

Sezioni in c.a. La flessione composta

Catania, 16 marzo 2004

Marco Muratore

Per chi non c'era ...

1. Compressione: verifica

$$N_{Rd} = \frac{\alpha f_{cd}}{1.25} A_c + f_{yd} A_s$$

Tensioni ammissibili

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c (A_c + n A_s)$$

Risultati comparabili per il calcestruzzo
non comparabili per l'acciaio

Per chi non c'era ...

1. Compressione: progetto

$$A_c \geq \frac{0.85 N_{Sd}}{\alpha f_{cd} / 1.25}$$

$$A_s \geq \frac{0.15 N_{Sd}}{f_{yd}}$$

Tensioni ammissibili

$$A_c \geq \frac{N}{0.784 \bar{\sigma}_c}$$

$$A_s \geq 0.008 A_c$$

Risultati comparabili per il calcestruzzo
non comparabili per l'acciaio

Per chi non c'era ...

2. Flessione semplice: sezione in calcestruzzo

$$d = r_{SLU} \sqrt{\frac{M_{sd}}{b}}$$

$$b = r_{SLU} \left(\frac{M_{sd}}{d} \right)^2$$

Tensioni ammissibili

$$d = r_{TA} \sqrt{\frac{M_{sk}}{b}}$$

$$b = r_{TA} \left(\frac{M_{sk}}{d} \right)^2$$

Risultati comparabili

Per chi non c'era ...

2. Flessione semplice: armatura tesa

$$A_s = \frac{M_{sd}}{0.9 d f_{yd}}$$

Tensioni ammissibili

$$A_s = \frac{M_{sk}}{0.9 d \sigma_s}$$

Risultati comparabili

Per chi non c'era ...

2. Flessione semplice: armatura compressa

$$\Delta M = M_{Sd} - M_{c,Rd}$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{\sigma'_s (d - c)}$$

Tensioni ammissibili

$$\Delta M = M_{Sk} - M_{cls}$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{\sigma'_s (d - c)}$$

Risultati non comparabili

Sezioni in c.a. La flessione composta

ARGOMENTI

1. Verifica di sezioni tenso-presso inflesse
2. Progetto di sezioni tenso-presso inflesse
3. Differenze tra T.A. e S.L.U.
4. Metodo semplificato

Verifica a tenso-pressoflessione retta: T.A.

Verifica in termini di tensioni: procedura generale

Determinazione della posizione dell'asse neutro

Calcolo del momento d'inerzia della sezione reagente

Calcolo del momento statico della sezione reagente

Calcolo delle tensioni massime nel calcestruzzo compresso e nell'acciaio teso

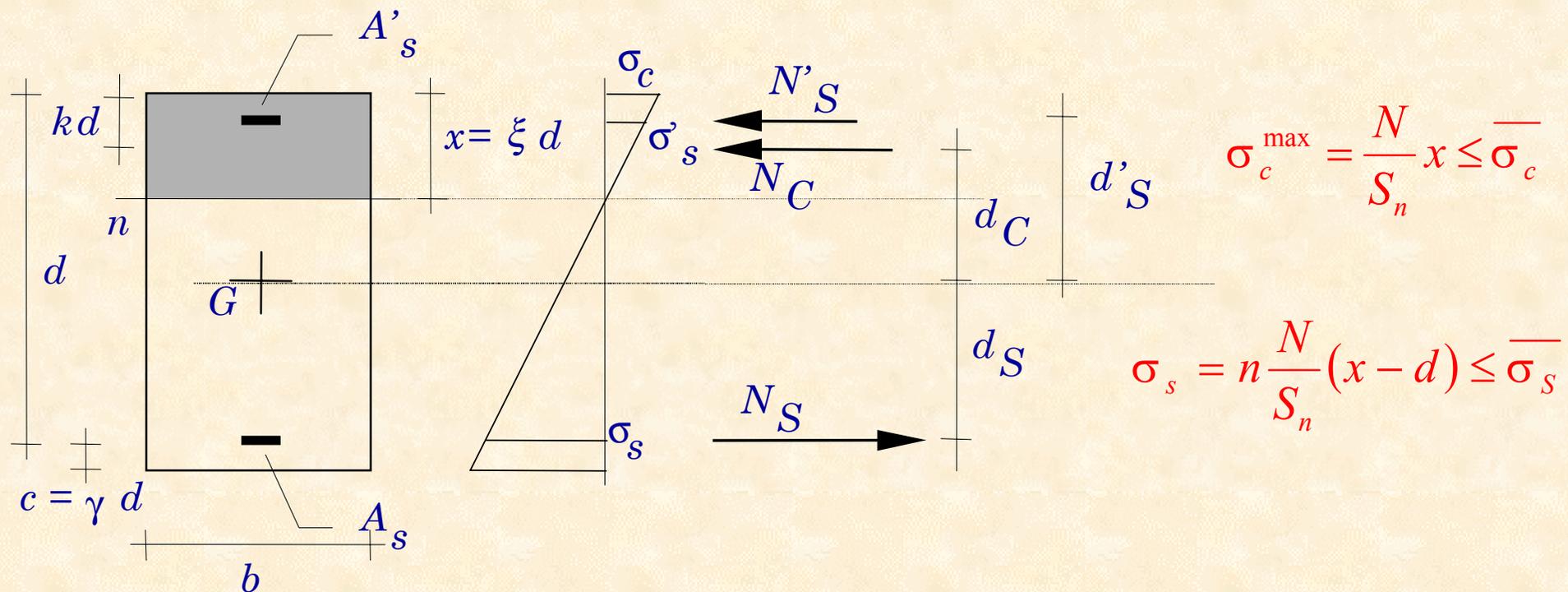
Verifica che le tensioni massime siano inferiori ai valori ammissibili

Verifica a tenso-pressoflessione retta: T.A.

Verifica in termini di tensioni: sezione rettangolare

$$x^3 + 3d_c x^2 + \frac{6n}{b} [A_s (d + d_c) + A'_s (d + d'_c)] x - \frac{6n}{b} [A_s (d + d_c)^2 + A'_s (d + d'_c)^2] = 0$$

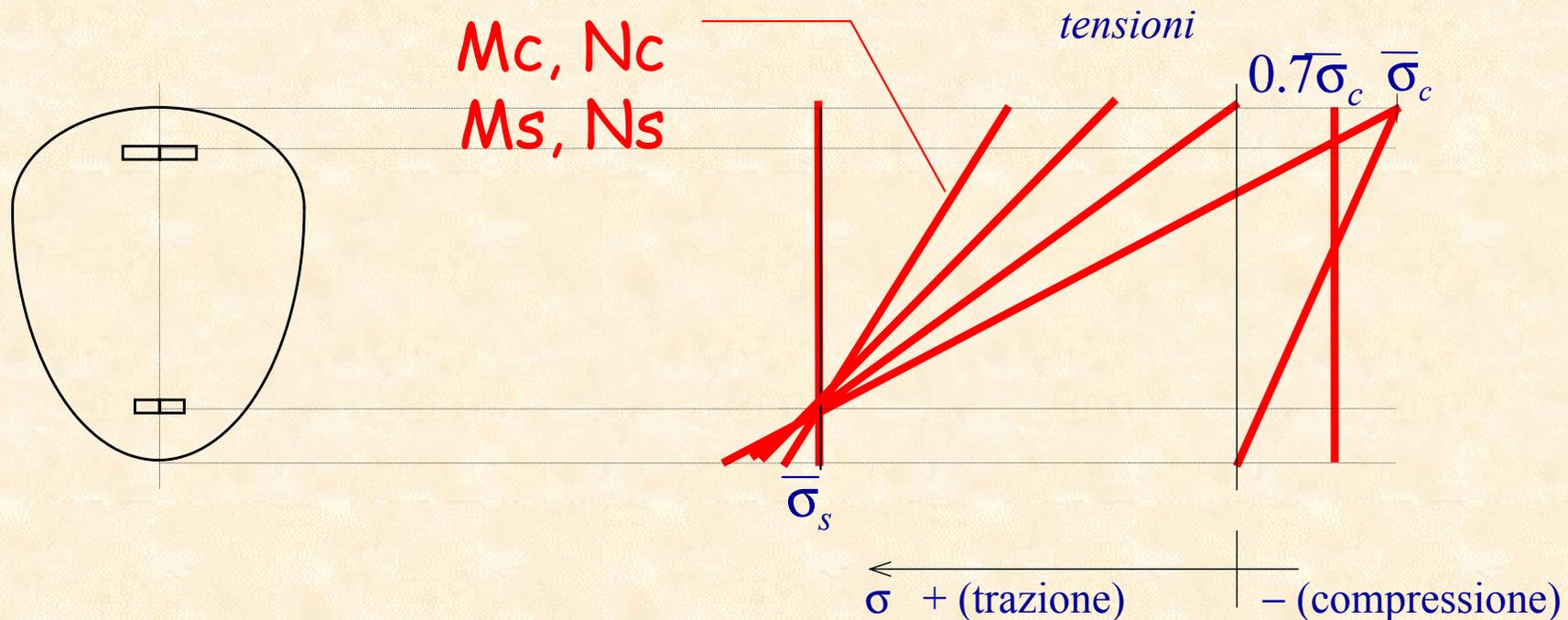
$$S_n = \frac{b x^2}{2} + n A_s (x - d) + n A'_s (x - c)$$



Verifica a tenso-pressoflessione retta: T.A.

Diagrammi ammissibili di tensione

Ciascun diagramma per il quale si raggiunge la tensione ammissibile nel calcestruzzo e/o nell'acciaio è un diagramma di tensione ammissibile.



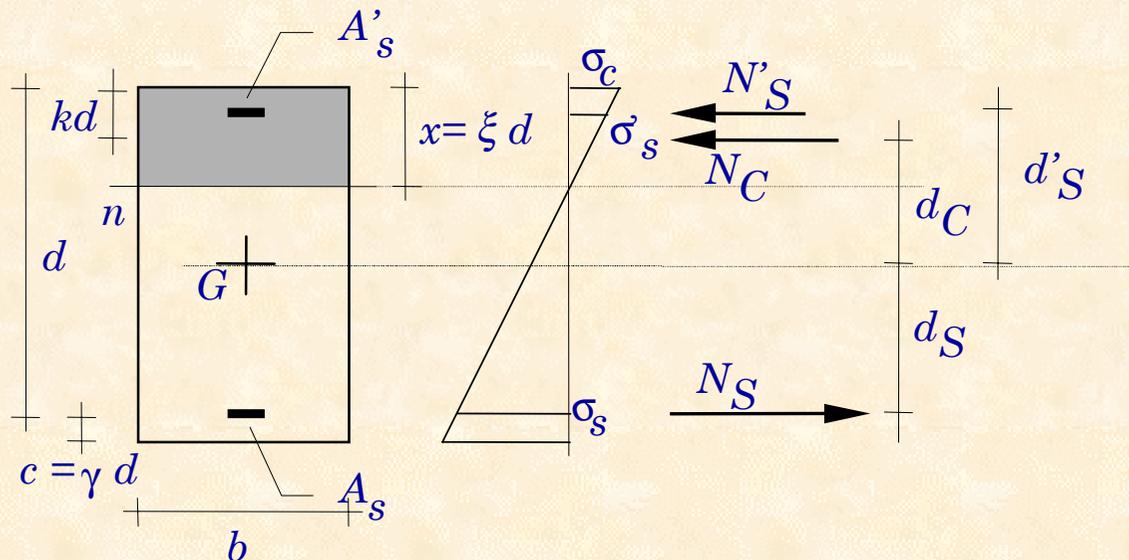
Costruzione del dominio M-N : T.A.

Assegnato un diagramma di tensioni si calcolano le risultanti delle tensioni di compressione e di trazione N_C , N'_S ed N_S :

$$N_C = \frac{1}{2} b x \sigma_c^{\max}$$

$$N_S = \sigma_s A_S$$

$$N'_S = \sigma'_s A'_S$$



Equilibrio alla traslazione:

$$N = N_C + N_S + N'_S$$

Equilibrio alla rotazione
rispetto al baricentro
geometrico della sezione

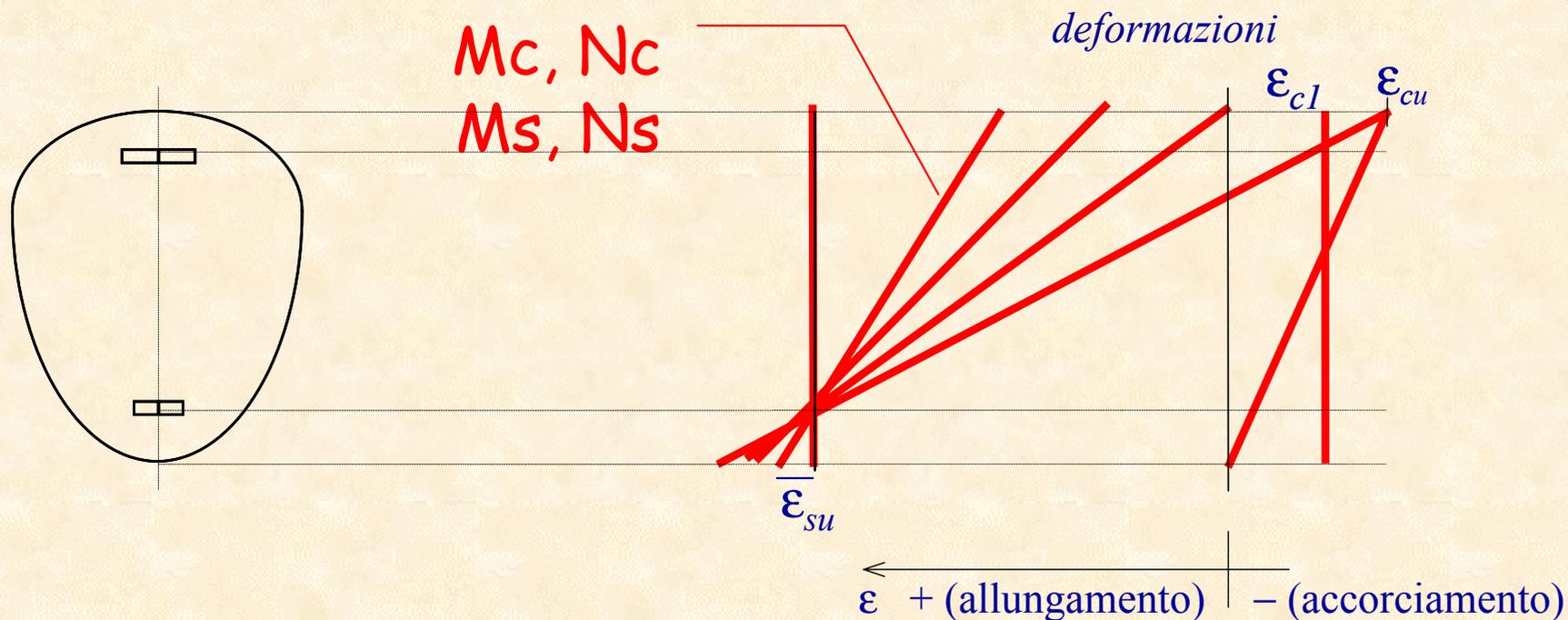
$$M = N_C \cdot d_C + N_S \cdot d_S + N'_S \cdot d'_S$$

Le coordinate N ed M
corrispondono ad una
deformata di rottura ed
individuano sul piano N-M
un punto del dominio.

Verifica a tenso-pressoflessione retta: **S.L.U.**

Diagrammi limite di deformazione

Si possono individuare **diagrammi limite** di deformazione, nei quali si raggiunge il valore ultimo della deformazione del calcestruzzo ϵ_{cu} o dell'acciaio ϵ_{su} ; hanno particolare importanza anche situazioni nelle quali si raggiunge la deformazione limite di snervamento ϵ_{yd} nell'acciaio.



Costruzione del dominio M-N : S.L.U.

Assegnata una deformata di rottura, si determina il diagramma delle deformazioni ed attraverso i legami costitutivi quello delle tensioni. Quindi si calcolano le risultanti delle tensioni di compressione e di trazione N_C , N'_S ed N_S :

$$N_S = \sigma_s A_s = s f_{yd} A_s$$

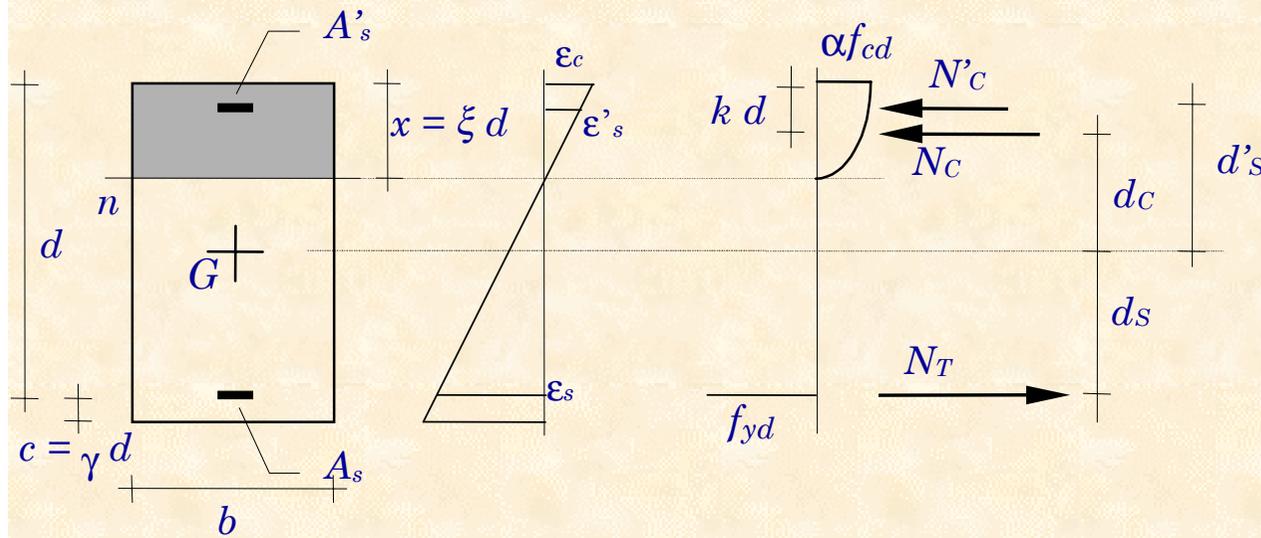
$$s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \leq 1$$

$$N'_S = \sigma'_s A'_s = s' u f_{yd} A_s$$

$$s' = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} \leq 1 \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

$$N_C = \alpha f_{cd} \beta \xi b d$$

β è tabellato in funzione di ξ



Equilibrio alla traslazione:

$$N = N_C + N_S + N'_S$$

Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro geometrico della sezione

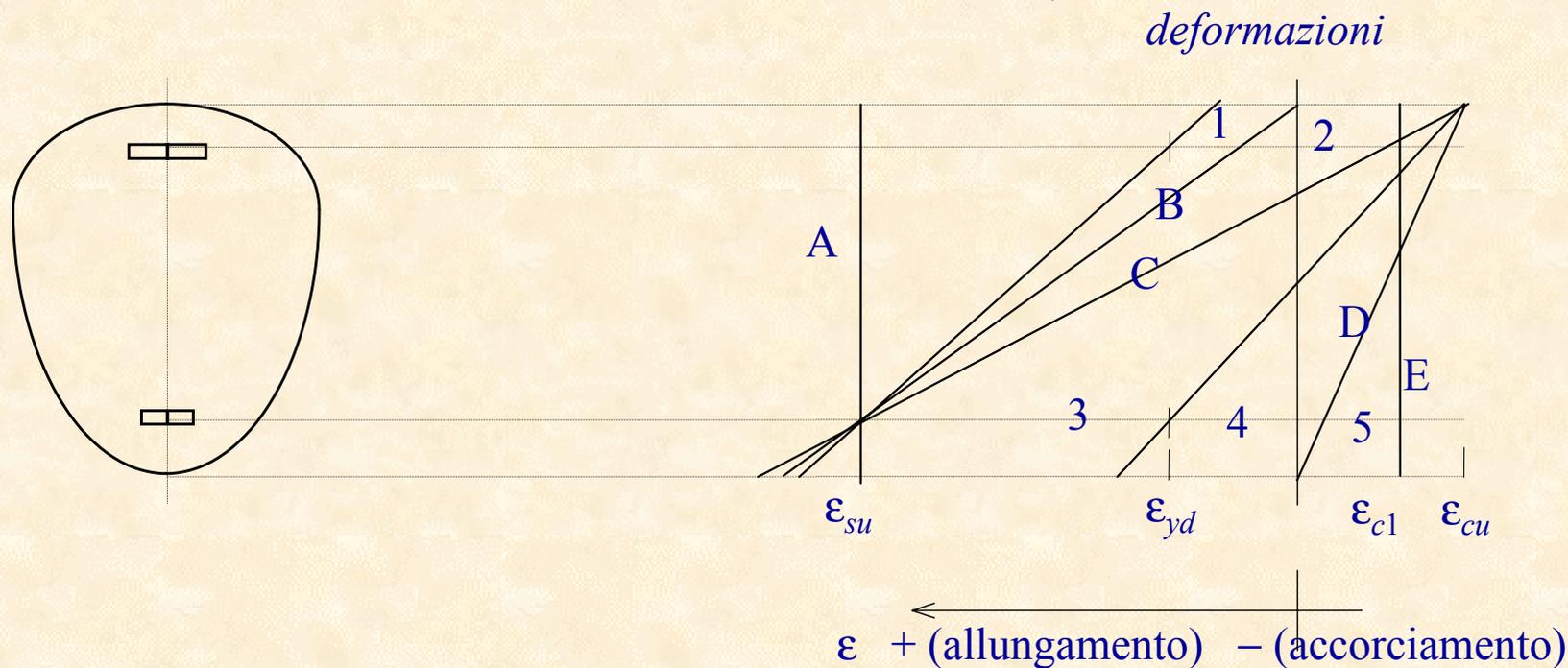
$$M = N_C \cdot d_C + N_S \cdot d_S + N'_S \cdot d'_S$$

Le coordinate N ed M corrispondono ad una deformata di rottura ed individuano sul piano N-M un punto del dominio.

Verifica a tenso-pressoflessione retta: **S.L.U.**

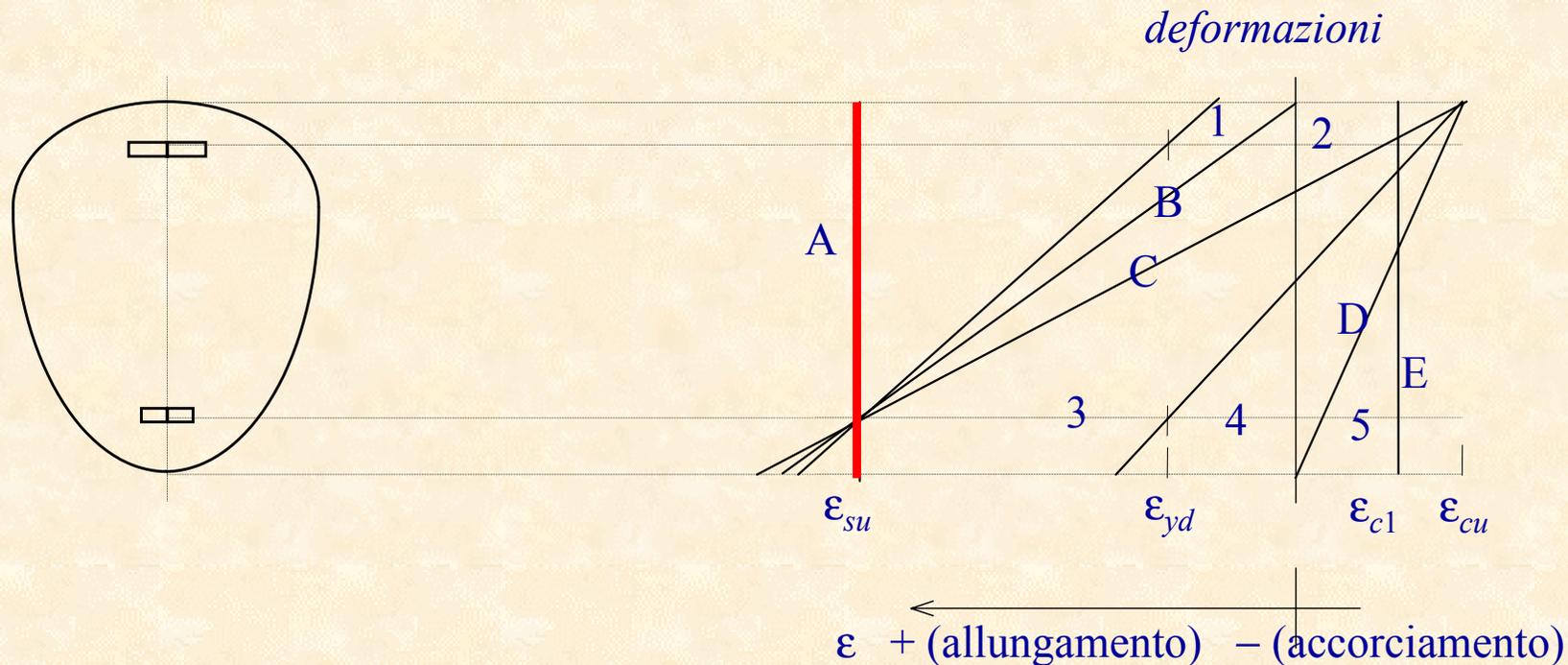
Diagrammi limite di deformazione

Si possono individuare **diagrammi limite** di deformazione, nei quali si raggiunge il valore ultimo della deformazione del calcestruzzo ϵ_{cu} o dell'acciaio ϵ_{su} ; hanno particolare importanza anche situazioni nelle quali si raggiunge la deformazione limite di snervamento ϵ_{yd} nell'acciaio.



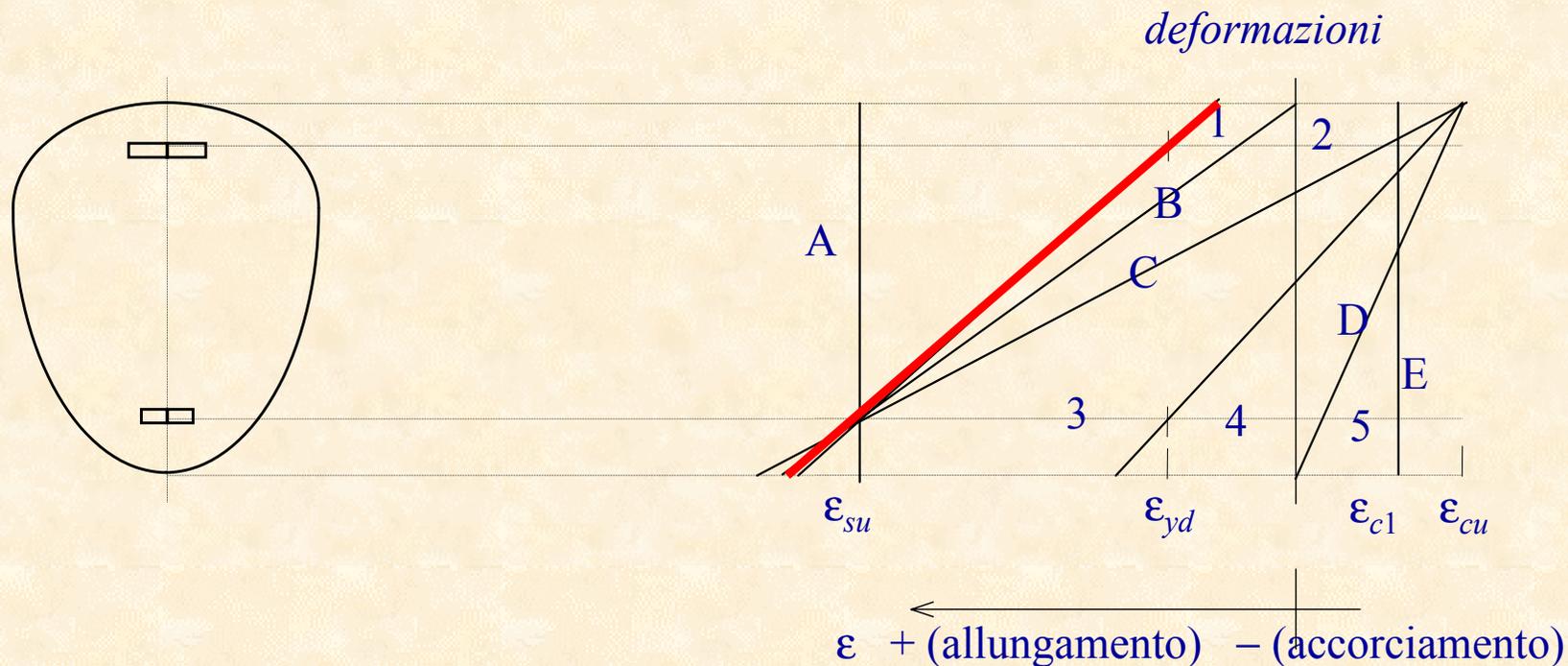
Particolari diagrammi limite di deformazione

A) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore che in quella superiore;



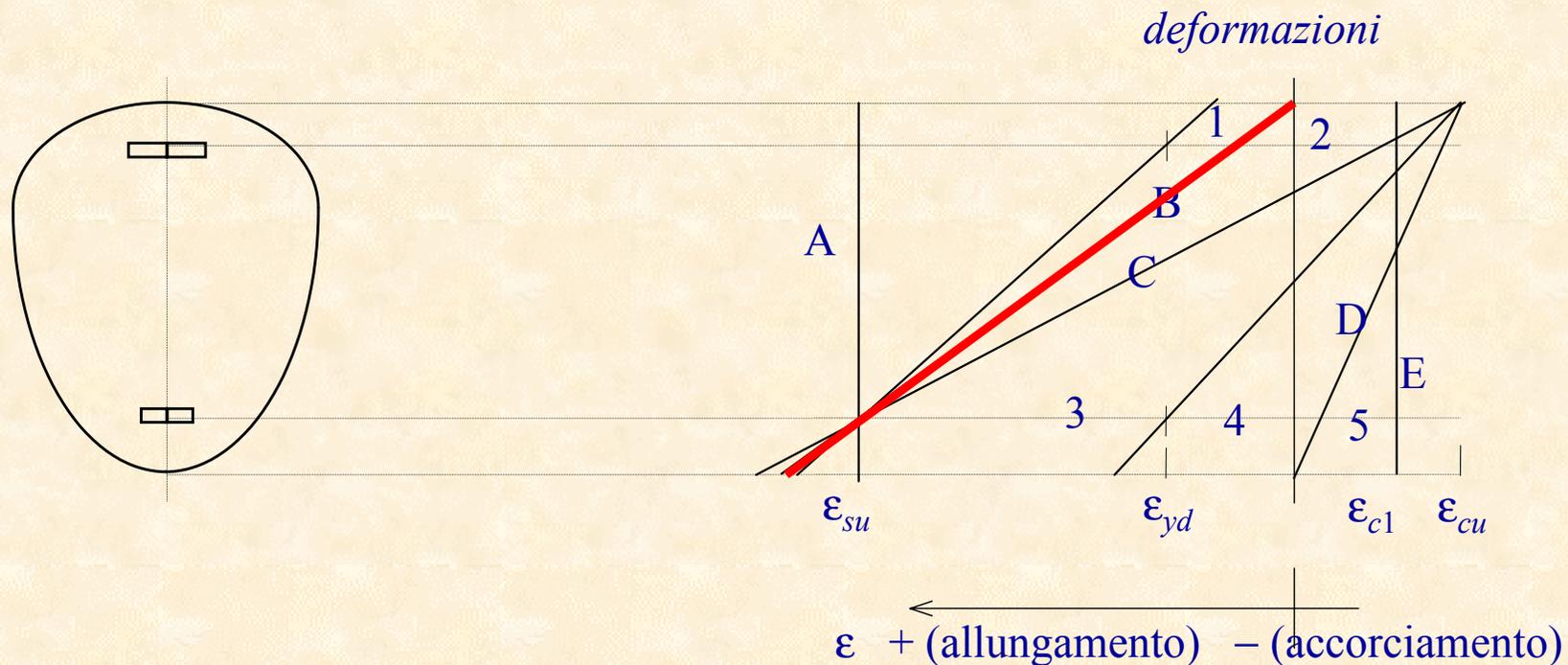
Particolari diagrammi limite di deformazione

A') sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e ϵ_{yd} in quella superiore;



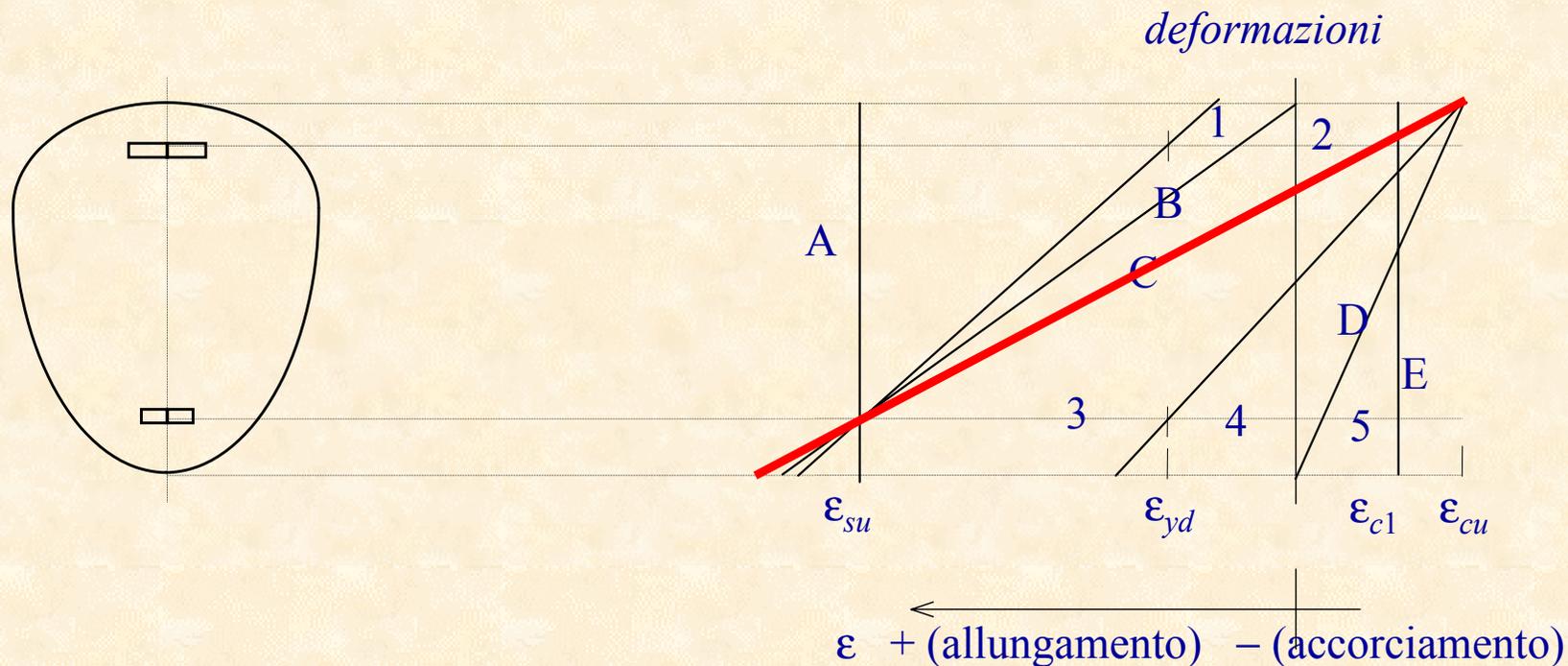
Particolari diagrammi limite di deformazione

B) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e nulla al bordo superiore;



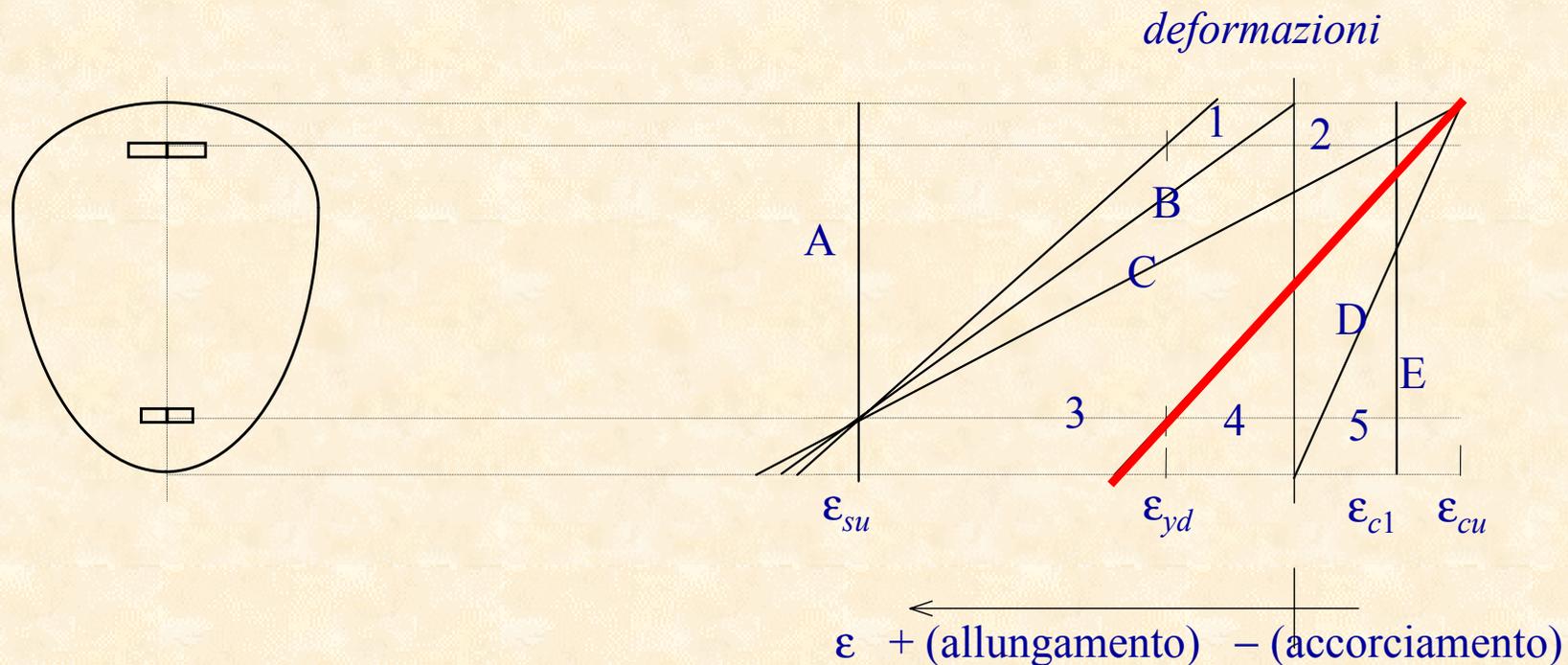
Particolari diagrammi limite di deformazione

C) sezione parzializzata, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e ϵ_{cu} al bordo superiore;



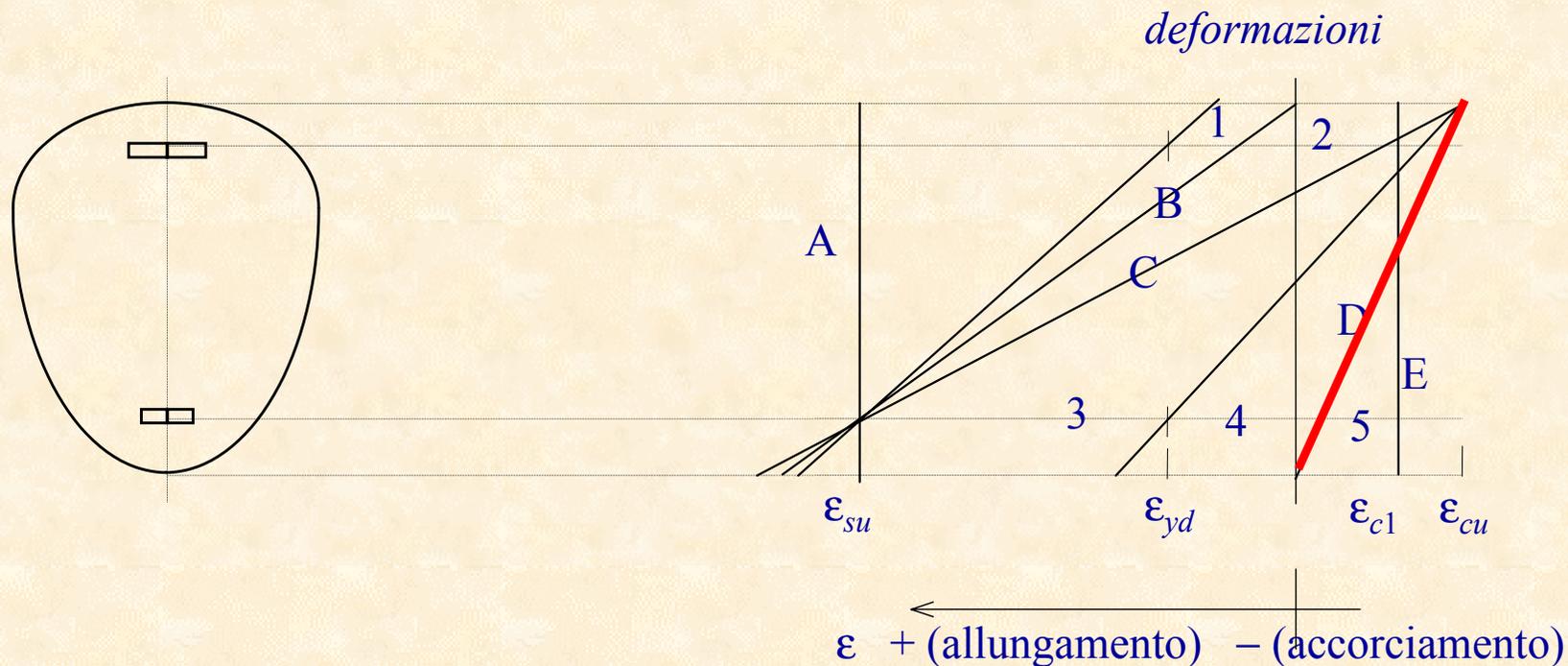
Particolari diagrammi limite di deformazione

C') sezione parzializzata, con deformazione pari a ϵ_{sy} nell'armatura inferiore e ϵ_{cu} al bordo superiore;



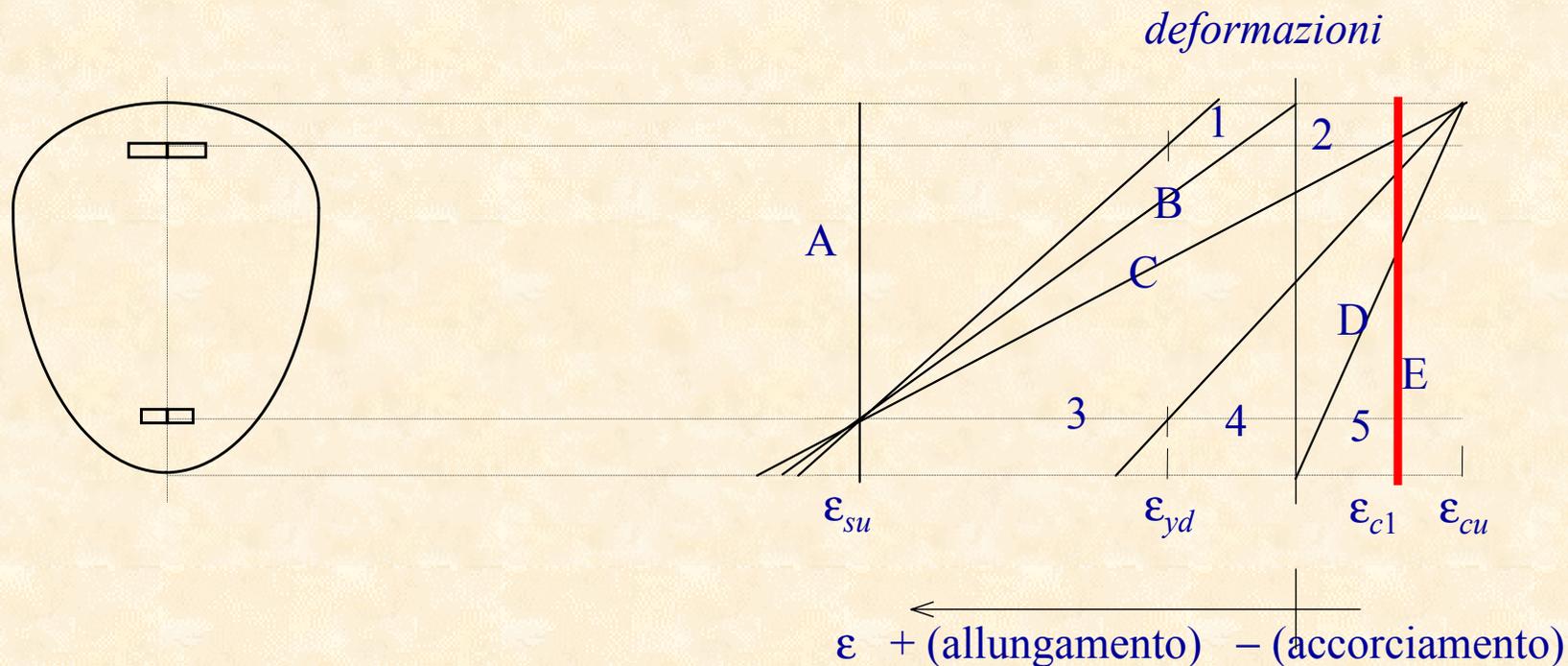
Particolari diagrammi limite di deformazione

D) sezione tutta compressa, con deformazione nulla al bordo inferiore e ϵ_{cu} a quello superiore;



Particolari diagrammi limite di deformazione

E) sezione tutta compressa, con deformazione pari a ϵ_{cl} sia al bordo inferiore che a quello superiore

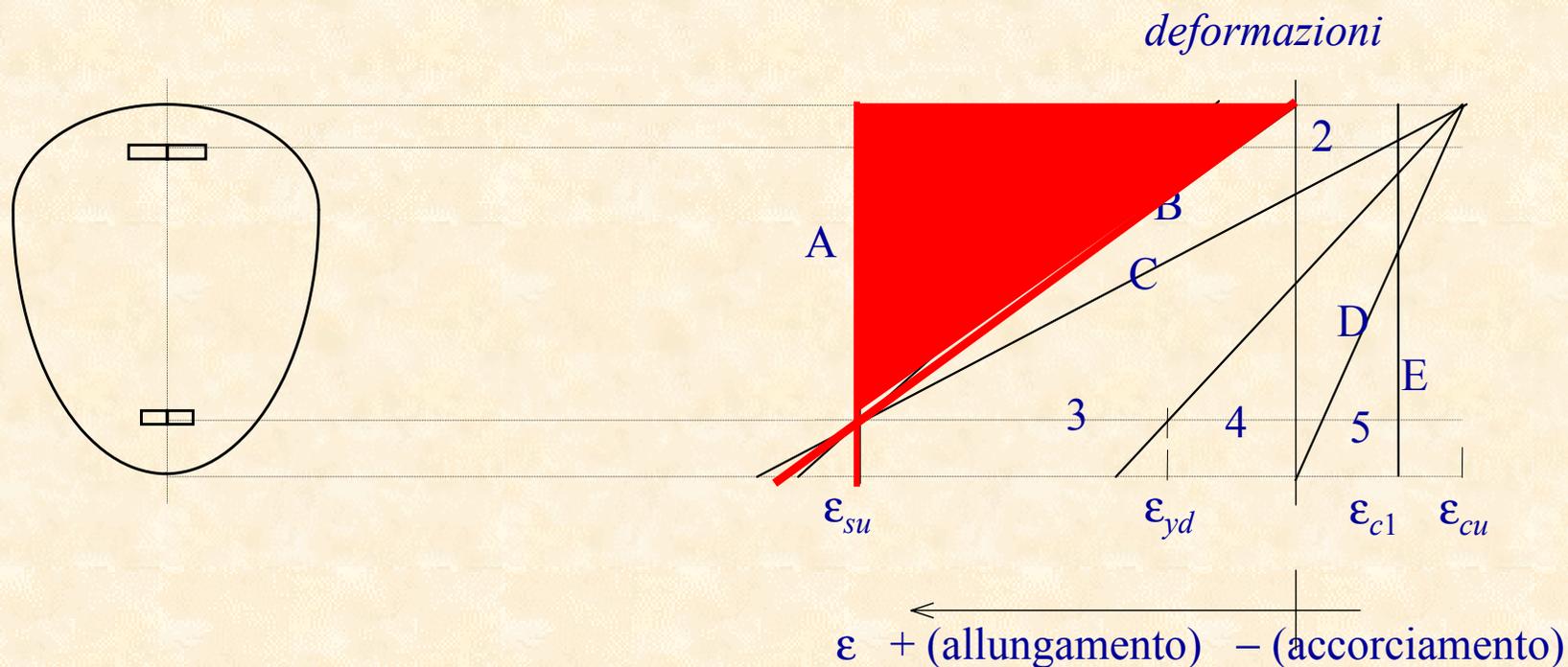


Particolari diagrammi limite di deformazione

- A) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore che in quella superiore;
- A') sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e ε_{sy} in quella superiore;
- B) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e nulla al bordo superiore;
- C) sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e ε_{cu} al bordo superiore;
- C') sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{sy} nell'armatura inferiore e ε_{cu} al bordo superiore;
- D) sezione tutta compressa, con deformazione nulla al bordo inferiore e ε_{cu} a quello superiore;
- E) sezione tutta compressa, con deformazione pari a ε_{cl} sia al bordo inferiore che a quello superiore

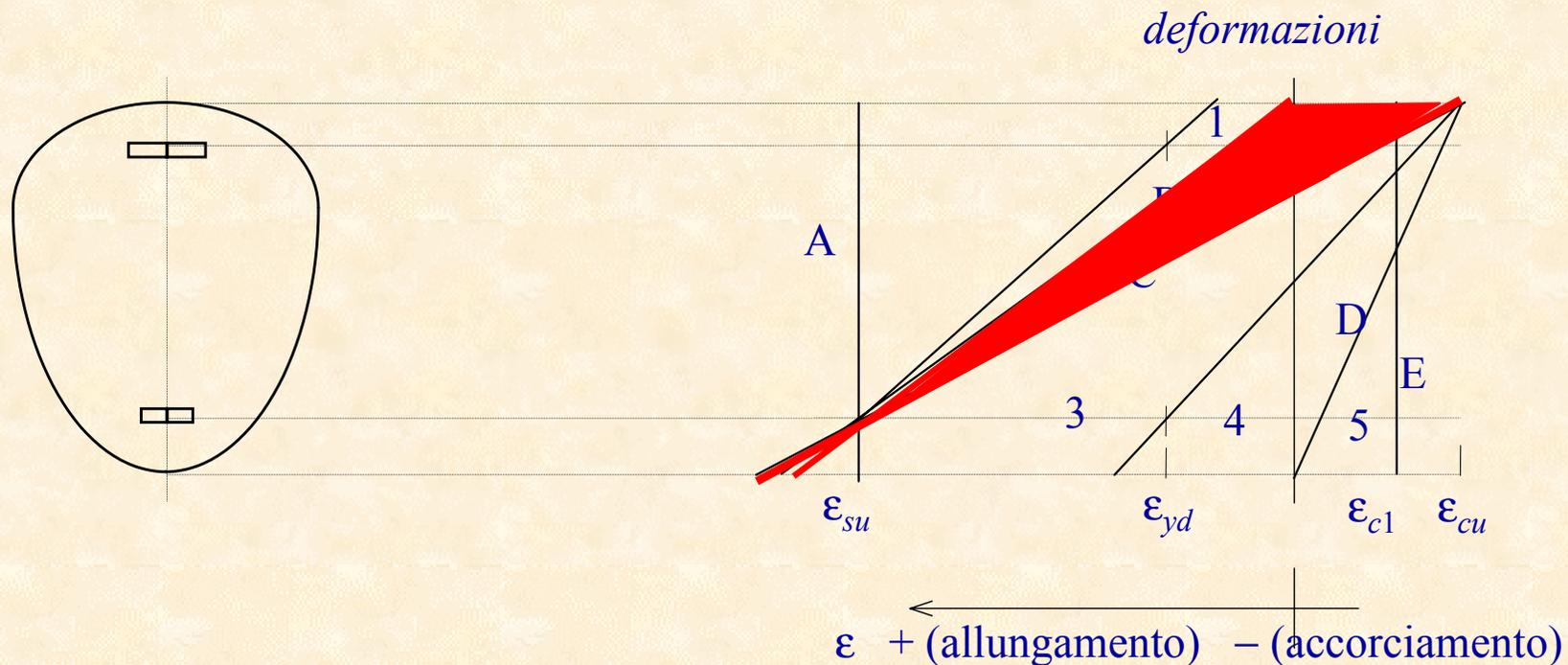
Campi limite di deformazione

- 1) compreso tra A e B:
sezione tutta tesa,
deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore;



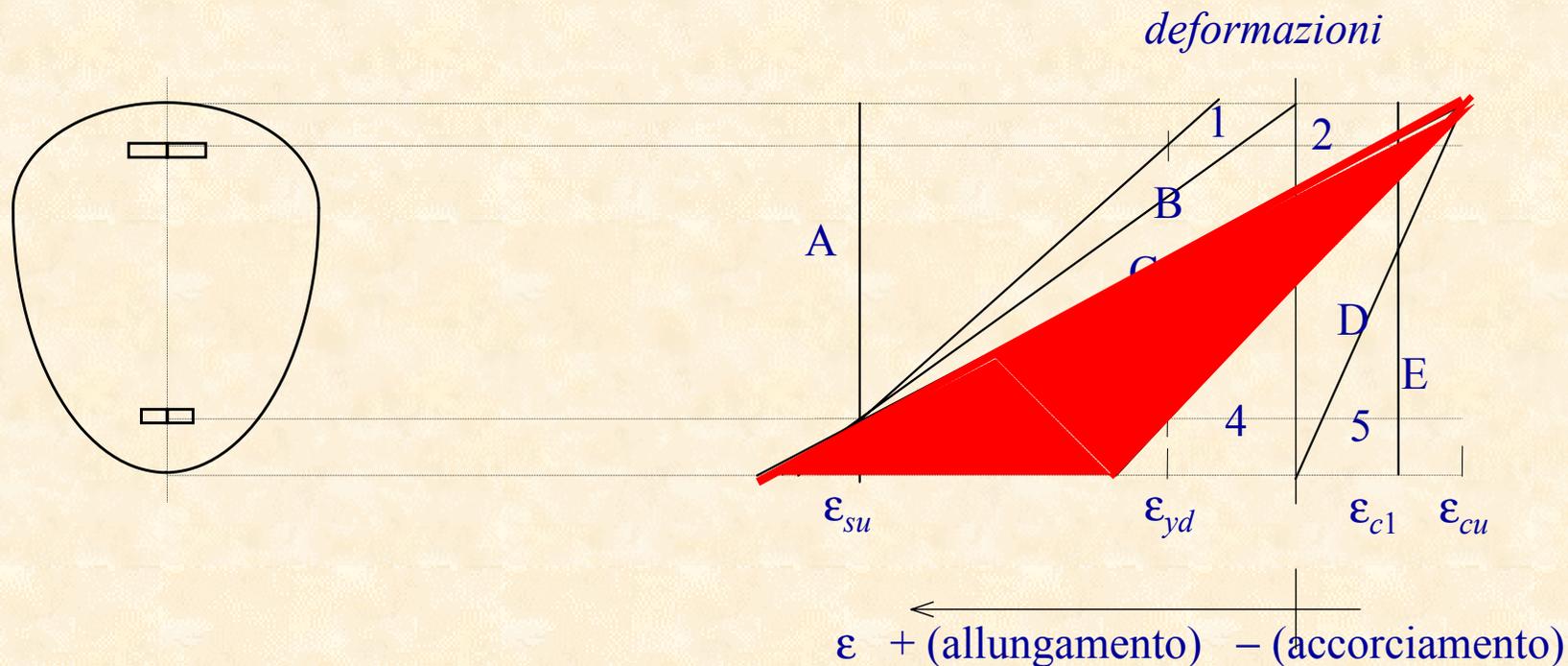
Campi limite di deformazione

2) compreso tra B e C:
sezione parzializzata,
deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore;



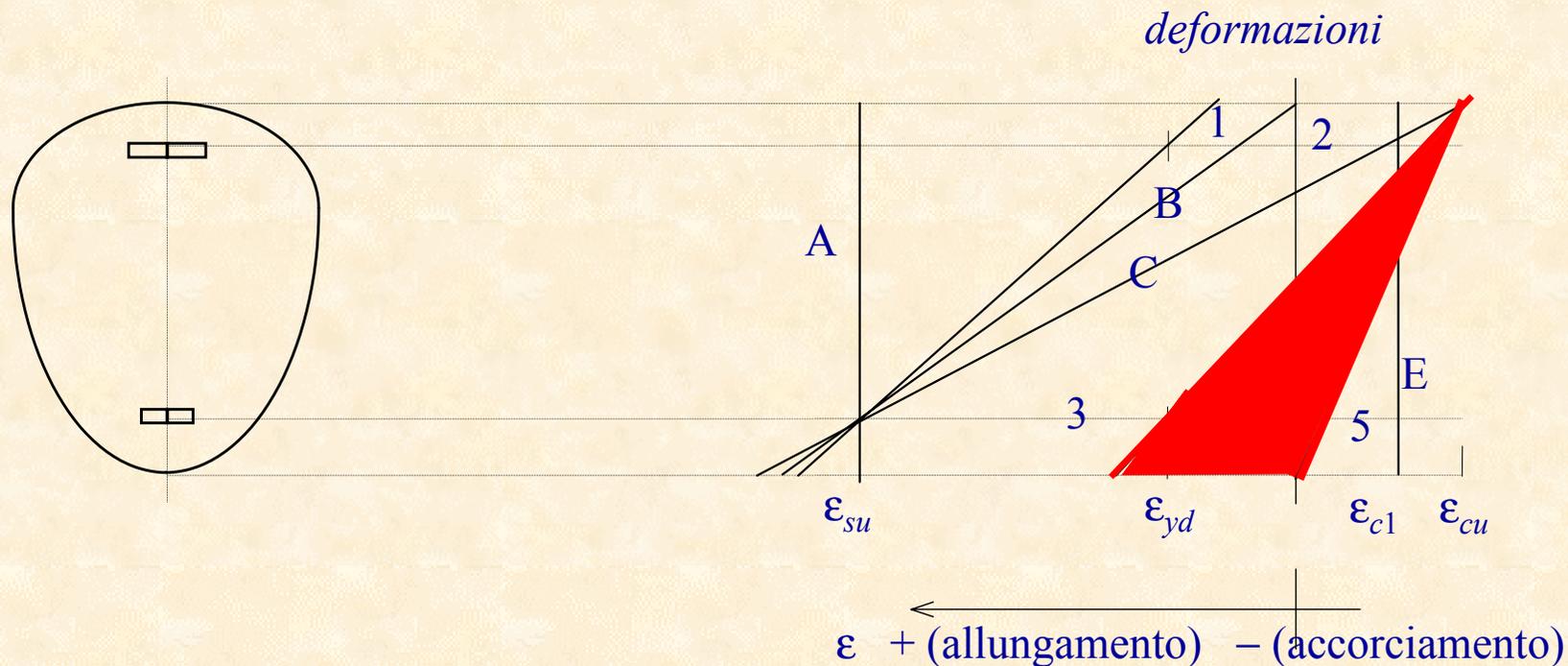
Campi limite di deformazione

3) compreso tra C e C' :
sezione parzializzata,
deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore
deformazione compresa tra ε_{yd} e ε_{su} al bordo inferiore;



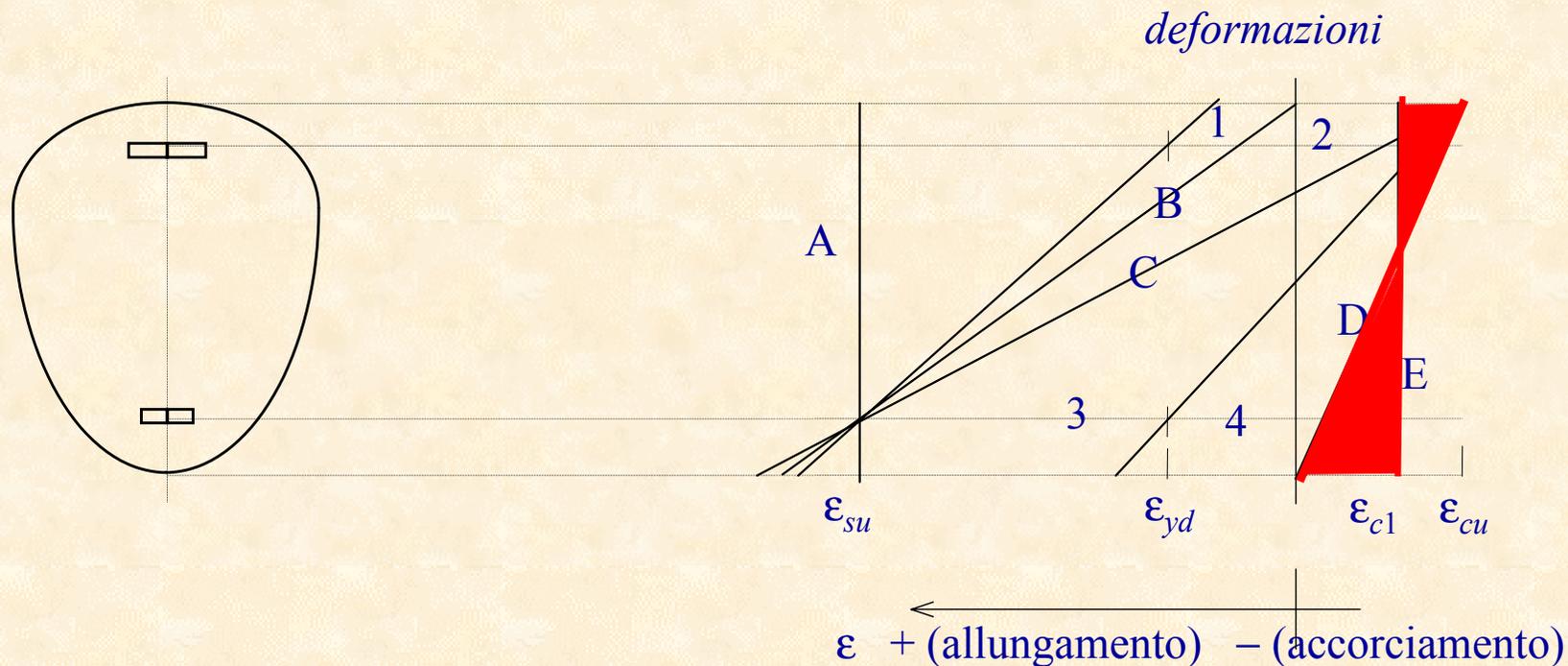
Campi limite di deformazione

4) compreso tra C' e D:
sezione parzializzata,
deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore
deformazione minore di ε_{yd} al bordo inferiore;



Campi limite di deformazione

5) compreso tra D ed E:
sezione tutta compressa,
deformazione pari a ε_{c1} in un punto opportunamente situato
rispetto al bordo superiore.



Campi limite di deformazione

I diagrammi limite individuano i seguenti campi di comportamento:

- 1) compreso tra A e B: sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore;
- 2) compreso tra B e C: sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore;
- 3) compreso tra C e C': sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore e deformazione compresa tra ε_{yd} e ε_{su} al bordo inferiore;
- 4) compreso tra C' e D: sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore e deformazione minore di ε_{yd} al bordo inferiore;
- 5) compreso tra D ed E: sezione tutta compressa, con deformazione pari a ε_{cl} in un punto opportunamente situato rispetto al bordo superiore.

Domini di resistenza

Confronto tra Tensioni Ammissibili e S.L.U.

T.A.

Per **ciascun diagramma di tensione** che porta al raggiungimento del valore ammissibile della tensione nel calcestruzzo o nell'acciaio si può calcolare la corrispondente coppia M-N. L'insieme di queste coppie definisce una curva all'esterno della quale si trovano le coppie M-N non ammissibili.

S.L.U.

Per **ciascun diagramma di deformazione** che porta al raggiungimento del valore ultimo della deformazione nel calcestruzzo o nell'acciaio si può calcolare la corrispondente coppia limite M-N. L'insieme di queste coppie definisce una curva (dominio limite), all'esterno della quale si trovano le coppie M-N non accettabili.

Domini di resistenza

Questi domini:

- consentono una valutazione immediata della capacità resistente della sezione
- dipendono :
 1. dalle caratteristiche del materiale,
 2. dalla geometria della sezione
 3. dall'armatura presente

Domini di resistenza

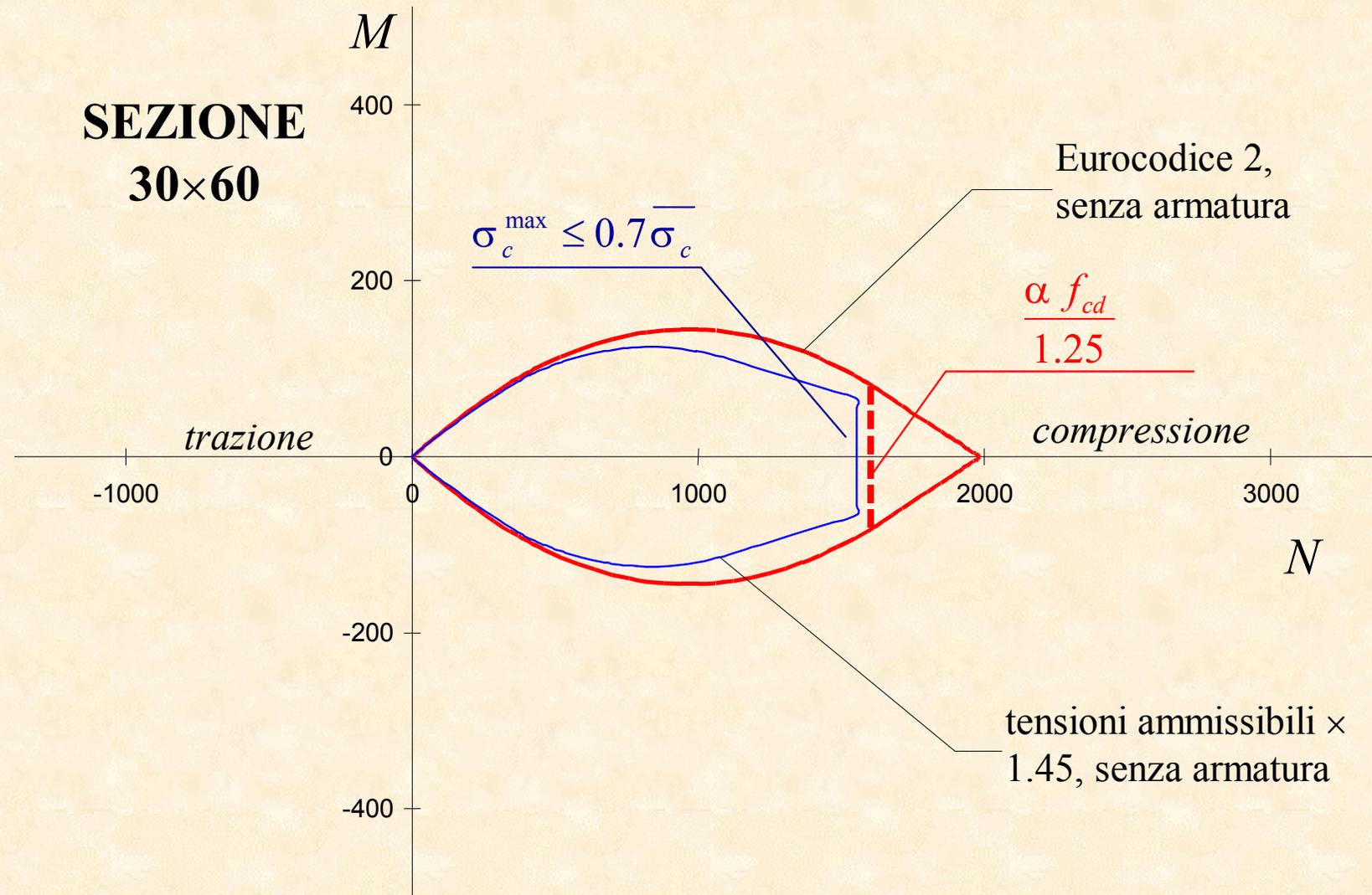
Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili

Col metodo delle tensioni ammissibili si utilizzano i valori caratteristici dei carichi, mentre allo stato limite ultimo questi sono moltiplicati per il coefficiente $\gamma = 1.4 - 1.5$.

Per effettuare un confronto a titolo esemplificativo si può sovrapporre il dominio relativo alle tensioni ammissibili incrementato di 1.45 a quello valutato secondo le prescrizioni dell'Eurocodice 2.

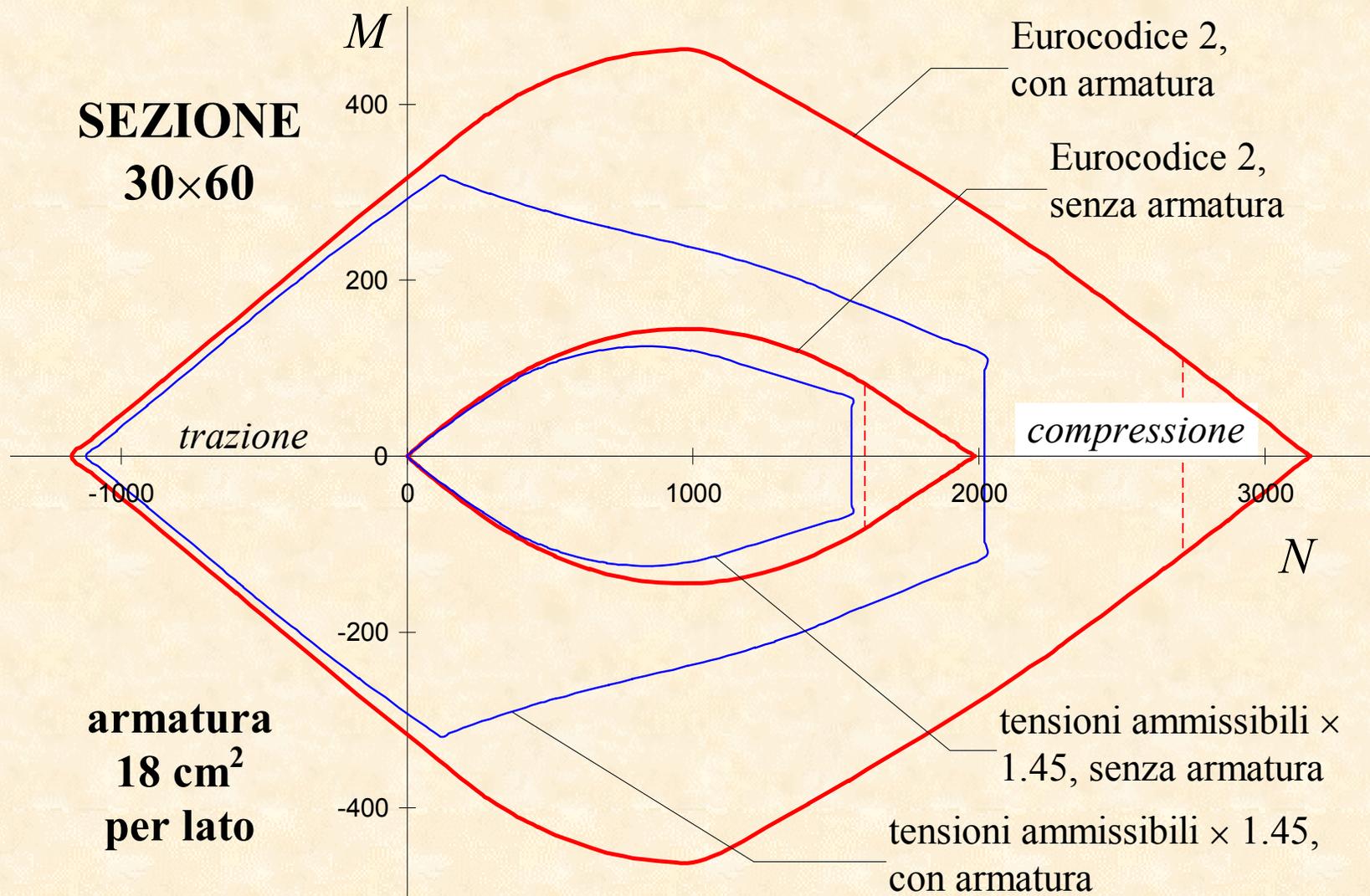
Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



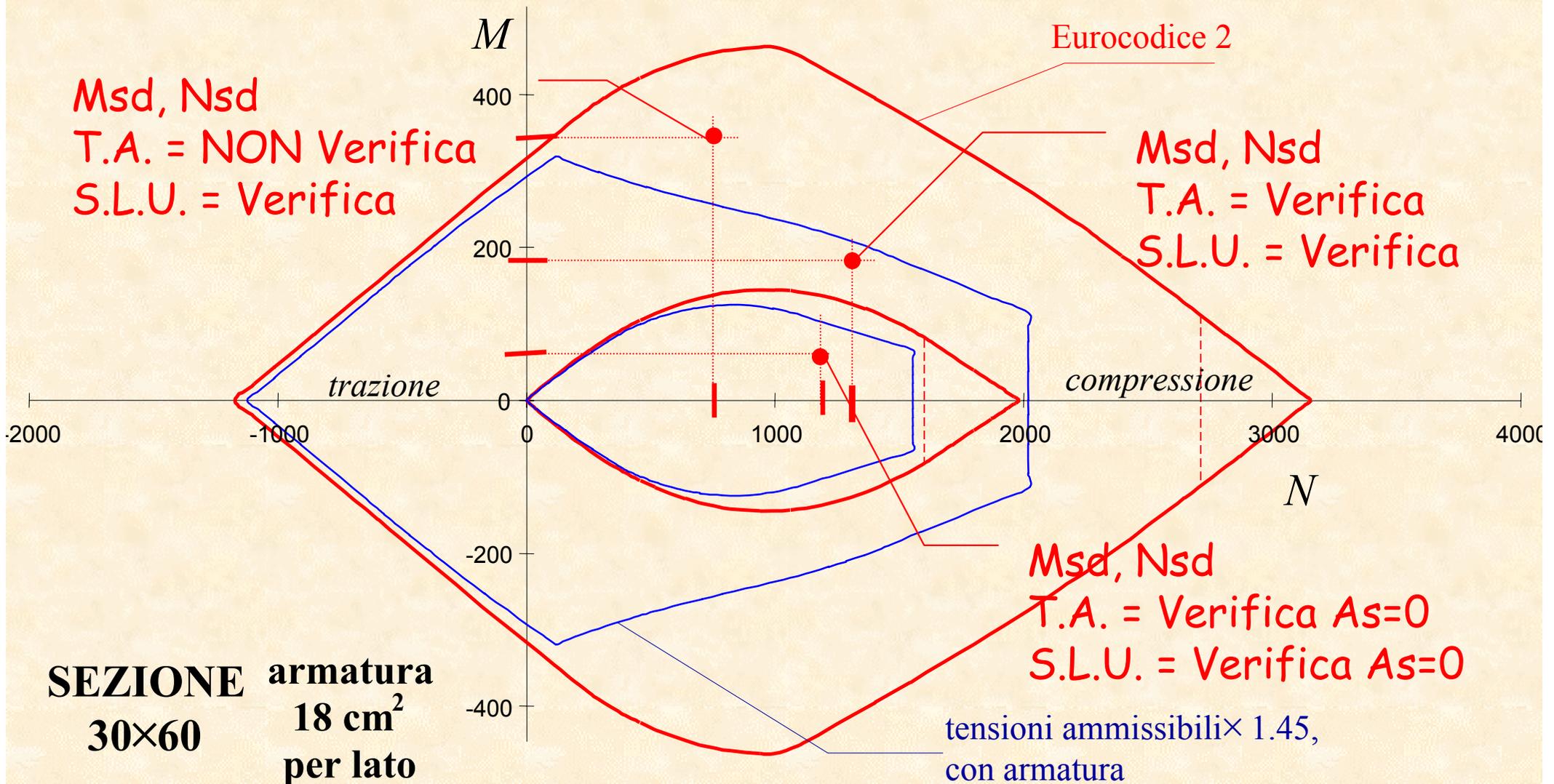
Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



Verifica a pressoflessione

Considerazioni

in assenza di armatura i domini sono abbastanza prossimi l'un l'altro

si ha una buona concordanza per sforzi normali di trazione

in caso di compressione la differenza è notevole per il contributo dell'armatura compressa

(vedi anche Sforzo normale - Flessione semplice)

Esempio - verifica a pressoflessione

Applicazione del Metodo rigoroso

Sollecitazioni

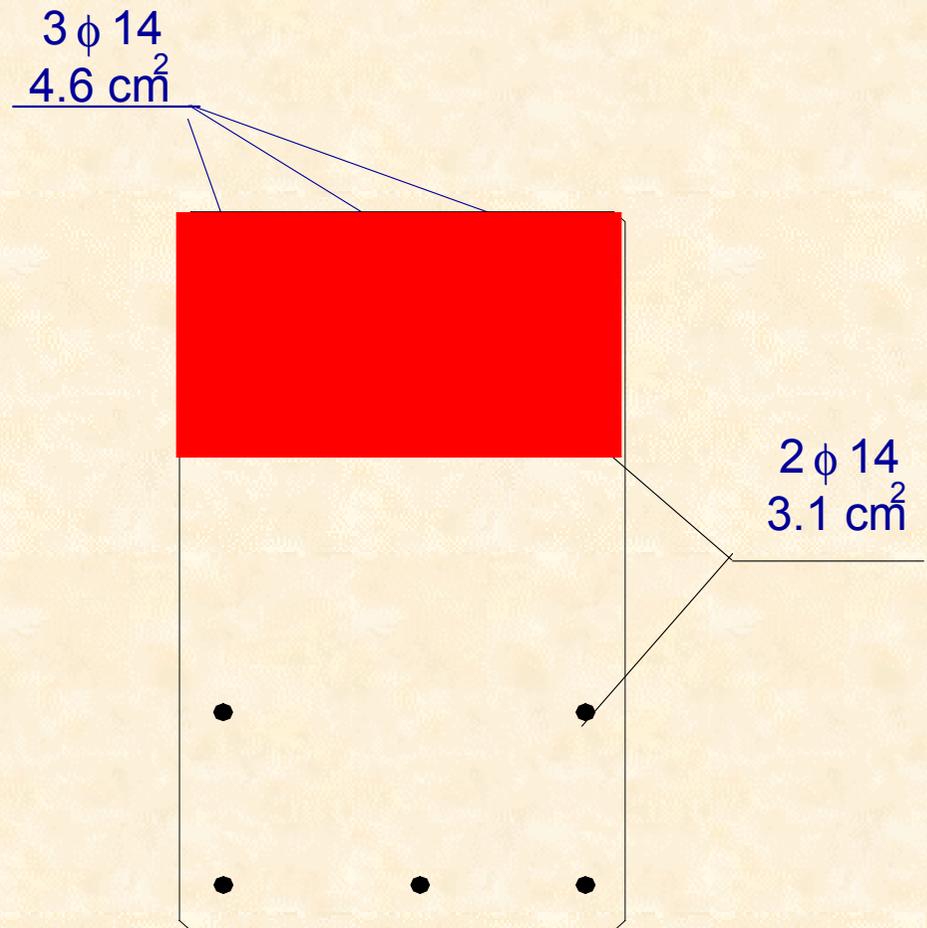
$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 40x70

$$A_s = A'_s = 3\phi 14$$

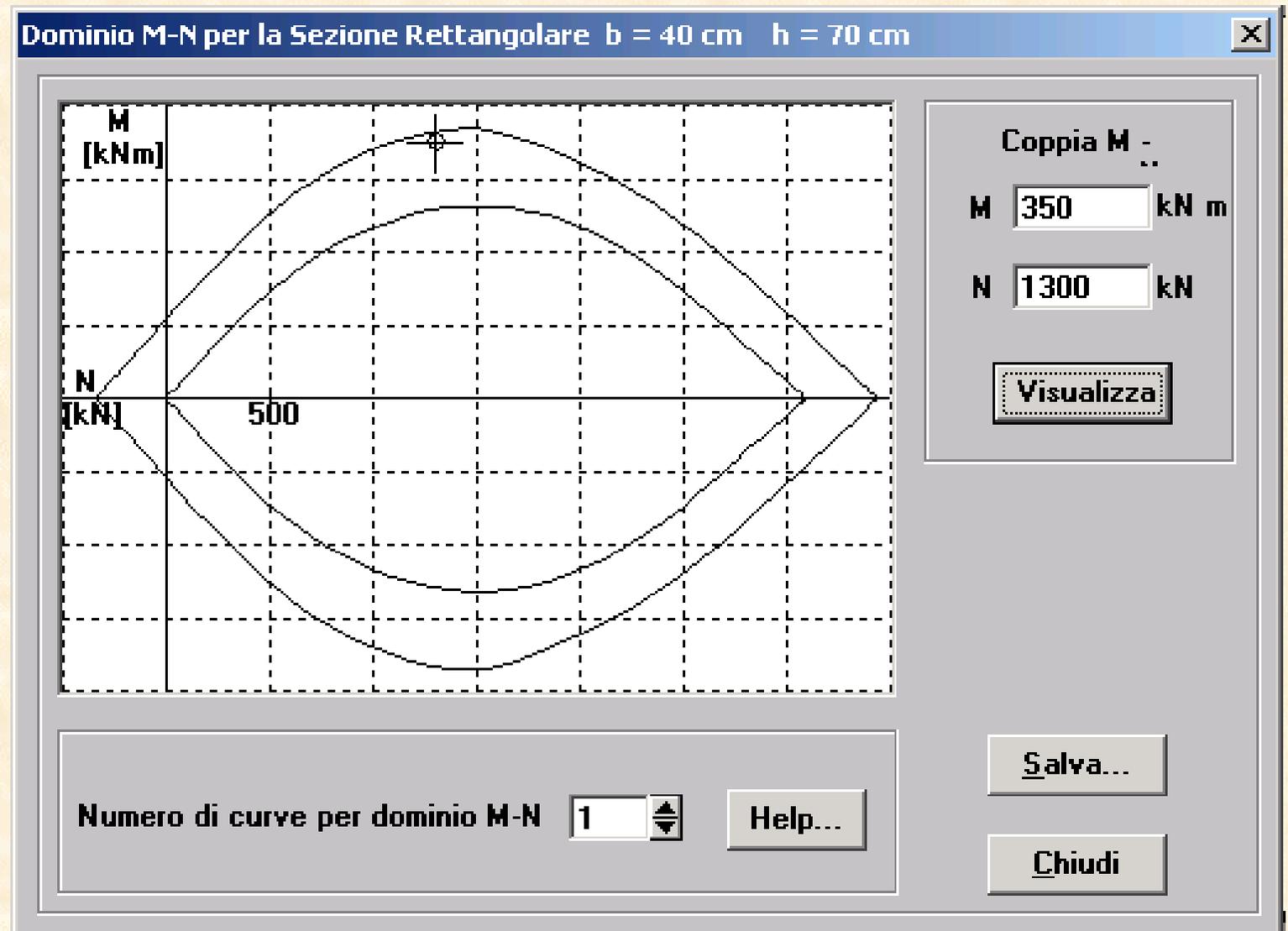


$$A_{s,tot} = 15.4 \text{ cm}^2$$

Esempio - verifica a pressoflessione

**SEZIONE
40×70**

**armatura
3 ϕ 14
per lato**



Esempio - verifica a pressoflessione

Confronto con il metodo delle Tensioni Ammissibili

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 896 \text{ kN (1300/1.45)}$$

$$M_{sd} = 241 \text{ kNm (350/1.45)}$$

Dati geometrici

Sezione: 40x70

$$A_s = A'_s = 3\phi 14$$

$$y_c = -\frac{M}{N} = -0.27 \text{ m}$$

$$d_c = y_c - \frac{h}{2} = 0.08 \text{ m}$$

$$x^3 + 3d_c x^2 + \frac{6n}{b} [A_s (d + d_c) + A'_s (d + d'_c)] x - \frac{6n}{b} [A_s (d + d_c)^2 + A'_s (d + d'_c)^2] = 0$$

Per tentativi

→

$$x = 37.3 \text{ cm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Confronto con il metodo delle Tensioni Ammissibili

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 896 \text{ kN (1300/1.45)}$$

$$M_{sd} = 241 \text{ kNm (350/1.45)}$$

Dati geometrici

Sezione: 40x70

$$A_s = A'_s = 3\phi 14$$

$$S_n = \frac{b x^2}{2} + n A_s (x - d) + n A'_s (x - c)$$

$$S_n = \frac{40 \times 37.3^2}{2} + 15 \times 4.62 \times (37.3 - 62) + 15 \times 4.62 \times (37.3 - 4) = 28422 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_s = n \frac{N}{S_n} (x - d) = 15 \times \frac{896}{28422} \times 28.7 \times 10 = 135.7 \text{ MPa} < \overline{\sigma}_s$$

$$\sigma_c^{\max} = \frac{896}{28422} \times 37.3 \times 10 = 11.7 \text{ MPa} > \overline{\sigma}_c$$

Progetto a tenso-pressoflessione



L'isola Lachea
(ACITREZZA)
Foto © [Amastray](#)

Progetto a tenso-pressoflessione retta: T.A.

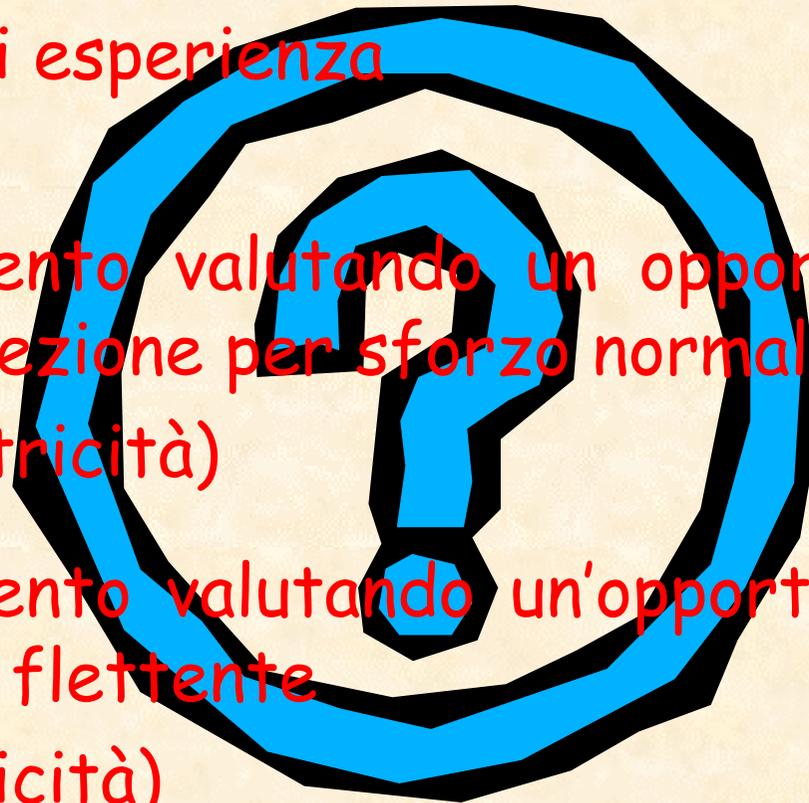
Strumenti progettuali

Buona dose di esperienza

Dimensionamento valutando un opportuno tasso di lavoro della sezione per sforzo normale (bassa eccentricità)

Dimensionamento valutando un'opportuna geometria per momento flettente (alta eccentricità)

Verifica ed eventuale riprogettazione



Progetto a tenso-pressoflessione retta: S.L.U.

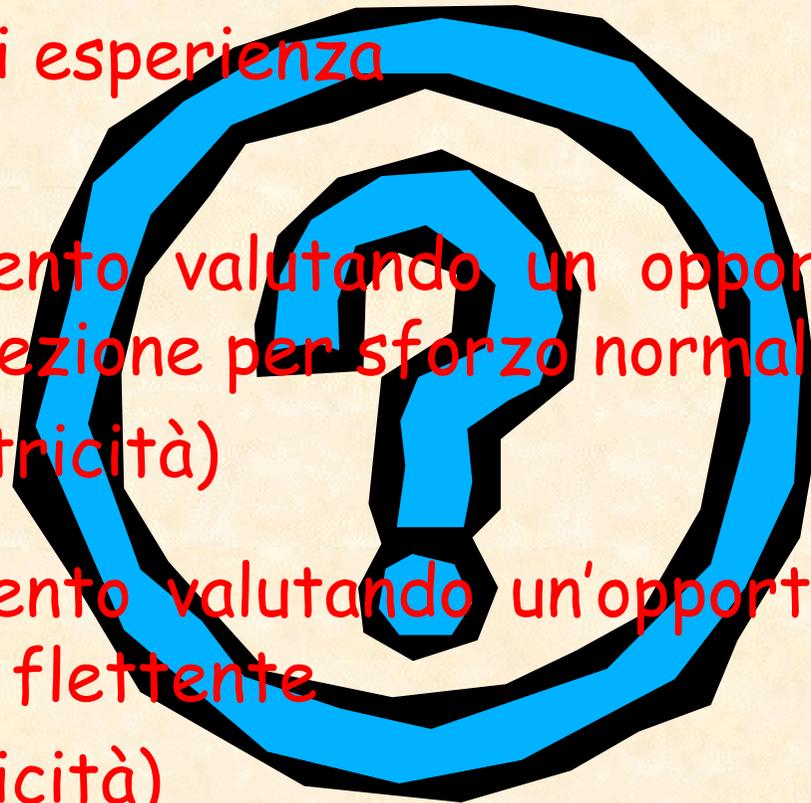
Strumenti progettuali

Buona dose di esperienza

Dimensionamento valutando un opportuno tasso di lavoro della sezione per sforzo normale (bassa eccentricità)

Dimensionamento valutando un'opportuna geometria per momento flettente (alta eccentricità)

Verifica ed eventuale riprogettazione



Metodo semplificato per il progetto e la verifica allo S.L.U. di sezioni rettangolari a tenso- pressoflessione retta

Metodo semplificato per il progetto e la verifica allo S.L.U. di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

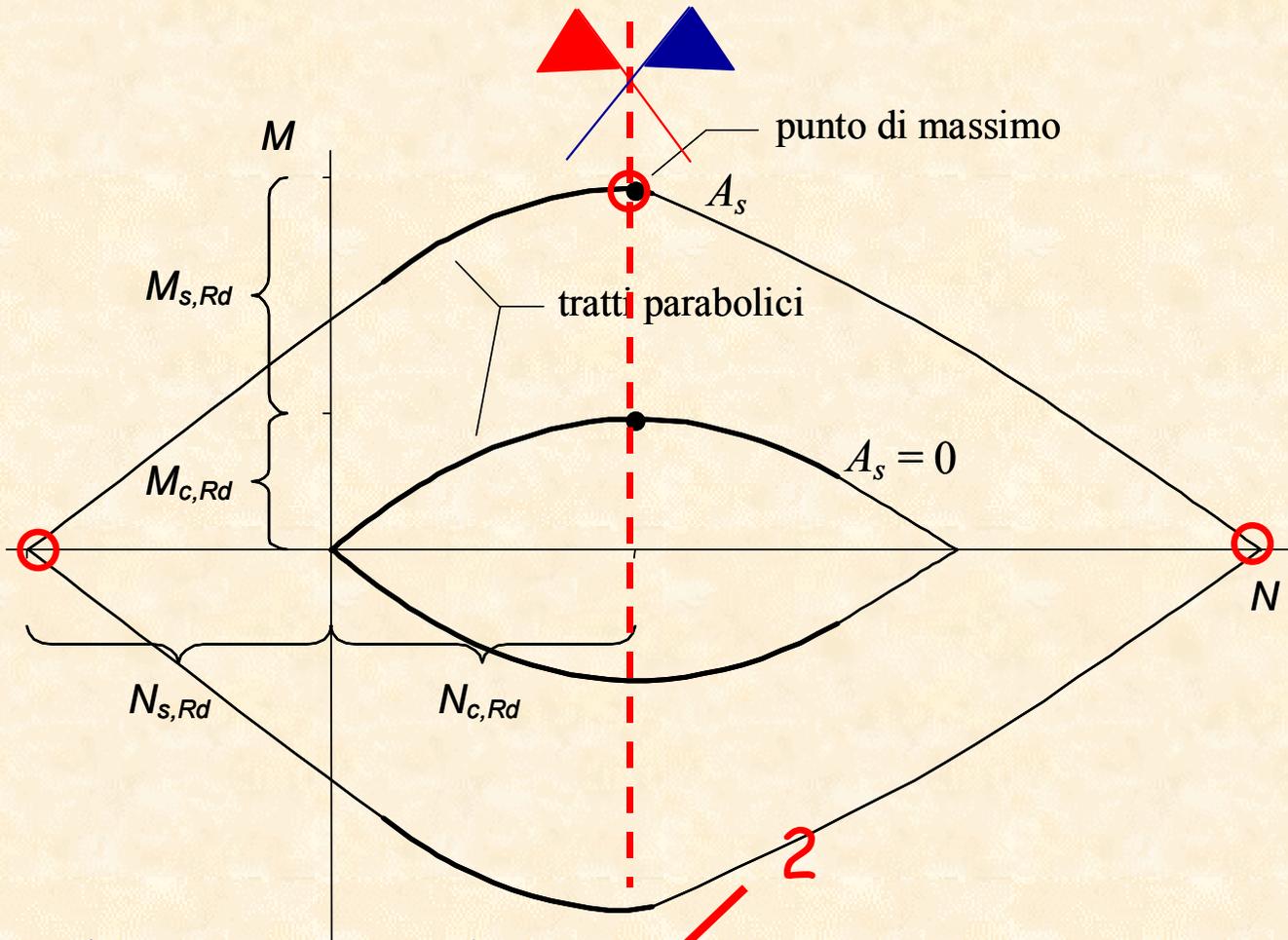
Si mostra un **metodo semplificato** per la progettazione o la verifica di sezioni rettangolari tenso - pressoinflesse.

Il metodo si basa sull'**approssimazione del dominio** di resistenza con equazioni lineari e paraboliche che consentono una formulazione analitica chiusa della frontiera del dominio.

Le ipotesi di partenza è la simmetria dell'armatura tesa e compressa (caso assai frequente nei pilastri).

Metodo semplificato

Il metodo trae spunto dalla regolarità della frontiera del dominio limite



Geometria "quasi parabolica" : ~~3~~ punti per tracciamento

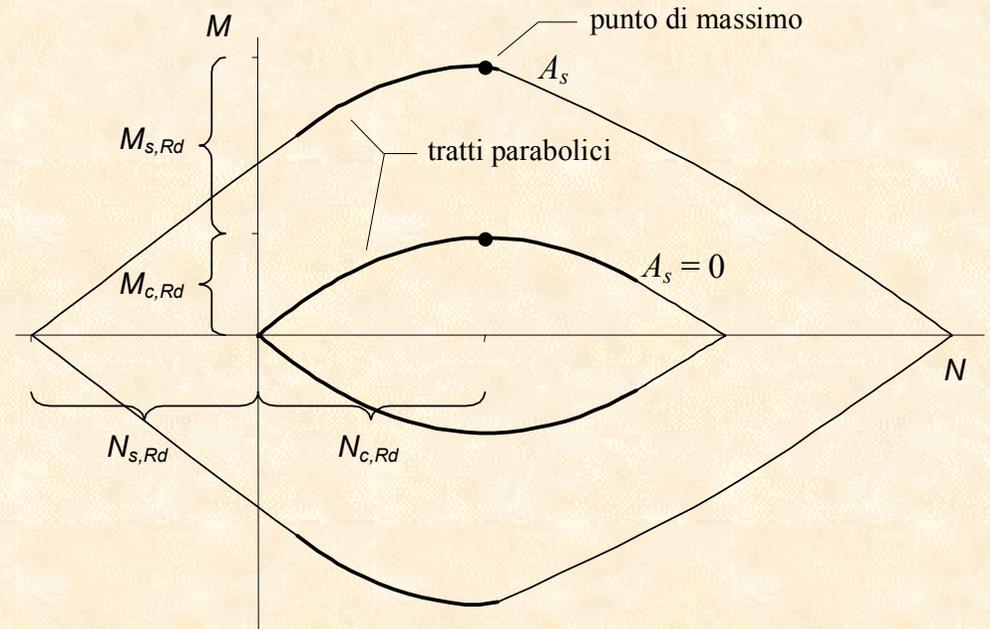
Metodo semplificato

Punto di massimo

$$M = \beta b x \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

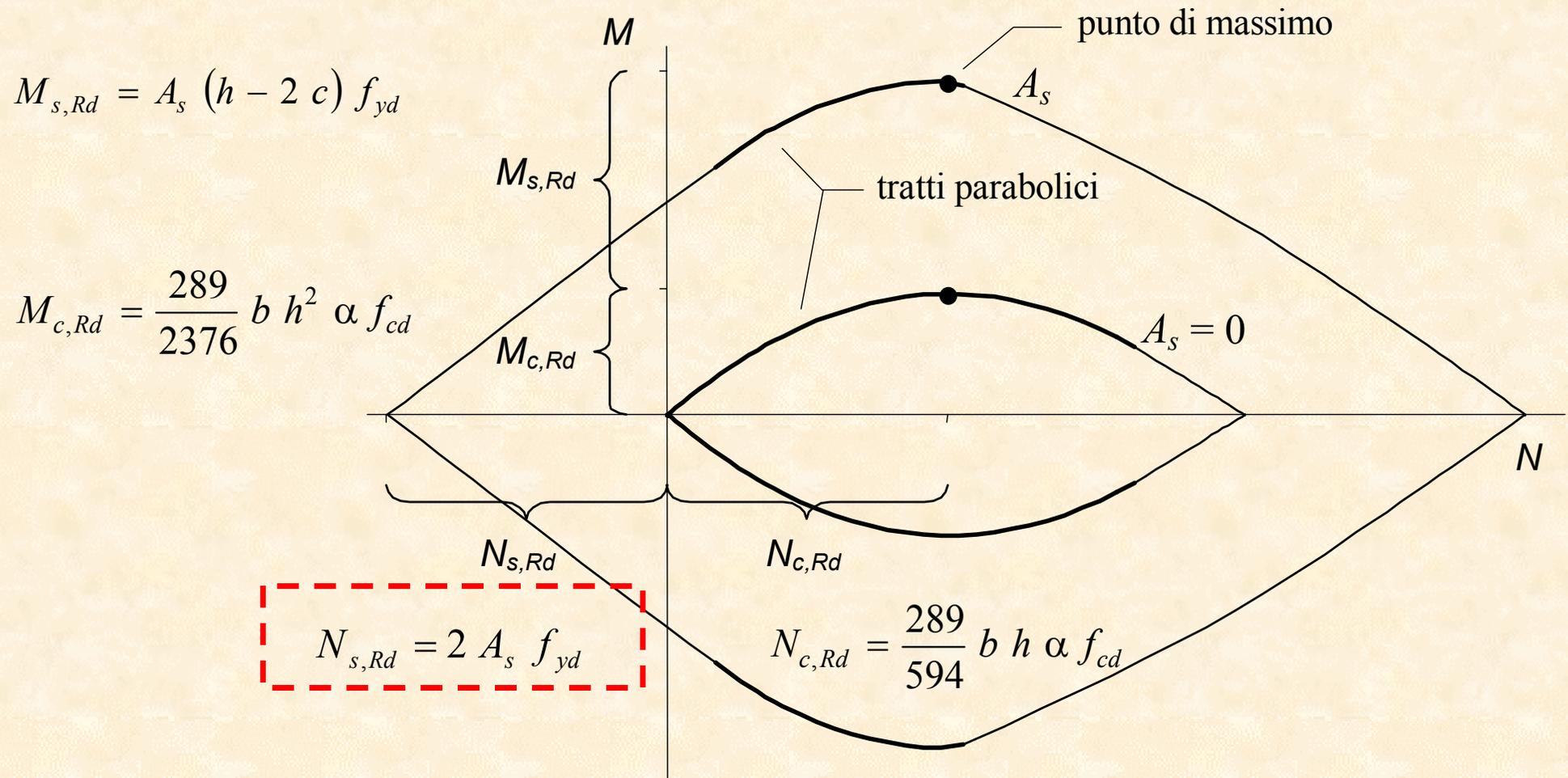


$$M = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2c) f_{yd} \cong 0.12 b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$N = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 b h \alpha f_{cd}$$

Metodo semplificato

2° punto: sola trazione



Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^m \right]$$

$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)$$

Metodo semplificato: verifica

Formula di verifica

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

Metodo semplificato: verifica

Formula di verifica alternativa

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

– per $N_{Sd} < 0$ (tensoflessione)

$$\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1$$

– per $0 < N_{Sd} < N_{c,Rd}$

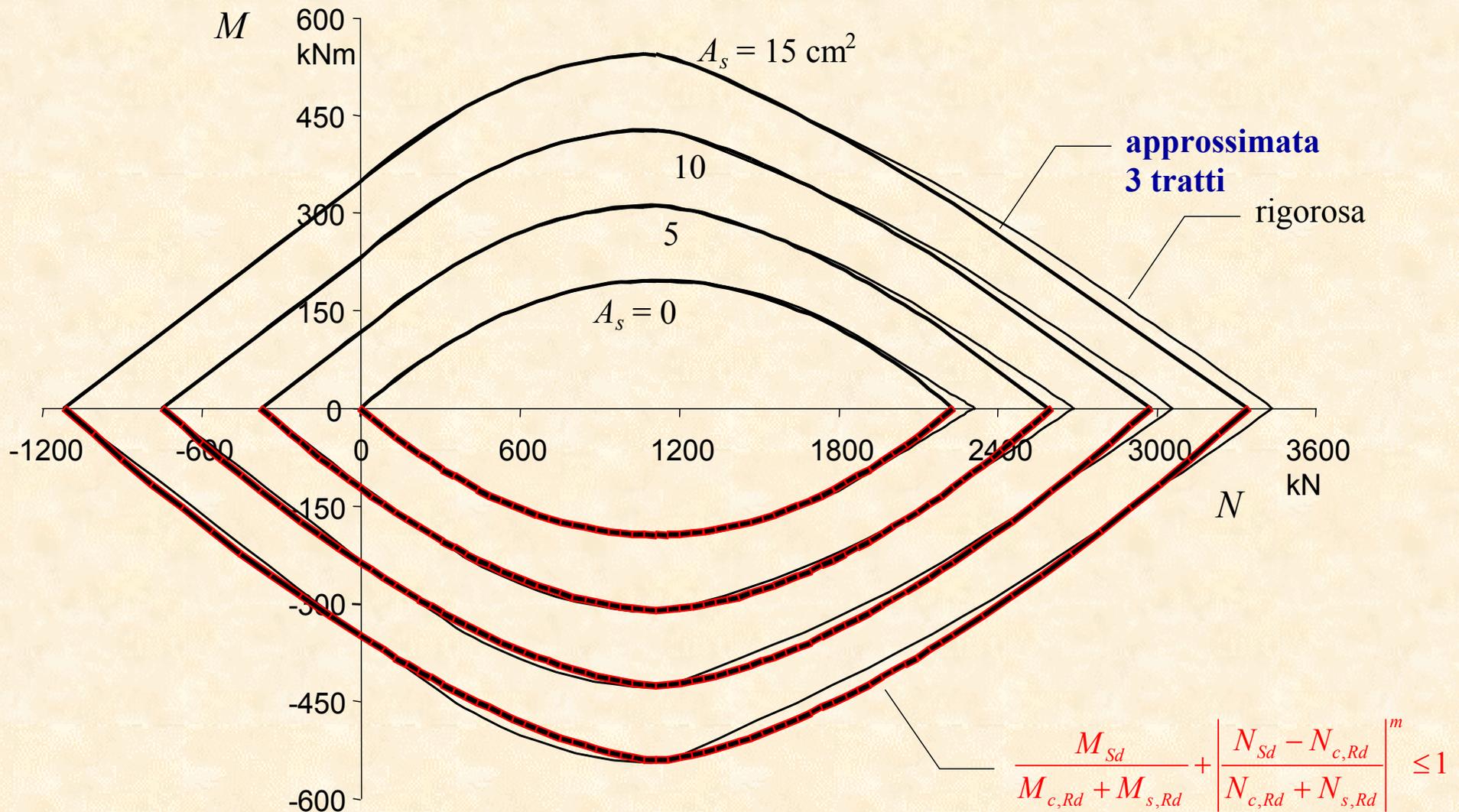
$$\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$$

– per $N_{Sd} > N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1 \quad n = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$$

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Esempio - Sezione 30x70



Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Sollecitazioni

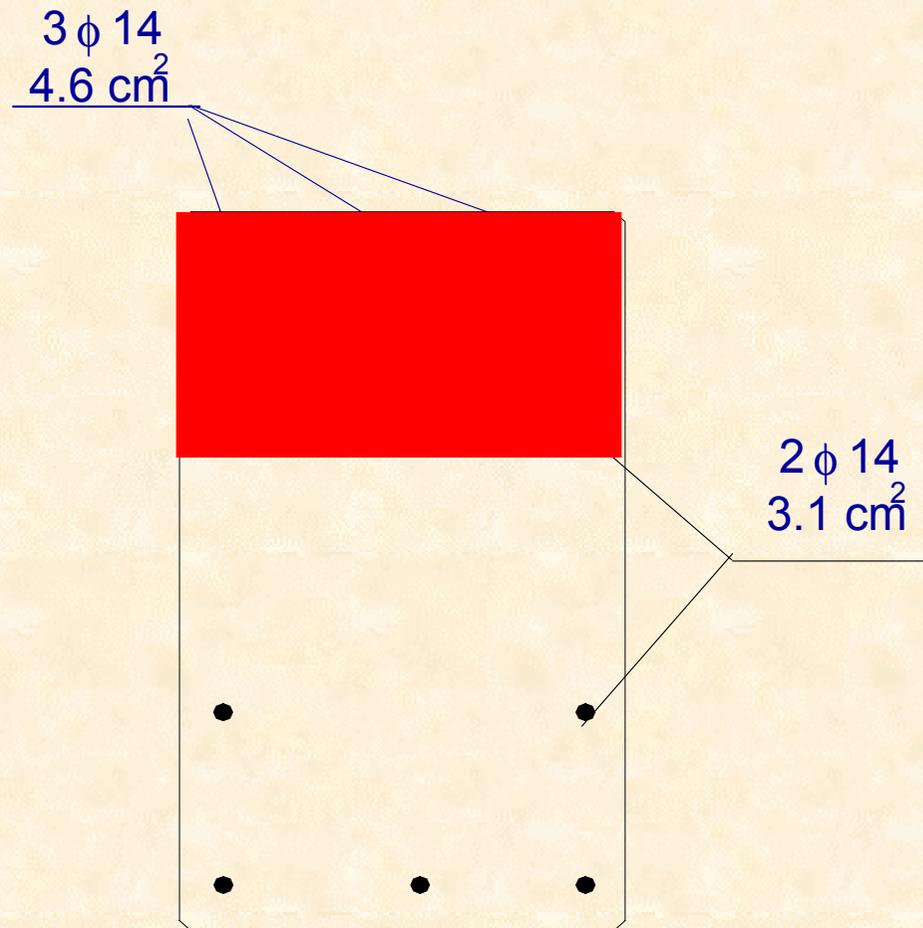
$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 40x70

$$A_s = A'_s = 3\phi 14$$



$$A_{s,tot} = 15.4 \text{ cm}^2 > A_{s,min}$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Calcolo dei valori resistenti del calcestruzzo

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 \times 0.40 \times 0.70 \times 11.02 \times 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 1481 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \cong 0.12 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 11.02 \cdot 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 262.7 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Calcolo dei valori resistenti dell'armatura

$$N_{s,Rd} = 2A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,Rd} = 345.5 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,Rd} = 107.1 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Verifica

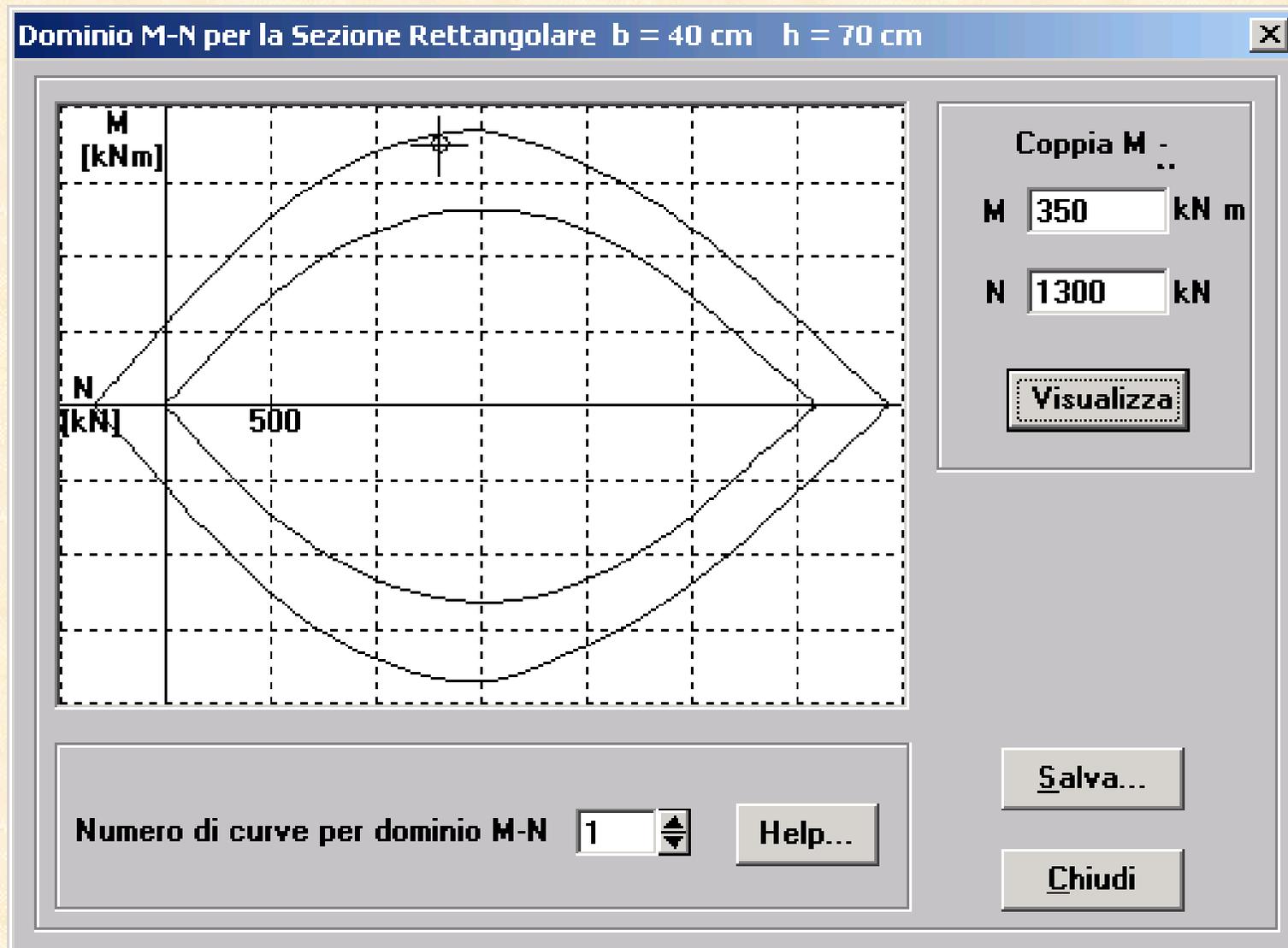
$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right) = 1 + \frac{1481}{1481 + 345.5} = 1.81$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{350}{262.7 + 107.1} + \left| \frac{1300 - 1481}{1481 + 345.5} \right|^{1.81} = 0.96 \leq 1$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Controllo mediante domini M-N



Progetto della sezione a pressoflessione retta

Le espressioni possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Il coefficiente r è in questo caso dipendente da:

- sforzo normale adimensionalizzato $v = N_{Sd} / 2N_{c,Rd}$
- percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre $\rho = A_s / b h$
- dalle caratteristiche dei materiali

Valori del coefficiente r

Progetto della sezione a pressoflessione retta

Tabella 1. Valori di r per calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa, acciaio FeB44k, $c/h = 0.1$

v	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.1	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.2	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.3	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.4	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
0.5	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
0.6	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
0.7	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
0.8	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
0.9	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
1.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria per portare tale momento è

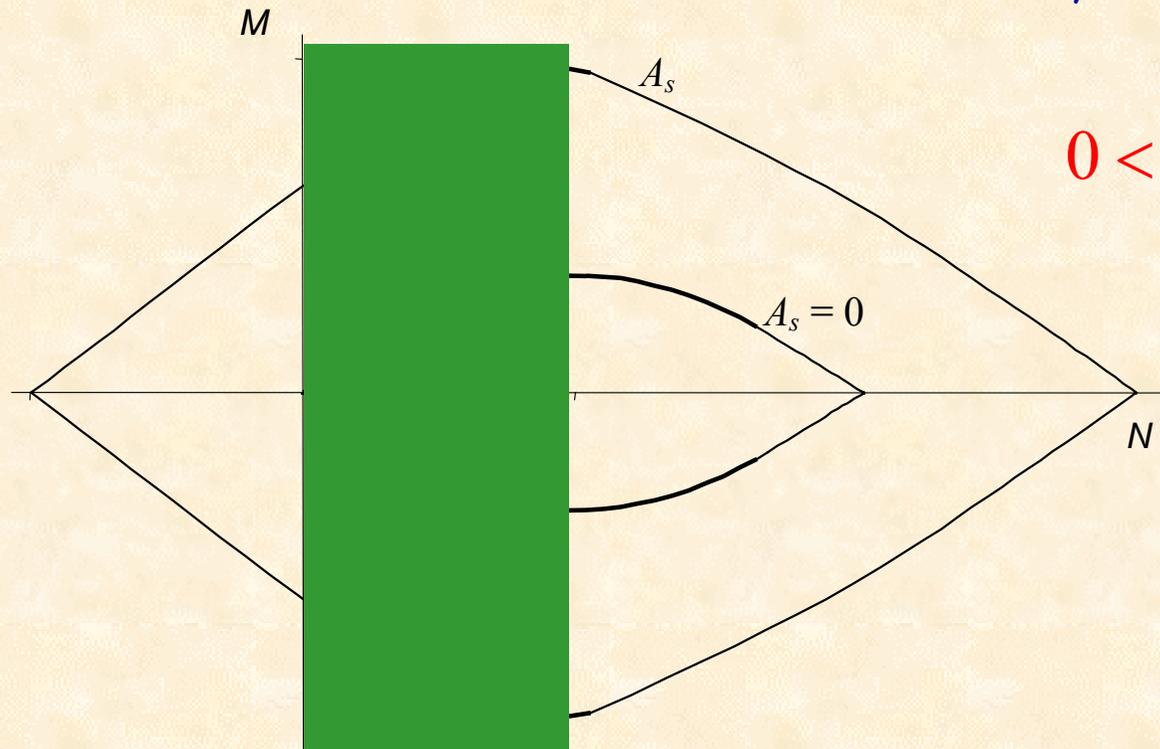
$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$$

$z = h - 2c \cong 0.9d$ è il braccio della coppia interna costituita dalle armature.

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura $A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$

- è valida solo per N_{Sd} compreso tra 0 e $N_{c,Rd}$,

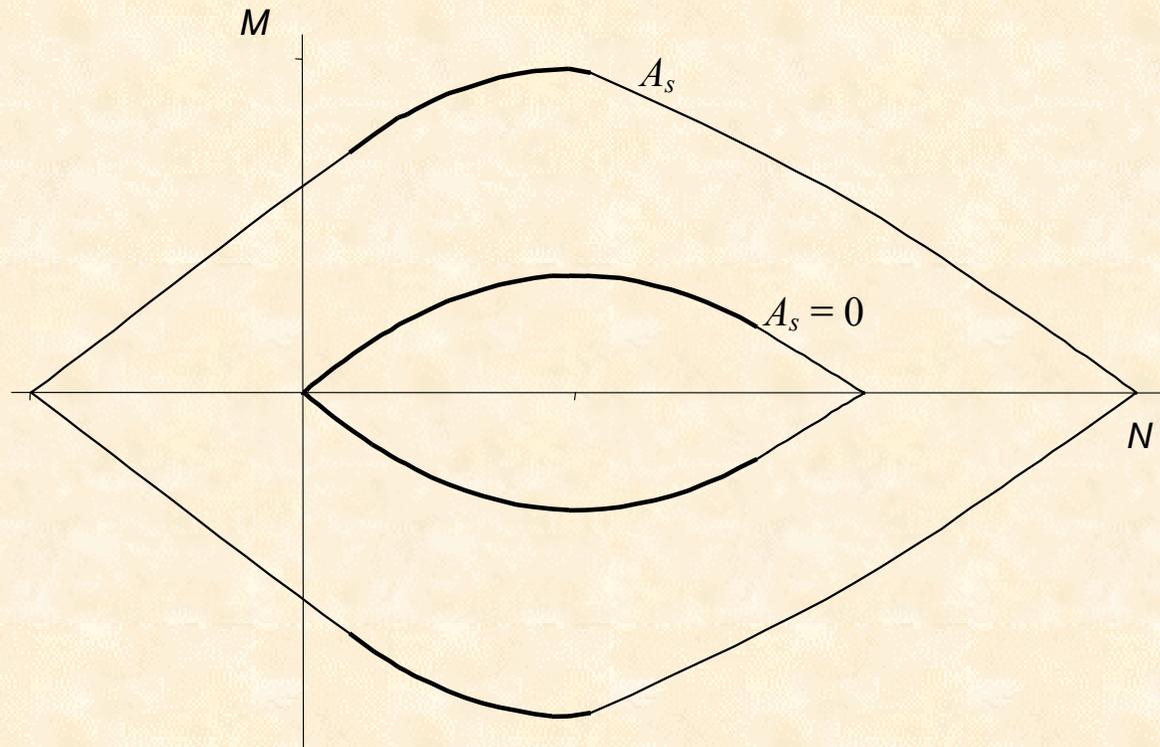


$$0 < \nu = \frac{N_{Sd}}{2 N_{c,Rd}} < 0.5$$

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura $A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$

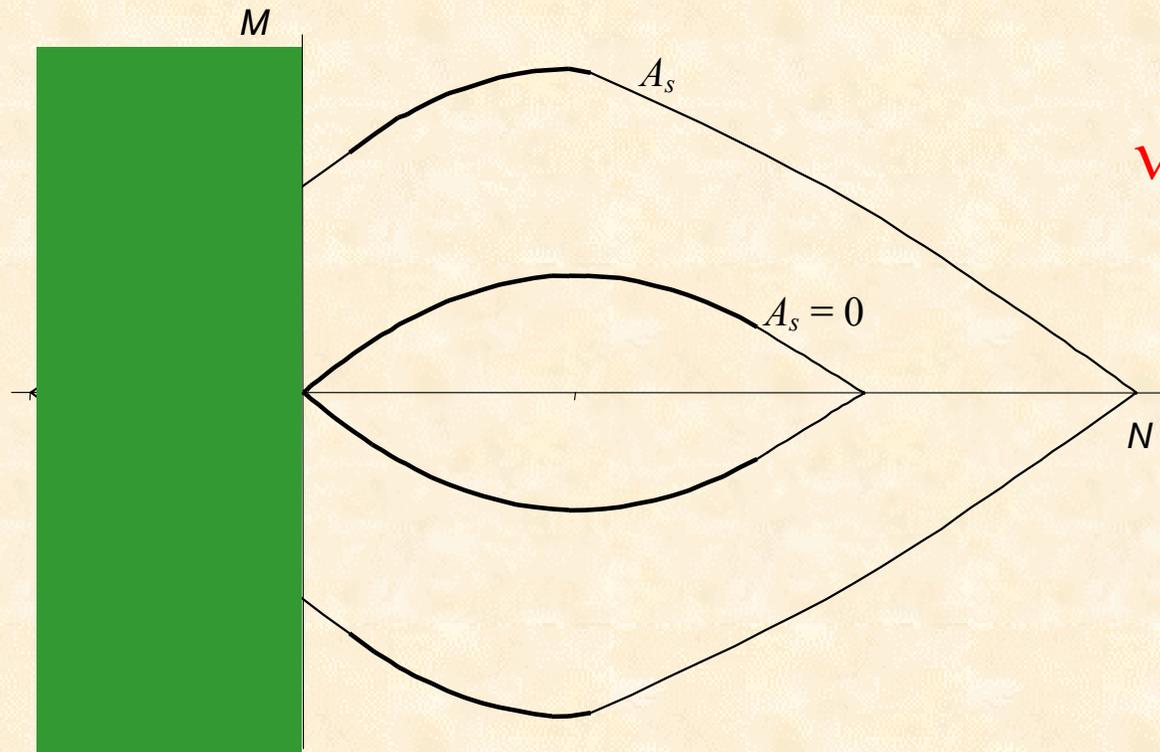
- fornisce un utile riferimento anche oltre tale intervallo;



Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura $A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$

- è cautelativa per la tensoflessione,

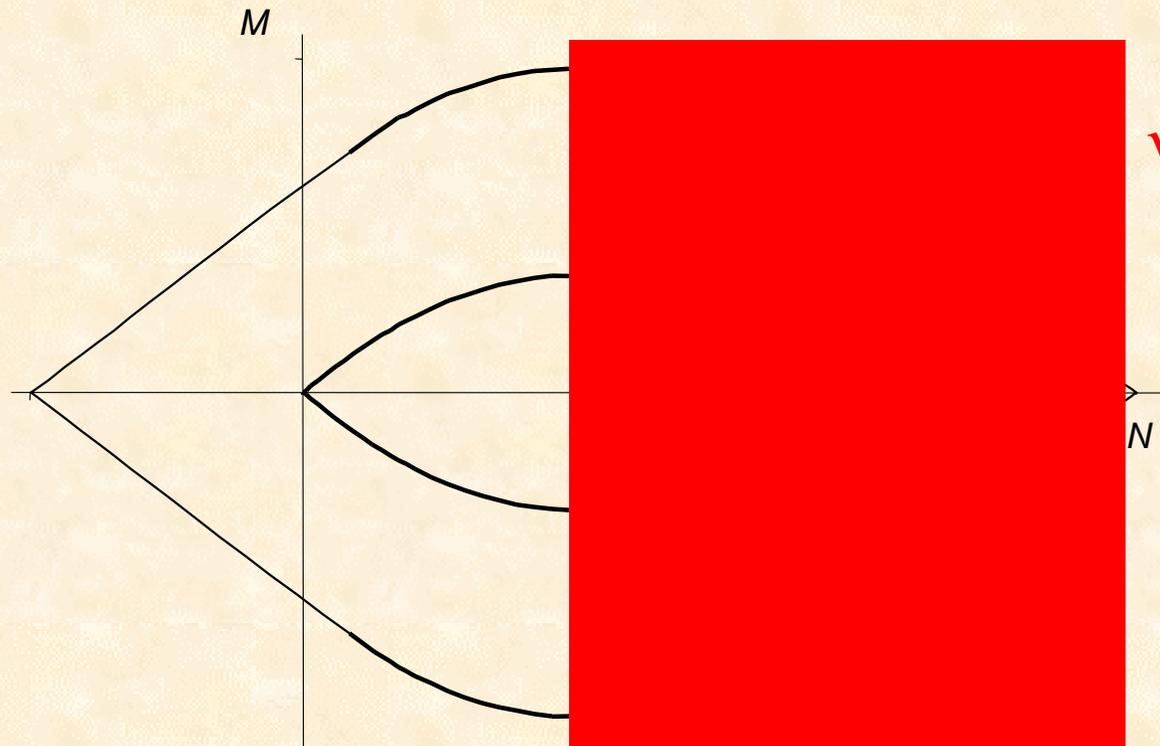


$$v = \frac{N_{Sd}}{2 N_{c,Rd}} < 0$$

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura $A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$

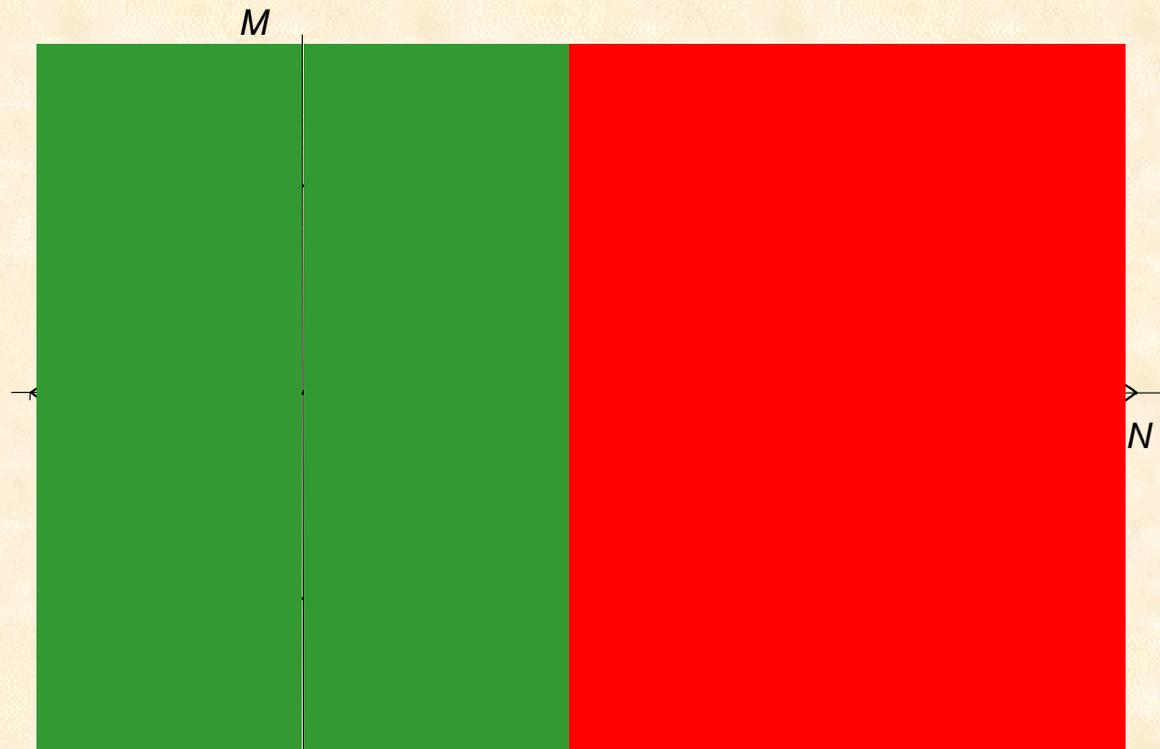
-è a svantaggio di sicurezza per forte compressione



$$v = \frac{N_{Sd}}{2 N_{c,Rd}} > 0.5$$

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura $A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$



Esempio - progetto a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1400 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 250 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 30x ?

$A_s = A'_s = ?$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Scelta dei parametri di progetto ν e ρ

Tabella 1. Valori di r per calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa, acciaio FeB44k, $c/h = 0.1$

ν	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.2	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.4	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.6	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.8	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
1.0	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
1.2	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
1.4	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
1.6	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
1.8	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
2.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

NOTA: r varia poco con ν , molto con ρ

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0184 \sqrt{\frac{250}{0.30}} = 0.53 \text{ m} \quad \text{Si assume } h=0.60 \text{ m}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 \times 0.30 \times 0.60 \times 11.02 \times 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 952.1 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \cong 0.12 \times 0.30 \times 0.60^2 \times 11.02 \times 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 142.8 \text{ kNm}$$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Progetto dell'armatura

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

$$M_{Sd,red} = 250 - 142,8 \left[1 - \left(\frac{1400 - 952,1}{952,1} \right)^2 \right] = 138.8 \text{ kNm}$$

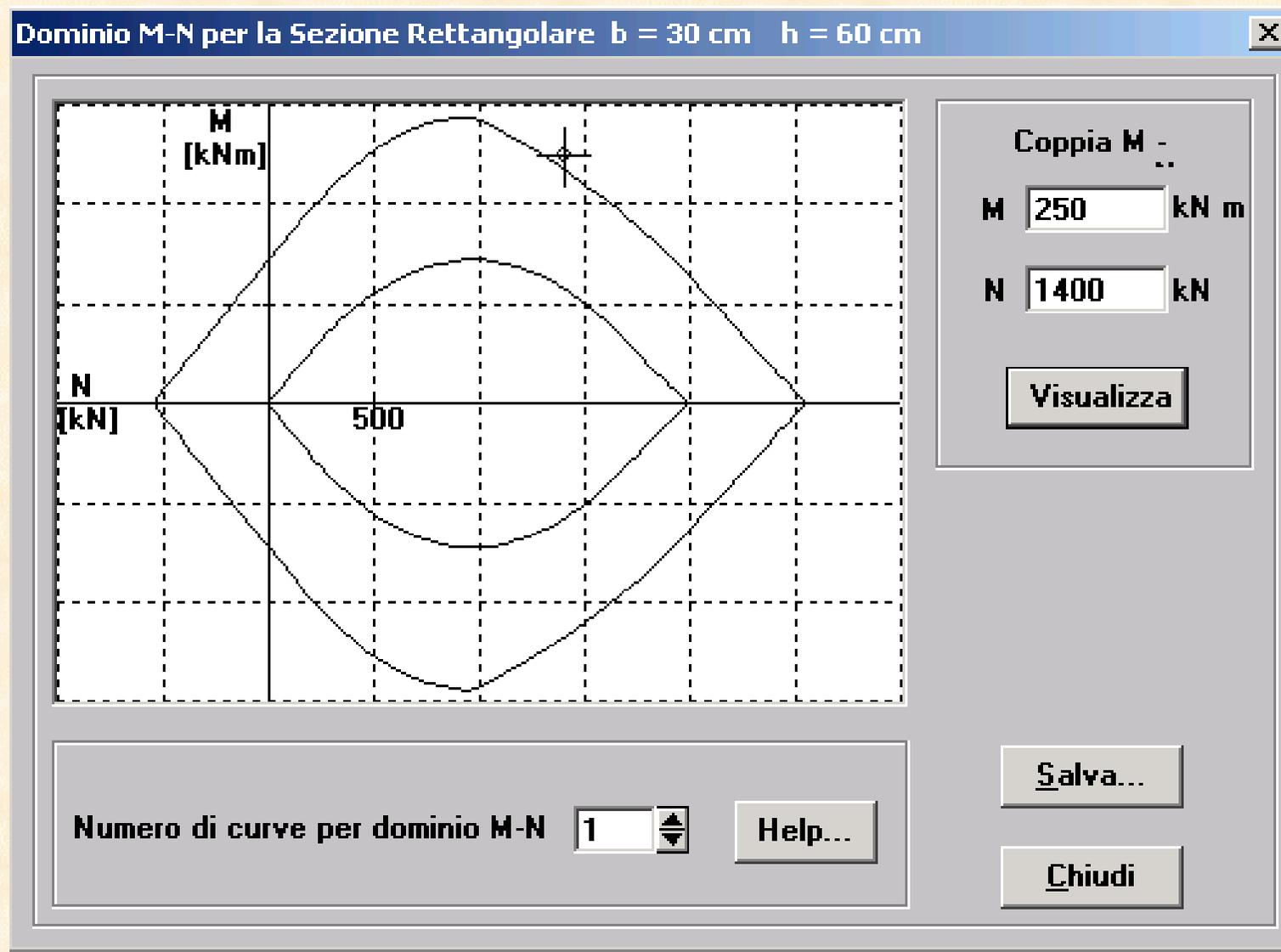
L'armatura necessaria è

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}} = \frac{138.8}{0.50 \cdot 373.9} \times 10 = 7.4 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = 0.0041$$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Verifica con domini M-N



Pressoflessione deviata

La nuova Ordinanza 3274 impone la verifica della struttura sottoposta simultaneamente a forze sismiche in due direzioni ortogonali, una principale e l'altra secondaria.

Punto 4.6

I valori massimi della risposta ottenuti da ciascuna delle due azioni orizzontali applicate separatamente potranno essere combinati calcolando la radice quadrata della somma dei quadrati, per la singola componente della grandezza da verificare, oppure sommando ai massimi ottenuti per l'azione applicata in una direzione il 30 % dei massimi ottenuti per l'azione applicata nell'altra direzione.

Pressoflessione deviata

Come devono essere verificati gli elementi verticali?

Pressoflessione retta?

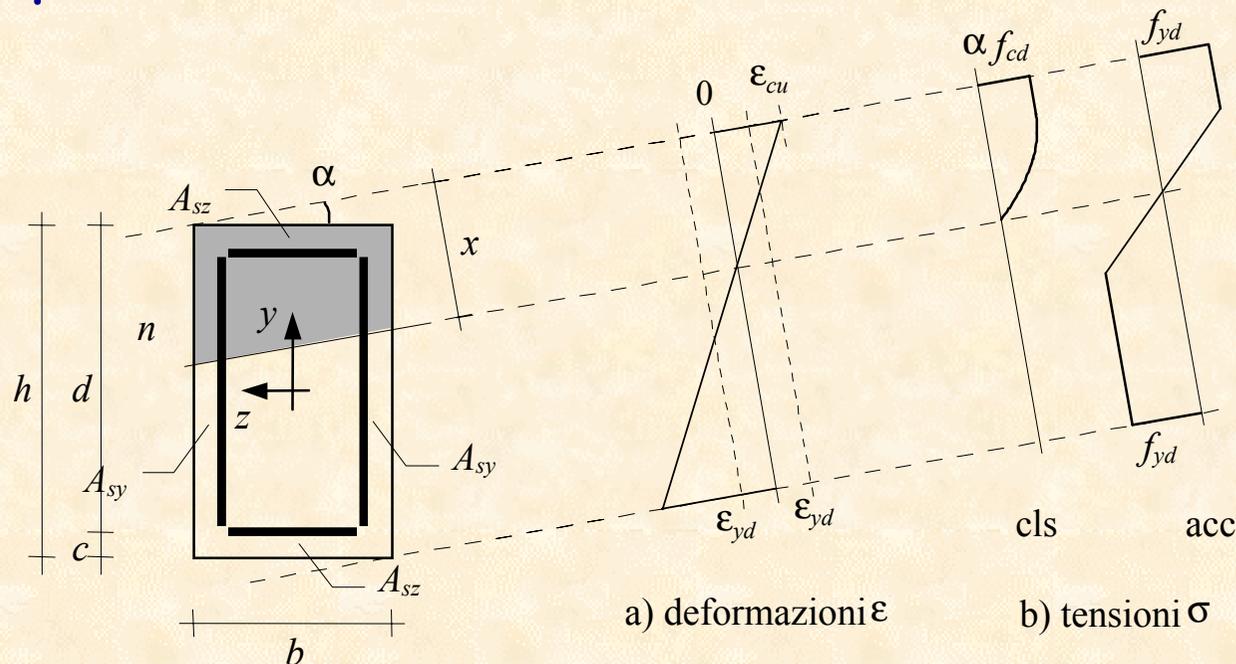
Pressoflessione deviata?

Cosa cambia?

Pressoflessione deviata

Qualche considerazione

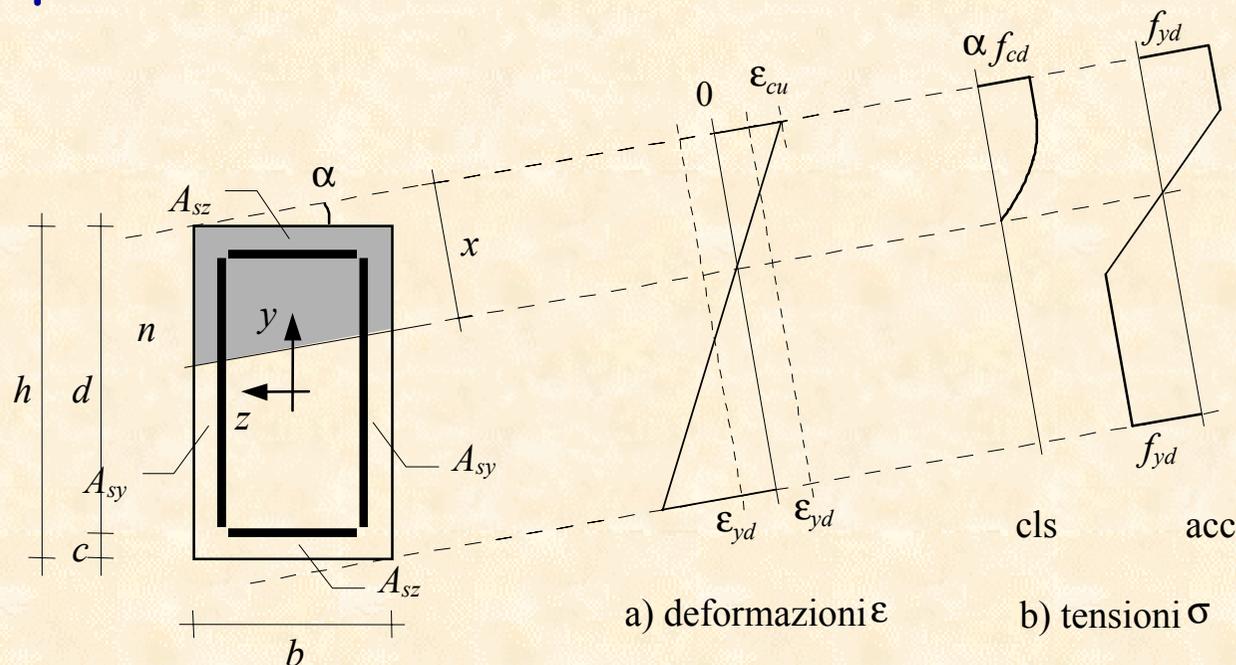
Il procedimento per la costruzione del dominio limite M_y - M_z - N ricalca concettualmente quello già descritto per la pressoflessione retta, ma si presenta notevolmente più complicato a causa della possibile inclinazione dell'asse neutro.



Pressoflessione deviata

Qualche considerazione

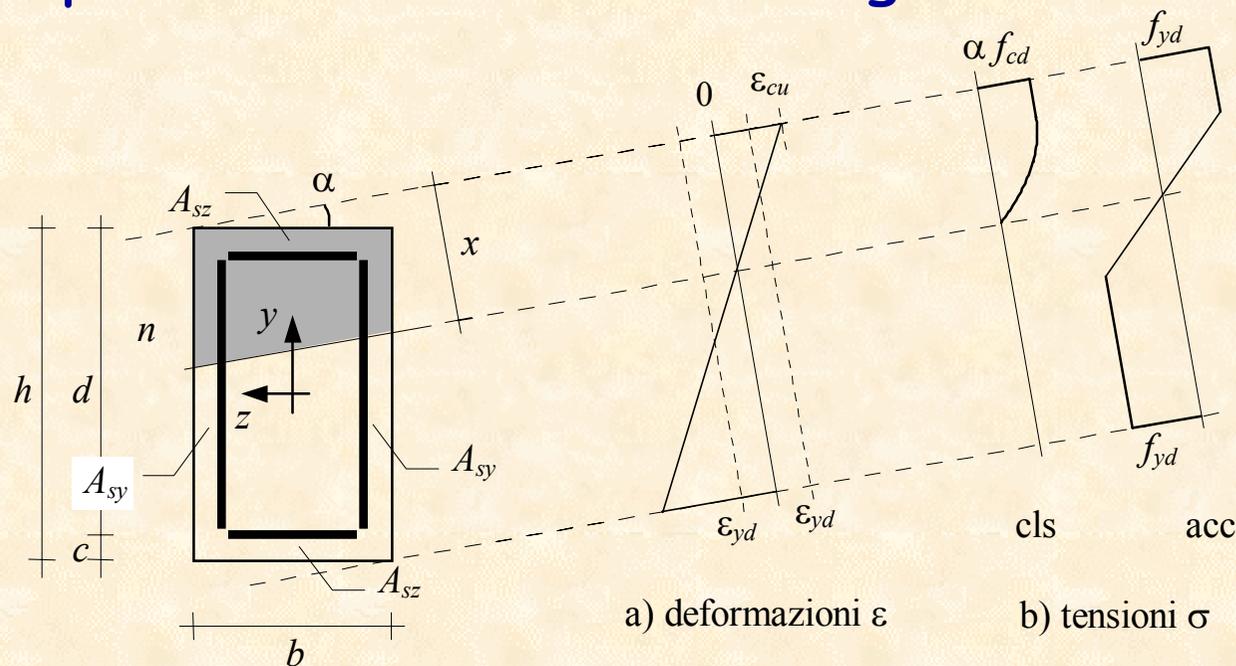
Il procedimento per la costruzione del dominio limite M_y - M_z - N ricalca concettualmente quello già descritto per la pressoflessione retta, ma si presenta notevolmente più complicato a causa della possibile inclinazione dell'asse neutro.



Pressoflessione deviata

Ipotesi

Le armature sono disposte lungo tutti i quattro lati della sezione. A rigore, bisognerebbe tener conto della posizione di ciascuna barra, ma è ugualmente accettabile ipotizzare che l'armatura sia disposta uniformemente lungo ciascun lato.



Pressoflessione deviata

Formulazione analitica

Utilizzando i legami costitutivi dei materiali si possono ricavare i valori delle tensioni e quindi le caratteristiche della sollecitazione

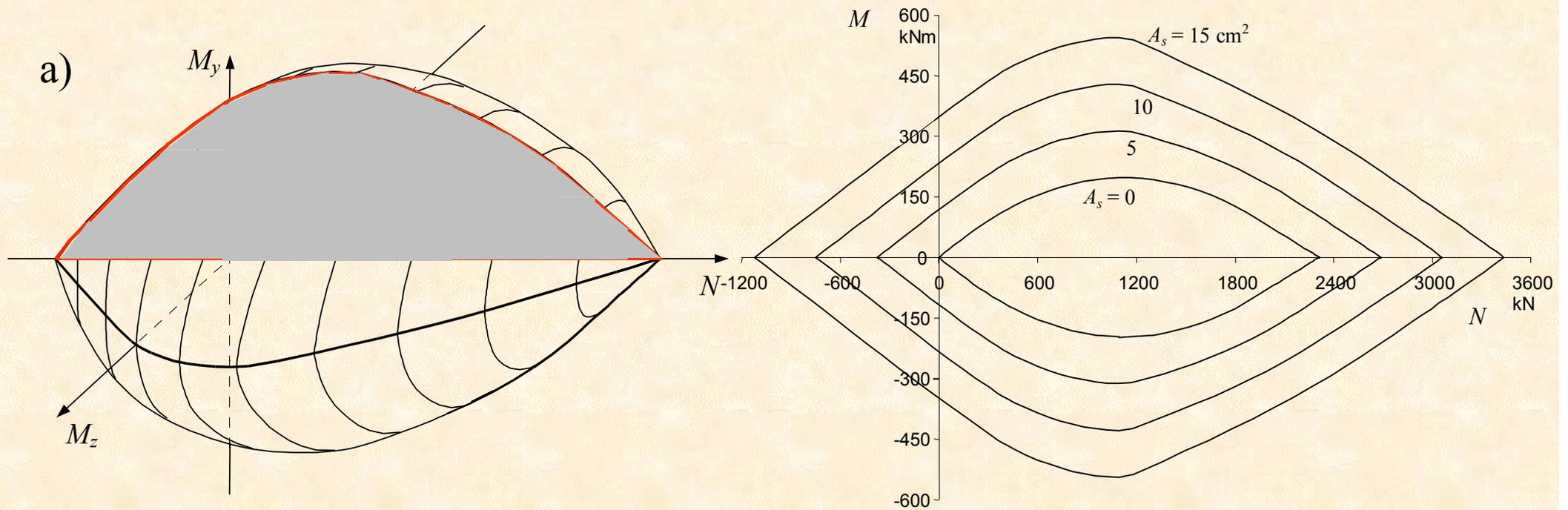
$$N = \int_{cls} \sigma_c dA_c + \int_{acc} \sigma_s dA_s = N_c + N_s$$

$$M_y = - \int_{cls} \sigma_c z dA_c - \int_{acc,y} \sigma_s z dA_s - \int_{acc,z} \sigma_s z dA_s = M_{y,c} + M_{y,sy} + M_{y,sz}$$

$$M_z = \int_{cls} \sigma_c y dA_c + \int_{acc,y} \sigma_s y dA_s + \int_{acc,z} \sigma_s y dA_s = M_{z,c} + M_{z,sy} + M_{z,sz}$$

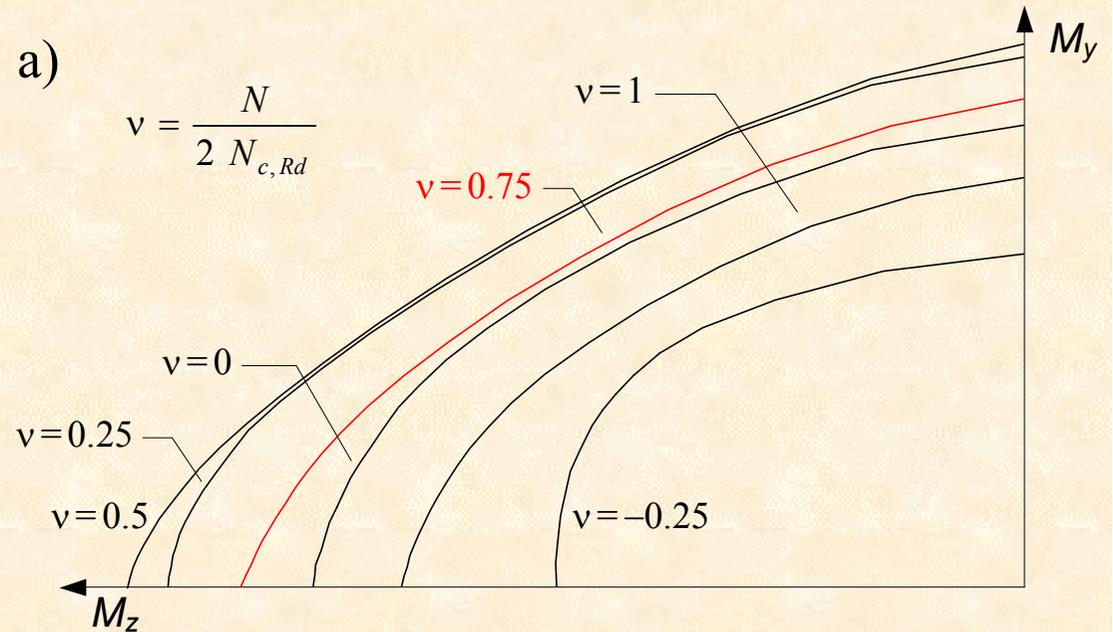
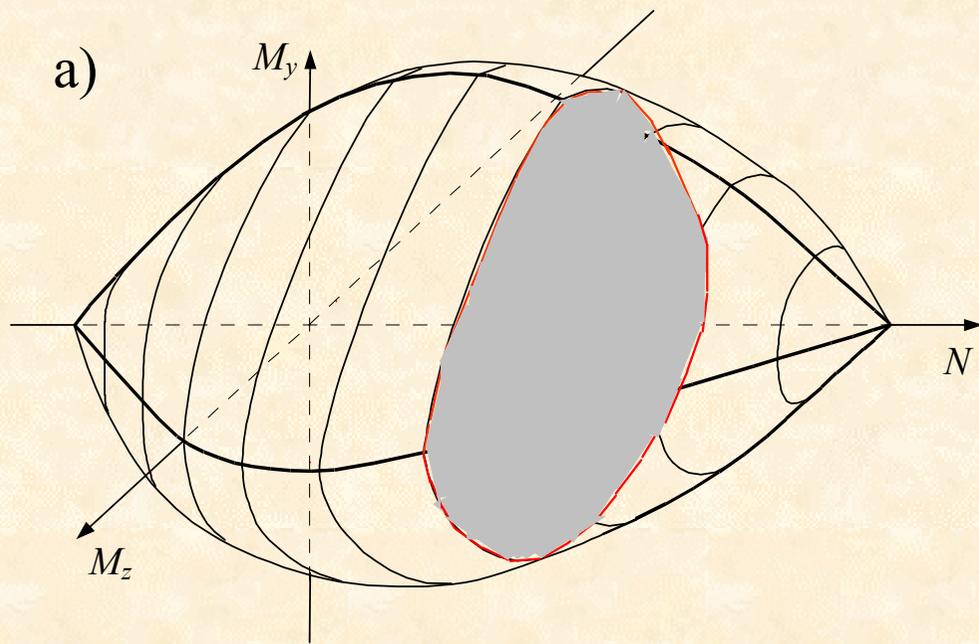
Pressoflessione deviata

Rappresentazione del dominio



Pressoflessione deviata

Rappresentazione del dominio



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

Verifica della sezione a pressoflessione deviata

La verifica a pressoflessione deviata in modo rigoroso è complessa ed è formulata in termini di soluzione numerica.

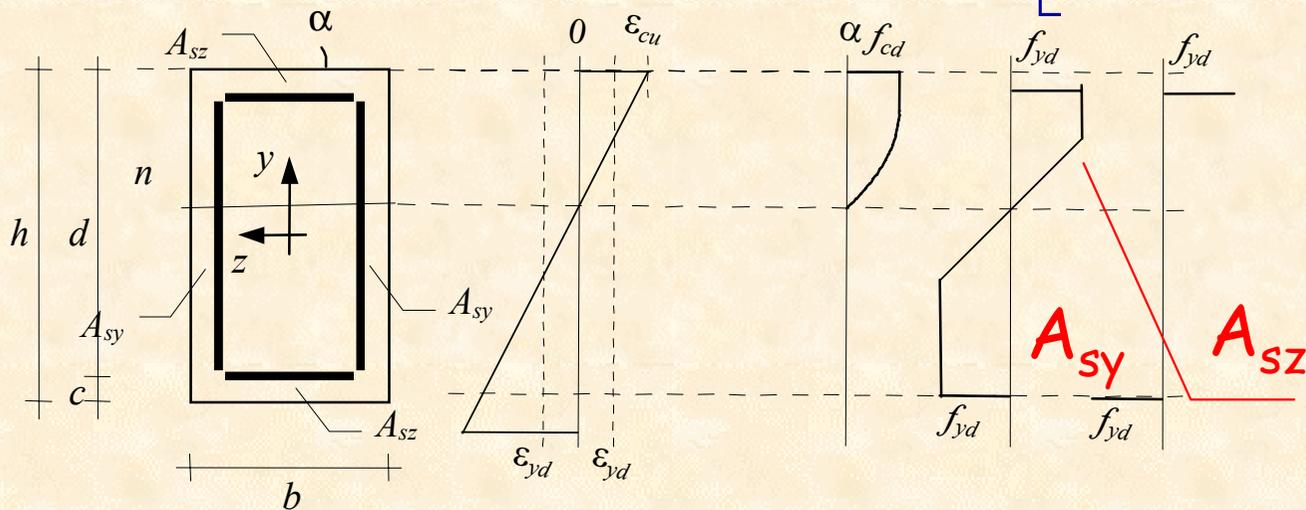
L'utilizzo dei domini spaziali risulta poco agevole.

Non esistono formule per il progetto della sezione.

Verifica della sezione a pressoflessione deviata: metodo semplificato

La verifica a pressoflessione deviata può essere facilmente effettuata determinando preliminarmente i momenti resistenti $M_{z,Rd}$ e $M_{y,Rd}$ corrispondenti ad N assegnato (le stesse espressioni valgono per entrambi i momenti, purché si scambi b con h e y con z)

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$



$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$$

$$M_{szy,Rd} \approx 0.40 \times A_{sy} \times (h - 2c)$$

Verifica della sezione a pressoflessione deviata

La verifica a pressoflessione deviata può essere facilmente effettuata determinando preliminarmente i momenti resistenti $M_{z,Rd}$ e $M_{y,Rd}$ corrispondenti ad N assegnato (le stesse espressioni valgono per entrambi i momenti, purché si scambi b con h e y con z)

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$

e verificando che

$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$$

$$\left(\frac{M_{z,Sd}}{M_{z,Rd}} \right)^{1.5} + \left(\frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right)^{1.5} \leq 1$$

Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

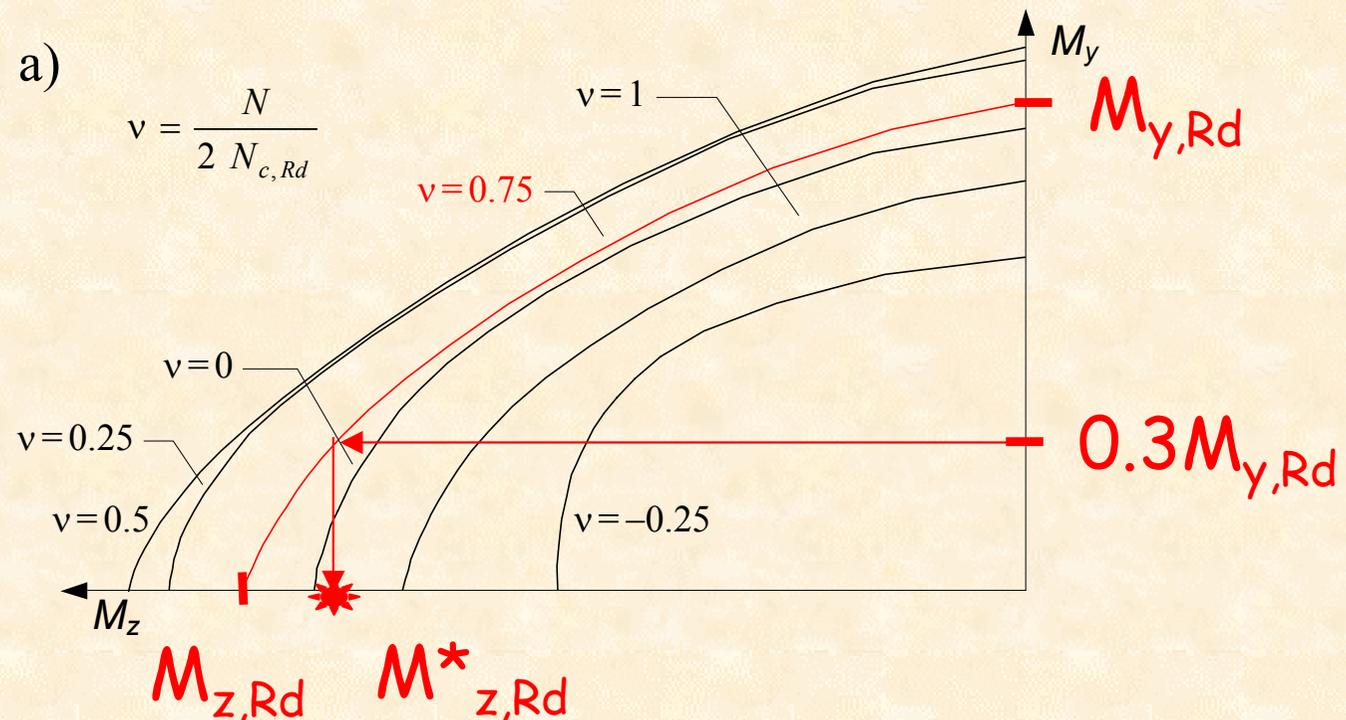
Nella maggior parte dei casi reali le sezioni rettangolari non sono soggette a forti momenti contemporaneamente rispetto ad entrambi gli assi.

Ad esempio, la nuova norma sismica italiana richiede di considerare l'effetto del sisma agente in una direzione più il 30% del sisma nella direzione ortogonale.

Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

Si può facilmente controllare che per $M_{y,Sd} = 0.3 M_{y,Rd}$ il massimo momento M_z che può essere sopportato dalla sezione è pari a $0.89 M_{z,Rd}$.



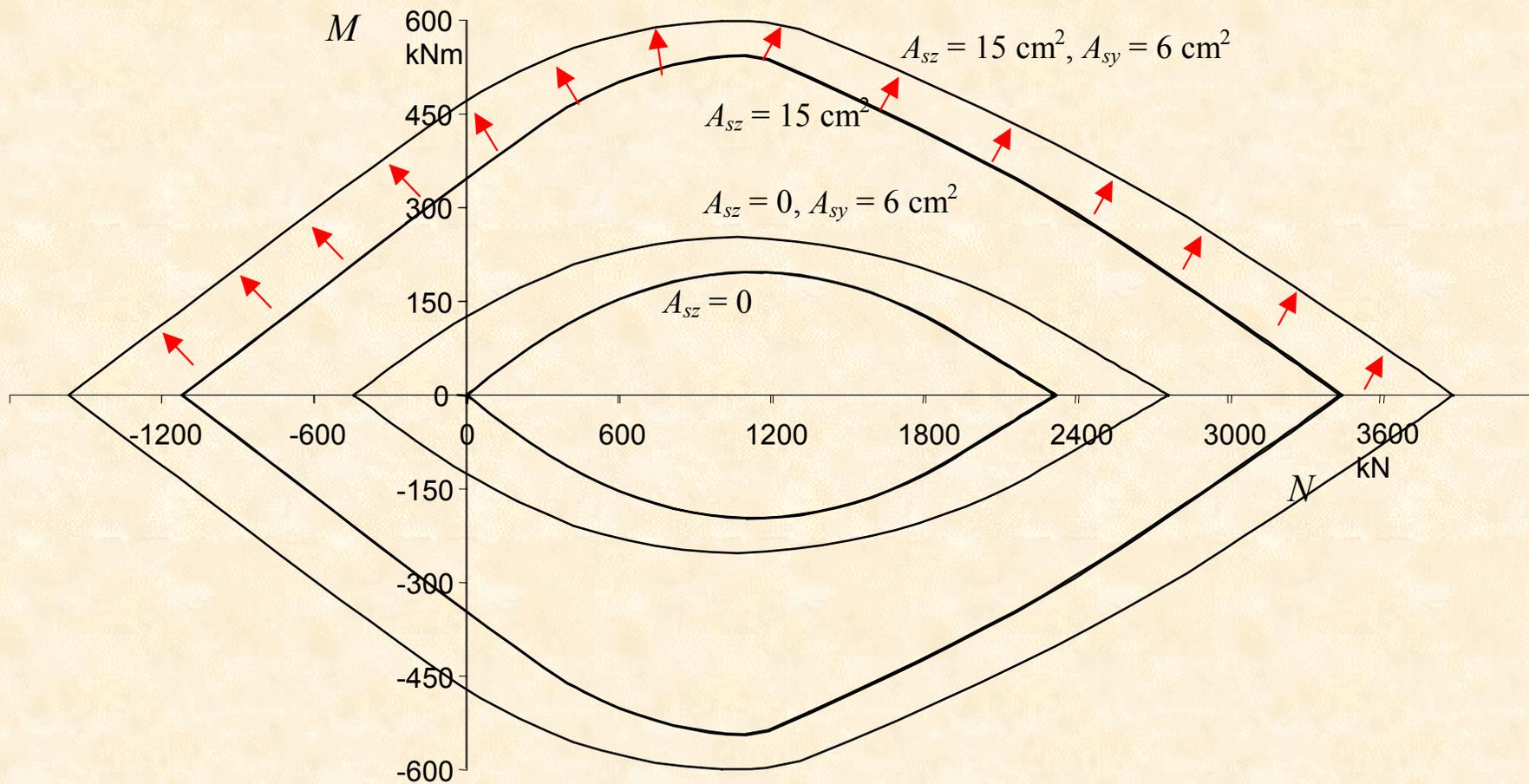
Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

La presenza della componente trasversale riduce la capacità portante della sezione di circa un 10%.

Tale riduzione è compensata, spesso ampiamente, dal contributo delle armature secondarie che in genere viene trascurato nella pressoflessione retta.

Progetto della sezione a pressoflessione deviata



Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Considerazioni

Si consiglia quindi:

- per bassi valori del momento "ortogonale" di progettare la sezione e l'armatura a pressoflessione retta senza tener conto né del contributo peggiorativo del momento trasversale né dell'incremento di resistenza fornito dall'armatura secondaria;
- per alti valori del momento "ortogonale" di progettare la sezione e l'armatura a pressoflessione deviata

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

Applicazione del Metodo semplificato

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1400 \text{ kN}$$

$$M_{z,sd} = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{y,sd} = 60 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 30x 70

$$A_{sz} = A'_{sz} = 15 \text{ cm}^2$$

$$A_{sy} = A'_{sy} = 6 \text{ cm}^2$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

Applicazione del Metodo semplificato

Valori resistenti del calcestruzzo

$$N_{c,Rd} = 0.48 \times 0.30 \times 0.70 \times 11.02 \times 10^3 = 1110.8 \text{ kN}$$

$$M_{cz,Rd} = 0.12 \times 0.30 \times 0.70^2 \times 11.02 \times 10^3 = 194.4 \text{ kNm}$$

$$M_{cy,Rd} = 0.12 \times 0.70 \times 0.30^2 \times 11.02 \times 10^3 = 83.3 \text{ kNm}$$

$$v = \frac{N_{Sd}}{2 N_{c,Rd}} = \frac{1400}{2 \times 0.48 \times 0.30 \times 0.70 \times 11.02 \times 10^3} = 0.63$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

Applicazione del Metodo semplificato

Valori resistenti dell'armatura

$$N_{sz,Rd} = 2 \times 15.0 \times 373.9 \times 10^{-1} = 1121.6 \text{ kN}$$

Contributo
armatura A_{sz} a
 $M_{z,rd} = 347.7$

$$M_{sz,Rd} = 15.0 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \times 10^{-1} + [6.0 \times (0.70 - 2 \times 0.04)] \times 0.4 \times 373.9 \times 10^3 = 403.4 \text{ kNm}$$

$$N_{sy,Rd} = 2 \times 6.0 \times 373.9 \times 10^{-1} = 448.8 \text{ kN}$$

Contributo
armatura A_{sy} a
 $M_{z,rd} = 55.7$

$$M_{sy,Rd} = 6.0 \times (0.30 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \times 10^{-1} + [15.0 \times (0.30 - 2 \times 0.04)] \times 0.4 \times 373.9 \times 10^3 = 98.7 \text{ kNm}$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

CLS

M_z

M_y

$N_{c,Rd} = 1110.8 \text{ kN}$	$N_{sz,Rd} = 1121.6 \text{ kN}$	$N_{sy,Rd} = 448.8 \text{ kN}$
$M_{cz,Rd} = 194.4 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 347.7 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$
$M_{yc,Rd} = 83.3 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 55.7 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$

$$m_z = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$$

$$m_y = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$$

$$m_z = 1 + \left(\frac{1110.8 + 1121.6}{1110.8 + 1121.6 + 448.8} \right) = 1.83$$

$$m_y = 1 + \left(\frac{1110.8 + 448.8}{1110.8 + 1121.6 + 448.8} \right) = 1.58$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

CLS

M_z

M_y

$N_{c,Rd} = 1110.8 \text{ kN}$	$N_{sz,Rd} = 1121.6 \text{ kN}$	$N_{sy,Rd} = 448.8 \text{ kN}$
$M_{cz,Rd} = 194.4 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 347.7 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$
$M_{yc,Rd} = 83.3 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 55.7 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$

$$m_z = 1.83$$

$$m_y = 1.58$$

$$M_{z,Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right] =$$

$$= (194.4 + 347.7 + 55.7) \left[1 - \left(\frac{1400 - 1110.8}{1110.8 + 1121.6 + 448.8} \right)^{1.83} \right] = 587.6 \text{ kNm}$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

CLS

M_z

M_y

$N_{c,Rd} = 1110.8 \text{ kN}$	$N_{sz,Rd} = 1121.6 \text{ kN}$	$N_{sy,Rd} = 448.8 \text{ kN}$
$M_{cz,Rd} = 194.4 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 347.7 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$
$M_{yc,Rd} = 83.3 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 55.7 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$

$$m_z = 1.88$$

$$m_y = 1.53$$

$$M_{y,Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right] =$$

$$= (83.3 + 49.4 + 49.4) \left[1 - \left(\frac{1400 - 1110.8}{1110.8 + 1121.6 + 448.8} \right)^{1.53} \right] = 176.1 \text{ kNm}$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

CLS

M_z

M_y

$N_{c,Rd} = 1110.8 \text{ kN}$	$N_{sz,Rd} = 1121.6 \text{ kN}$	$N_{sy,Rd} = 448.8 \text{ kN}$
$M_{cz,Rd} = 194.4 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 347.7 \text{ kNm}$	$M_{sz,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$
$M_{yc,Rd} = 83.3 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 55.7 \text{ kNm}$	$M_{sy,Rd} = 49.4 \text{ kNm}$

$$m_z = 1.88$$

$$m_y = 1.53$$

$$M_{z,Rd} = 587.6 \text{ kNm} \quad \left(\frac{M_{z,Sd}}{M_{z,Rd}} \right)^{1.5} + \left(\frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right)^{1.5} \leq 1$$

$$M_{y,Rd} = 176.1 \text{ kNm} \quad \left(\frac{300}{587.6} \right)^{1.5} + \left(\frac{60}{176.1} \right)^{1.5} = 0.37 + 0.20 = 0.57 \leq 1$$

Esempio di verifica a pressoflessione deviata

Confronto con verifica a pressoflessione retta

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 \times 0.30 \times 0.70 \times 11.02 \times 10^3 = 1110.8 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \cong 0.12 \times 0.30 \times 0.70^2 \times 11.02 \cdot 10^3 = 194.4 \text{ kNm}$$

$$N_{s,Rd} = 2A_s f_{yd} = 2 \times 15.0 \times 373.9 \times 10^{-1} = 1121.7 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 15.0 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \cdot 10^{-1} = 397.8 \text{ kNm}$$

$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right) = 1 + \frac{1110.8}{1110.8 + 1121.7} = 1.49$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m = \frac{300}{194.4 + 397.8} + \left| \frac{1400 - 1110.8}{1110.8 + 1121.7} \right|^{1.49} = 0.56 \leq 1$$

Considerazioni conclusive

Il metodo approssimato:

- rappresenta un valido strumento di verifica di sezioni di pilastri tenso-pressoinflessi;
- fornisce un semplice strumento di progetto nel campo della pressoflessione per la sezione e per l'armatura;
- può essere esteso anche al caso di pressoflessione deviata;
- sarà presto esteso anche a sezioni circolari