

## Dalla dinamica alla normativa sismica

Sistemi a più gradi di libertà:  
analisi statica e analisi modale

Catania, 1 aprile 2004

Bruno Biondi

Aurelio Ghersi

## Possibili approcci per valutare la risposta elastica

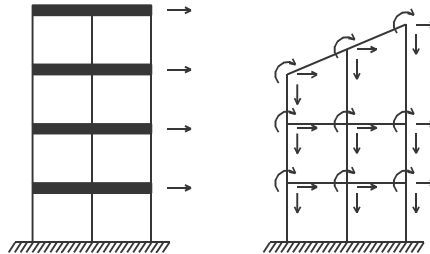
Analisi dinamica, con valutazione della storia della  
risposta (istante per istante)

Analisi modale, per valutare la massima risposta

Analisi statica, per valutare in maniera approssimata  
la massima risposta

Ordinanza 3274, punto 4.5

## Analisi dinamica - equazione del moto



L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

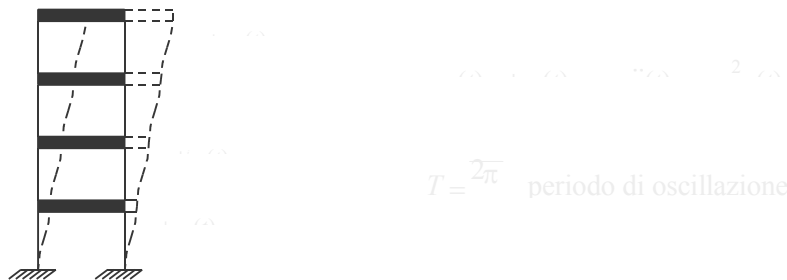
$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = p(t) \quad u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix}$$

## Analisi dinamica - moto libero

Si considera un sistema non smorzato e non forzato

$$M \ddot{u}(t) + K u(t) = 0$$

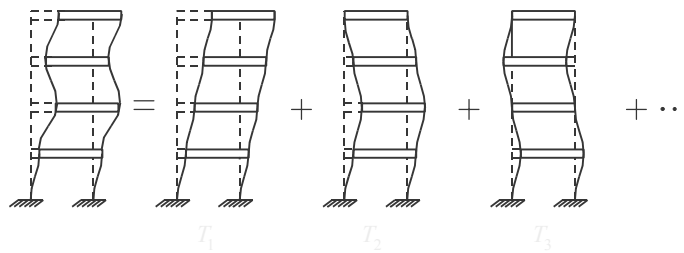
Si suppone che la risposta sia data da una deformata semplice per una funzione del tempo



## Analisi dinamica - forme modali

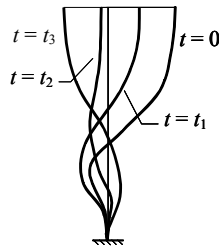
Sostituendo la risposta nell'equazione del moto ci si accorge che la risposta è data dalla sovrapposizione di più deformate (forme modali) che oscillano con periodi differenti

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i(t) = \Phi q(t)$$



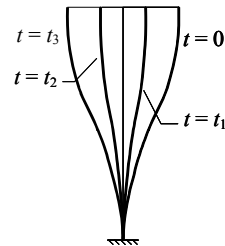
## Analisi dinamica - forme modali

Assegnando una deformata iniziale generica

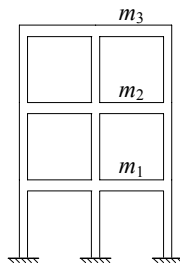


la forma varia man mano

Assegnando una particolare deformata iniziale



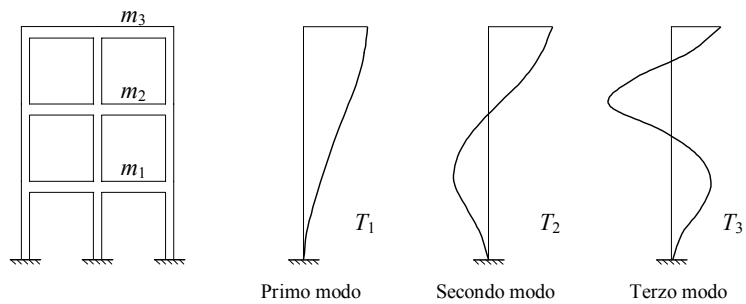
la forma resta la stessa  
modo di oscillazione libera del sistema



## Modi di oscillazione libera

Telaio piano (con tralversari inestensibili):

numero di modi di oscillazione libera = numero di piani

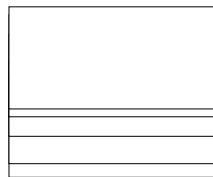


## Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:  
-  $n$  modi di traslazione in una direzione

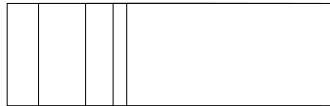


## Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):  
numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione

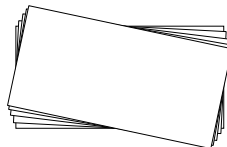


## Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):  
numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

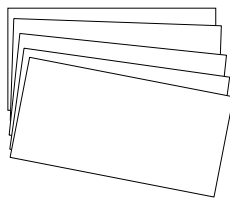
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione



## Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):  
numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono accoppiati



## Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale  
senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera coincide con il numero di gradi di libertà del sistema ed è molto maggiore

## Determinazione delle forme modali

Le forme modali si determinano come soluzione di un problema agli autovettori

$$[K - \omega^2 M] \phi = 0 \quad \det[K - \omega^2 M] = 0$$

Da questa si ricavano anche le frequenze  $\omega$  e quindi i periodi  $T$  (autovalori)

Le forme modali godono delle seguenti proprietà

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \Rightarrow \Phi^T M \Phi = I_n \quad \phi_i^T K \phi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases} \Rightarrow \Phi^T K \Phi = \Omega^2$$

## Equazione del moto libero

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$M \ddot{u}(t) + K u(t) = 0 \quad u(t) = \Phi q(t)$$



$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = 0$$

Nella matrice  $\Omega^2$  solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

## Equazione del moto libero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

Si può valutare il contributo alla risposta di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice

Può essere utilizzato un numero  $m$  di forme modali inferiore al numero  $n$  di gradi di libertà del sistema

## Equazione del moto libero con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}(t) + \Xi \dot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = 0$$

In molti casi anche la matrice  $\Xi$  è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate (sistemi classicamente smorzati)

Talvolta, ad esempio quando masse e rigidità delle diverse parti sono molto variabili, ciò non avviene (sistemi non classicamente smorzati)



## Equazione del moto (risposta ad un accelerogramma)

L'equazione del moto  $M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = -M \tau \ddot{u}_g(t)$   
diventa  $\ddot{q}(t) + \Xi \dot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = -\Phi^T M \tau \ddot{u}_g(t)$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \Gamma_j \ddot{u}_g(t)$$

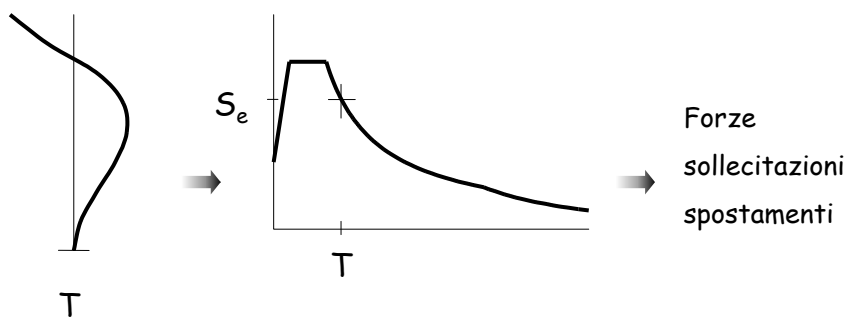
$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per  $\Gamma_j$

**Coefficiente di partecipazione modale:** indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante

## Analisi modale tramite spettro

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .



## Analisi modale tramite spettro

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -\Gamma_i \ddot{u}_g(t) \quad i=1,2,\dots,m$$

Massimi spostamenti modali e nodali

$$q_{i,\max} = \max|q_i(t)| = \frac{\Gamma_i}{\omega_i^2} S_e(T_i, \xi_i) \quad u_{i,\max} = \phi_i q_{i,\max} = \phi_i \frac{\Gamma_i}{\omega_i^2} S_e(T_i, \xi_i)$$

## Analisi modale tramite spettro

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare i massimi spostamenti (o sollecitazioni) trovati per i singoli modi

$$u^{\max} \neq \sum u_{i,\max}$$

I contributi delle singole forme modali non possono essere sommati perché i valori massimi non sono contemporanei

## Stima della massima risposta del sistema

I contributi delle singole forme modali sono combinati secondo leggi probabilistiche

- Metodo SRSS (radice quadrata della somma dei quadrati)

$$u_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_{i,\max}^2}$$

- Metodo CQC (combinazione quadratica completa)

$$u_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_{i,\max}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \rho_{ij} u_{i,\max} u_{j,\max}}$$

## Contributo dei singoli modi

Il taglio alla base corrispondente al modo  $j$  è

$$V_{b,j} = M_j^* S_e(T_j)$$

dove

$S_e(T_j)$  è l'ordinata spettrale corrispondente al periodo  $T_j$

$M_j^*$  è detta massa partecipante

$$M_j^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \Gamma_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Considerando tutti i modi, la massa partecipante totale coincide con l'intera massa presente nella struttura

## Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:

- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

## Considerazioni

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma
- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo
- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

## Considerazioni

Negli schemi spaziali è più probabile avere modi con periodi molto vicini tra loro:

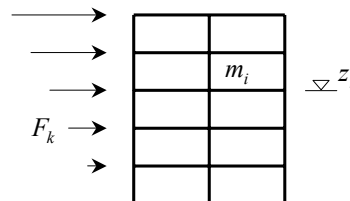
- in questo caso è opportuno usare la sovrapposizione quadratica completa (CQC)

Una buona impostazione progettuale deve mirare ad avere una struttura con impalcato rigido e con comportamento disaccoppiato (cioè minime rotazioni planimetriche)

## Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k z_k \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i z_i} S_e(T_1)$$

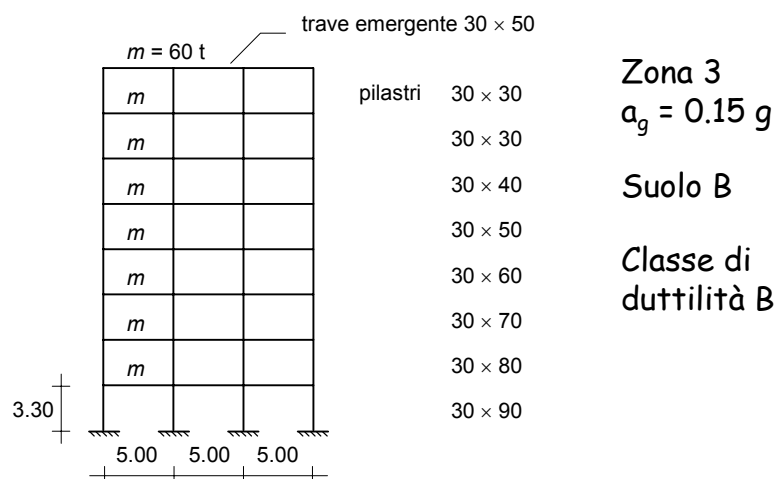


Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

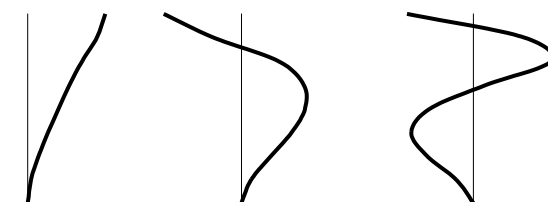
$$T_1 = C_1 H^{3/4}$$

Le forze possono essere ridotte con  $\lambda=0.85$  se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

## Confronto analisi statica - modale Edificio con travi emergenti



## Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.183 s	0.461 s	0.259 s
$S_e$	0.0484 g	0.1145 g	0.1145 g
$M^*/M$	70.1 %	13.7 %	5.1 %

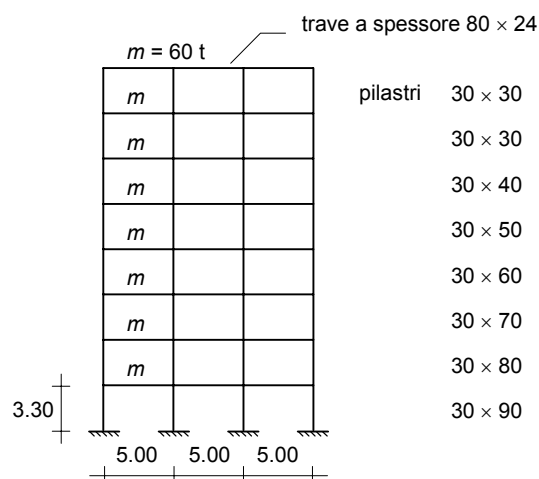
**Forze statiche - modali [kN]**  
Edificio con travi emergenti

piano	modale			analisi statica
	modo 1	modo 2	modo 3	
8	40.0	-39.1	19.5	50.6
7	35.8	-14.4	-14.9	44.3
6	28.1	18.6	-22.8	38.0
5	21.7	31.3	-4.0	31.6
4	16.0	32.1	12.5	25.3
3	10.6	25.4	18.2	19.0
2	5.7	15.1	13.7	12.7
1	1.8	5.0	5.1	6.3

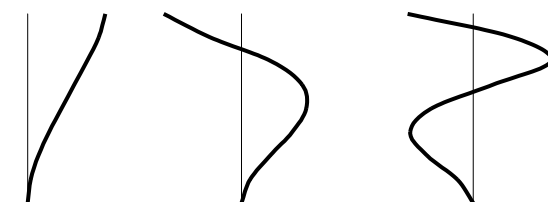
**Tagli statici - modali [kN]**  
Edificio con travi emergenti

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	59.2	50.6	-14.5
7	92.9	94.9	2.2
6	111.1	132.9	19.6
5	127.6	164.5	28.9
4	144.8	189.9	31.1
3	161.7	208.8	29.2
2	173.7	221.5	27.5
1	178.1	227.8	27.9

## Confronto analisi statica - modale Edificio con travi a spessore



## Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti Edificio con travi a spessore



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.738 s	0.604 s	0.328 s
$S_e$	0.0329 g	0.0947 g	0.1145 g
$M^*/M$	70.9 %	11.8 %	5.4 %



**Forze statiche - modali [kN]**  
Edificio con travi a spessore

piano	modale			analisi statica
	modo 1	modo 2	modo 3	
8	26.3	-30.3	20.4	34.5
7	24.1	-12.2	-12.5	30.1
6	20.1	11.6	-24.2	25.8
5	15.9	23.6	-6.2	21.5
4	11.5	25.4	12.9	17.2
3	7.3	19.9	19.6	12.9
2	3.6	11.2	14.4	8.6
1	1.0	3.4	5.0	4.3

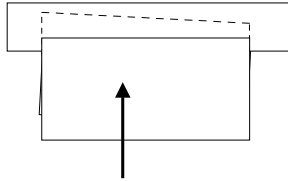
**Tagli statici - modali [kN]**  
Edificio con travi a spessore

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	45.0	34.5	-23.4
7	66.4	64.6	-2.7
6	78.7	90.4	15.0
5	89.6	112.0	25.0
4	100.0	129.2	29.2
3	112.3	142.1	26.5
2	121.9	150.7	23.6
1	125.3	155.0	23.7

## Analisi statica o analisi modale?

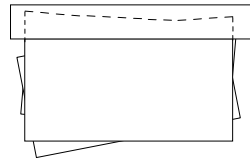
L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:  
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con forti rotazioni, non va bene

Analisi modale



modo 1

modo 2

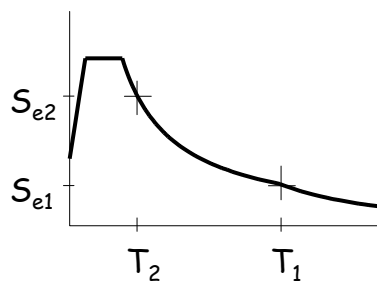
involuppo

## Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto

accelerazione molto bassa, non cautelativa



## Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile

L'uso del coefficiente riduttivo  $\lambda$  rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

## Analisi statica o analisi modale?

La norma vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera  $2.5 T_c$
- la struttura è irregolare in altezza

Commento:

nella prima versione la norma parlava di "irregolare in pianta"; la modifica è stata introdotta dall'Errata Corrige

Mi sembra molto più coerente con gli studi teorici il riferimento alla irregolarità in pianta, presente nella versione originale

## Analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)

## Integrazione diretta delle equazioni del moto

Deve essere determinata la storia nel tempo degli spostamenti del sistema

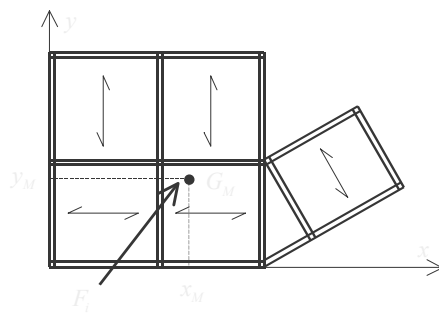
$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = -M \tau \ddot{u}_g(t)$$

Possono essere utilizzati accelerogrammi naturali o generati artificialmente

Gli accelerogrammi devono essere compatibili con lo spettro di normativa (spettro-compatibili)

## Ripartizione delle forze sismiche fra gli elementi strutturali

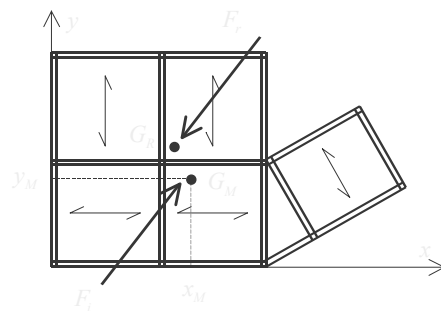
Le forze sismiche sono applicate nel baricentro delle masse del piano



$$x_M = \frac{\sum_i m_i x_{M,i}}{\sum_i m_i} ; y_M = \frac{\sum_i m_i y_{M,i}}{\sum_i m_i}$$

## Ripartizione delle forze sismiche fra gli elementi strutturali

Il sistema reagisce con forze applicate nel baricentro delle rigidezze del piano



$$x_R = \frac{\sum_i k_i x_{R,i}}{\sum_i k_i} ; y_R = \frac{\sum_i k_i y_{R,i}}{\sum_i k_i}$$

eccentricità

$$e_x = x_R - x_M ; e_y = y_R - y_M$$

## Ripartizione delle forze sismiche fra gli elementi strutturali

Le eccentricità fra baricentri di massa e rigidezza  
rappresentano una misura della regolarità in pianta

In assenza di eccentricità le forze si ripartiscono  
proporzionalmente alle rigidzze dei singoli telai

L'eccentricità genera sui singoli telai forze ortogonali  
a quella d'ingresso del sisma

Per concentrazioni di forze su pochi telai è necessario  
irrigidire i telai meno sollecitati per meglio ripartire  
le forze sismiche

FINE

Immagini tratte dal libro:  
A. Gherzi, P. Lenza  
Edifici antisismici in c.a.  
(in preparazione)

Per questa presentazione:	
coordinamento	A. Gherzi
realizzazione	A. Gherzi
ultimo aggiornamento	6/03/2004