Sezioni in c. a.
dalle tensioni ammissibili agli stati limite

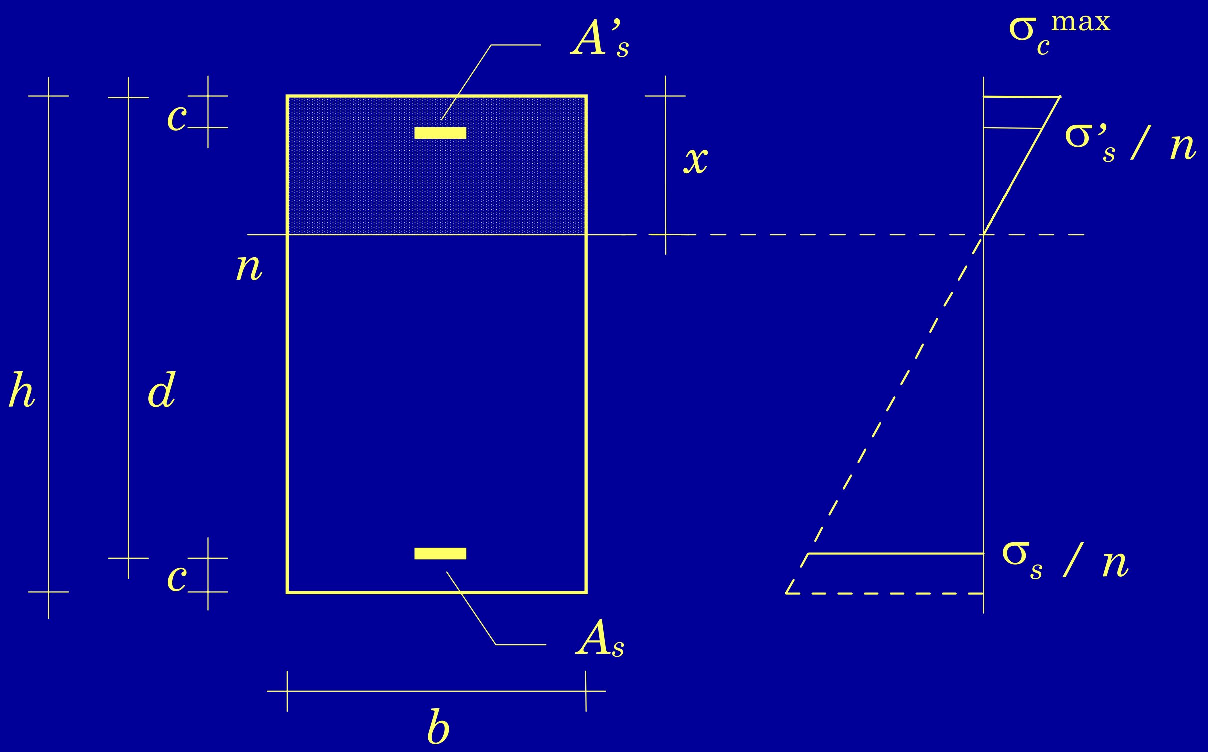
Momento flettente

Caltagirone, 15 marzo 2004

Aurelio Ghersi

Verifica
di sezioni inflesse

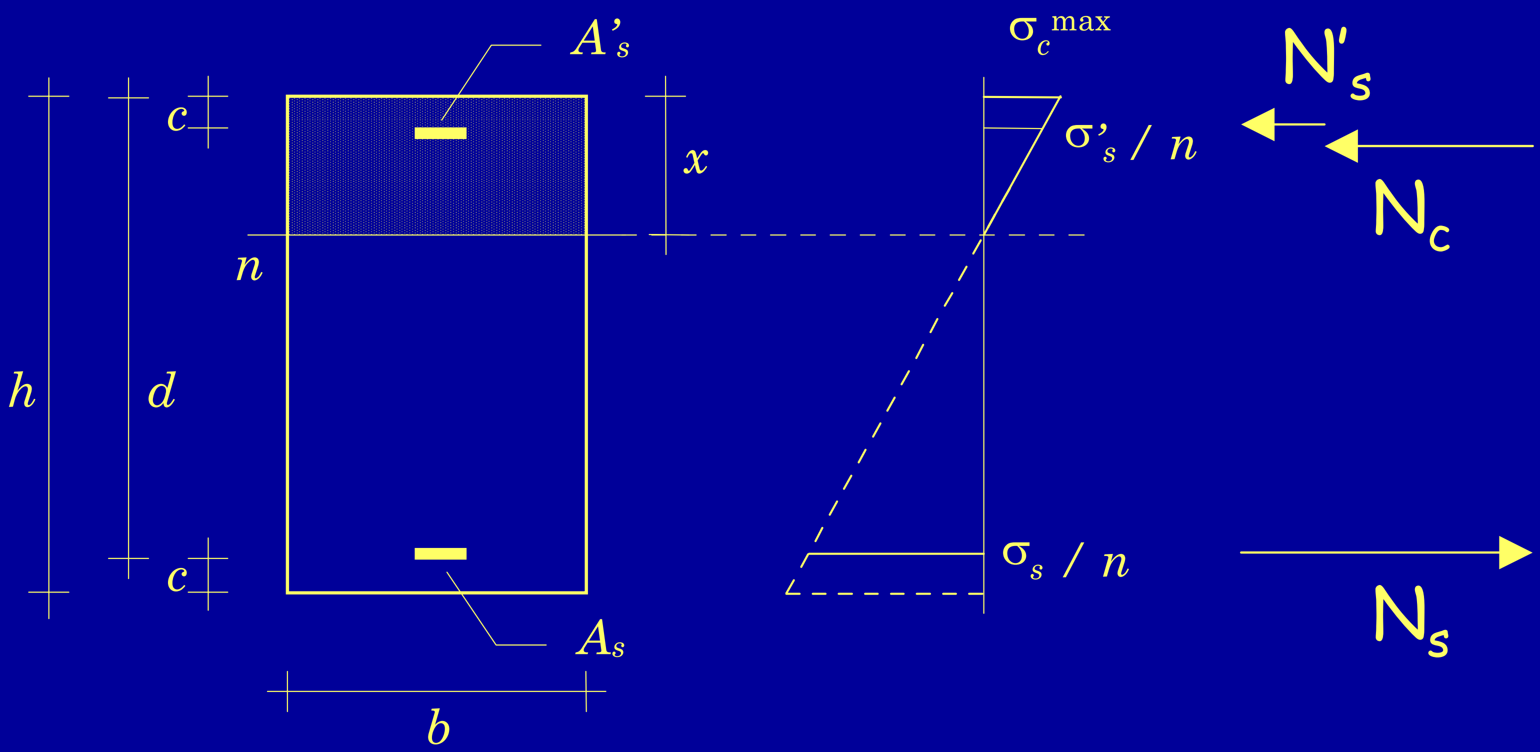
Verifica – tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica – tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro: $S_n = 0$

(l'asse neutro è baricentrico)

oppure: $N_c + N'_s + N_s = 0$

(equilibrio alla traslazione)

Verifica – tensioni ammissibili

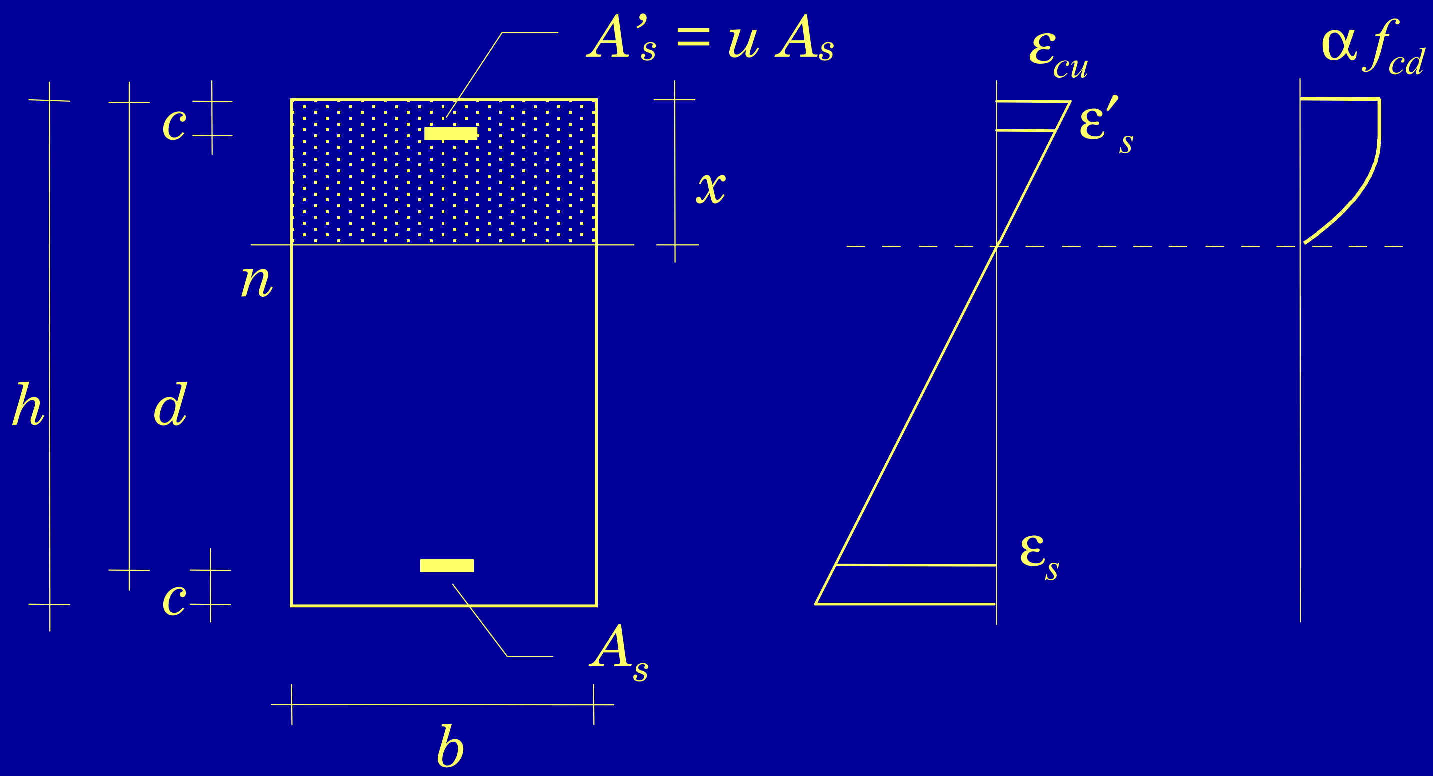
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s\, c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right]$$

E poi: $$\sigma = -\frac{M}{I}\,y$$

con: $$I = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s\,(x-c)^2 + n\,A_s\,(d-x)^2$$

Verifica – stato limite ultimo



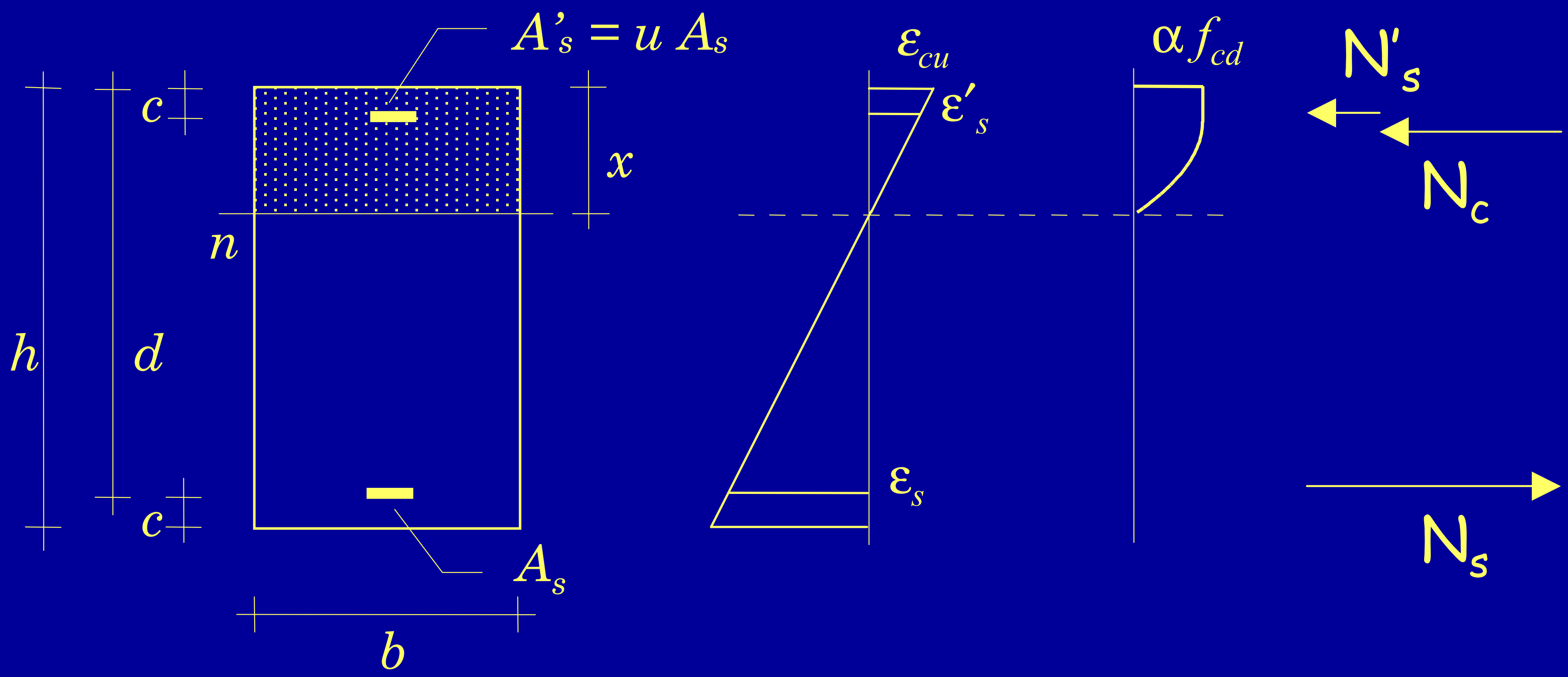
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

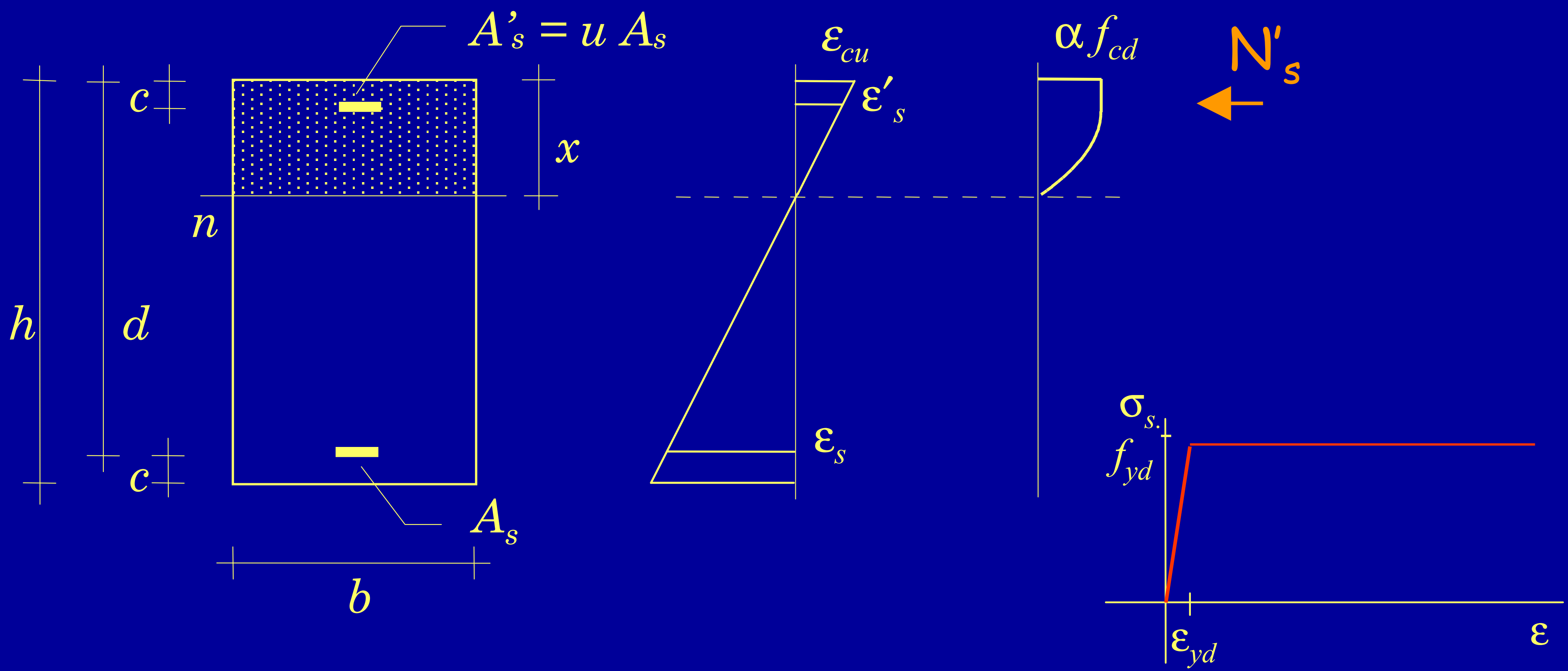
Verifica – stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = 0$

(equilibrio alla traslazione)

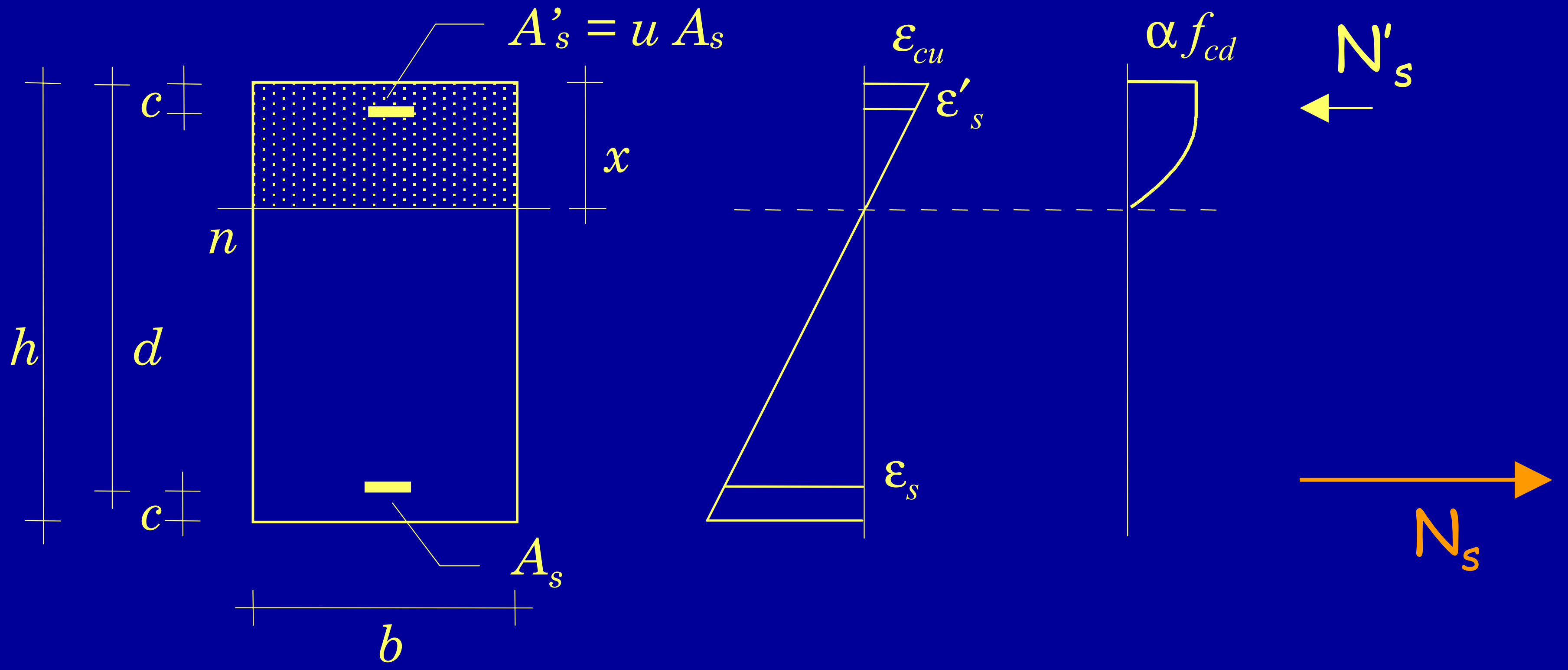
Imporre questa condizione è facile, perché:



$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x}\varepsilon_{cu}$$

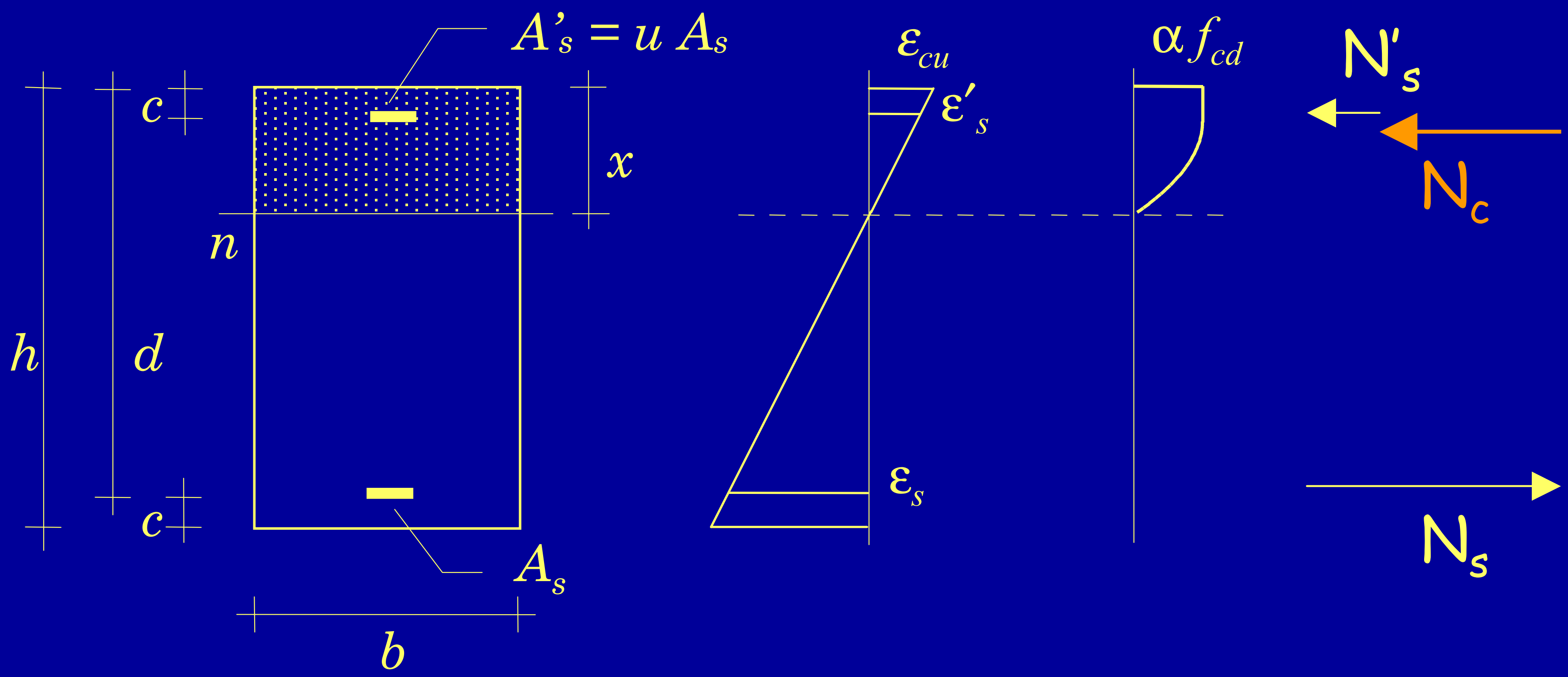
in molti casi $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s\, f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$ $\Rightarrow$ $N_s = A_s\,f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$N_c = \beta \;\; b\, x \;\; \alpha\, f_{cd}$

per sezione rettangolare, β = 0.810

Individuazione dell'asse neutro

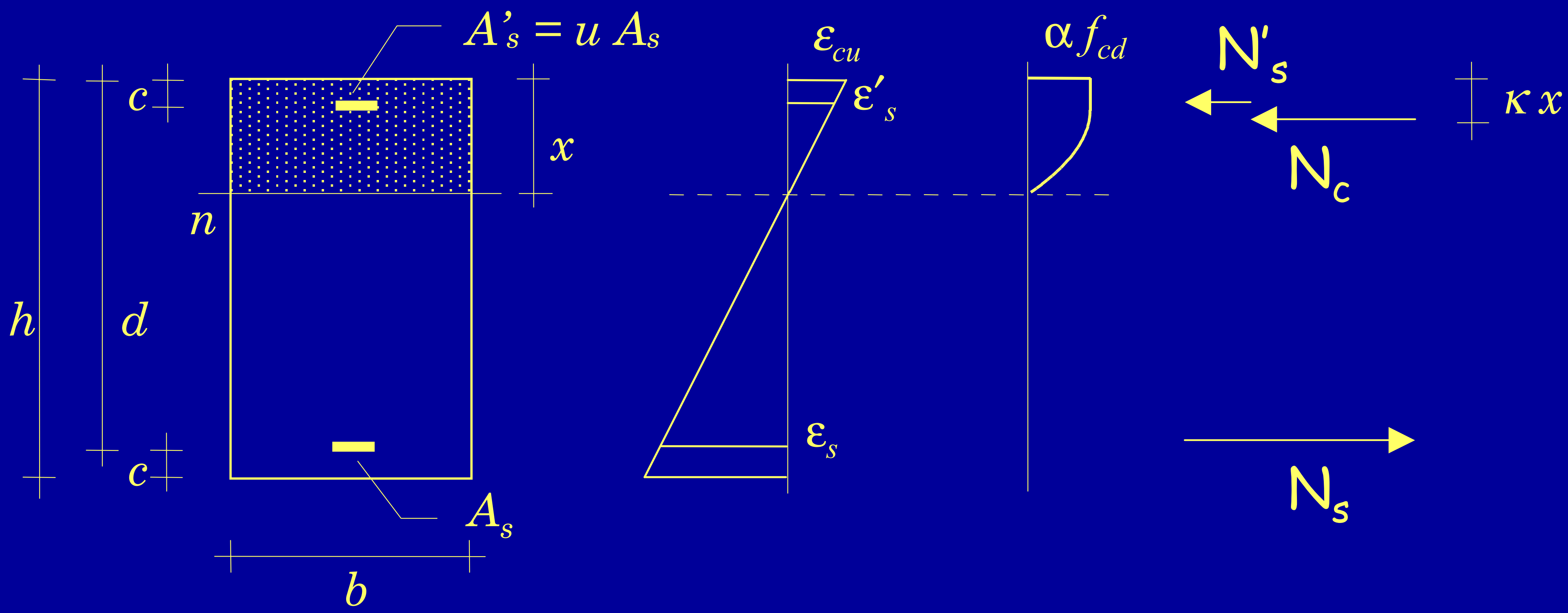
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\, \alpha\, f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s\right) \frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, \alpha\, f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s\right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta\, b\, \alpha\, f_{cd}}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s\, c\, f_{yd}}{\beta\, b\, \alpha\, f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s\,(d - \kappa\,x) + N'_s\,(\kappa\,x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio
verifica di sezione rettangolare

Dati: M_{Sd} = 160 kNm

Sezione	30x50	Calcestruzzo	R_{ck} = 25 MPa
Armature	$A_s = 4\varnothing20$	Acciaio	FeB44k
	$A'_s = 4\varnothing14$		

Procedura:

1 – individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Sd} e M_{Rd}

Esempio – individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\ \alpha\, f_{cd}} = \frac{(12.56 - 6.16) \times 374}{0.810 \times 30 \times 11.0} = 8.95\ \text{cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x}\,\varepsilon_{cu} = \frac{8.95 - 4}{8.95} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.94 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ la posizione trovata è esatta

Esempio – calcolo del momento resistente

$M_{Rd} = N_s\,(d - \kappa\,x) + N'_s\,(\kappa\,x - c)$

$$N_s = 12.56 \times 374 \times 10^{-1} = 469.7\ \text{kN}$$

$$N'_s = 6.16 \times 374 \times 10^{-1} = 230.4\ \text{kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [469.7 \times (46 - 0.416 \times 8.95) + 230.4 \times (0.416 \times 8.95 - 4)] \times 10^{-2}$$

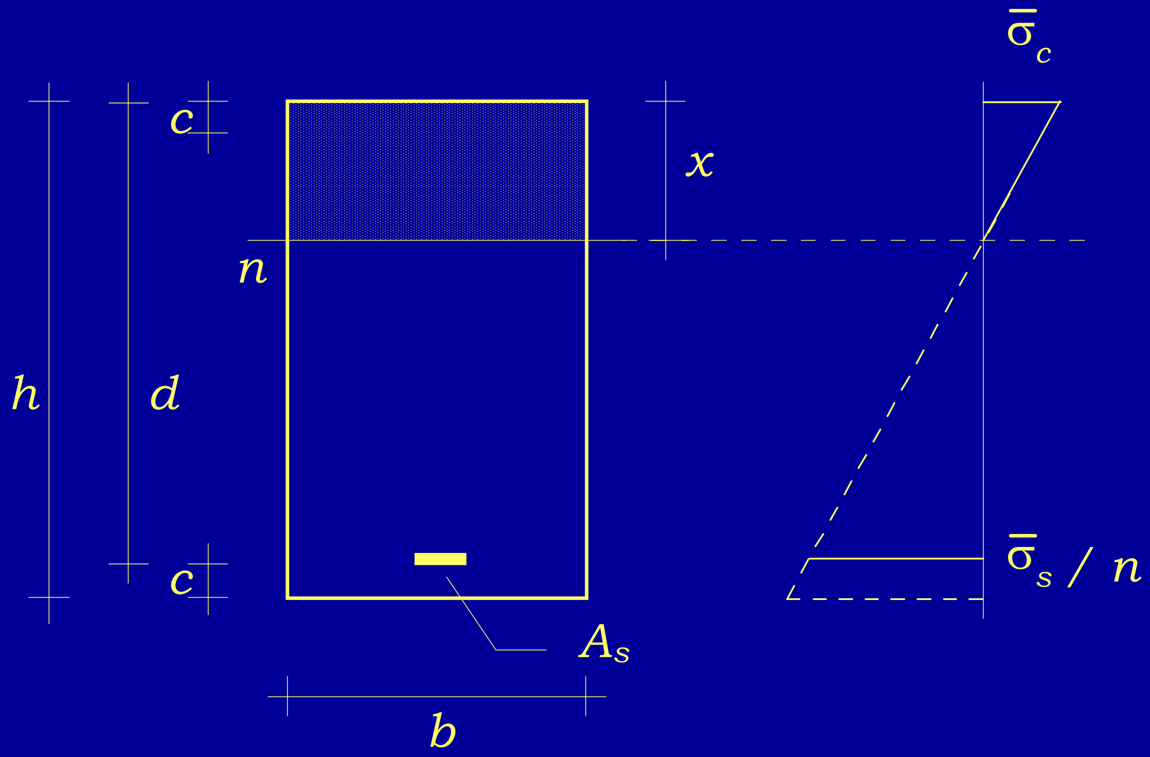
$$M_{Rd} = 197.9\ \text{kNm}$$

Si noti che
$\kappa\,x \cong c$

Poiché M_{Sd} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Progetto
di sezioni inflesse

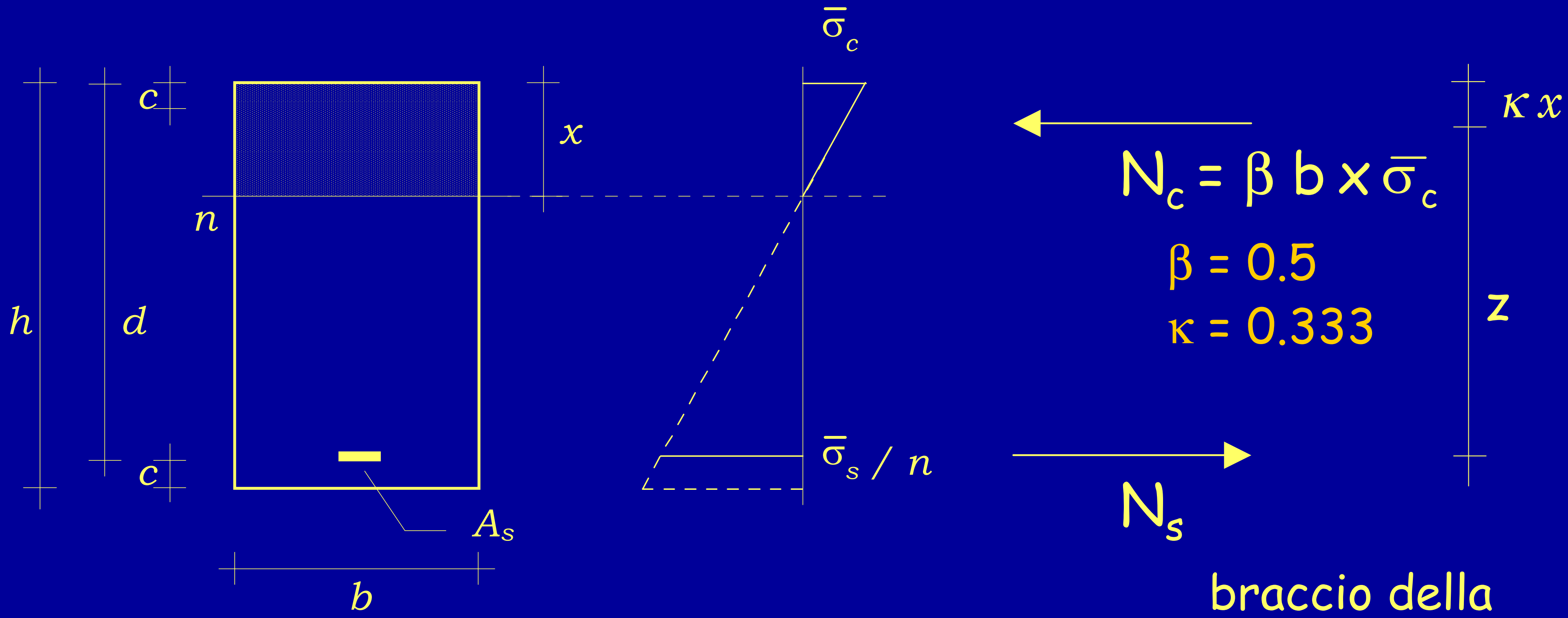
Progetto – tensioni ammissibili



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

Progetto – tensioni ammissibili



$N_c = \beta\, b\, x\, \bar{\sigma}_c$

$\beta = 0.5$

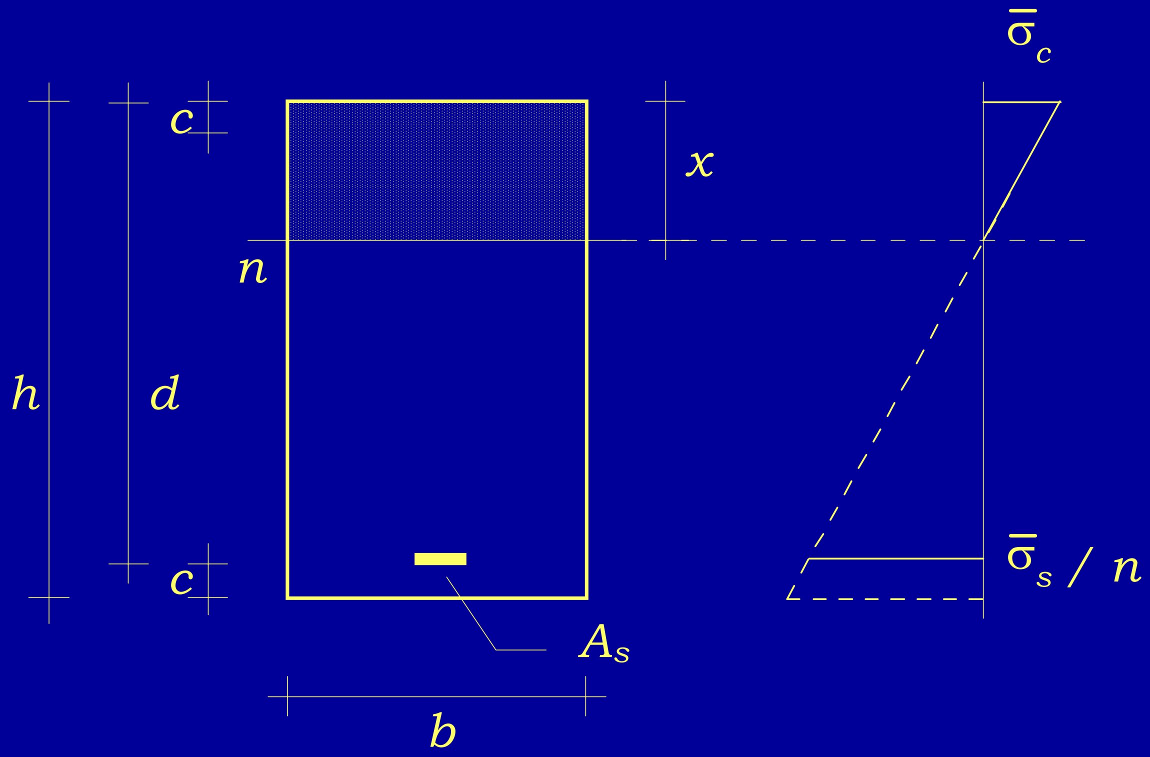
$\kappa = 0.333$

braccio della coppia interna
$z = d - \kappa\, x$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$M = N_c\, z$ $\qquad$ $M = \beta\, b \xi\, d \bar{\sigma}_c\, (d - \kappa\, \xi\, d)$

Progetto – tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b\,d^2}{r^2}$$

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}}$$

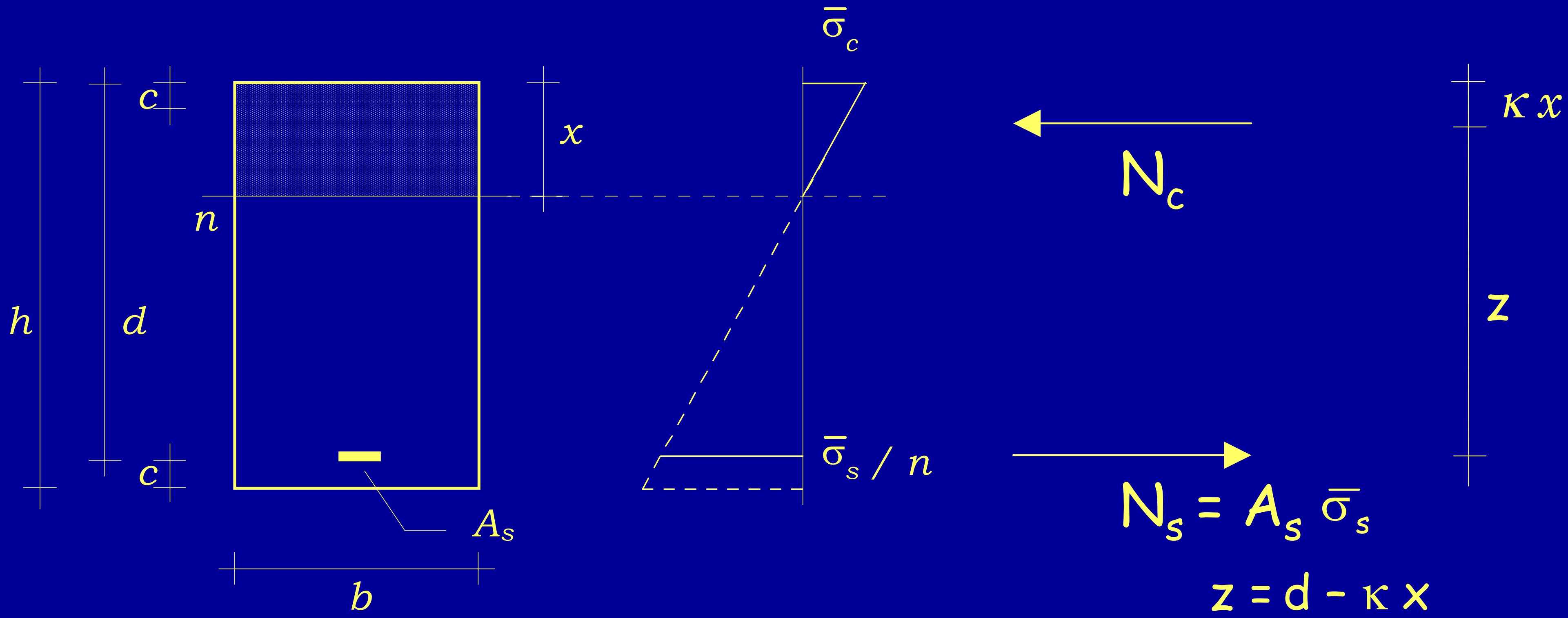
con:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta\,\xi\,(1-\kappa\,\xi)\,\bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$M = N_c\, z$ $\qquad\qquad M = \beta\; b\,\xi\,d\,\bar{\sigma}_c\,(d - \kappa\,\xi\,d)$

Progetto – tensioni ammissibili



$z = d - \kappa\, x$

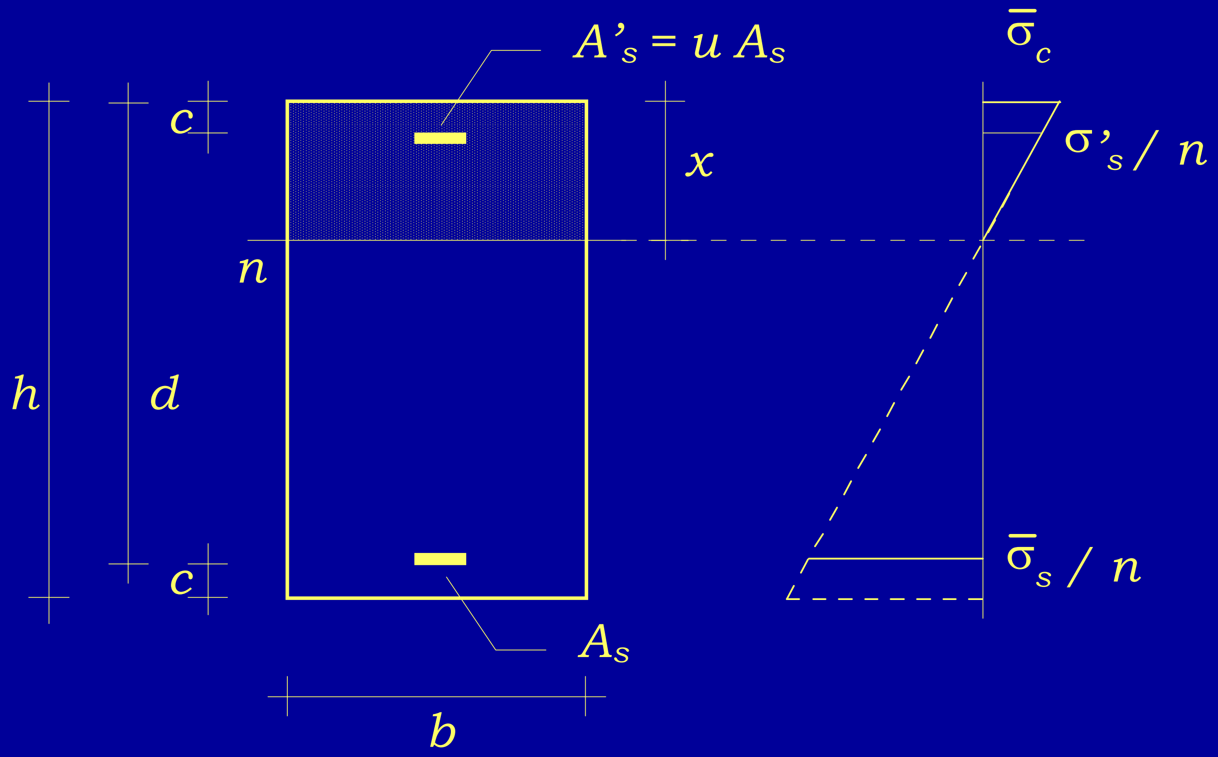
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, \bar{\sigma}_s}$$

$M = N_s\, z$

$M = A_s\, \bar{\sigma}_s\, z$

Progetto – tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x-c}{d-x}$$

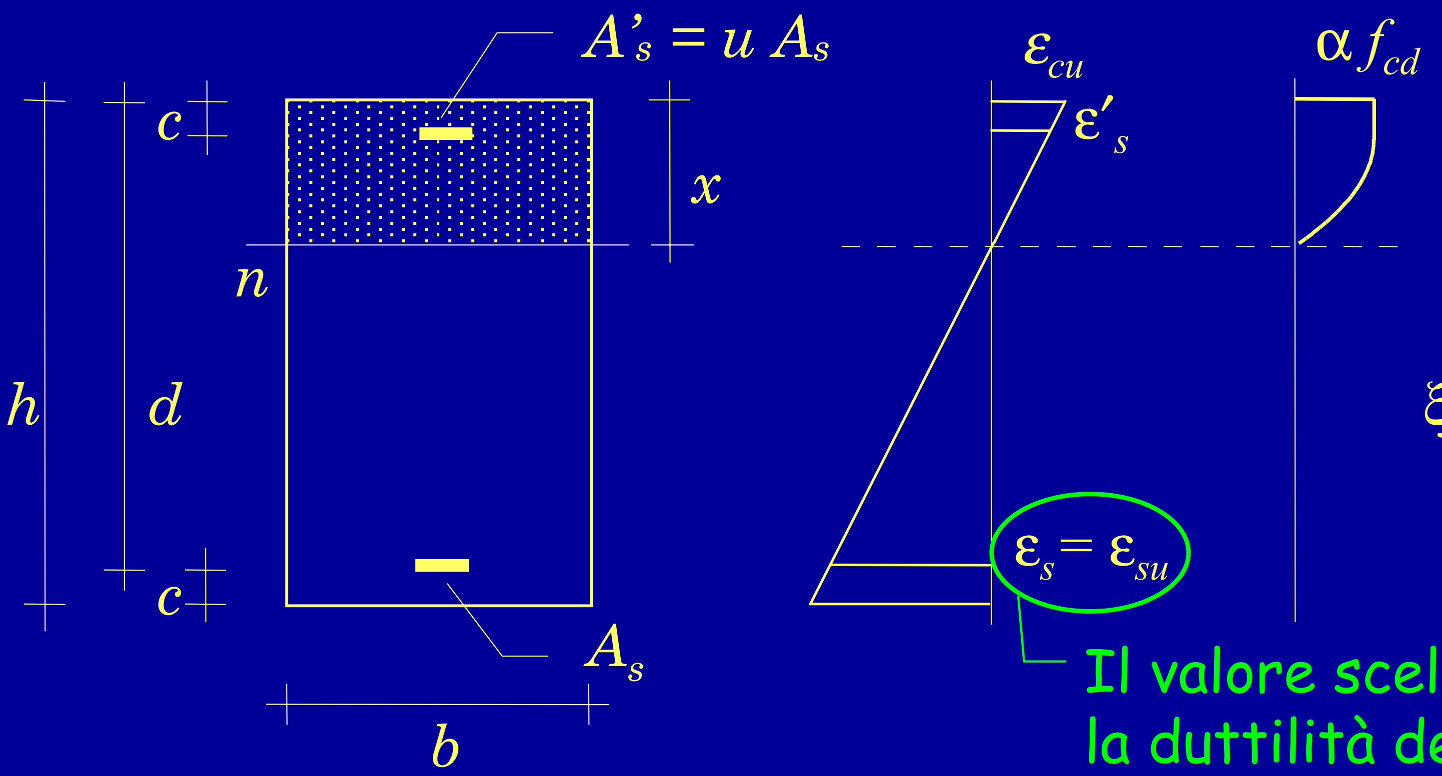
$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Analogamente per sezione a doppia armatura

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, \bar{\sigma}_s}$$

r' dipende da u (e da c/d)

Progetto – stato limite ultimo



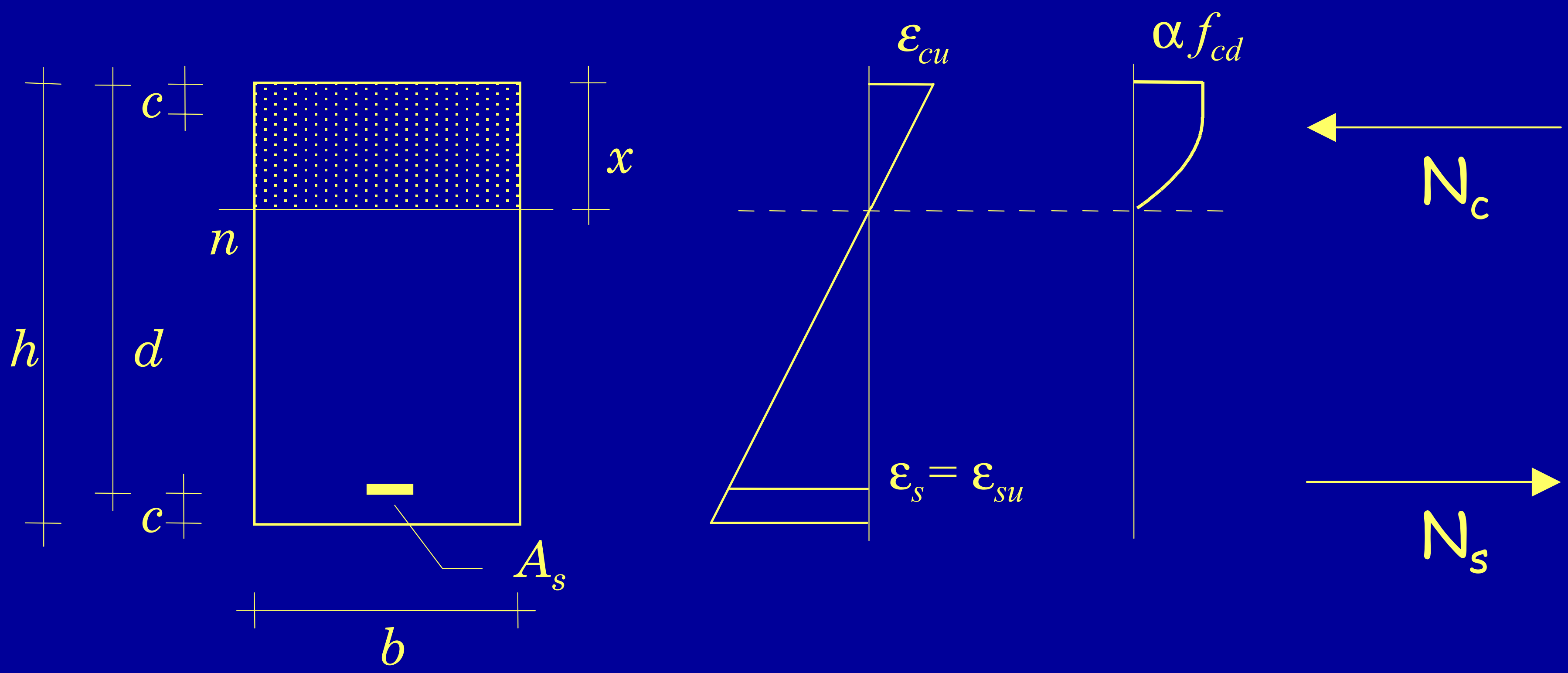
$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su}}$$

Il valore scelto per ε_s condiziona la duttilità della sezione

1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$

Progetto – stato limite ultimo

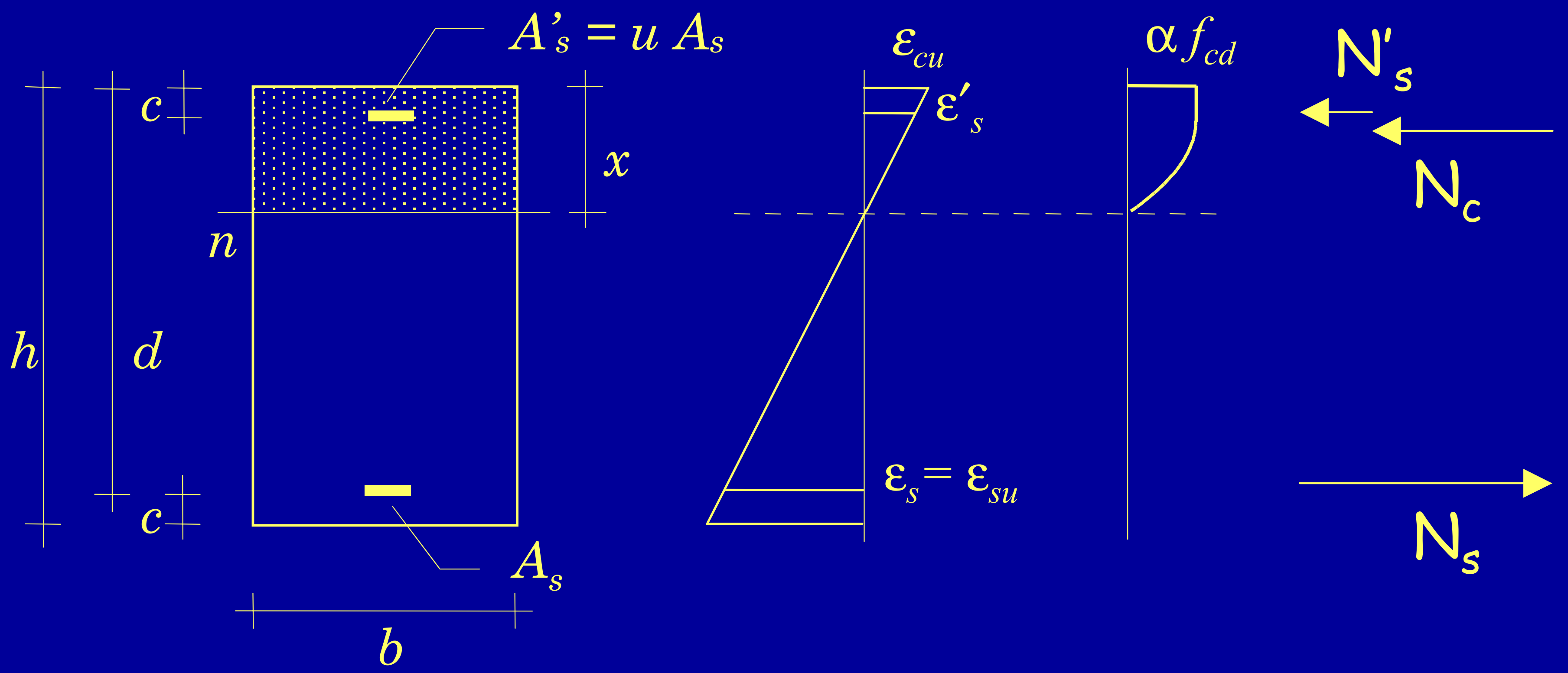


2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}}$$

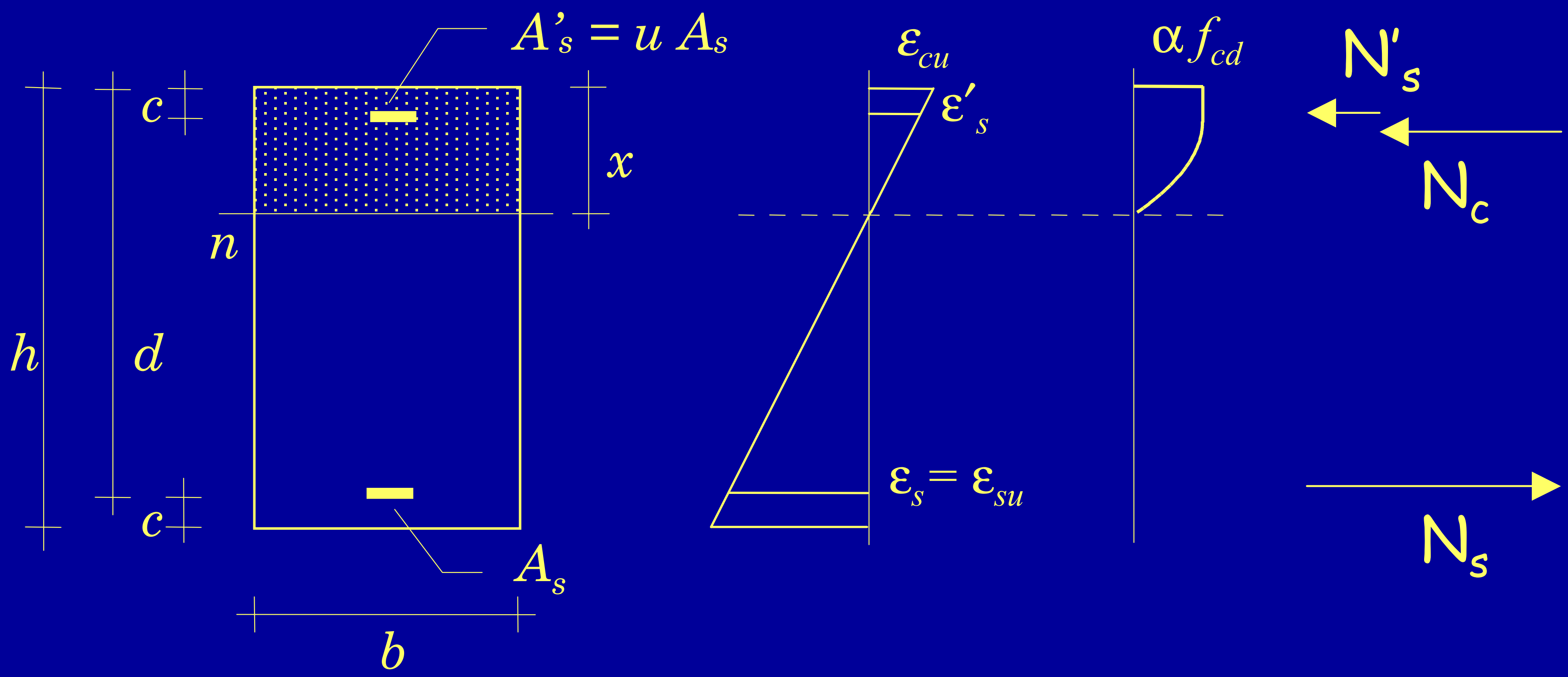
con: $$r = \frac{1}{\sqrt{\beta\,\xi\,(1-\kappa\,\xi)\,\alpha\,f_{cd}}}$$

Progetto – stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura $d = r'\sqrt{\dfrac{M}{b}}$

Progetto – stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, f_{yd}}$$

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

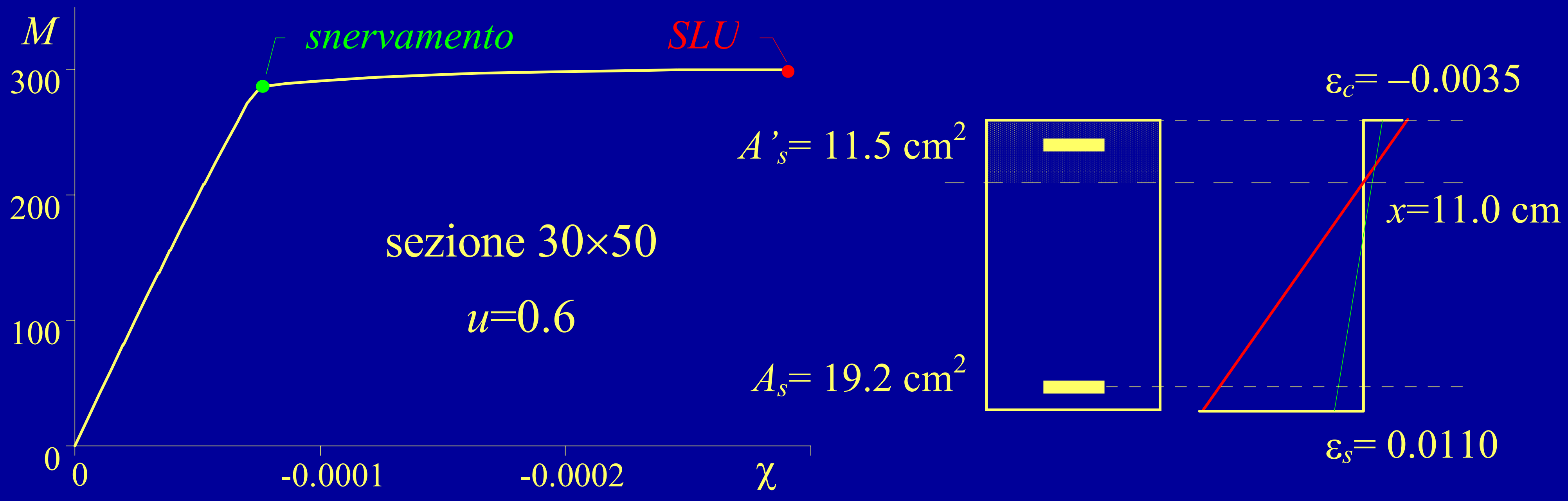
In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.6 M_{Rd} = 300 kNm

$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$ x=11.0 cm χ=-0.000286

Buona duttilità

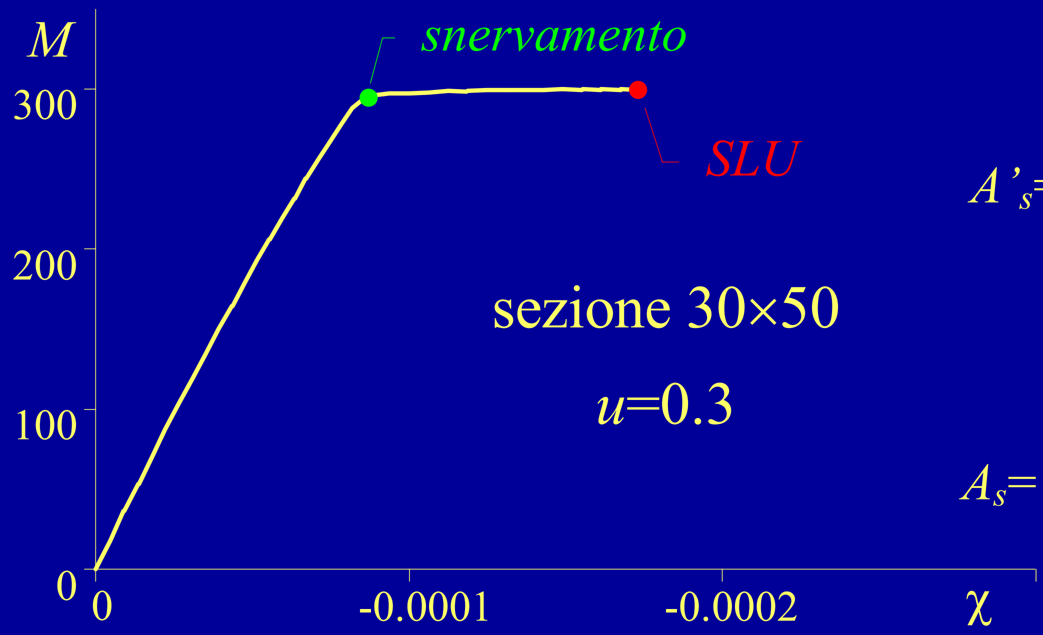


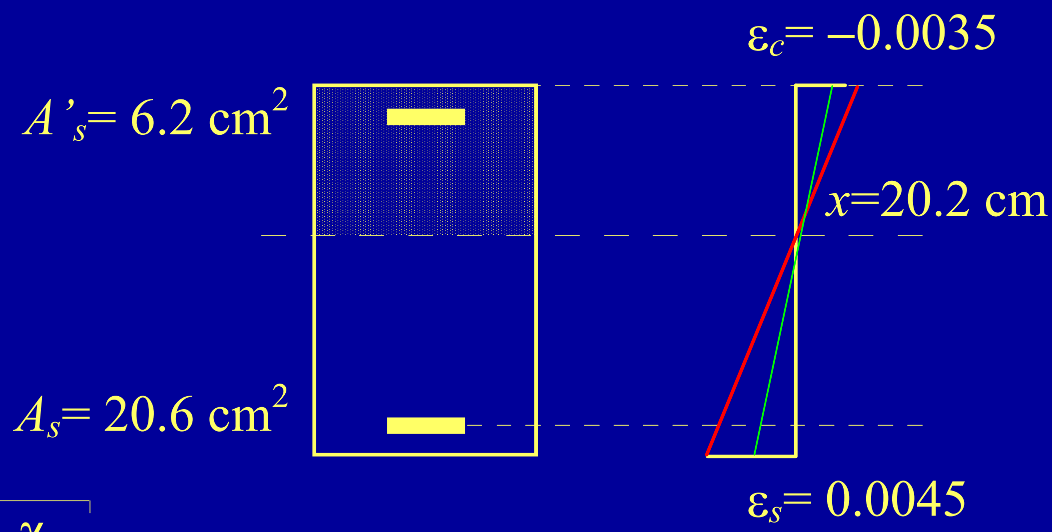
Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.3 M_{Rd} = 300 kNm

ε_{su} = 4.5 x 10^{-3} x=20.2 cm χ=-0.000184

Duttilità discreta



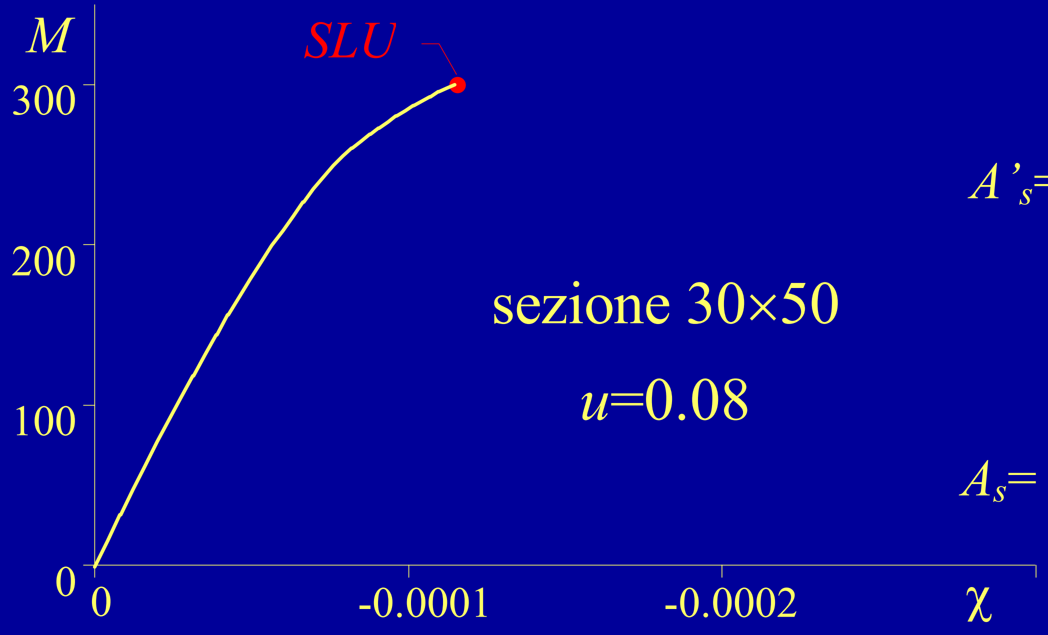


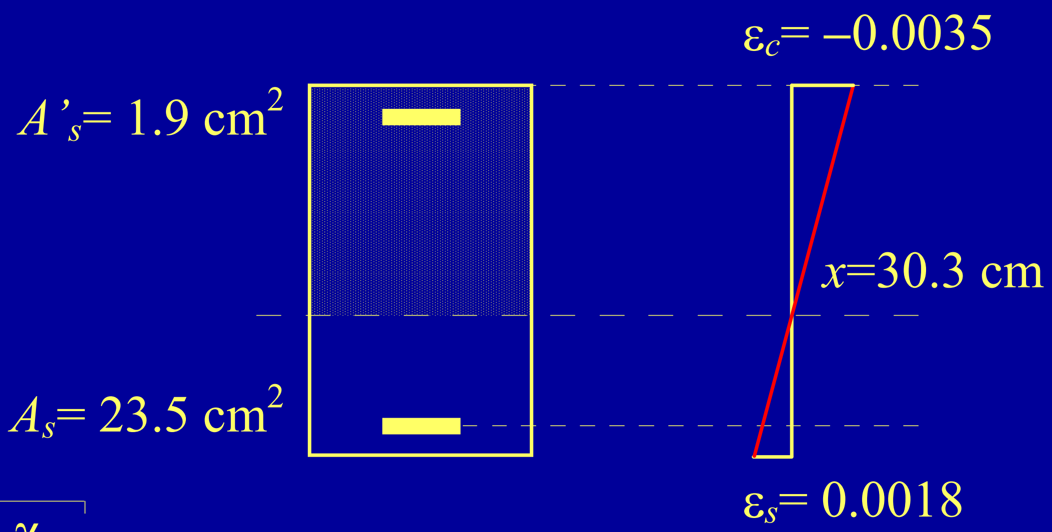
Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 u=0.08 M_{Rd} = 300 kNm

$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$ x=30.3 cm χ=-0.000116

Bassa duttilità





Quanto vale il coefficiente r?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per R_{ck} = 25 MPa e FeB44k: r = 0.282

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per R_{ck} = 25 MPa: r = 0.220

Esempio
progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0282\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.552\,\text{m}$$

uso 30x60

$$A_s = \frac{M}{0.9\,d\,\overline{\sigma}_s} = \frac{115 \quad \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 255} = 8.95\,\text{cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Sd} = 170$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0220\sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.524\,\text{m}$$

uso 30x60

$$A_s = \frac{M}{0.9\,d\,f_{yd}} = \frac{170 \quad \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 374} = 9.02\,\text{cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r'?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r\sqrt{1 - s'u} \qquad \text{con} \qquad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \qquad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto γ = c/d)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' (R_{ck} = 25 MPa, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 0.43	s' = 0.35	s' = 0.20
0	0.0282	0.0282	0.0282
0.25	0.0265	0.0269	0.0275
0.50	0.0248	0.0256	0.0269
0.75	0.0230	0.0242	0.0262
1.00	0.0211	0.0227	0.0255

Stato limite ultimo

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 1.00	s' = 1.00	s' = 0.44
0	0.0220	0.0220	0.0220
0.25	0.0189	0.0190	0.0209
0.50	0.0153	0.0155	0.0197

Valori di r'/r (R_{ck} = 25 MPa, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 0.43	s' = 0.35	s' = 0.20
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.940	0.954	0.975
0.50	0.879	0.908	0.954
0.75	0.816	0.858	0.929
1.00	0.748	0.805	0.904

Stato limite ultimo

	γ = 0.05	γ = 0.10	γ = 0.20
u	s' = 1.00	s' = 1.00	s' = 0.44
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.859	0.864	0.950
0.50	0.695	0.705	0.895

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.3 \div 0.5$)

Esempio
progetto di sezione a doppia armatura (u=0.25)

Tensioni ammissibili: $M = 115$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0265\sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.519\,\text{m}$$

uso 30x60

era 0.552 m per u=0

Stato limite ultimo: $M_{Sd} = 170$ kNm

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0189\sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.450\,\text{m}$$

uso 30x50

era 0.524 m per u=0

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
$r' = 0.019$ o 0.020 (corrisponde a $u \cong 25\%$)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori un po' maggiori
$r' = 0.021$ (corrisponde a $u \cong 25\%$)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a 0.9 d

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore (0.8 d)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura compressa determinare la differenza tra M_{Sd} e momento resistente per u = 0

$$M_0 = \frac{b\,d^2}{r^2}$$

$$\Delta M = M_{sd} - M_0$$

$$A_s' = \frac{\Delta M}{(d-c)\,f_{yd}}$$

FINE

Esempio numerico tratto da:
A. Ghersi, L. Blandini
"Progetto di elementi strutturali
in cemento armato"

Per questa presentazione:

coordinamento	A. Ghersi
realizzazione	M. Muratore, A. Ghersi
ultimo aggiornamento	14/04/2004