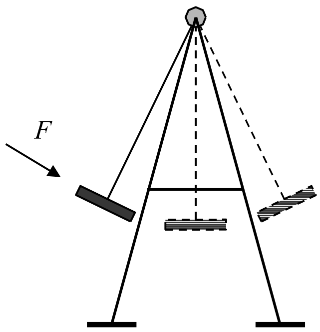
- È consigliabile usare un valore minore di $\xi = 0.05$

Edifici isolati alla base, con isolatori in gomma:

- Si può usare un valore maggiore di $\xi = 0.05$

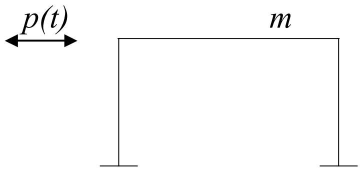
Oscillazioni forzate

Esempio: altalena



Dando (in maniera periodica) una piccola spinta al sedile dell'altalena, le oscillazioni si amplificano sempre di più

Oscillazioni forzate
telaio monopiano



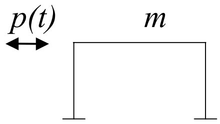
Equazione del moto:

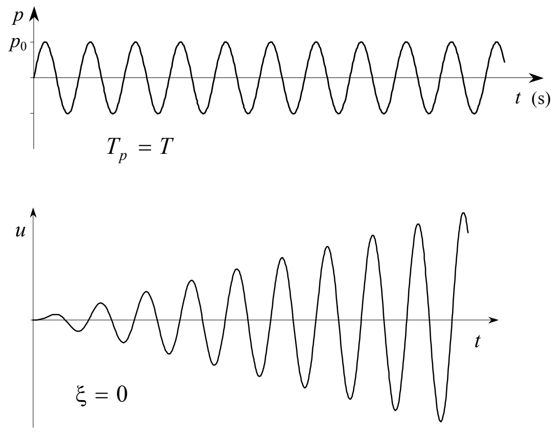
$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = p(t)$$

Nell'equazione del moto compare un nuovo termine (l'azione forzante)

$$u(t)=\exp\{-\xi\omega t\}\left[c_1 \mathrm{sen}(\omega_d t)+c_2\cos(\omega_d t)\right]+$$
$$+\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)\exp\{-\xi\omega(t-\tau)\}\mathrm{sen}\left(\omega_d(t-\tau)\right)d\tau$$

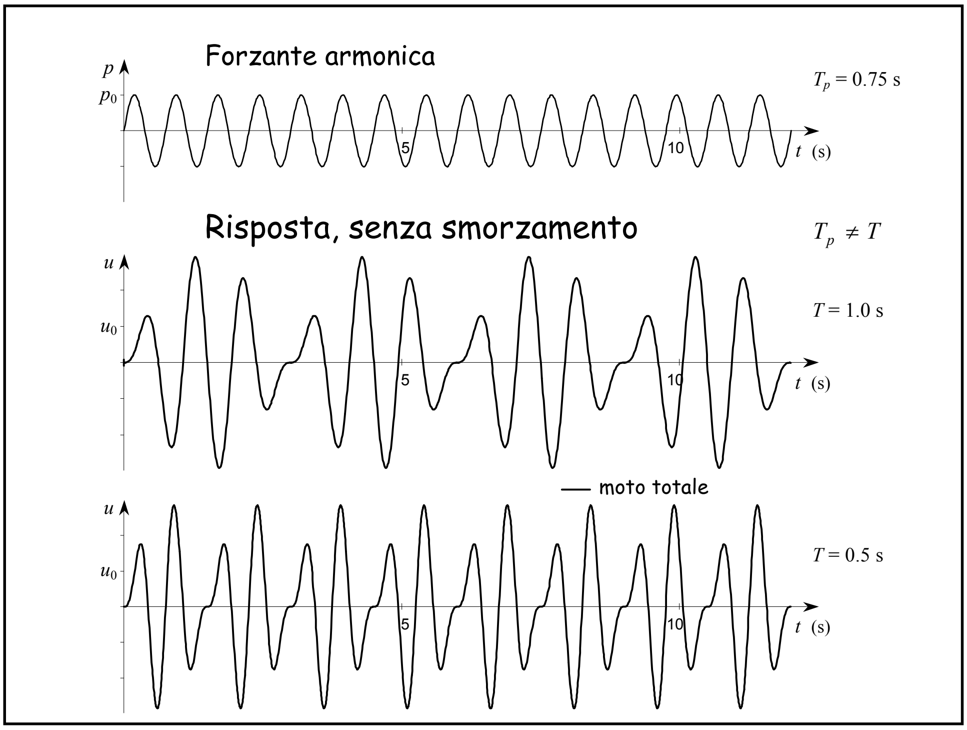
Oscillazioni forzate
telaio monopiano

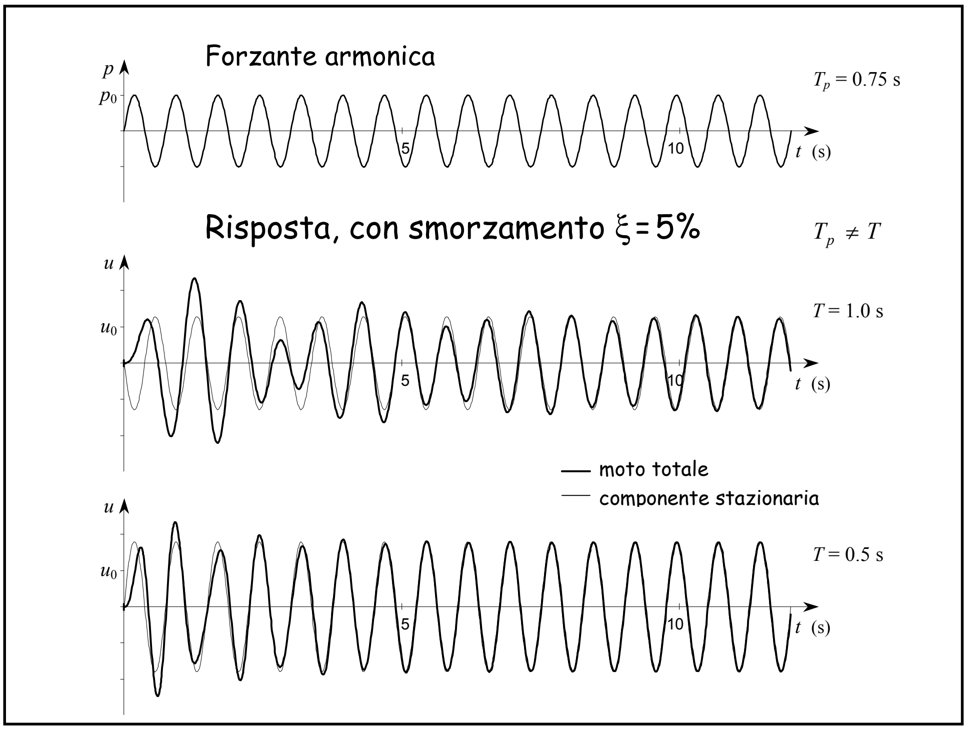




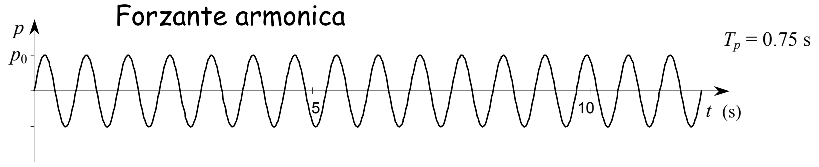
Se il periodo della forzante coincide con quello del sistema, in assenza di smorzamento il moto si amplifica sempre più

risonanza

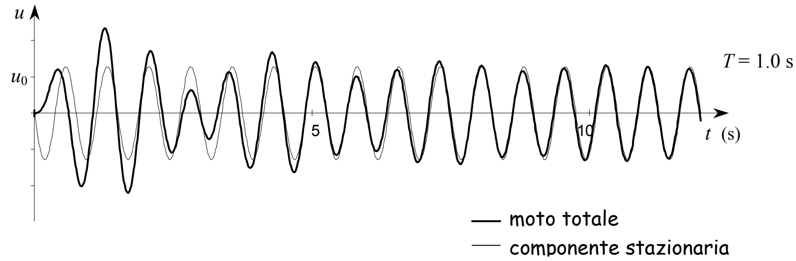

Forzante armonica
p
p0
Tp = 0.75 s
5
10
t (s)
Risposta, senza smorzamento
Tp ≠ T
u
u0
T = 1.0 s
5
10
t (s)
moto totale
u
u0
T = 0.5 s
5
10
t (s)


Forzante armonica
p
p0
Tp = 0.75 s
5
10
t (s)
Risposta, con smorzamento ξ=5%
Tp ≠ T
u
u0
T = 1.0 s
5
10
t (s)
moto totale
componente stazionaria
u
u0
T = 0.5 s
5
10
t (s)

Forzante armonica

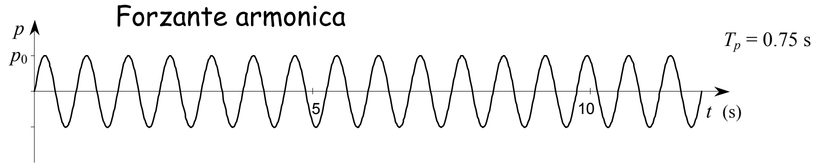


Risposta, con smorzamento $\xi = 5\%$

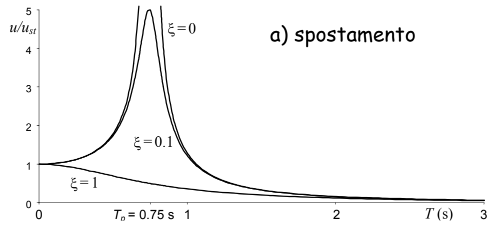


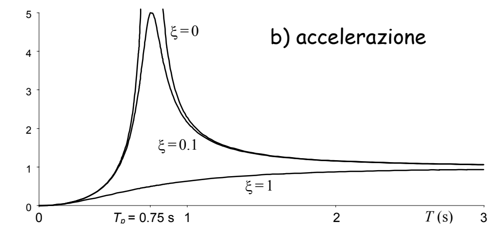
Il moto è somma di una componente armonica che ha lo stesso periodo della forzante ed ampiezza costante(componente stazionaria) e di una componente che ha lo stesso periodo del sistema ma ampiezza che si riduce man mano (componente transitoria)

Forzante armonica

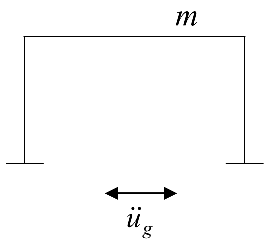


Il moto viene amplificato o ridotto, in funzione del periodo proprio e dello smorzamento del sistema





Oscillazioni forzate
(moto del terreno)



Equazione del moto

$$m\,\ddot{u}_{TOT}(t) + c\,\dot{u}(t) + k\,u(t) = 0$$

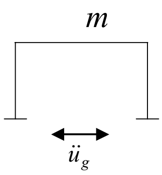
$$\ddot{u}_{TOT}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$$

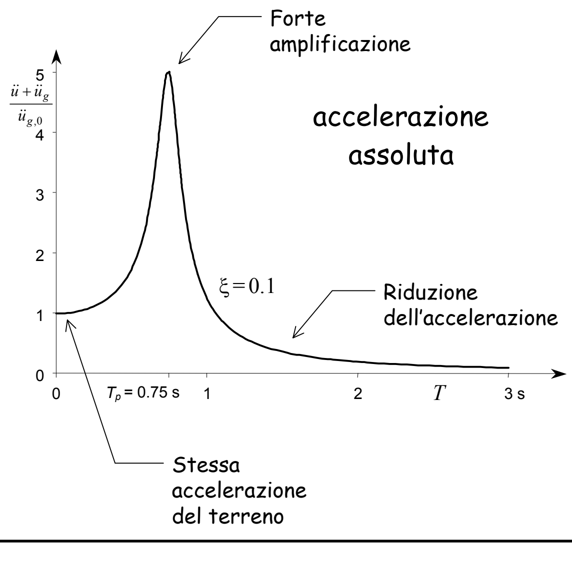
$$m\,\ddot{u}(t) + c\,\dot{u}(t) + k\,u(t) = -m\,\ddot{u}_g(t)$$

Cambia (formalmente) il termine noto nell'equazione del moto

Il problema è sostanzialmente identico a quello del moto con forzante applicata al traverso

Oscillazioni forzate
(moto del terreno)





Si noti, in particolare, l'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio

Relazione tra i valori massimi
di spostamento relativo e accelerazione assoluta

Equazione del moto:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\,\ddot{u}_g$$

Quando lo spostamento relativo u è massimo la sua derivata è nulla

$$u = u_{\max} \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = 0$$

Si ha allora:

$$m\,\ddot{u} + k\,u_{\max} = -m\,\ddot{u}_g$$

$$k\,u_{\max} = -m\,(\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

$$\left|\ddot{u} + \ddot{u}_g\right|_{\max} = \frac{k}{m}\,u_{\max} = \left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 u_{\max} \qquad \text{perché} \quad T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Relazione tra i valori massimi
di spostamento relativo e accelerazione assoluta

La quantità $\left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 u_{\max}$ viene detta pseudoaccelerazione

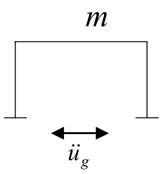
Essa coincide con l'accelerazione assoluta quando lo smorzamento è nullo

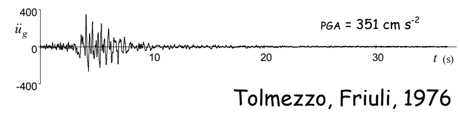
L'accelerazione assoluta massima e la pseudoaccelerazione massima a rigore sono diverse, ma in sostanza sono praticamente coincidenti

La relazione $\quad \left|\ddot{u} + \ddot{u}_g\right| = \left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 u$

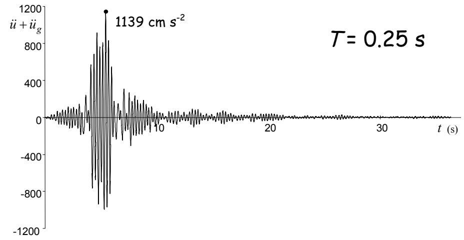
consente di passare dai valori massimi dello spostamento a quelli massimi dell'accelerazione assoluta, e viceversa

Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





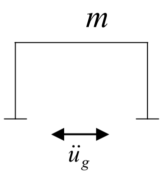
Tolmezzo, Friuli, 1976

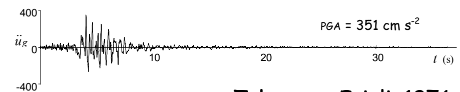


T= 0.25 s

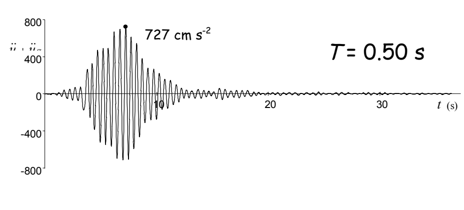
Concettualmente analogo (ma più complesso numericamente) è determinare la risposta ad un accelerogramma

Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





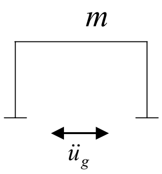
Tolmezzo, Friuli, 1976

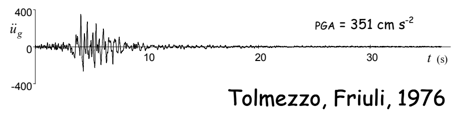


T= 0.50 s

Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta

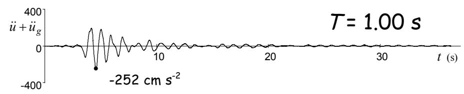
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)





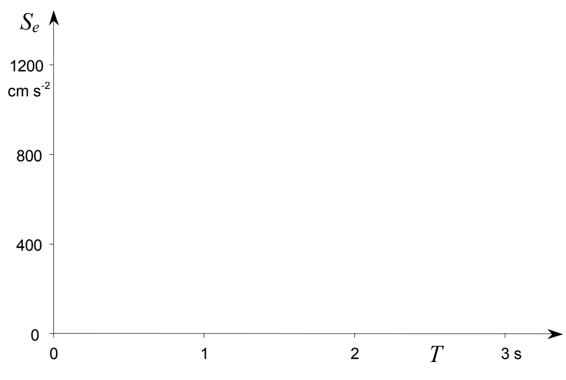
Tolmezzo, Friuli, 1976

Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



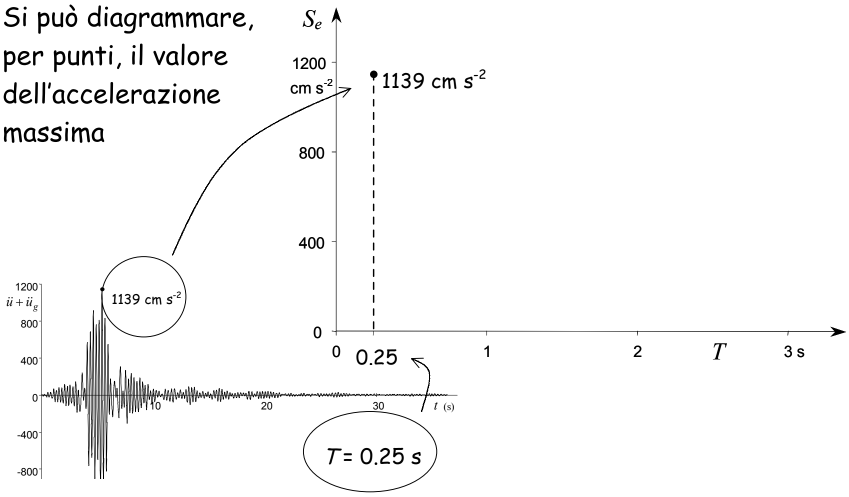
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



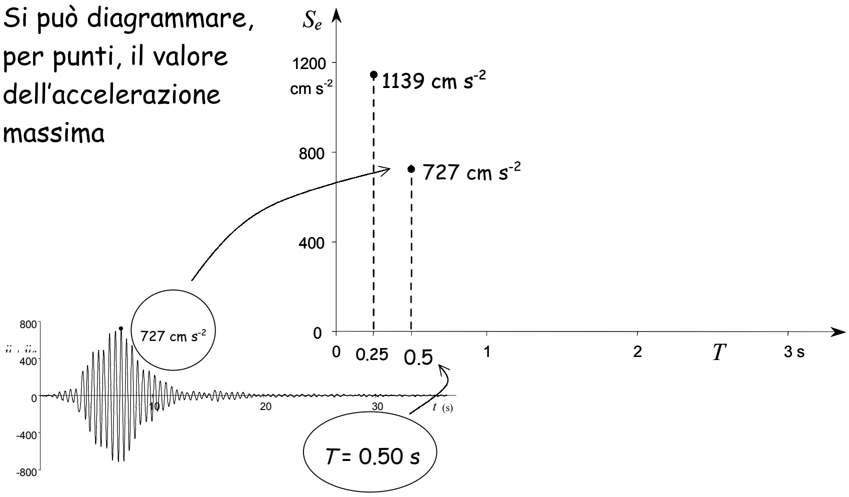
Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate
(moto del terreno - accelerogramma)

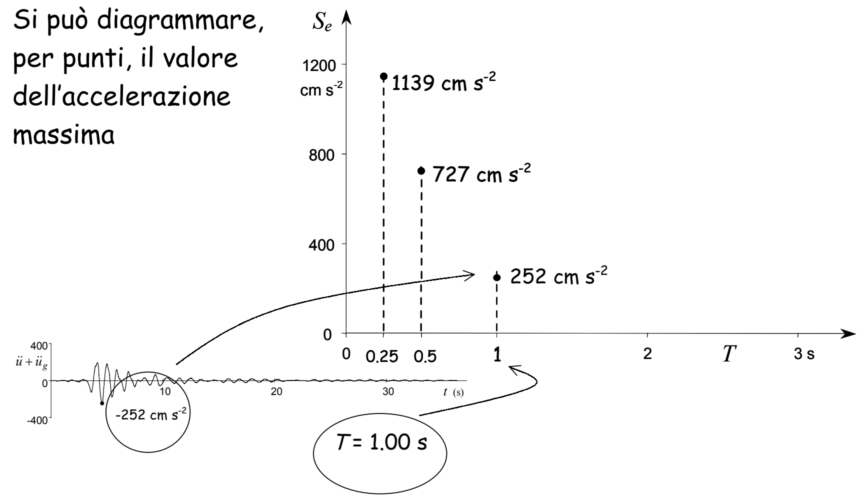
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)

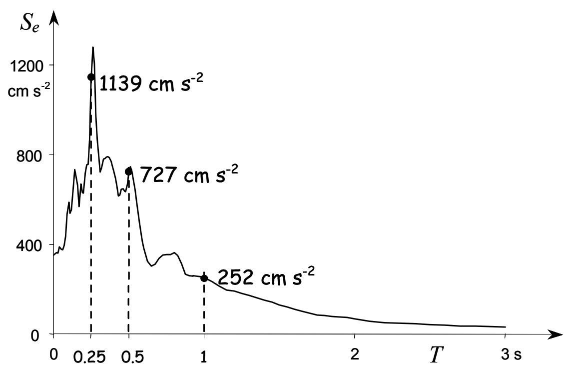
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate

Spettro di risposta

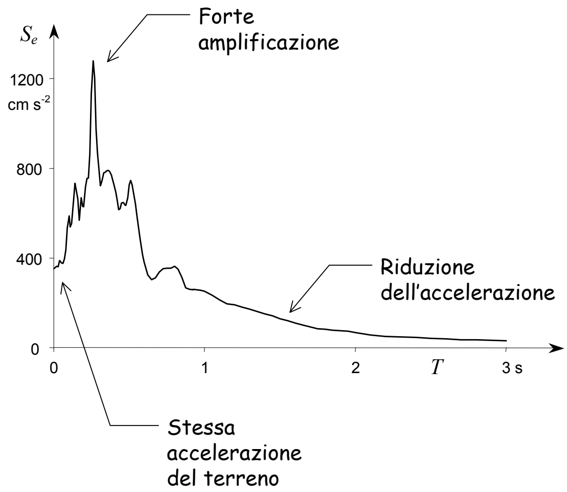
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Il diagramma ottenuto unendo i vari punti viene detto "spettro di risposta" (in termini di accelerazione)

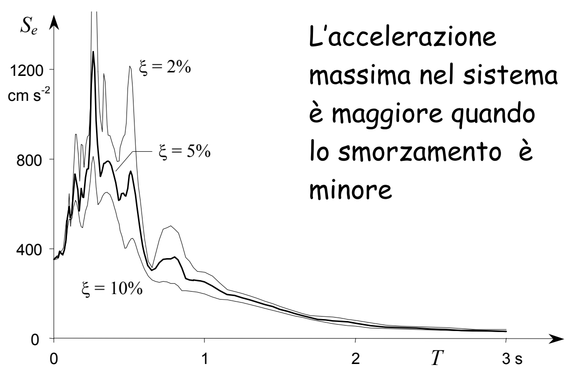
Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (accelerazione)

L'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio è analogo a quanto visto per moto del terreno armonico



Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (accelerazione)

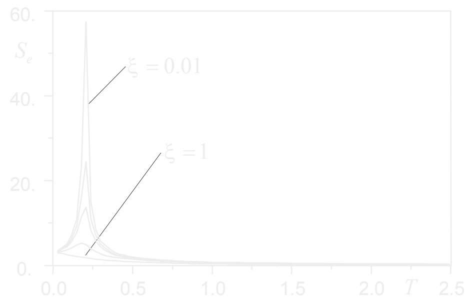
Al variare dello smorzamento si ottengono diverse curve



L'accelerazione massima nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore

Spettro di risposta
(accelerazione armonica)

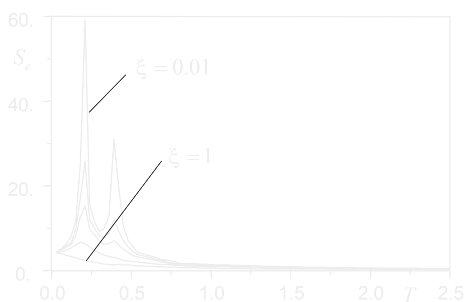
$$\ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_0\,\mathrm{sen}(\omega_g t) \qquad \ddot{u}_0=3.0\left[m/\sec^2\right] \qquad T_g=\frac{2\pi}{\omega_g}=0.2\,[\sec]$$



Sono maggiormente sollecitati gli oscillatori con periodo prossimo a quello dell'accelerazione

Spettro di risposta
(accelerazione armonica)

$$\ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{0,1}\,\mathrm{sen}(\omega_{g,1}t)+\ddot{u}_{0,2}\,\mathrm{sen}(\omega_{g,2}t) \qquad T_{g,1}=0.2\,[\sec] \qquad T_{g,2}=0.4\,[\sec]$$

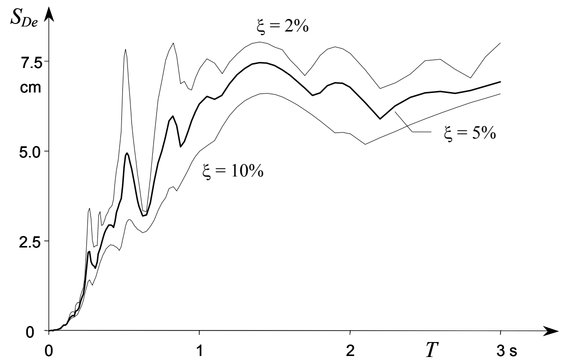


Un accelerogramma reale può essere inteso come la somma di infinite armoniche

$$\ddot{u}_g(t)=\sum^{\infty}\ddot{u}_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t)$$

Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (spostamento)

Allo stesso modo si può diagrammare lo spostamento relativo massimo in funzione del periodo

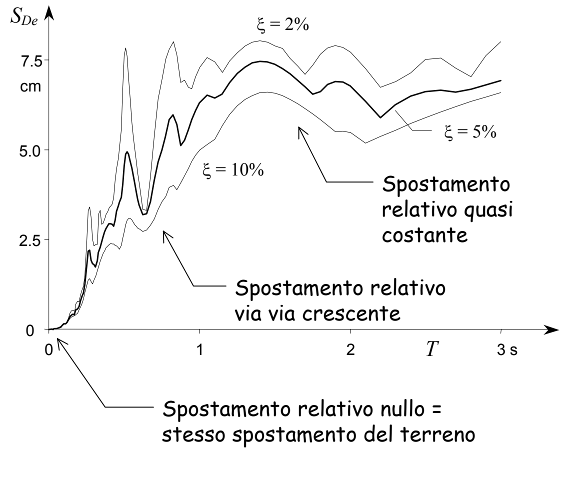


Il diagramma così ottenuto viene detto "spettro di risposta" (in termini di spostamento)

Oscillazioni forzate
Spettro di risposta (spostamento)

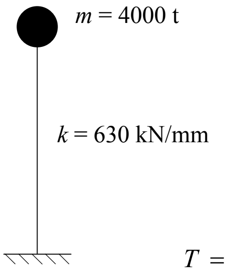
Si noti l'andamento dello spostamento relativo massima in funzione del periodo proprio

Lo spostamento massimo nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore



A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

Conoscendo
massa e rigidezza
possiamo
determinare il
periodo proprio

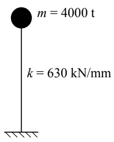
$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4000 \times 10^3}{630 \times 10^6}} =$$

$$= 0.5 \text{ s}$$

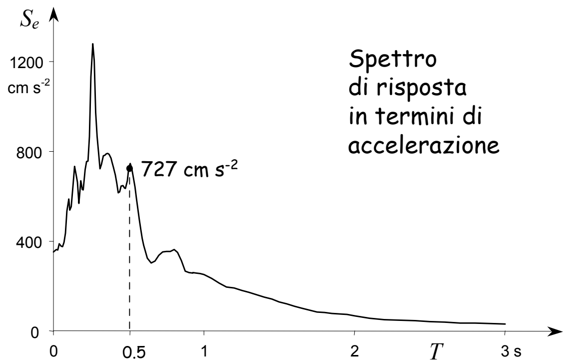
A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s

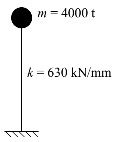


Spettro
di risposta
in termini di
accelerazione

Noto il periodo proprio, possiamo leggere
dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{max} = 7.27 \text{ m s}^{-2} = 0.74 \text{ g}$

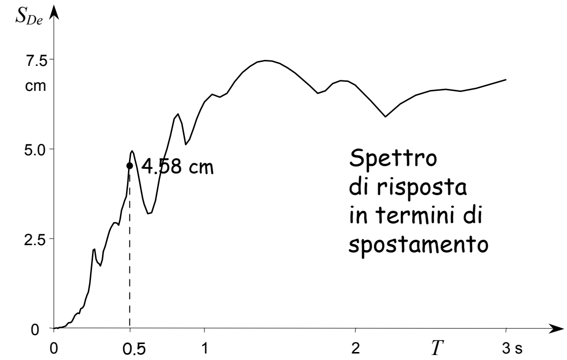
A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s

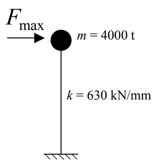


Noto il periodo proprio, possiamo leggere
dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{max} = 7.27 \text{ m s}^{-2} = 0.74 \text{ g}$

o lo spostamento relativo massimo $u_{max} = 4.58 \text{ cm}$

A cosa servono gli spettri?

Foto



Modello
di calcolo

$T = 0.5$ s

Ma dall'accelerazione
possiamo ricavare anche la
massima forza d'inerzia

$$F_{max} = m \, a_{max} = 4000 \times 7.27 = 2900 \text{ kN}$$

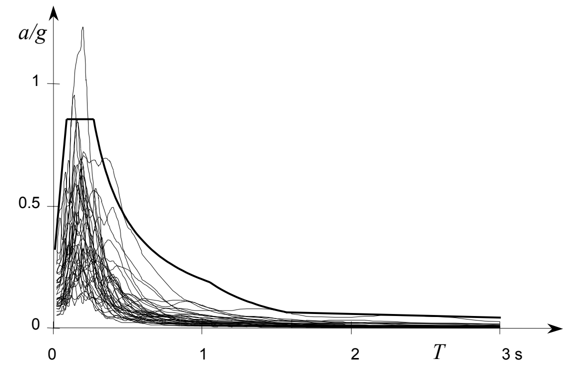
e quindi le massime
sollecitazioni nella struttura

Noto il periodo proprio, possiamo leggere
dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{max} = 7.27 \text{ m s}^{-2} = 0.74 \text{ g}$

o lo spostamento relativo massimo $u_{max} = 4.58 \text{ cm}$

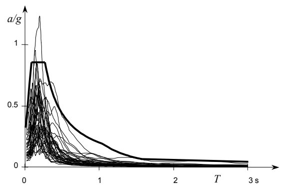
Spettri di risposta

L’analisi può essere ripetuta per diversi accelerogrammi (con un assegnato smorzamento)

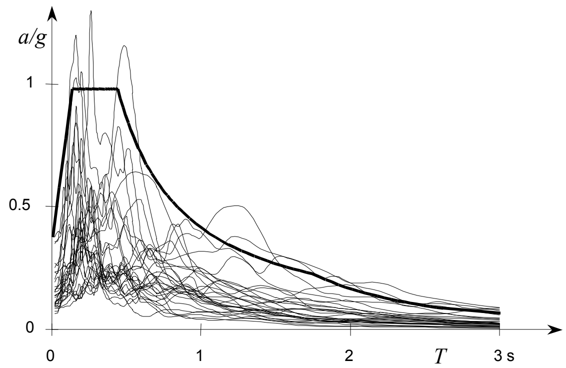


Si può quindi definire una curva che inviluppa tutti gli spettri di risposta, o che viene superata solo occasionalmente

Spettri di risposta

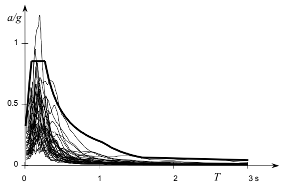


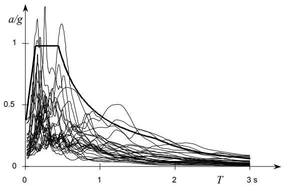
In zone differenti e su terreni differenti si otterranno risultati diversi



Si può quindi definire una curva che inviluppa tutti gli spettri di risposta, o che viene superata solo occasionalmente

Spettri di risposta

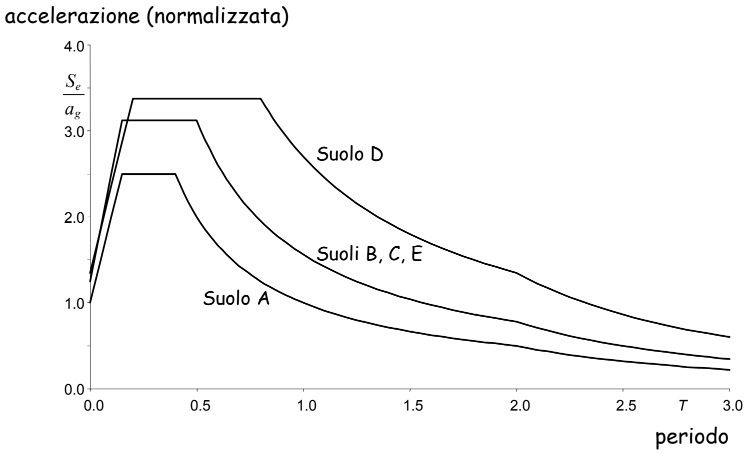




In zone differenti e su terreni differenti si otterranno risultati diversi

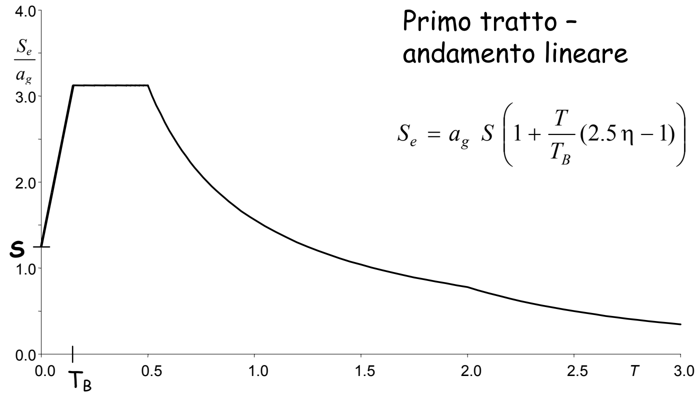
La normativa fornisce quindi spettri di risposta differenziati in funzione delle caratteristiche del suolo e della zona in cui è ubicata la struttura

Spettri di risposta elastica di normativa



Ordinanza 3274, punto 3.2.3

Spettri di risposta elastica di normativa



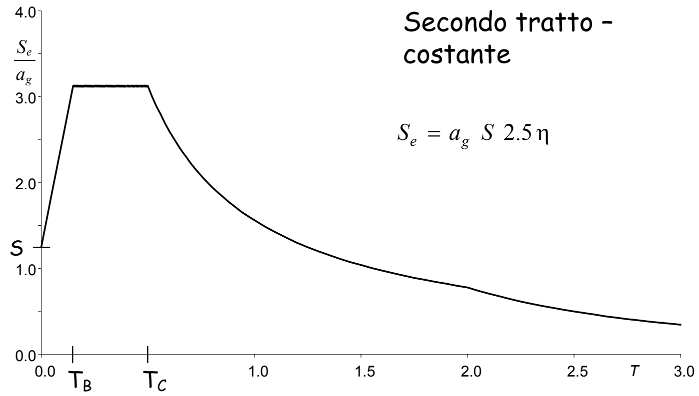
Primo tratto – andamento lineare

$$S_e = a_g\ S\left(1 + \frac{T}{T_B}(2.5\,\eta - 1)\right)$$

Amplificazione, legata al tipo di terreno

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5+\xi}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa

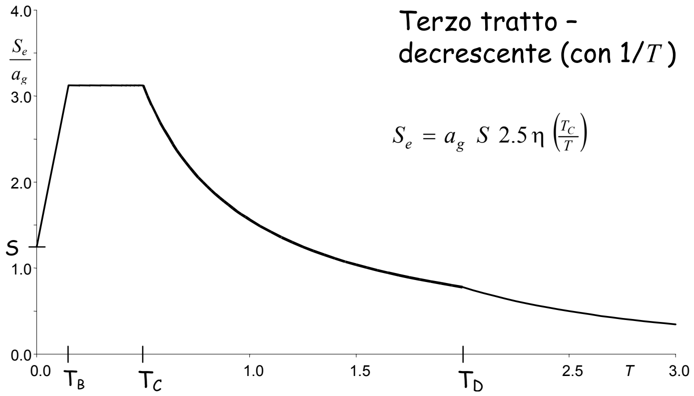


Secondo tratto – costante

$$S_e = a_g\ S\ 2.5\,\eta$$

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5+\xi}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa

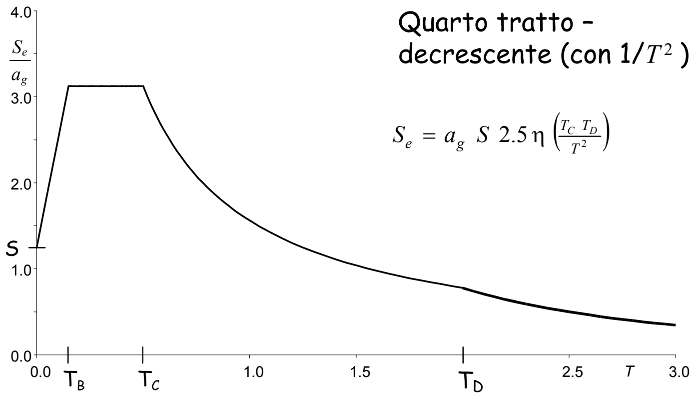


Terzo tratto –
decrescente (con $1/T$)

$$S_e = a_g \; S \; 2.5\,\eta \left(\frac{T_C}{T}\right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5+\xi}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa

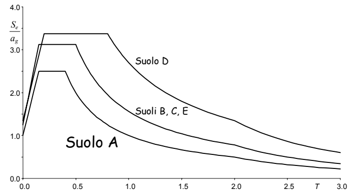


Quarto tratto –
decrescente (con $1/T^2$)

$$S_e = a_g \; S \; 2.5\,\eta \left(\frac{T_C \; T_D}{T^2}\right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5+\xi}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa



Suolo A

Formazioni litoidi o suoli omogenei molto rigidi

V_{S30} > 800 m/s

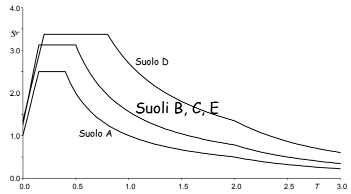
S = 1 T_A = 0.15 s T_B = 0.4 s

V_{S30}

Velocità media di propagazione delle onde di taglio nei 30 m superiori del suolo

$$V_{S30} = \frac{30}{\sum \frac{h_i}{V_{Si}}}$$

Spettri di risposta elastica di normativa



Suolo B

Depositi di sabbi e ghiaie molto addensate o argille molto consistenti

360 m/s < V_{S30} < 800 m/s

Resistenza penetrometrica N_{SPT} > 50

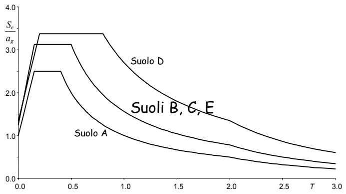
Coesione non drenata c_u > 250 kPa

S = 1.25 T_A = 0.15 s T_B = 0.5 s

V_{S30}

Velocità media di propagazione delle onde di taglio nei 30 m superiori del suolo

Spettri di risposta elastica di normativa



V_{S30}

Velocità media di propagazione delle onde di taglio nei 30 m superiori del suolo

Suolo C

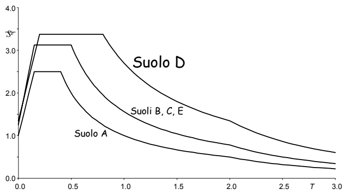
Depositi di sabbi e ghiaie mediamente addensate o argille di media consistenza

180 m/s < V_{S30} < 360 m/s

Resistenza penetrometrica
15 < N_{SPT} < 50

Coesione non drenata
70 < c_u < 250 kPa

Spettri di risposta elastica di normativa



S = 1.35 T_A = 0.2 s T_B = 0.8 s

V_{S30}

Velocità media di propagazione delle onde di taglio nei 30 m superiori del suolo

Suolo D

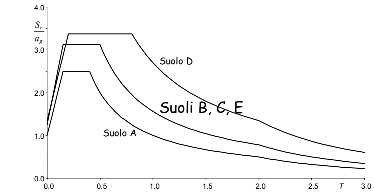
Depositi di terreni granulari da sciolti a poco addensati oppure coesivi da poco a mediamente consistenti

V_{S30} < 180 m/s

Resistenza penetrometrica
N_{SPT} < 15

Coesione non drenata
c_u < 70 kPa

Spettri di risposta elastica di normativa



Suolo E

Strati superficiali alluvionali, di caratteristiche simili ai tipi C e D e spessore tra 5 e 20 m, su un substrato più rigido con V_{S30} > 800 m/s

V_{S30}

Velocità media di propagazione delle onde di taglio nei 30 m superiori del suolo

Spettri di risposta elastica di normativa

Suolo S1

Depositi con strato di almeno 10 m di argille di bassa consistenza ed elevato indice di plasticità e contenuto di acqua

V_{S30} < 100 m/s

Coesione non drenata
$10 < c_u < 20$ kPa

Suolo S2

Depositi di terreni soggetti a liquefazione

Per questi tipi di terreno occorrono studi speciali

Esempio

Dall'alto:

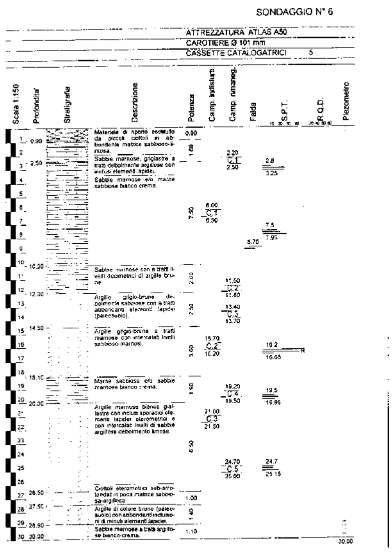
12 m – sabbie marnose
N_{SPT} = 26

6.1 m – argille grigio-brune
N_{SPT} = 47

1.9 m - marne sabbiose
N_{SPT} = 16

6.5 m – argille marnose
N_{SPT} = 18

3.5 m – ciottoli, argille brune
N_{SPT} = 40



Esempio

Dall'alto:

12 m – sabbie marnose
N_{SPT} = 26

6.1 m – argille grigio-brune
N_{SPT} = 47

1.9 m - marne sabbiose
N_{SPT} = 16

6.5 m – argille marnose
N_{SPT} = 18

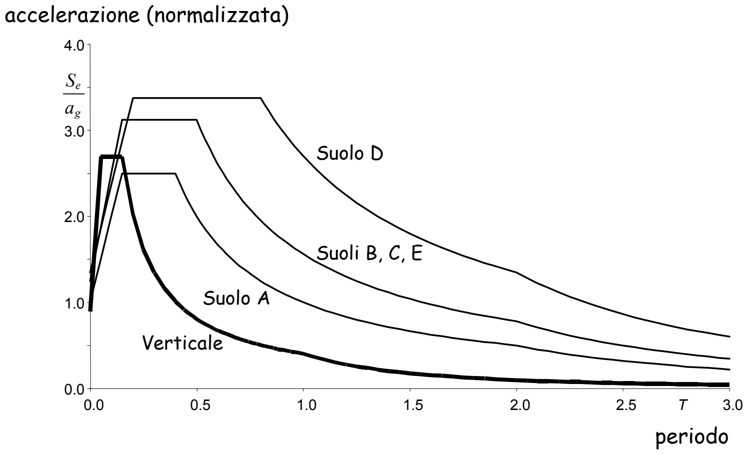
3.5 m – ciottoli, argille brune
N_{SPT} = 40

$$N_{SPT} = \frac{30}{\frac{12}{26} + \frac{6.1}{47} + \frac{1.9}{16} + \frac{6.5}{18} + \frac{3.5}{40}}$$

N_{SPT} = 25.9

Si può considerare suolo di tipo C, perché $15 < N_{SPT} < 50$

Spettri di risposta elastica di normativa
accelerazioni orizzontali e verticali



Spettri di risposta elastica di normativa

L'accelerazione di picco del terreno a_g
da utilizzare per verifiche allo stato limite ultimo,
cioè per terremoti con alto periodo di ritorno,
dipende dalla sismicità della zona

zona	a_g
1	0.35 g
2	0.25 g
3	0.15 g
4	0.05 g

Spettri di risposta elastica di normativa

Terremoti con periodo di ritorno più basso possono avere spettri differenti.
Per semplicità si assume che il terremoto da usare per lo stato limite di danno abbia lo stesso spettro ma accelerazione al suolo ridotta di 2.5

SLU

zona	a_g
1	0.35 g
2	0.25 g
3	0.15 g
4	0.05 g

SLD

zona	a_g
1	0.35 / 2.5 = 0.14 g
2	0.25 / 2.5 = 0.10 g
3	0.15 / 2.5 = 0.06 g
4	0.05 / 2.5 = 0.02 g

Ordinanza 3274, punto 3.2.5

FINE

Immagini tratte dal libro:
A. Ghersi, P. Lenza
Edifici antisismici in c.a.
(in preparazione)

Dati geotecnici dell'esempio forniti da:
M.R. Massimino

Per questa presentazione:

coordinamento	A. Ghersi
realizzazione	A. Ghersi
ultimo aggiornamento	6/03/2004