

Dalle tensioni ammissibili agli stati limite

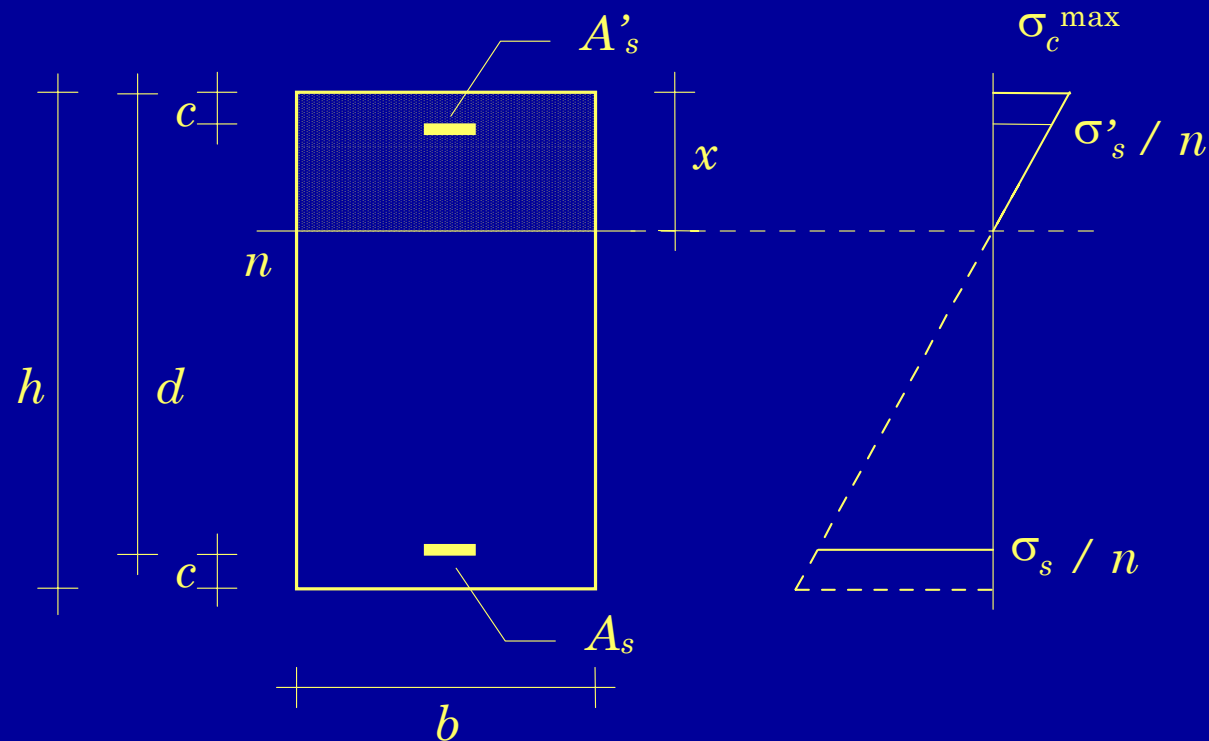
Momento flettente

Spoletto, 21 maggio 2004

Aurelio Ghersi

Verifica di sezioni inflesse

Verifica - tensioni ammissibili



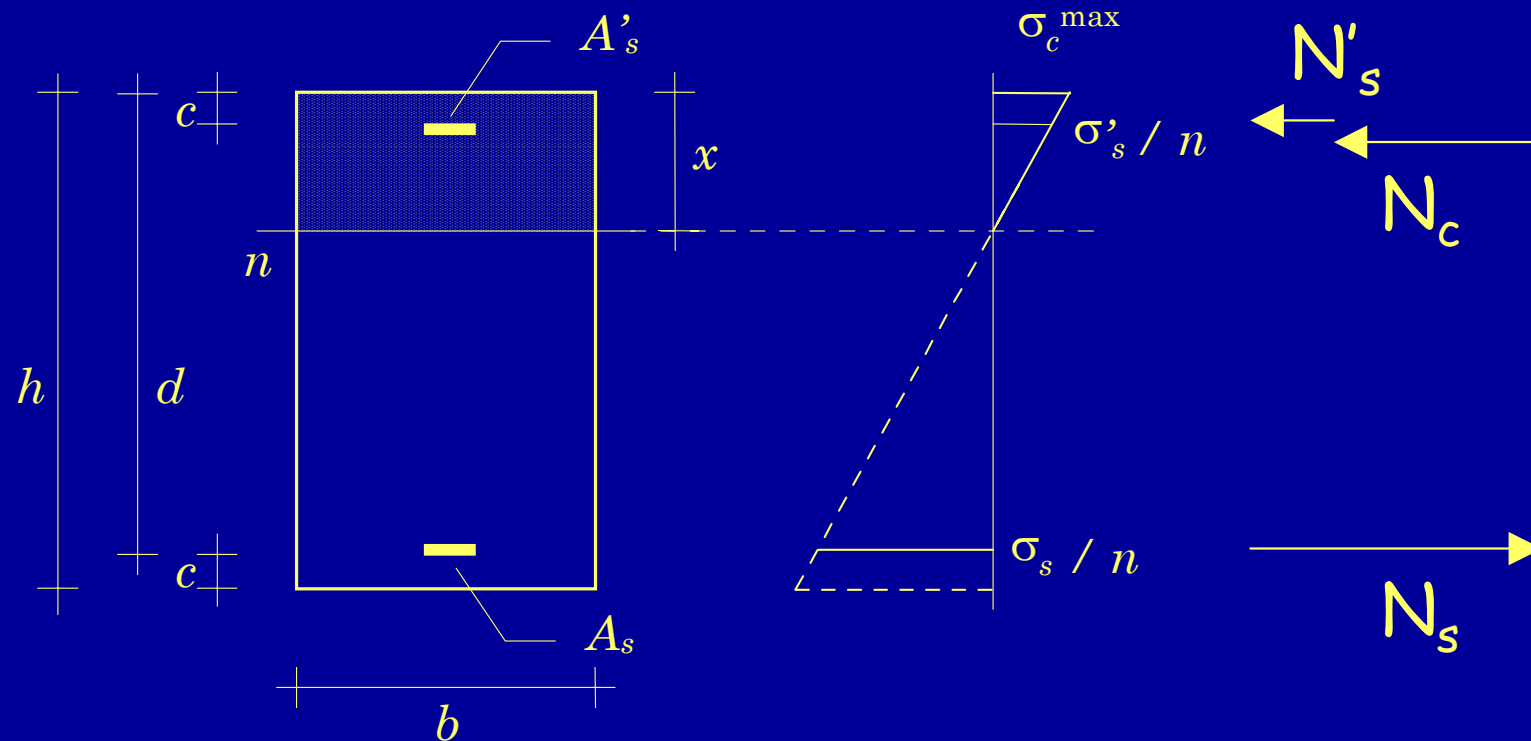
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

oppure:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Verifica - tensioni ammissibili

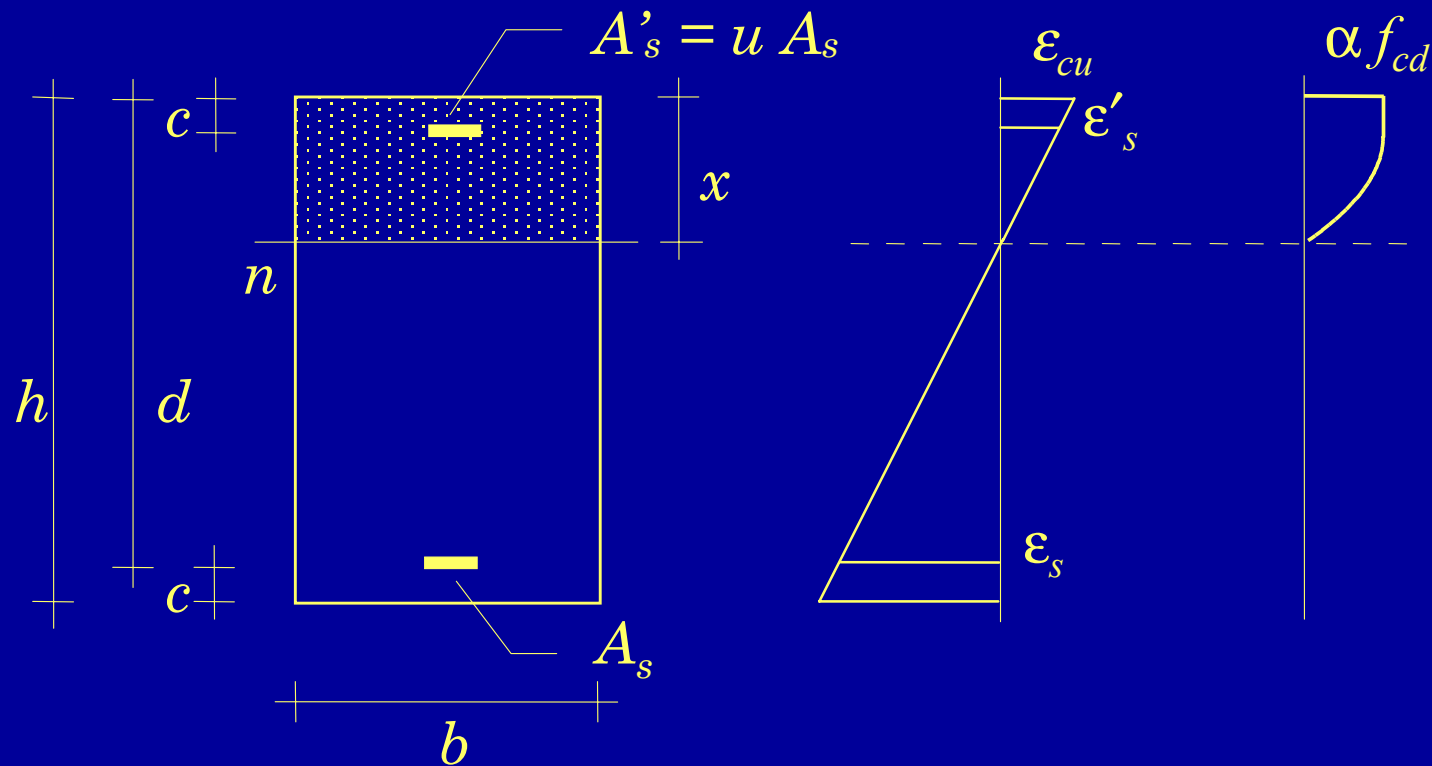
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

E poi: $\sigma = -\frac{M}{I} y$

con: $I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$

Verifica - stato limite ultimo



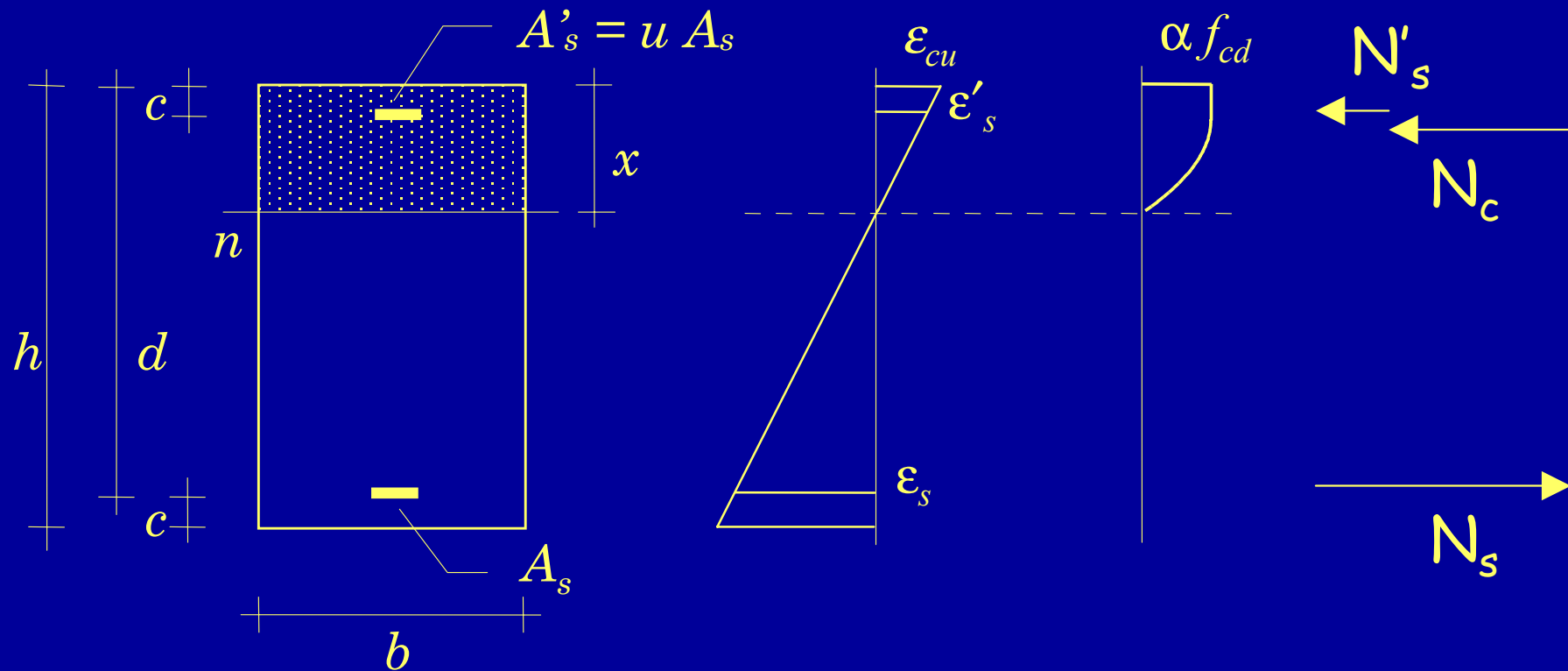
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo

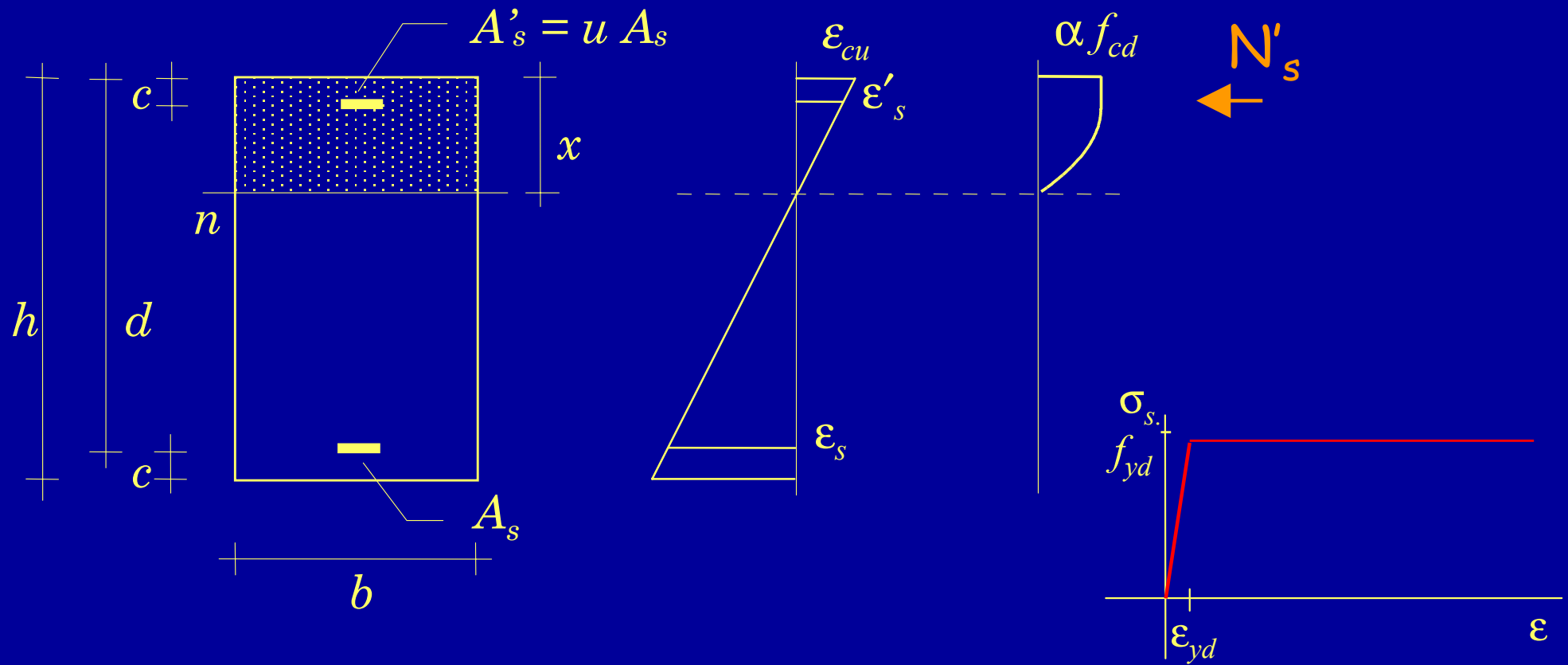


Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

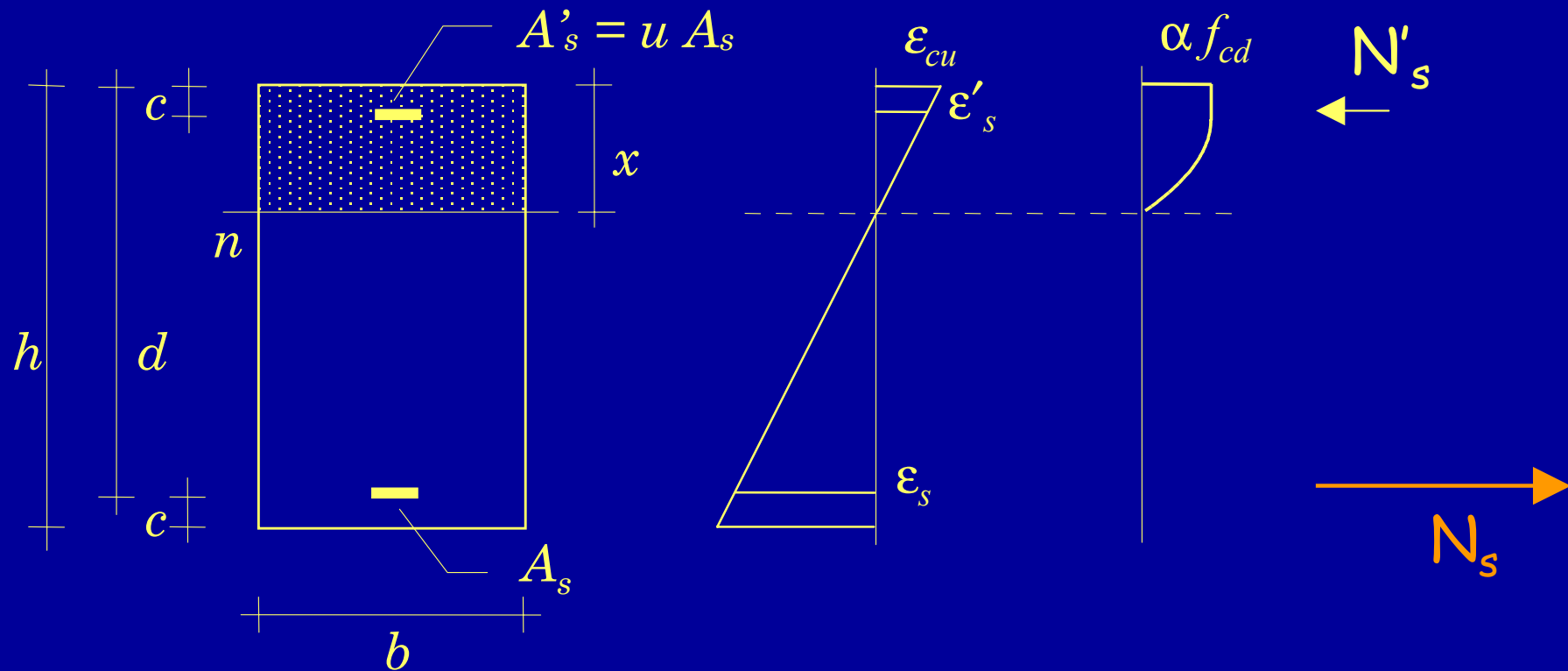


$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu}$$

in molti casi $\epsilon'_s > \epsilon_{yd}$

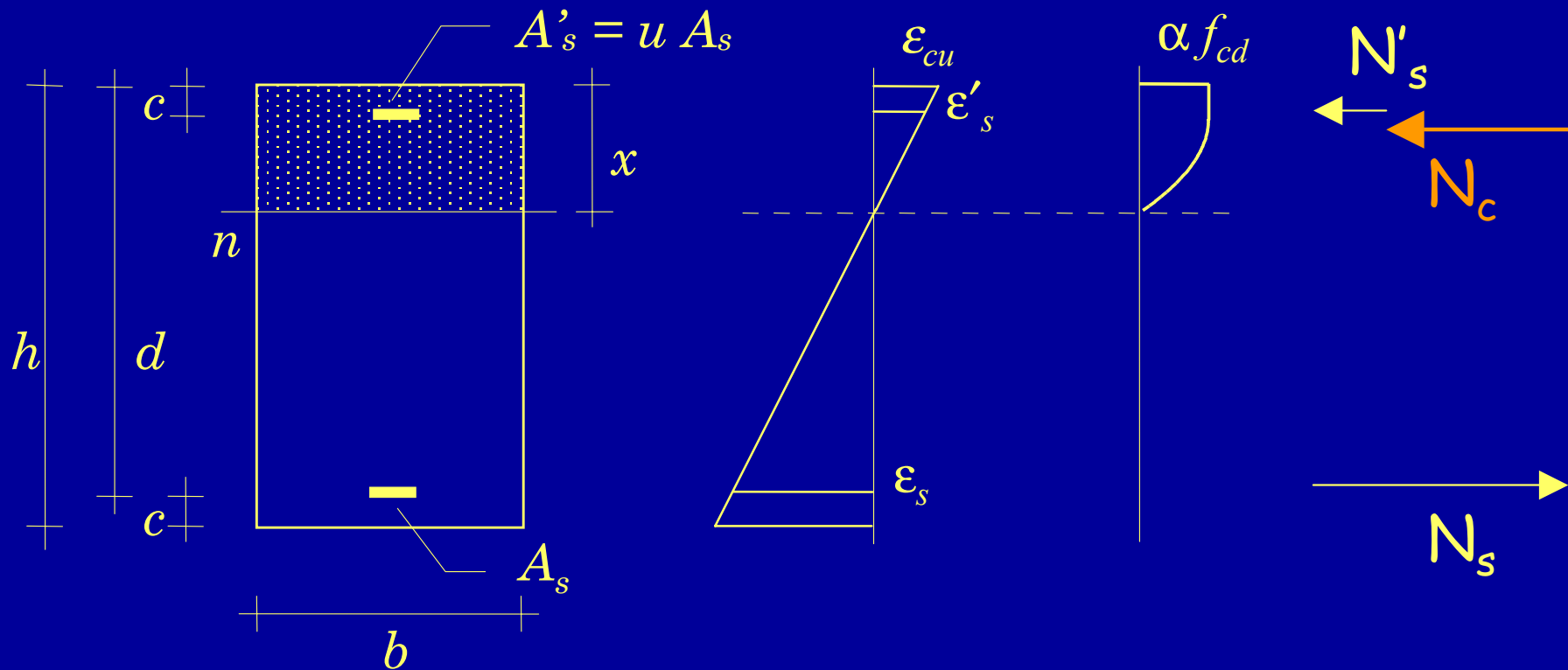
$$\Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta b x \alpha f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Individuazione dell'asse neutro

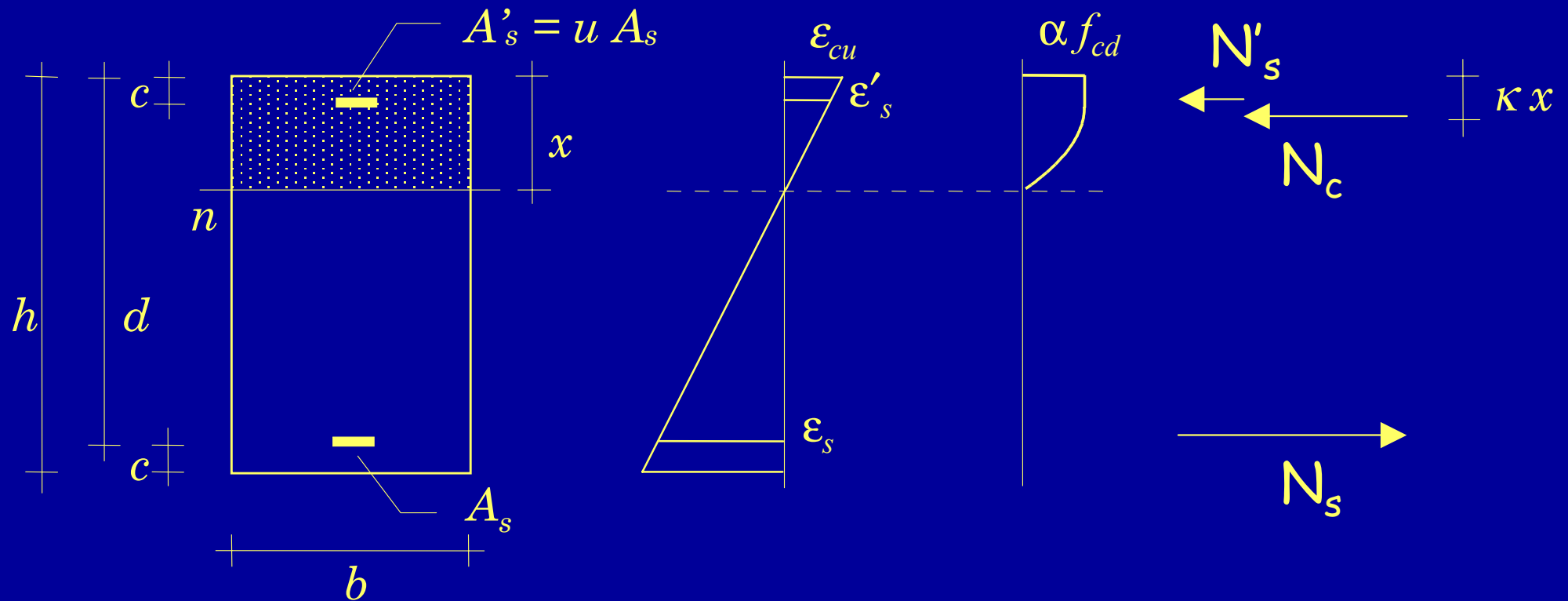
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Sd} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50

Calcestruzzo $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Armature $A_s = 4\text{Ø}20$

Acciaio FeB44k

$$A'_s = 4\text{Ø}14$$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Sd} e M_{Rd}

Esempio - individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}} = \frac{(12.56 - 6.16) \times 374}{0.810 \times 30 \times 11.0} = 8.95 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{8.95 - 4}{8.95} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.94 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ la posizione trovata è esatta

Esempio - calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 374 \times 10^{-1} = 469.7 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$N'_s = 6.16 \times 374 \times 10^{-1} = 230.4 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = [469.7 \times (46 - 0.416 \times 8.95) + 230.4 \times (0.416 \times 8.95 - 4)] \times 10^{-2}$$

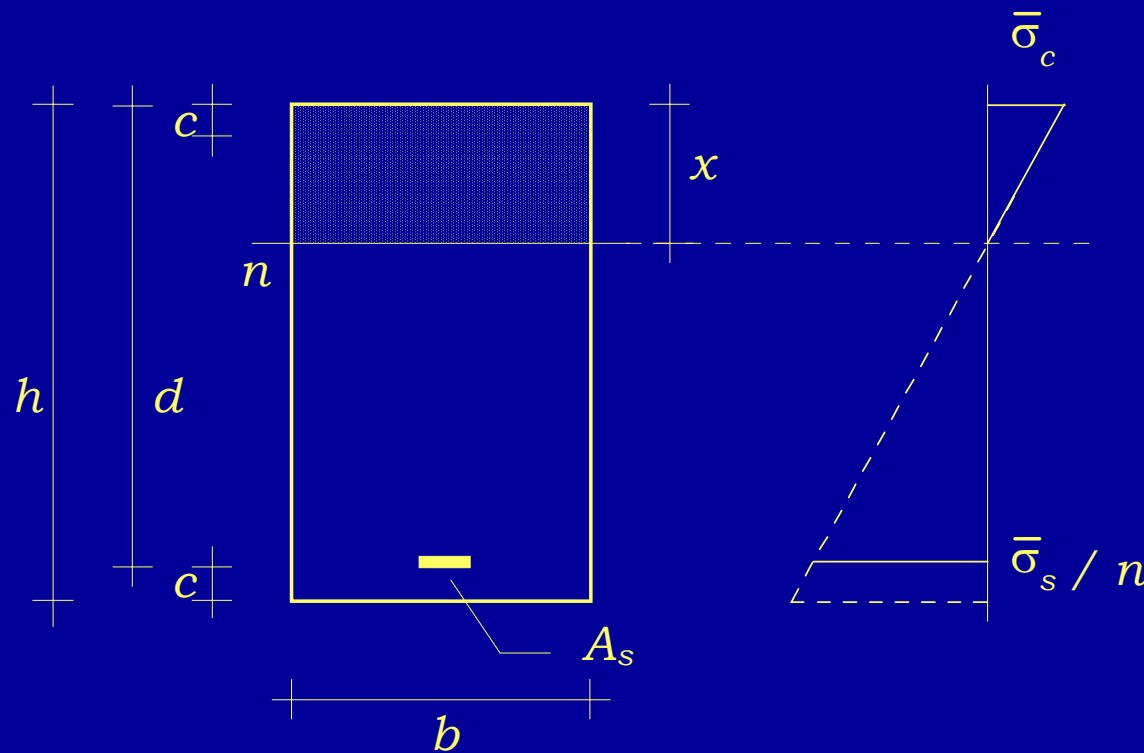
$$M_{Rd} = 197.9 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Sd} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

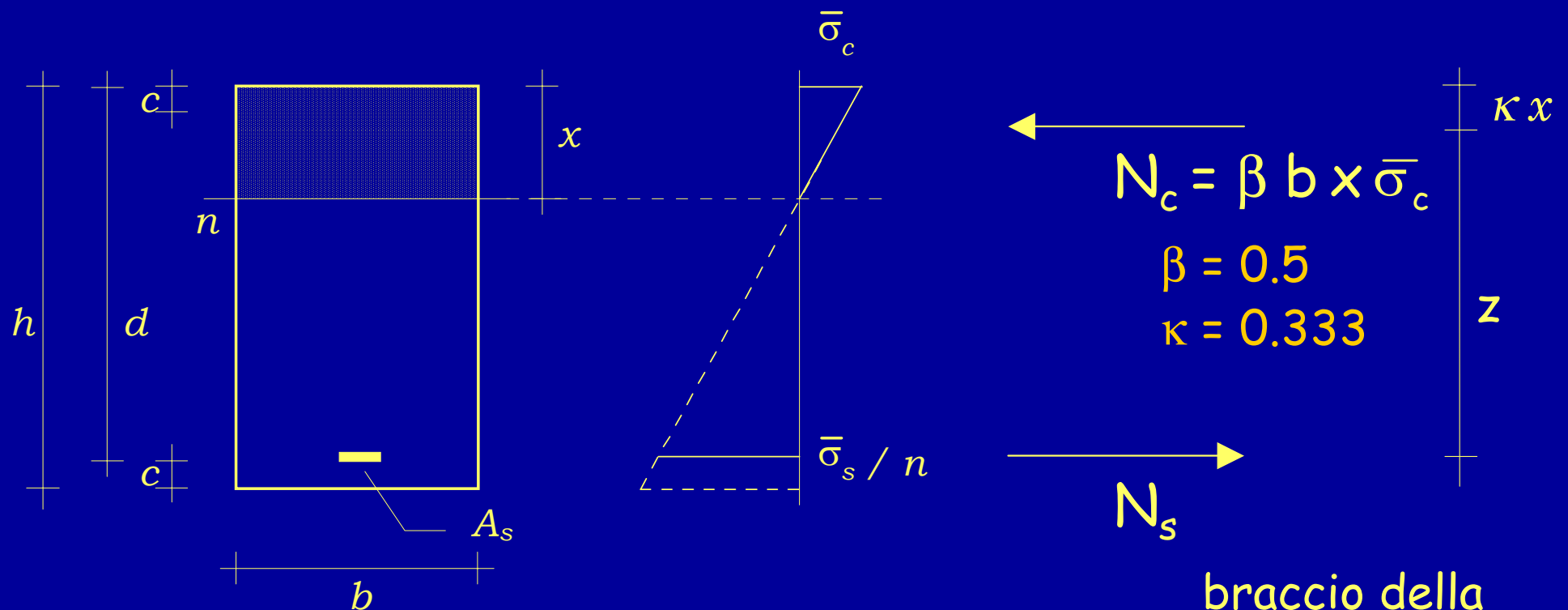
Progetto - tensioni ammissibili



$$\omega = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

Progetto - tensioni ammissibili

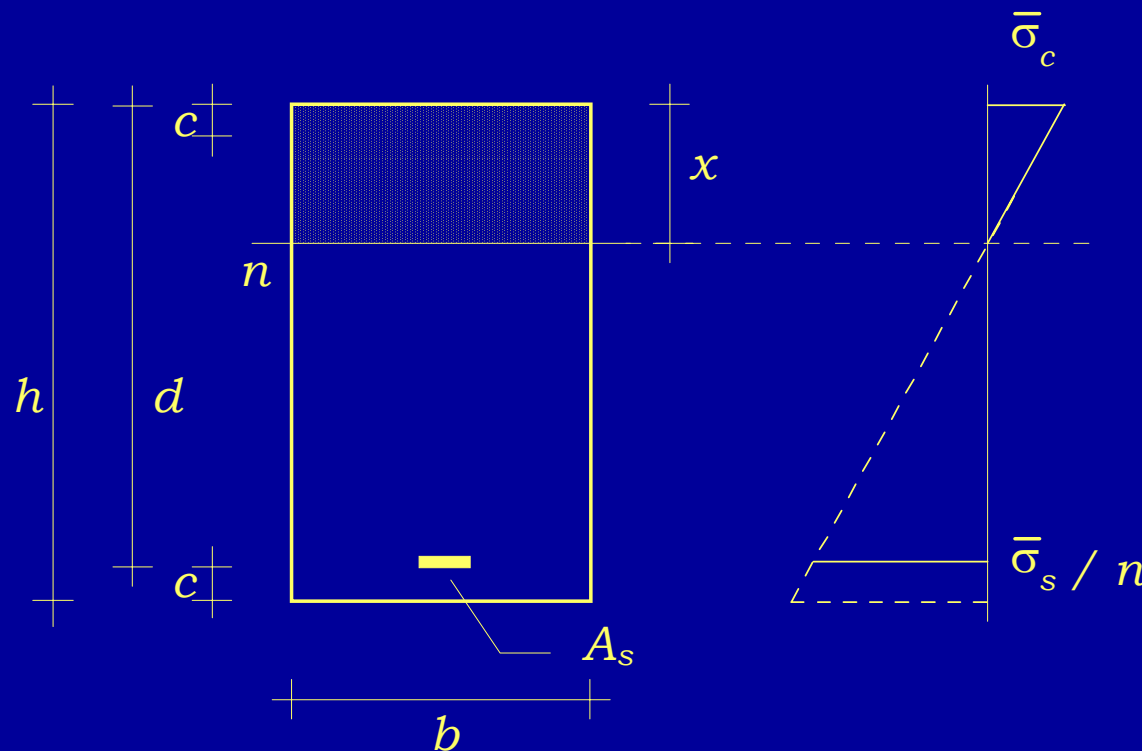


2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b d^2}{r^2}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:

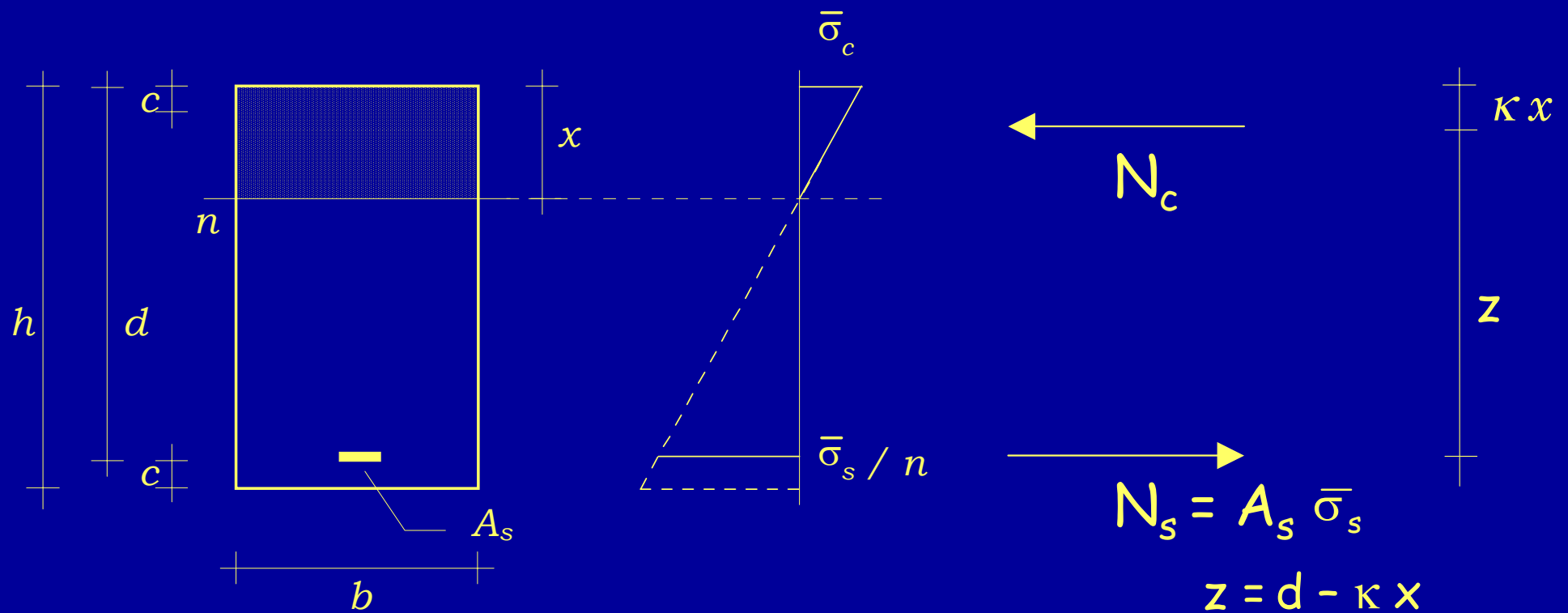
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



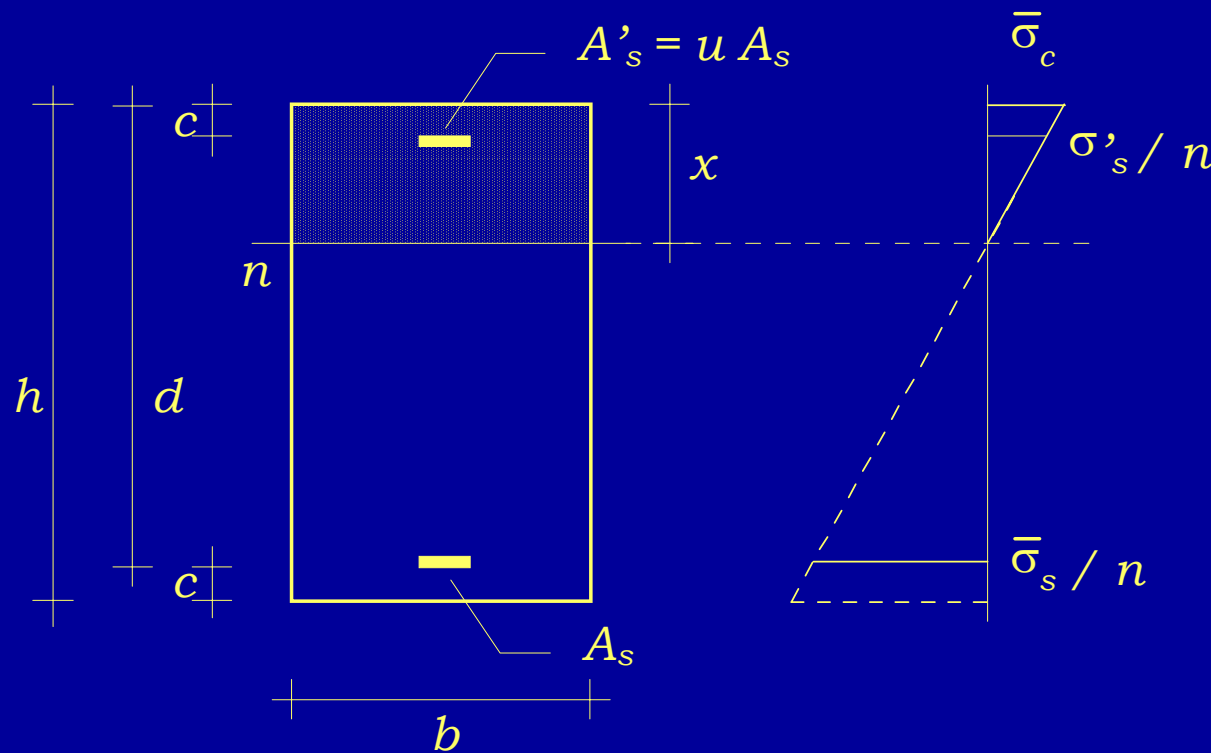
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$$M = N_s z$$

$$M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Progetto - tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x - c}{d - x}$$

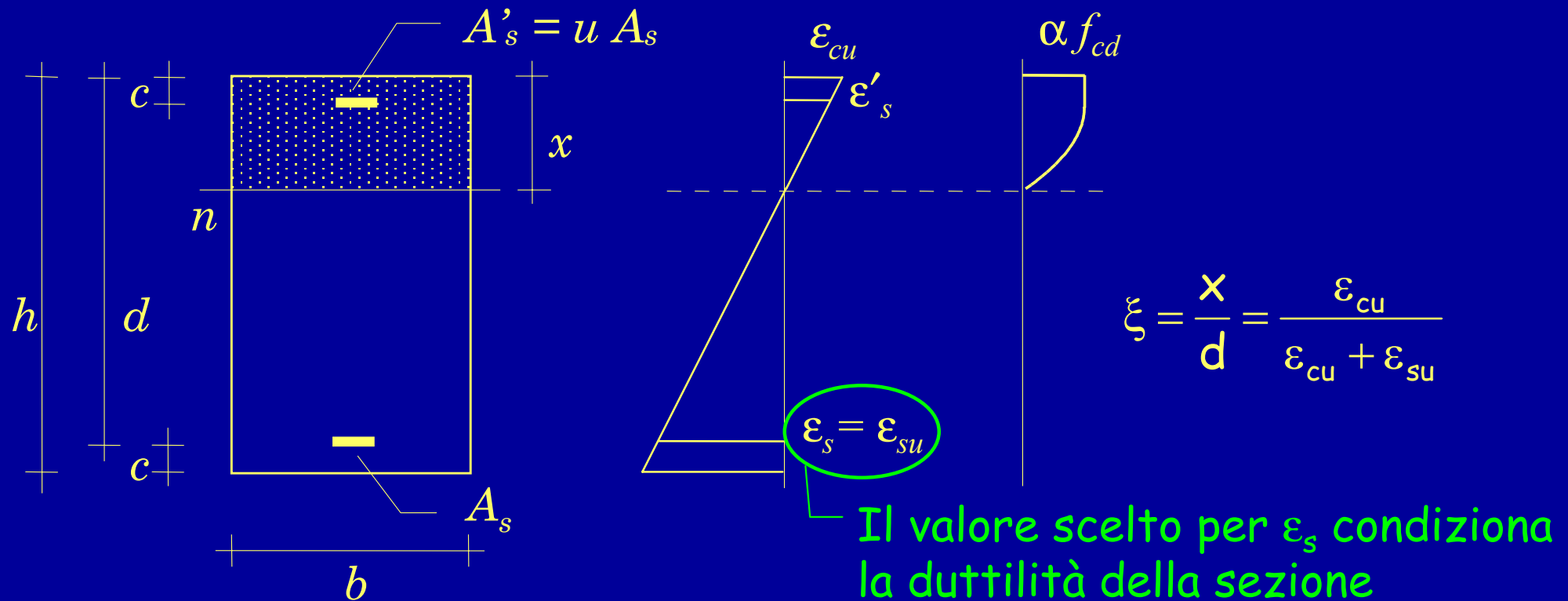
$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Analogamente per sezione a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

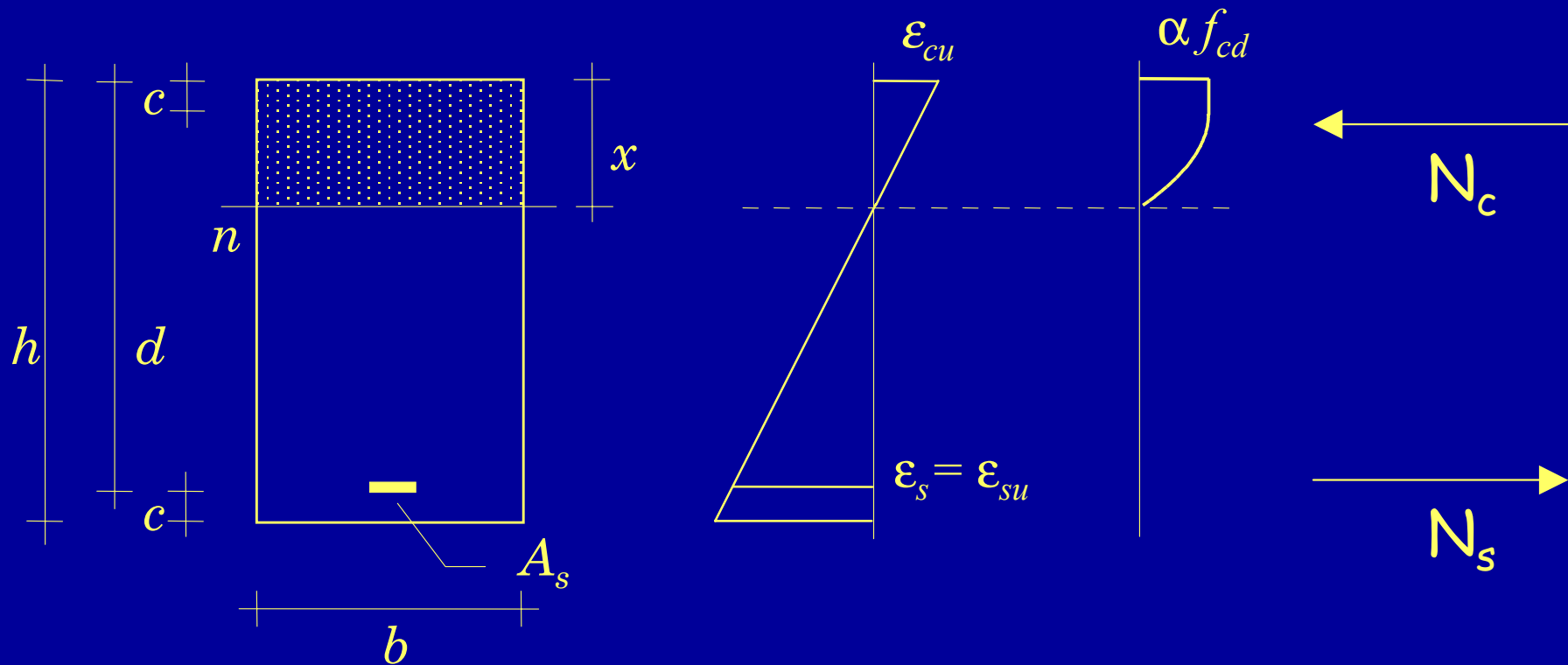
Progetto - stato limite ultimo



1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$

Progetto - stato limite ultimo

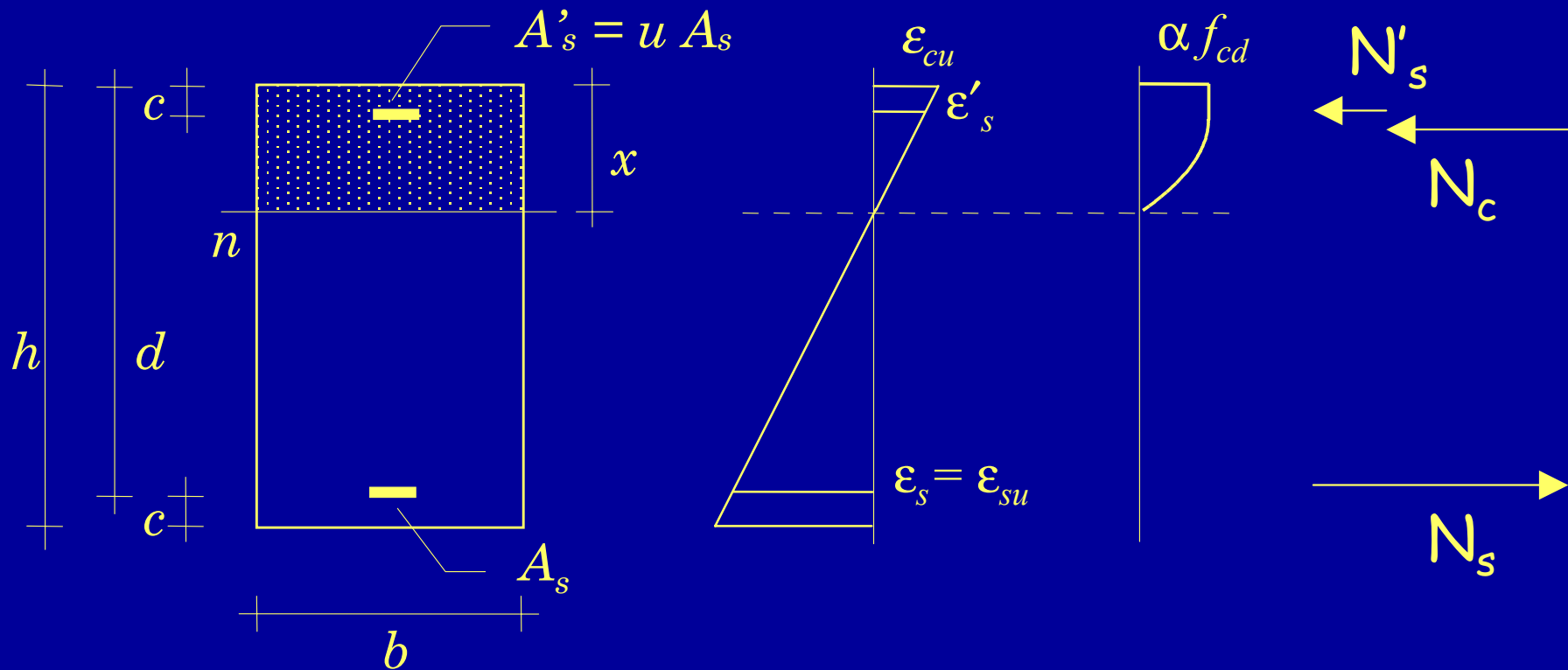


2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$\text{con: } r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}}}$$

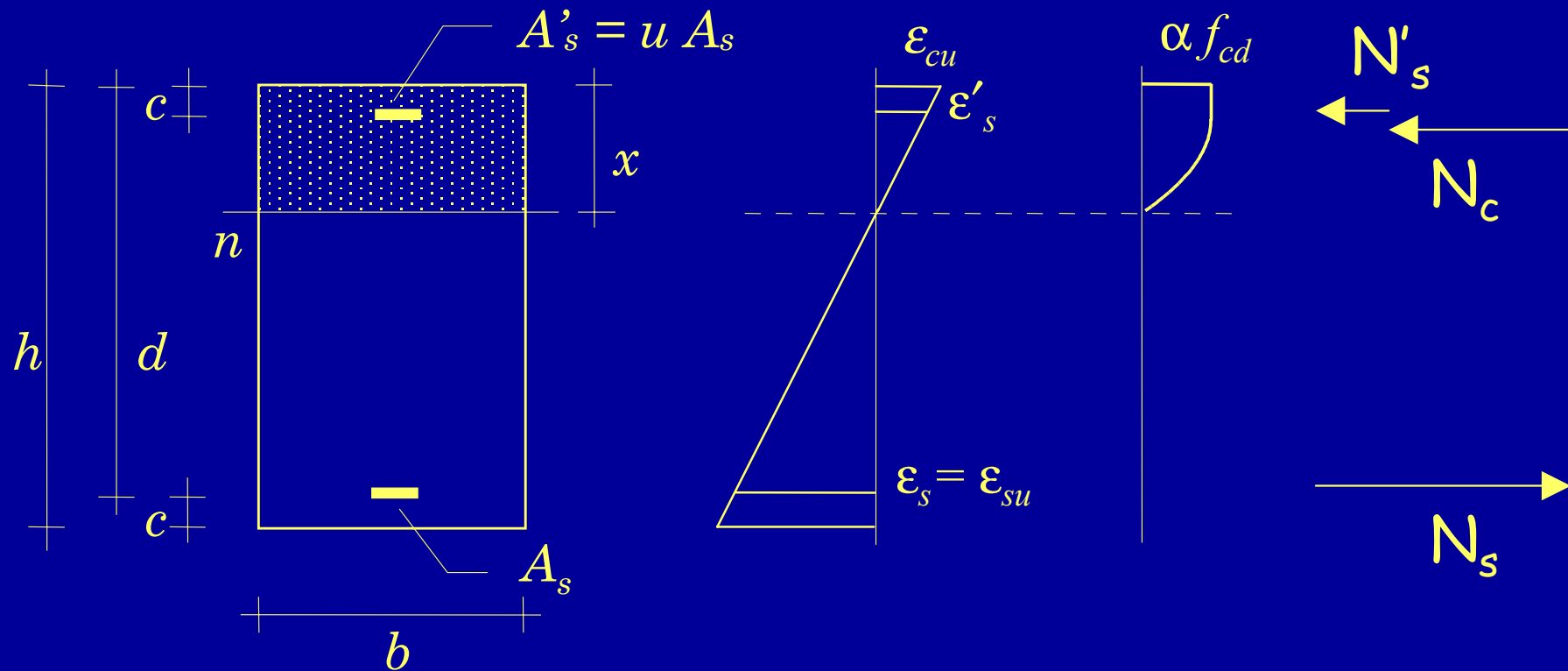
Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Duttività della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.6$

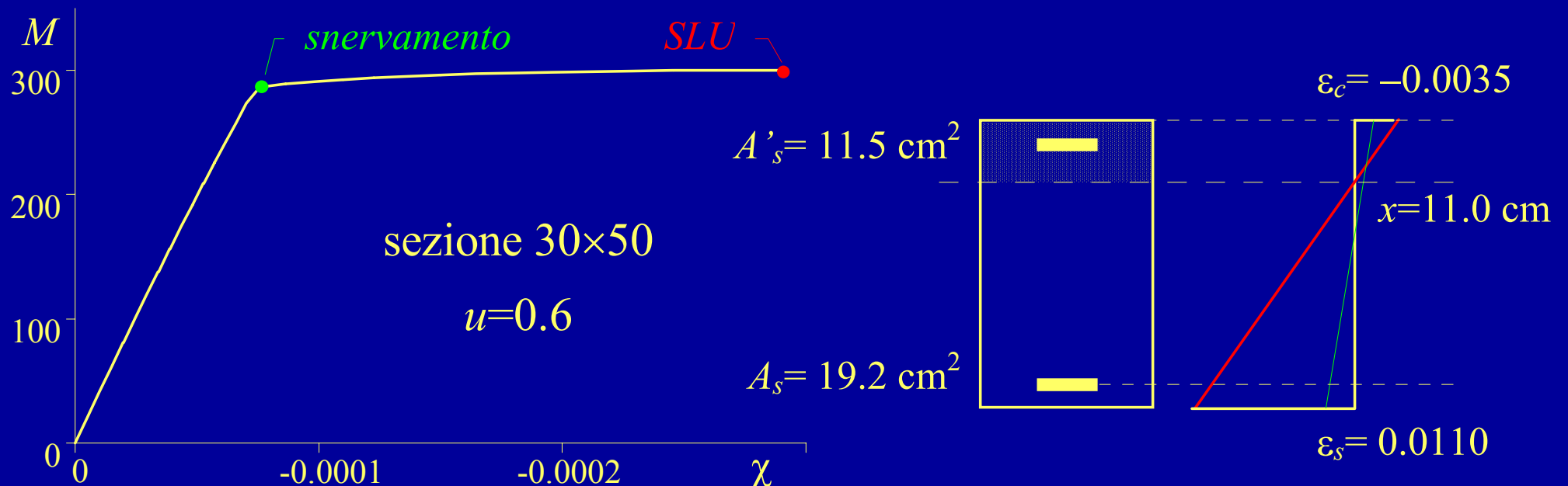
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$

$x=11.0 \text{ cm}$

$\chi=-0.000286$

Buona duttilità



Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.3$

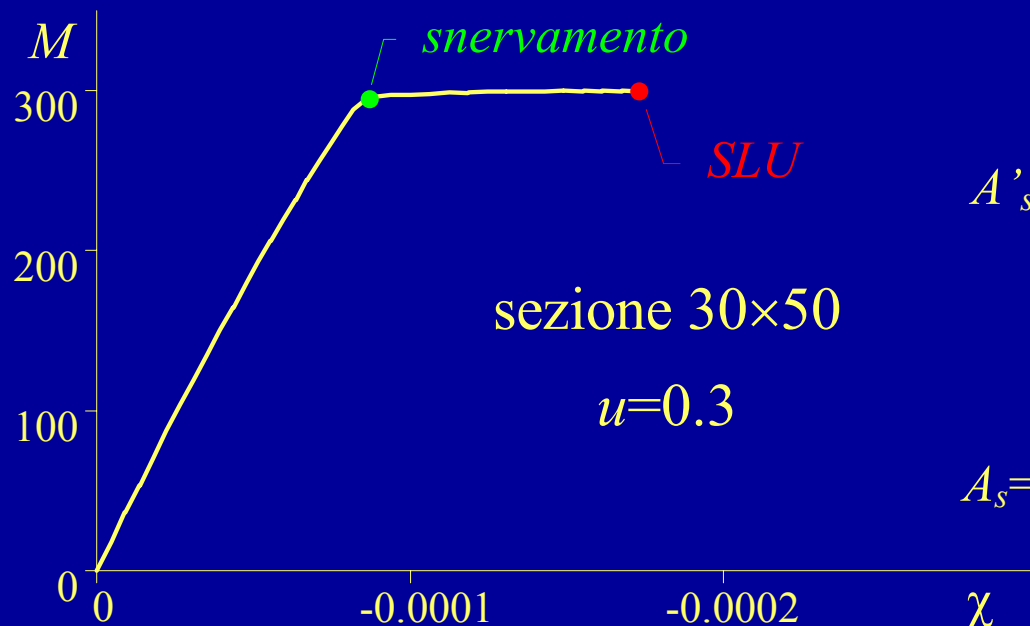
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$

$x=20.2 \text{ cm}$

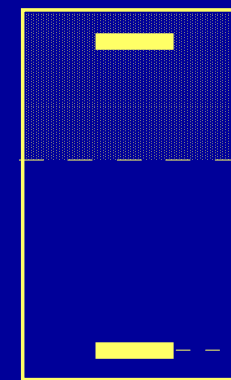
$\chi = -0.000184$

Duttilità discreta



$A'_s = 6.2 \text{ cm}^2$

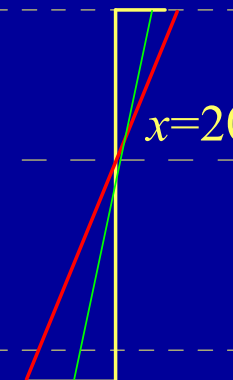
$A_s = 20.6 \text{ cm}^2$



$\varepsilon_c = -0.0035$

$x=20.2 \text{ cm}$

$\varepsilon_s = 0.0045$



Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.08$

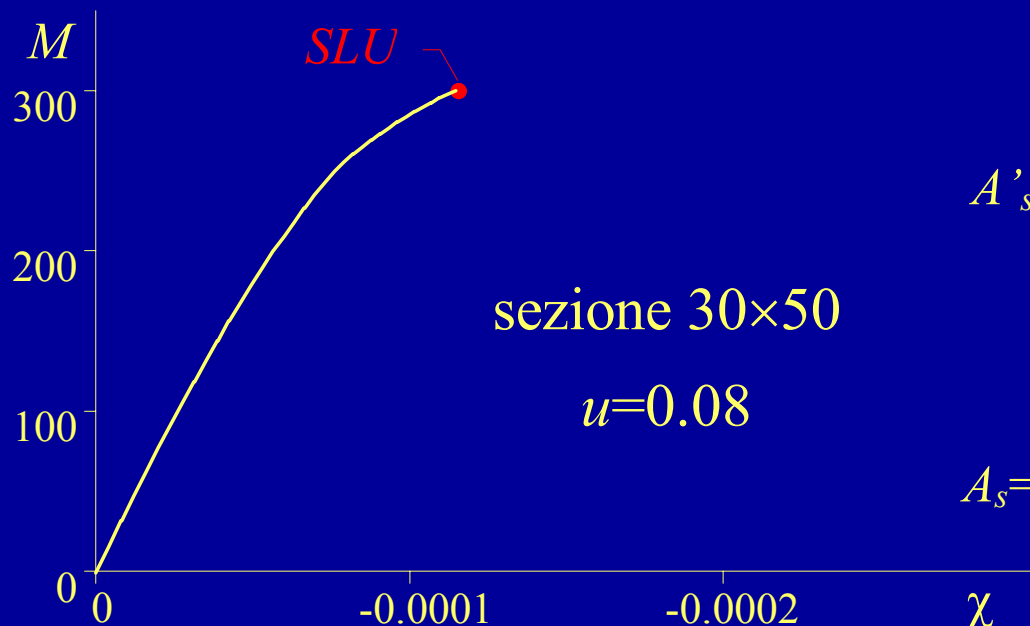
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$

$x=30.3 \text{ cm}$

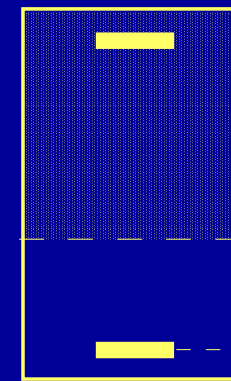
$\chi=-0.000116$

Bassa duttilità



$A'_s = 1.9 \text{ cm}^2$

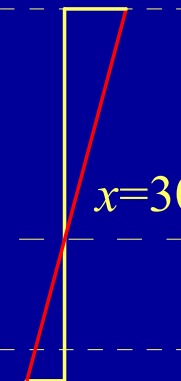
$A_s = 23.5 \text{ cm}^2$



$\varepsilon_c = -0.0035$

$x=30.3 \text{ cm}$

$\varepsilon_s = 0.0018$



Quanto vale il coefficiente r ?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ e FeB44k: $r = 0.282$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$: $r = 0.220$

Esempio

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0282 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.552 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 255} = 8.95 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0220 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.524 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{170 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 374} = 9.02 \text{ cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' ($R_{ck} = 25 \text{ MPa}$, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
0	0.0282	0.0282	0.0282
0.25	0.0265	0.0269	0.0275
0.50	0.0248	0.0256	0.0269
0.75	0.0230	0.0242	0.0262
1.00	0.0211	0.0227	0.0255

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
0	0.0220	0.0220	0.0220
0.25	0.0189	0.0190	0.0209
0.50	0.0153	0.0155	0.0197

Valori di r'/r ($R_{ck} = 25 \text{ MPa}$, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.940	0.954	0.975
0.50	0.879	0.908	0.954
0.75	0.816	0.858	0.929
1.00	0.748	0.805	0.904

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.859	0.864	0.950
0.50	0.695	0.705	0.895

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.3 \div 0.5$)

Esempio

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0265 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.519 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 60$$

era 0.552 m per $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0189 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.450 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.524 m per $u=0$

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
 $r' = 0.019$ o 0.020 (corrisponde a $u \cong 25\%$)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori
un po' maggiori
 $r' = 0.021$ (corrisponde a $u \cong 25\%$)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ($0.8 d$)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura compressa determinare la differenza tra M_{sd} e momento resistente per $u = 0$

$$M_0 = \frac{bd^2}{r^2}$$

$$\Delta M = M_{sd} - M_0$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d-c)f_{yd}}$$

FINE

*Coincide sostanzialmente con la
presentazione
Cemento armato - 3 AG*

Per questa presentazione:

coordinamento

A. Ghersi

realizzazione

A. Ghersi

ultimo aggiornamento

8/05/2004