

# Dalla dinamica alla normativa sismica

Sistemi a più gradi di libertà:  
analisi statica e analisi modale

Catania, 4 marzo 2004

Aurelio Ghersi

# Possibili approcci per valutare la risposta elastica

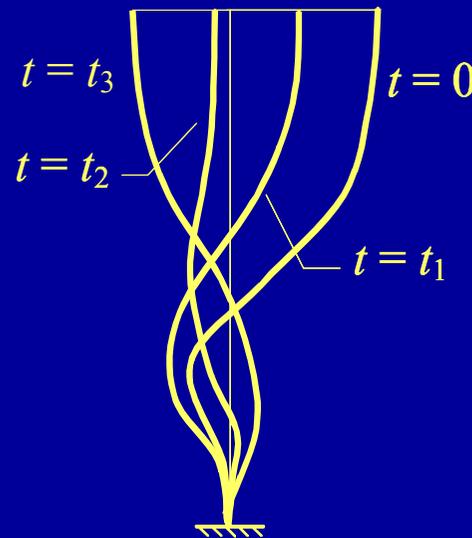
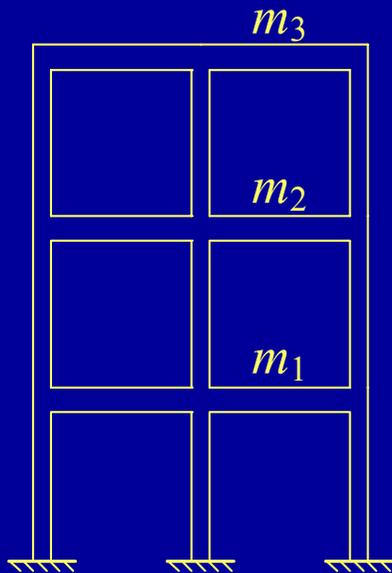
Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta (istante per istante)

Analisi modale, per valutare la massima risposta

Analisi statica, per valutare in maniera approssimata la massima risposta

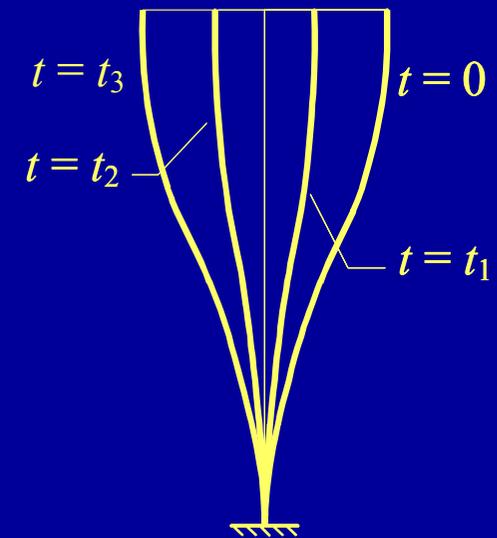
# Analisi dinamica - moto libero

Assegnando una  
deformata iniziale  
generica



la forma varia  
man mano

Assegnando una  
particolare  
deformata iniziale



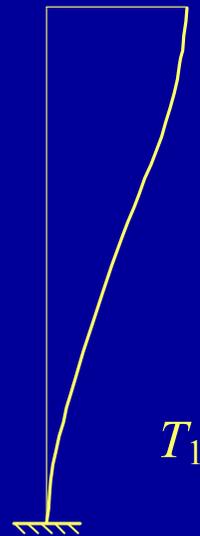
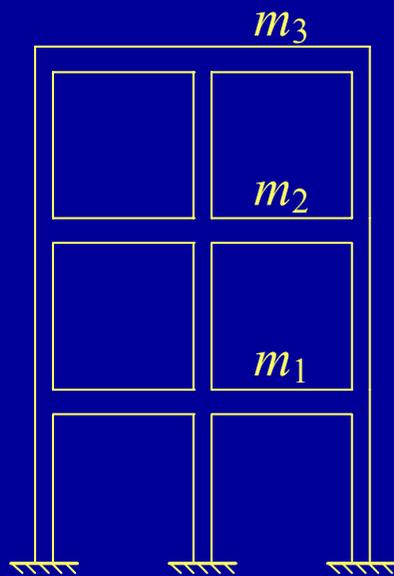
la forma resta  
la stessa

modo di oscillazione  
libera del sistema

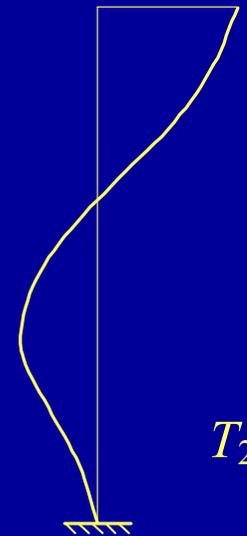
# Modi di oscillazione libera

Telaio piano (con traversi inestensibili):

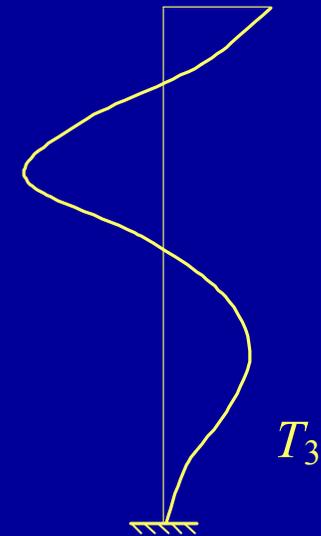
numero di modi di oscillazione libera = numero di piani



Primo modo



Secondo modo

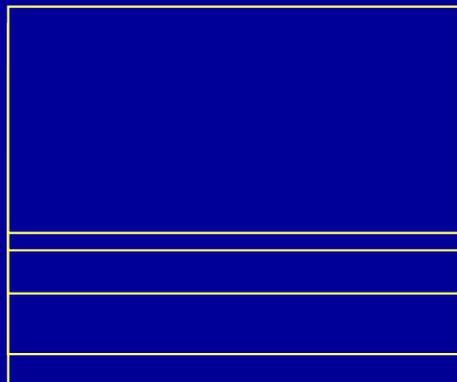


Terzo modo

# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):  
numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:  
-  $n$  modi di traslazione in una direzione



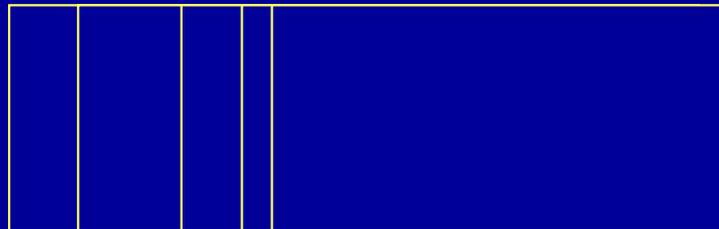
# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione



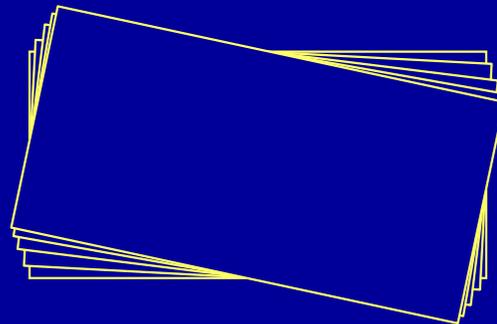
# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

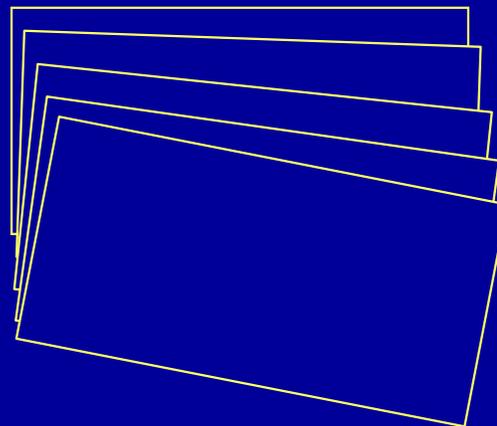
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione



# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):  
numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono accoppiati



# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale

senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera è molto maggiore

# Moto libero

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0$$

La soluzione, in caso di moto libero con deformata modale, è una funzione armonica

$$u_i(t) = \phi_{i,j} \cos(\omega_j t)$$

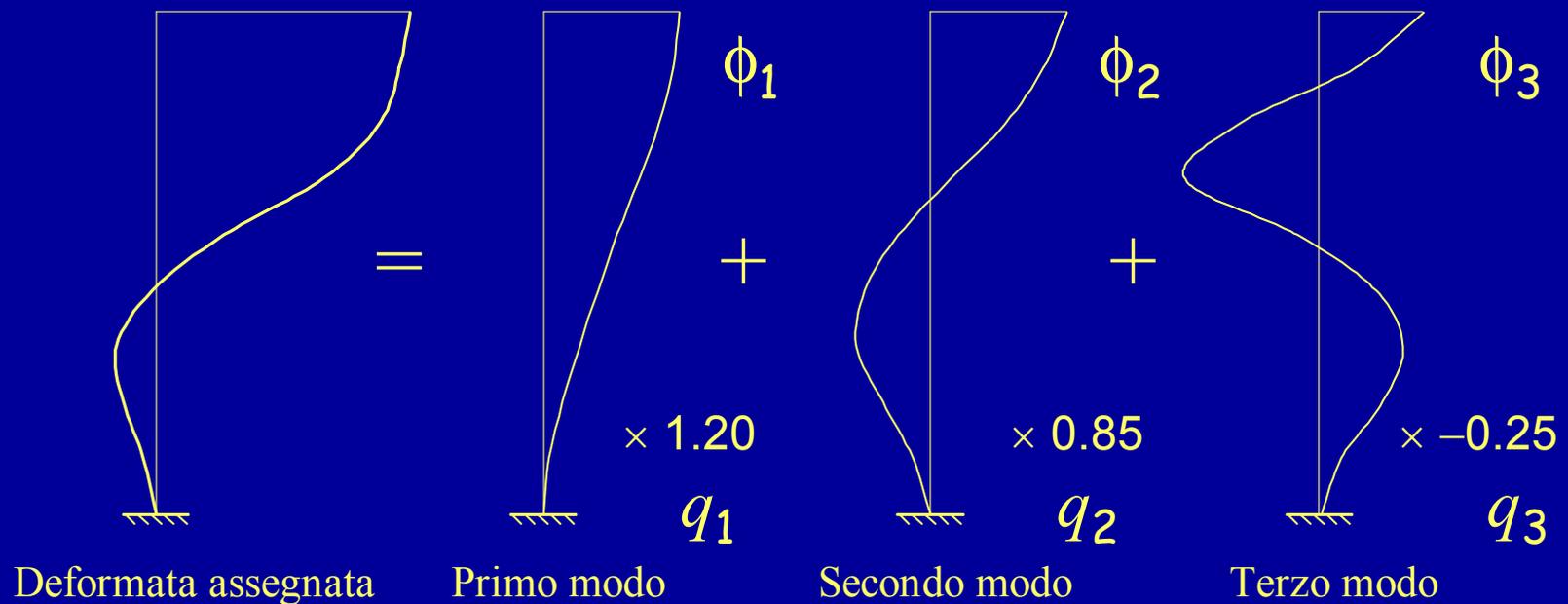
a condizione che sia

$$\det(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) = 0$$

Da questa si ricavano le frequenze angolari  $\omega_j$  e quindi i periodi  $T_j$  (autovalori) e le deformate  $\phi$  (autovettori)

# Equazione del moto

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q}$$

# Equazione del moto libero

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0$$

Nelle matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice

# Equazione del moto libero con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0$$

In molti casi anche la matrice  $\mathbf{C}$  è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate  
(sistemi classicamente smorzati)

Talvolta, ad esempio quando masse e rigidità delle diverse parti sono molto variabili, ciò non avviene  
(sistemi non classicamente smorzati)

# Equazione del moto (risposta ad un accelerogramma)

L'equazione del moto  $\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$

diventa  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = -\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = (-\Gamma_j) \ddot{u}_g$$

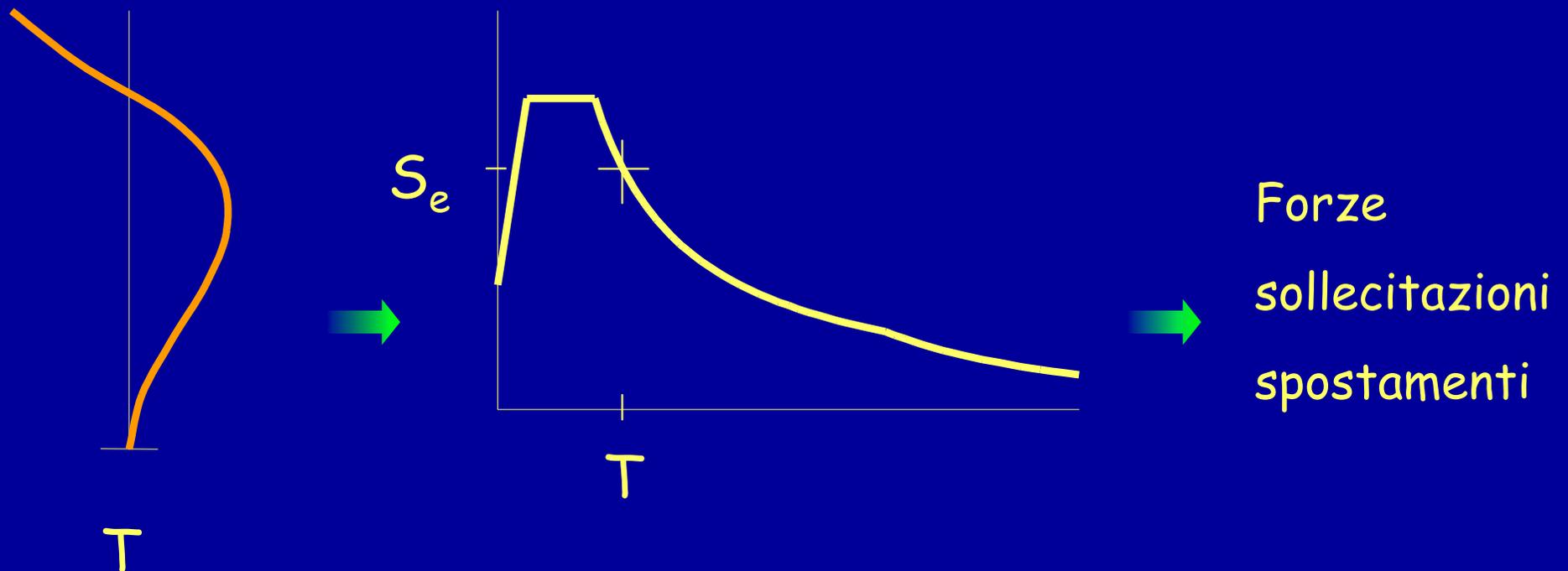
$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per  $\Gamma_j$

Coefficiente di partecipazione modale: indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante

# Analisi modale

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .



# Analisi modale

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi

La combinazione dei risultati può essere fatta come radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS) o come combinazione quadratica completa (CQC)

# Contributo dei singoli modi

Il taglio alla base corrispondente al modo  $j$  è

$$V_{b,j} = M_j^* S_e(T_j)$$

dove

$S_e(T_j)$  è l'ordinata spettrale corrispondente al periodo  $T_j$

$M_j^*$  è detta massa partecipante

$$M_j^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \Gamma_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Considerando tutti i modi, la massa partecipante totale coincide con l'intera massa presente nella struttura

# Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:

- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

# Considerazioni

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma
- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo
- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

# Considerazioni

Negli schemi spaziali è più probabile avere modi con periodi molto vicini tra loro:

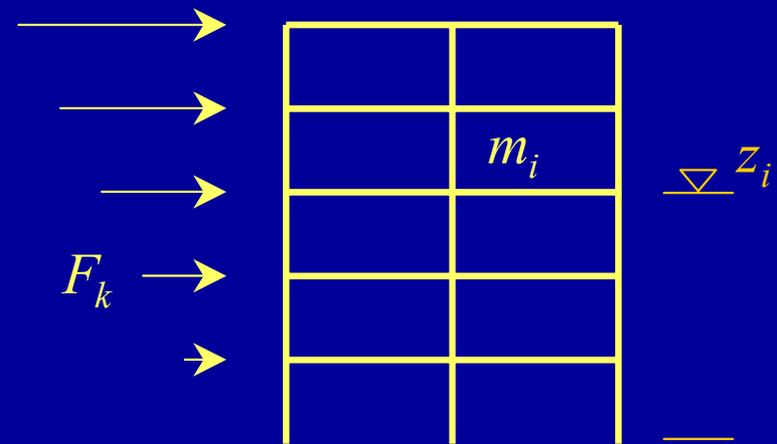
- in questo caso è opportuno usare la sovrapposizione quadratica completa (CQC)

Una buona impostazione progettuale deve mirare ad avere una struttura con impalcato rigido e con comportamento disaccoppiato (cioè minime rotazioni planimetriche)

# Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k z_k \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i z_i} S_e(T_1)$$



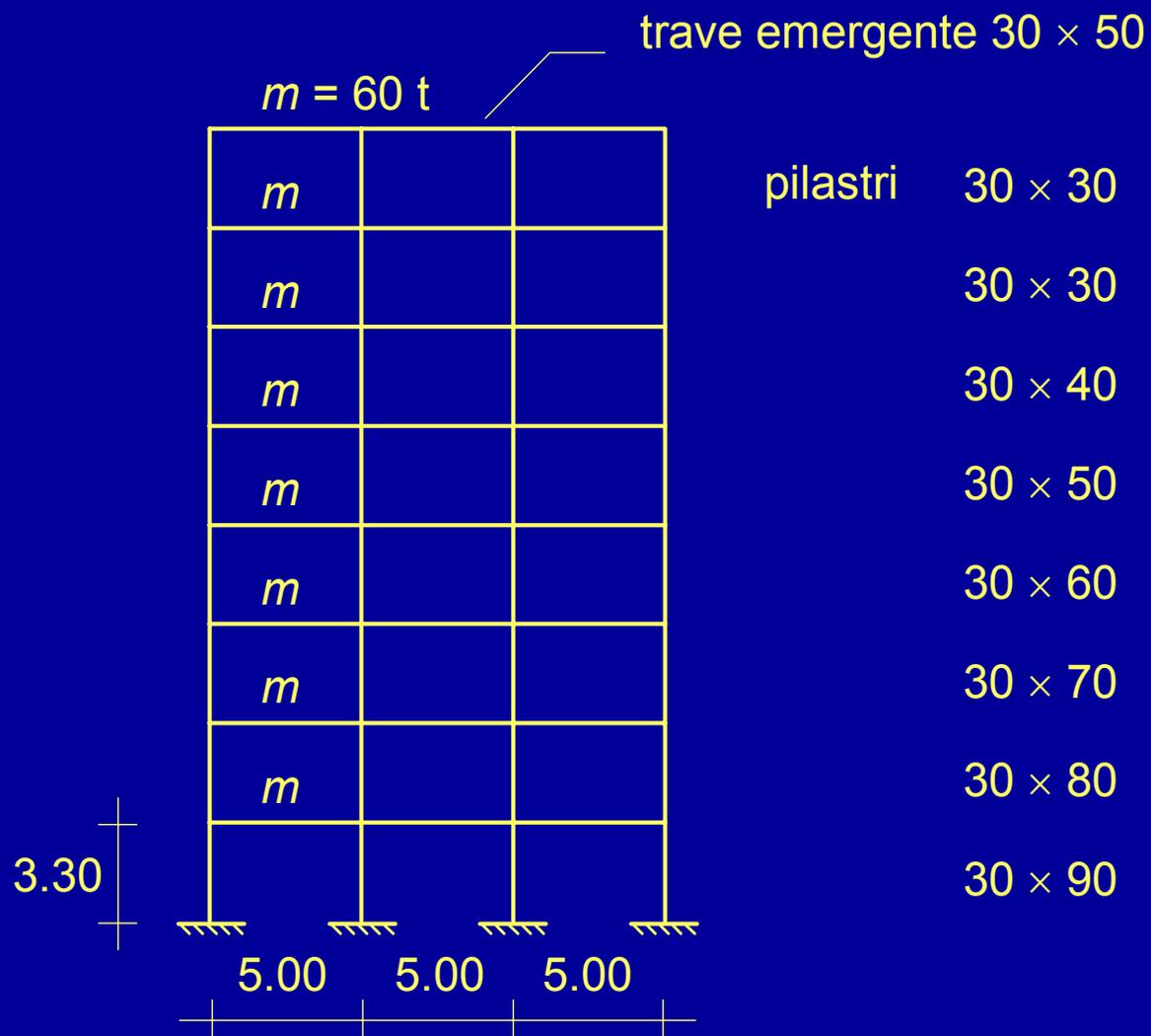
Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

$$T_1 = C_1 H^{3/4}$$

Le forze possono essere ridotte con  $\lambda=0.85$  se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

# Confronto analisi statica - modale

## Edificio con travi emergenti



pilastri	30 × 30
	30 × 30
	30 × 40
	30 × 50
	30 × 60
	30 × 70
	30 × 80
	30 × 90

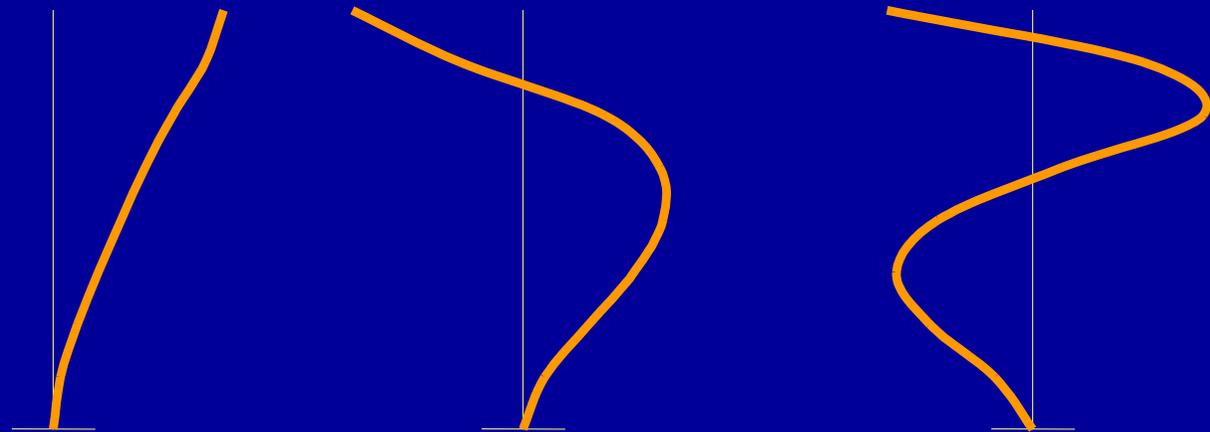
Zona 3  
 $a_g = 0.15 g$

Suolo B

Classe di  
duttività B

# Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti

## Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.183 s	0.461 s	0.259 s
$S_e$	0.0484 g	0.1145 g	0.1145 g
$M^*/M$	70.1 %	13.7 %	5.1 %

# Forze statiche - modali [kN]

## Edificio con travi emergenti

	modale			analisi statica
piano	modo 1	modo 2	modo 3	
8	40.0	-39.1	19.5	50.6
7	35.8	-14.4	-14.9	44.3
6	28.1	18.6	-22.8	38.0
5	21.7	31.3	-4.0	31.6
4	16.0	32.1	12.5	25.3
3	10.6	25.4	18.2	19.0
2	5.7	15.1	13.7	12.7
1	1.8	5.0	5.1	6.3

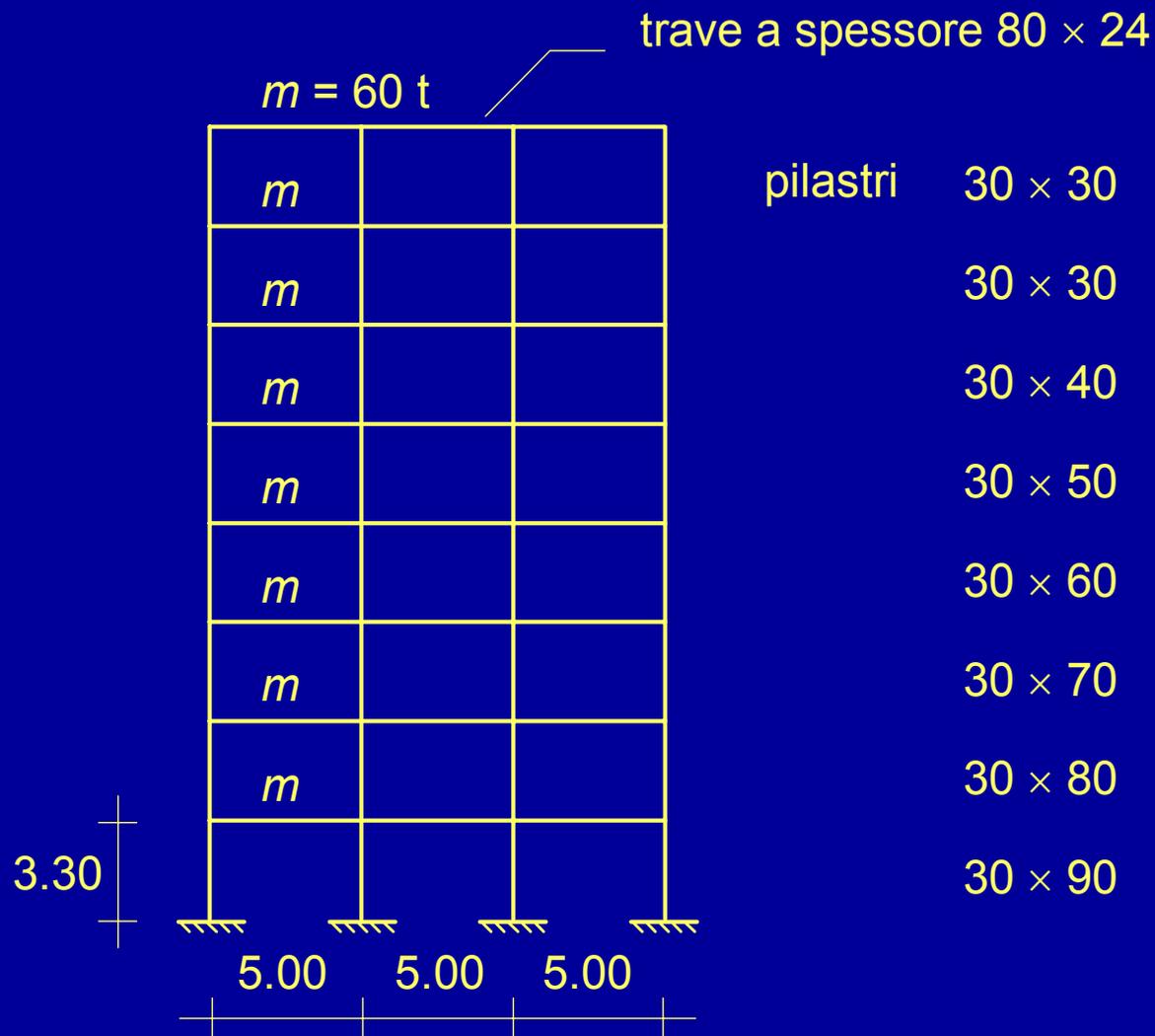
# Tagli statici - modali [kN]

## Edificio con travi emergenti

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	59.2	50.6	-14.5
7	92.9	94.9	2.2
6	111.1	132.9	19.6
5	127.6	164.5	28.9
4	144.8	189.9	31.1
3	161.7	208.8	29.2
2	173.7	221.5	27.5
1	178.1	227.8	27.9

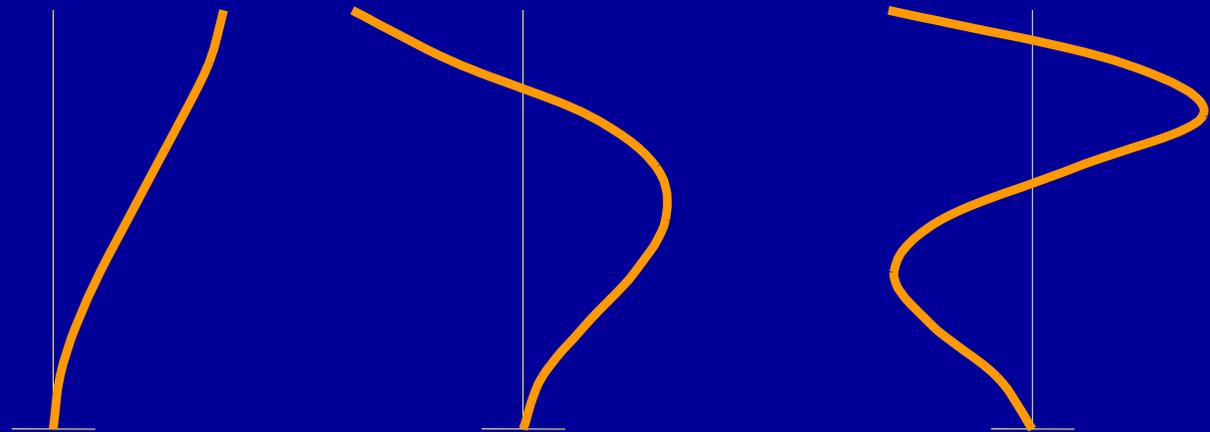
# Confronto analisi statica - modale

## Edificio con travi a spessore



# Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti

## Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.738 s	0.604 s	0.328 s
$S_e$	0.0329 g	0.0947 g	0.1145 g
$M^*/M$	70.9 %	11.8 %	5.4 %

# Forze statiche - modali [kN]

Edificio con travi a spessore

	modale			analisi statica
piano	modo 1	modo 2	modo 3	
8	26.3	-30.3	20.4	34.5
7	24.1	-12.2	-12.5	30.1
6	20.1	11.6	-24.2	25.8
5	15.9	23.6	-6.2	21.5
4	11.5	25.4	12.9	17.2
3	7.3	19.9	19.6	12.9
2	3.6	11.2	14.4	8.6
1	1.0	3.4	5.0	4.3

# Tagli statici - modali [kN]

## Edificio con travi a spessore

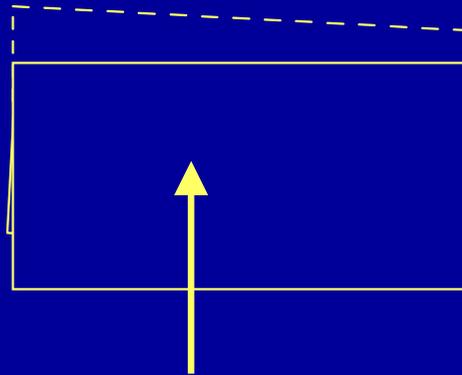
piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	45.0	34.5	-23.4
7	66.4	64.6	-2.7
6	78.7	90.4	15.0
5	89.6	112.0	25.0
4	100.0	129.2	29.2
3	112.3	142.1	26.5
2	121.9	150.7	23.6
1	125.3	155.0	23.7

# Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

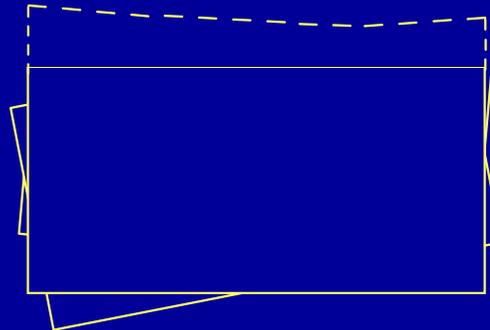
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con forti rotazioni, non va bene

Analisi modale



modo 1

modo 2

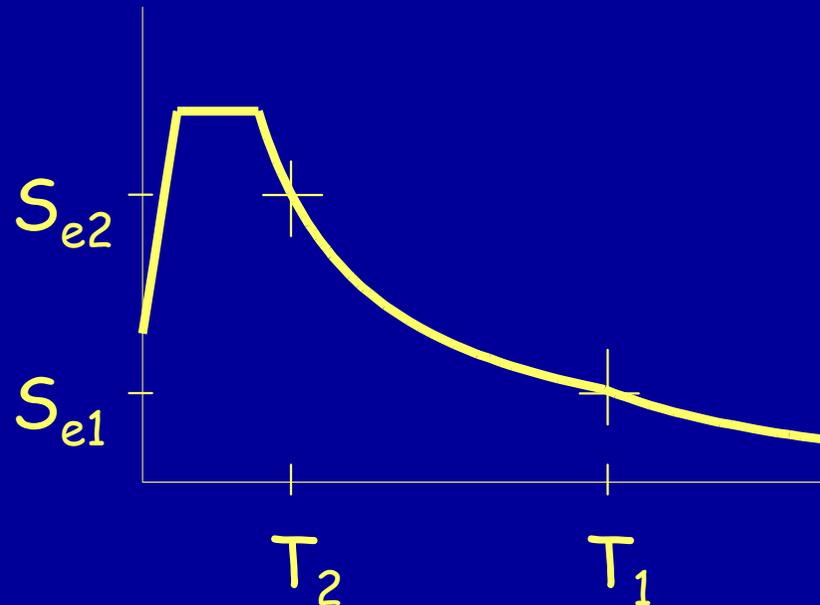
involuppo

# Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto

accelerazione  
molto bassa,  
non cautelativa



# Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile

L'uso del coefficiente riduttivo  $\lambda$  rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

# Analisi statica o analisi modale?

La norma vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera  $2.5 T_c$
- la struttura è irregolare in altezza

Commento:

nella prima versione la norma parlava di "irregolare in pianta"; la modifica è stata introdotta dall'Errata Corrige

Mi sembra molto più coerente con gli studi teorici il riferimento alla irregolarità in pianta, presente nella versione originale

# Analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)

FINE

Immagini tratte dal libro:  
A. Ghersi, P. Lenza  
Edifici antisismici in c.a.  
(in preparazione)

Per questa presentazione:

coordinamento

A. Ghersi

realizzazione

A. Ghersi

ultimo aggiornamento

6/03/2004