Dalle tensioni ammissibili agli stati limite

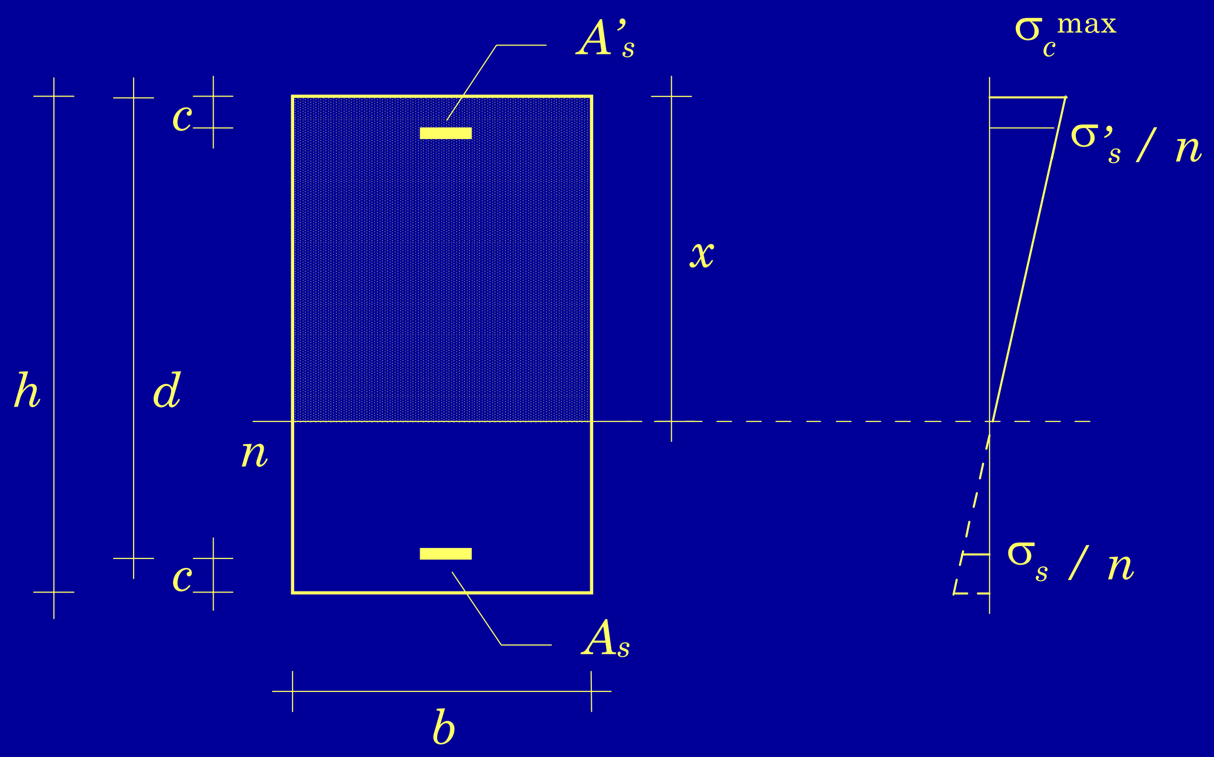
Flessione composta

Spoleto, 21 maggio 2004

Aurelio Ghersi

Verifica di sezioni soggette flessione composta

Verifica – tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature

Coppia M-N

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica – tensioni ammissibili

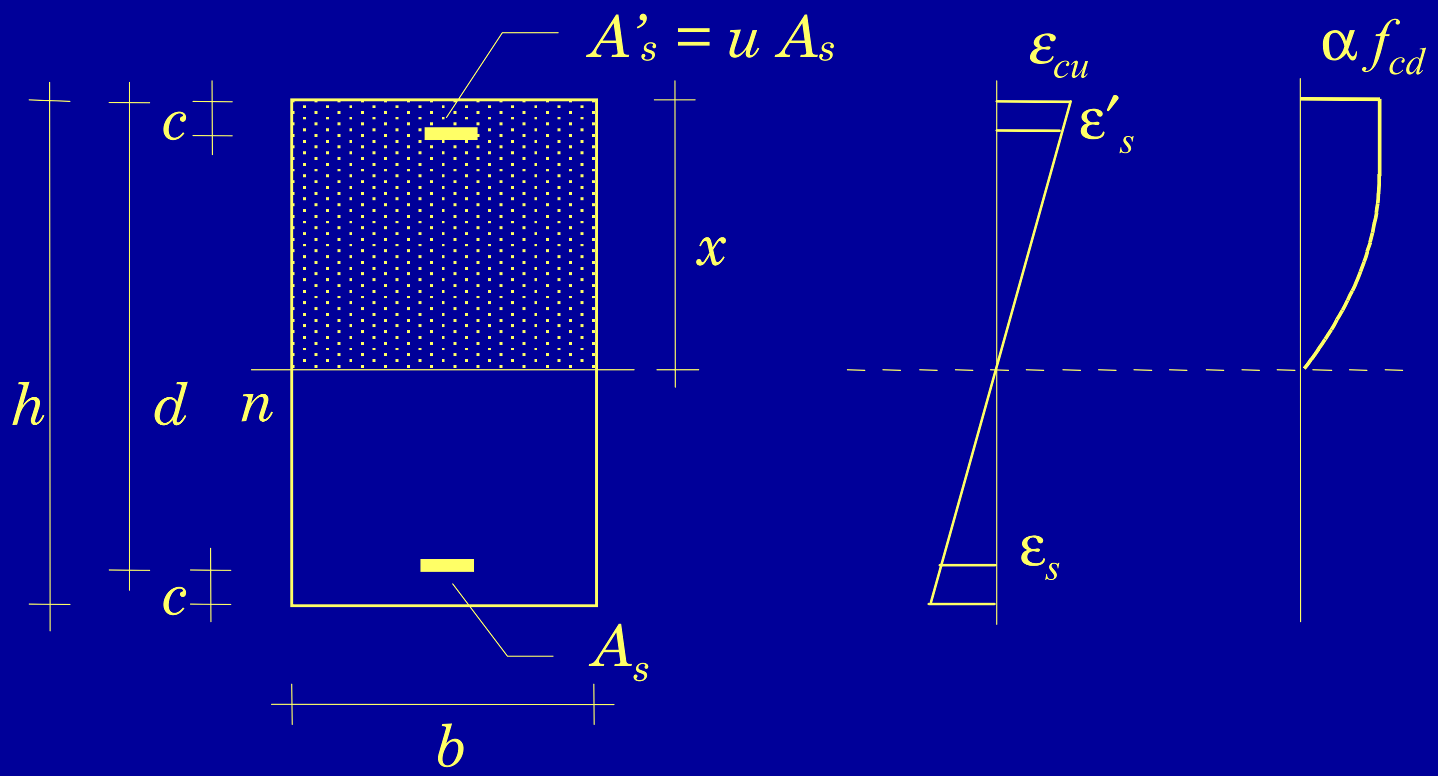
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se N è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se N è di compressione)

Imporre la condizione $I_n = e_n S_n$ se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo
(equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

Verifica – stato limite ultimo



Dati:

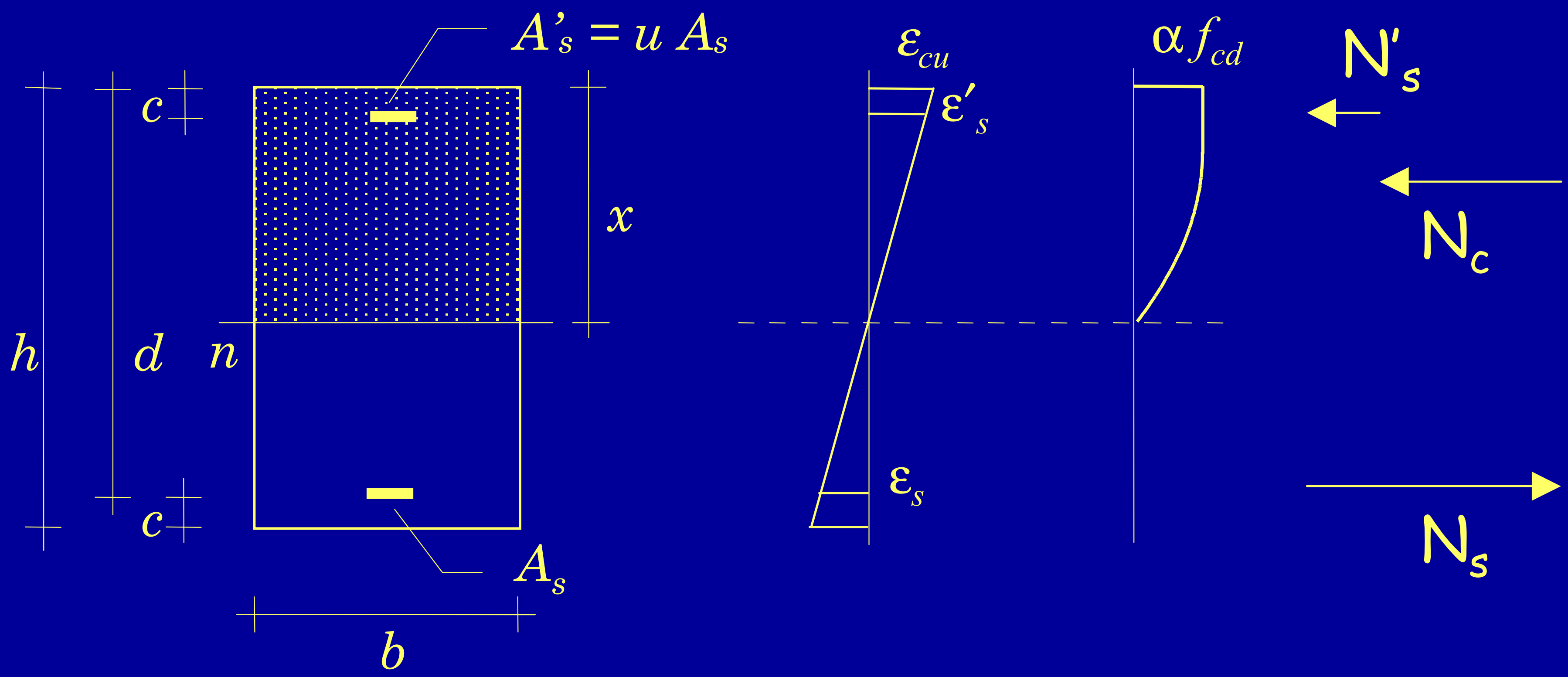
Geometria della sezione
Armature

Coppia M-N

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

Verifica – stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = N_{Sd}$
(equilibrio alla traslazione)

E poi calcolare M_{Rd}, con equilibrio alla rotazione

Verifica – stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{N_{Sd} + (A_s - A'_s)\, f_{yd}}{\beta\, b\ \alpha\, f_{cd}}$$

altrimenti si ottiene una equazione di secondo grado

Individuato il diagramma, si calcola facilmente il momento resistente M_{Rd}, da confrontare con M_{Sd}

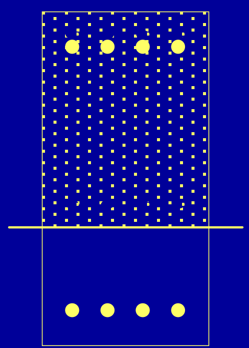
Domini M-N
per flessione composta retta

Domini di resistenza – tensioni ammissibili

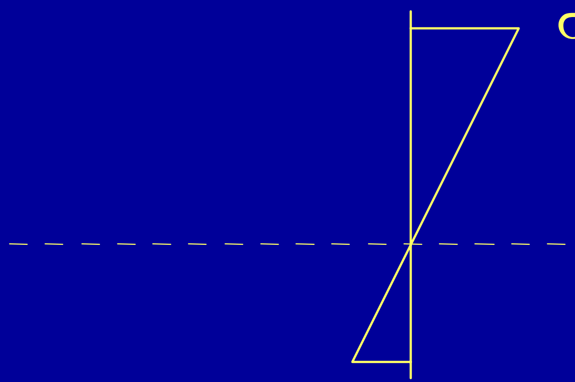
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un diagramma



si calcolano M ed N

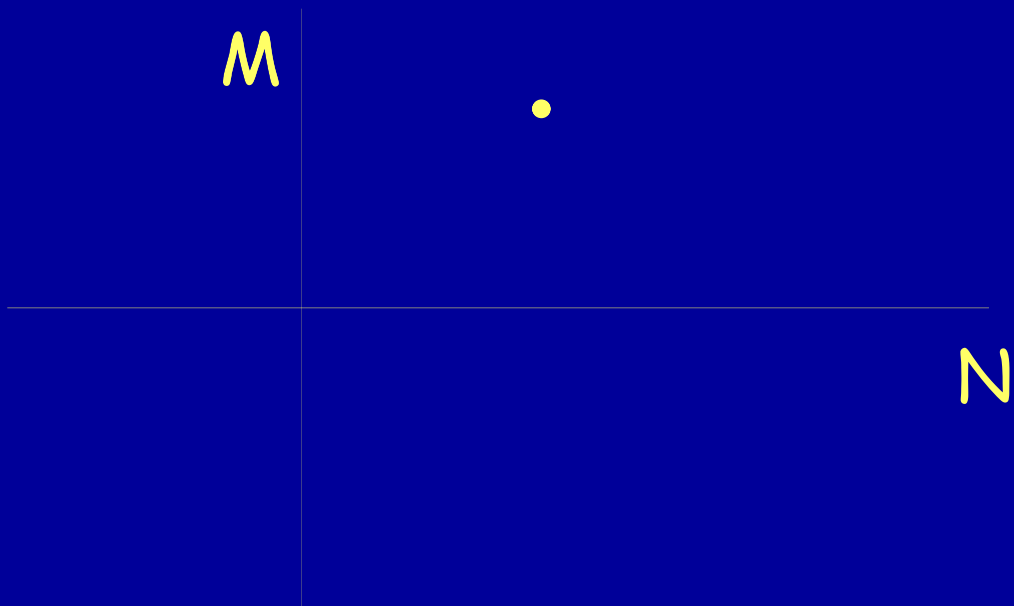
$$N = \int \sigma \, dA$$

$$M = -\int \sigma \, y \, dA$$

Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano
M ed N

$$N = \int \sigma \, dA$$

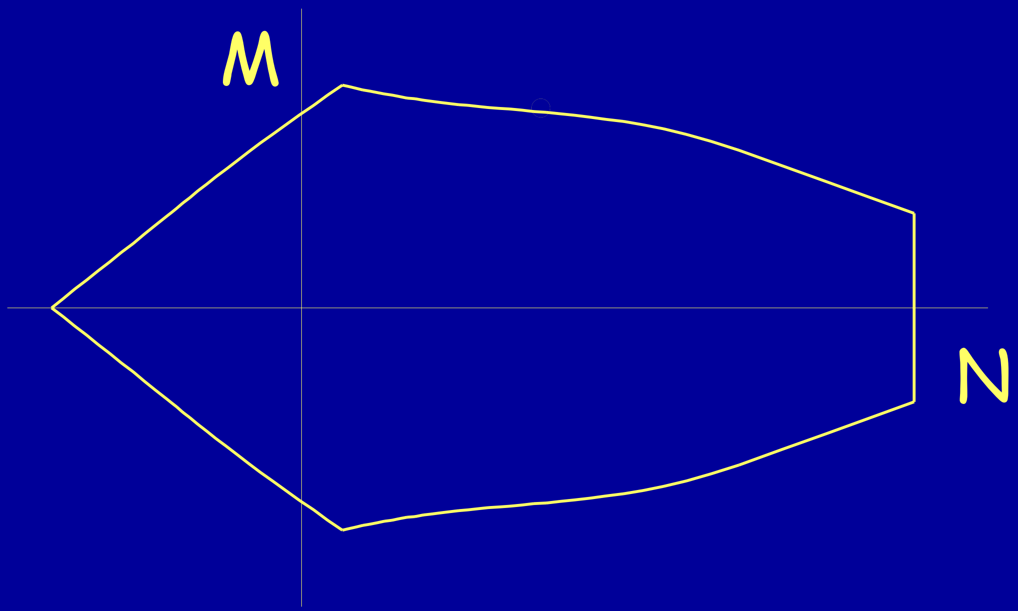
$$M = -\int \sigma \, y \, dA$$

e si riporta la coppia
M – N nel diagramma

Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione	=	insieme delle coppie M-N per cui σ_{max} è uguale a $\bar{\sigma}$

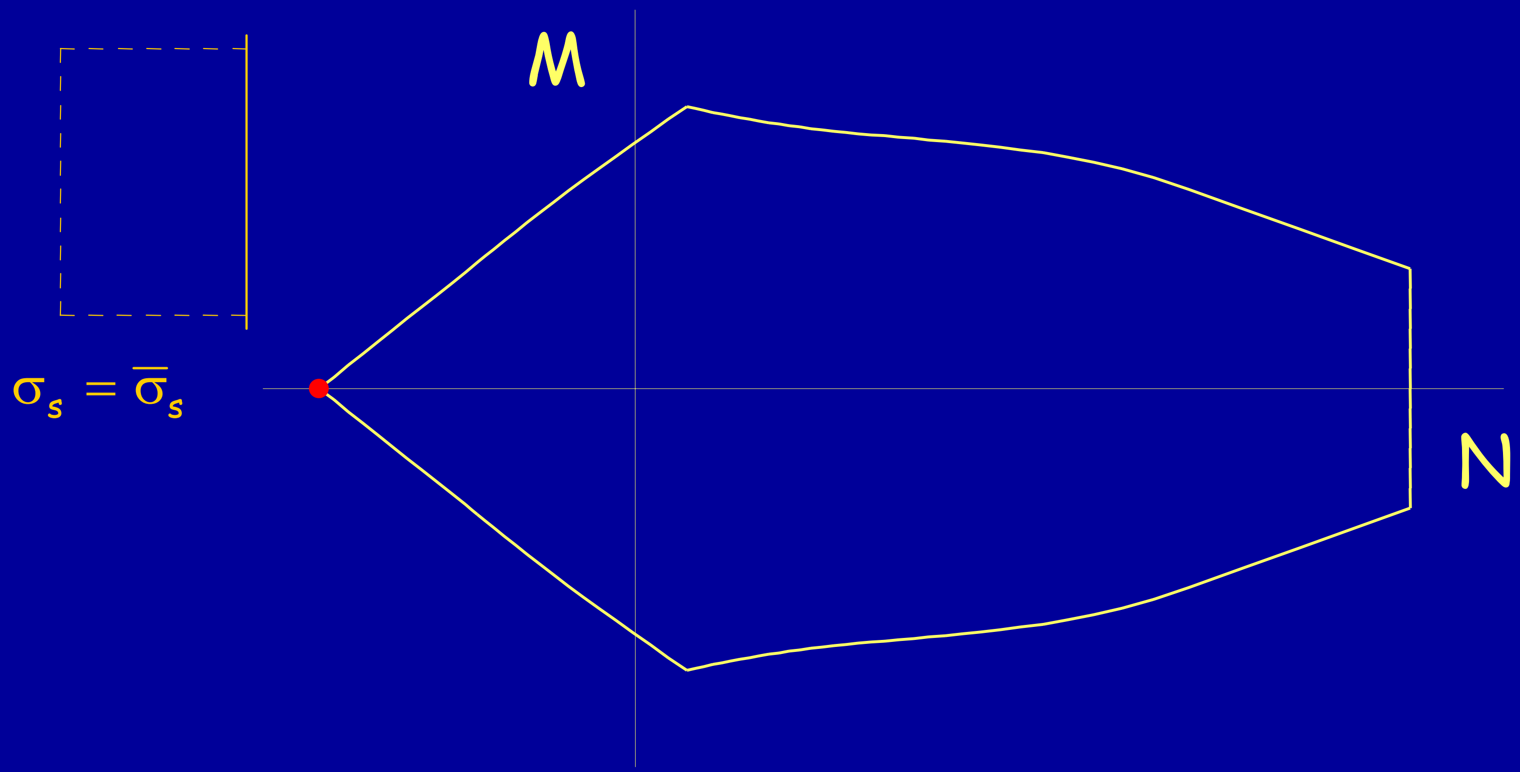
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi …



si ottiene il dominio completo

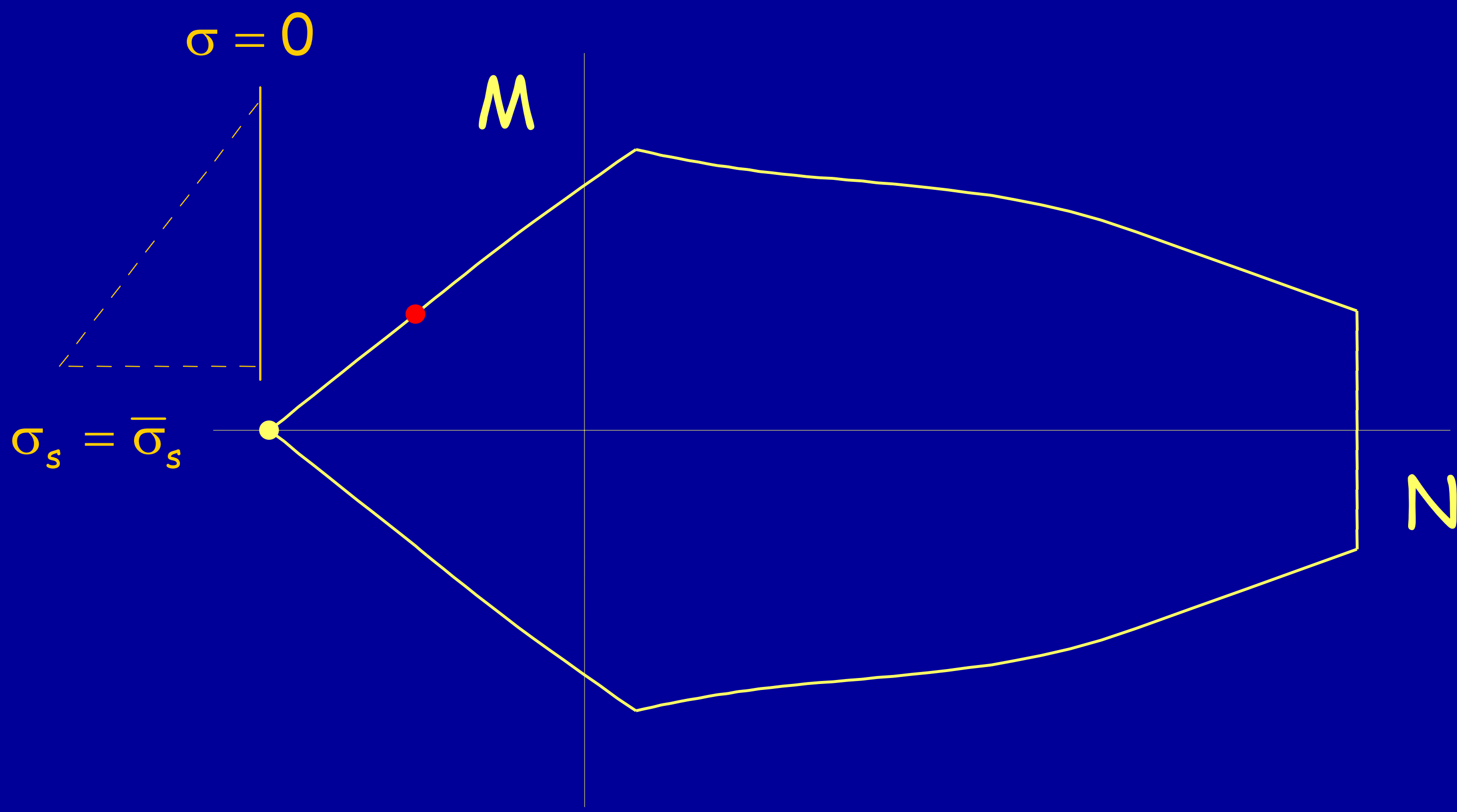
Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



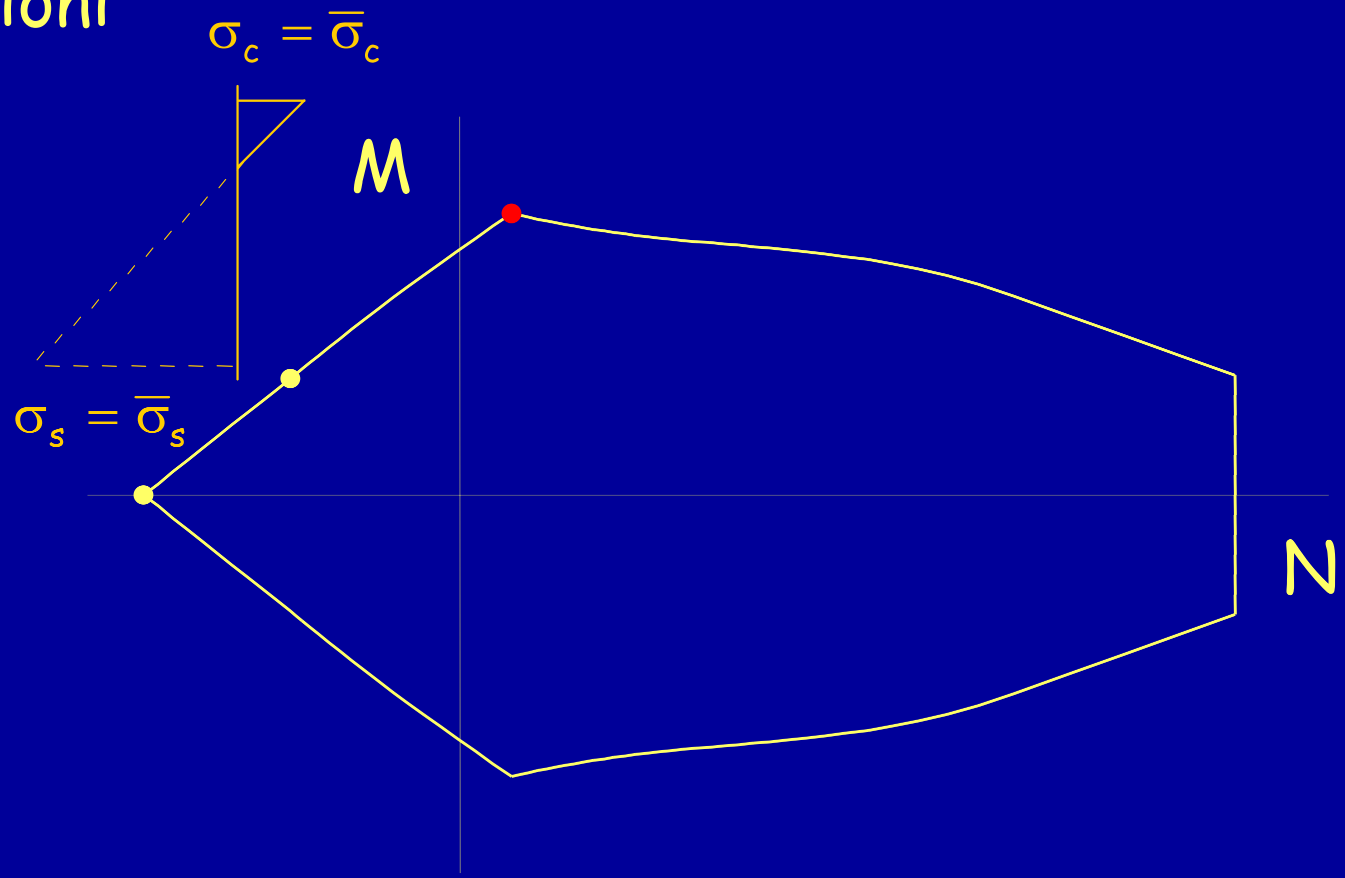
Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



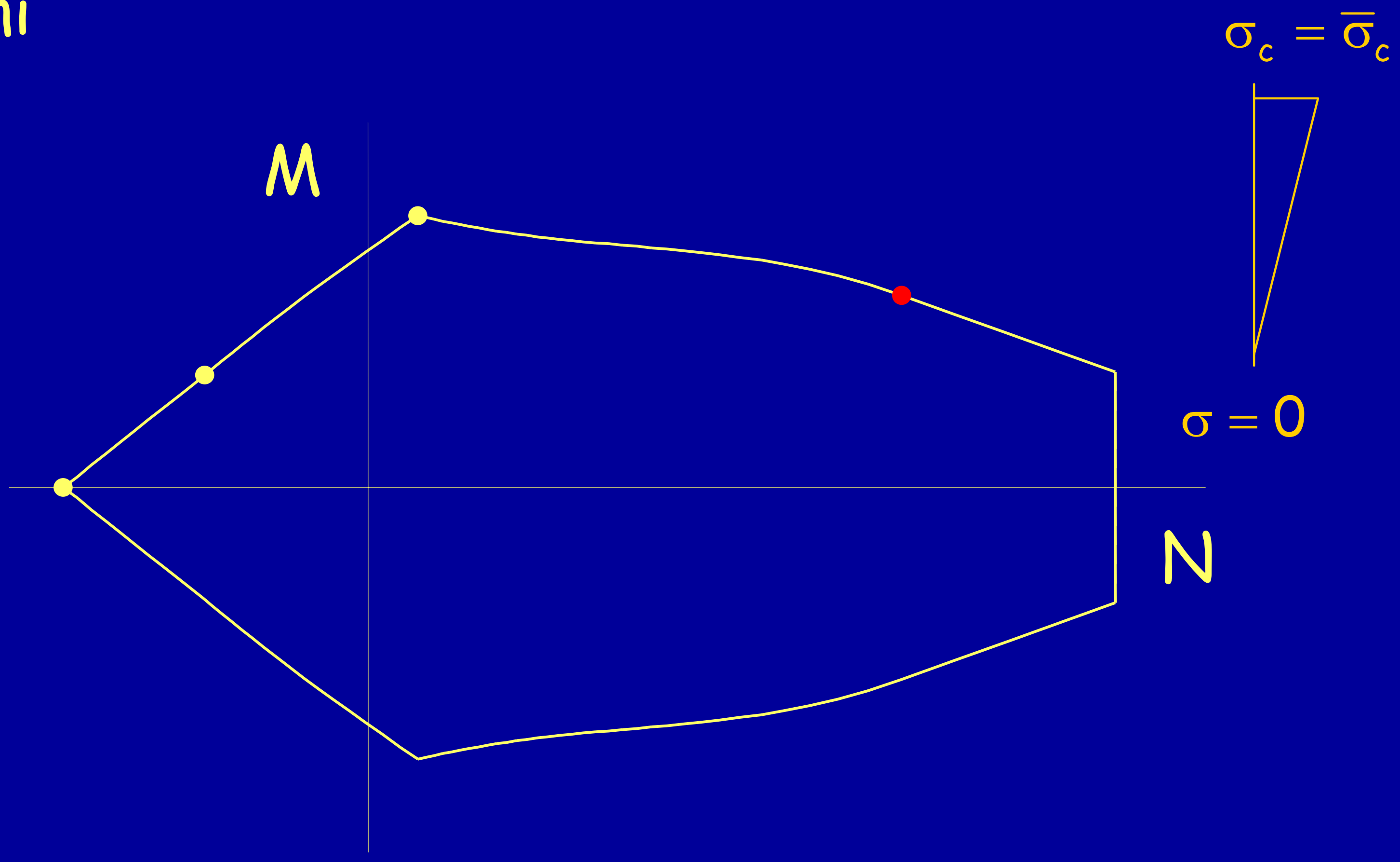
Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



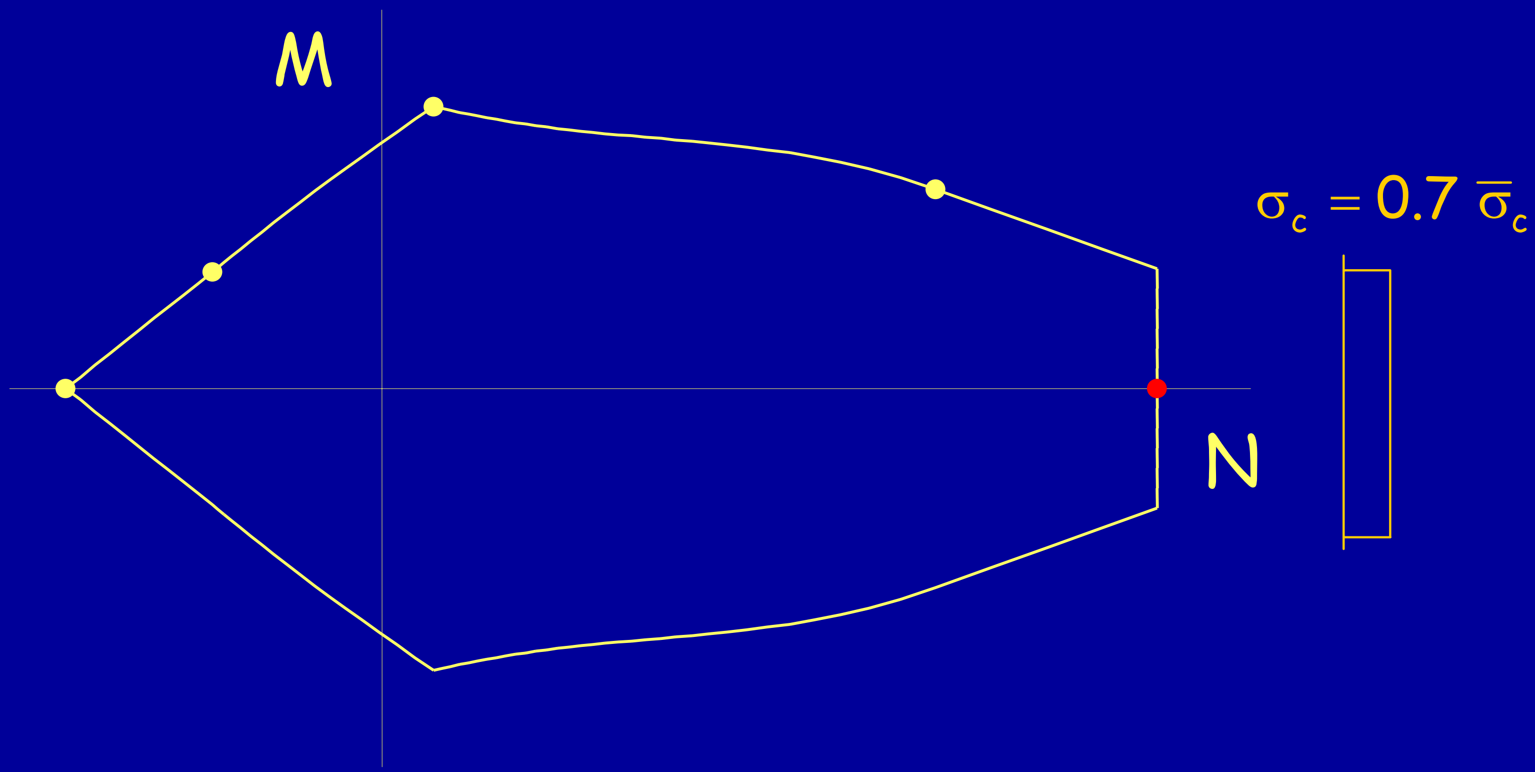
Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



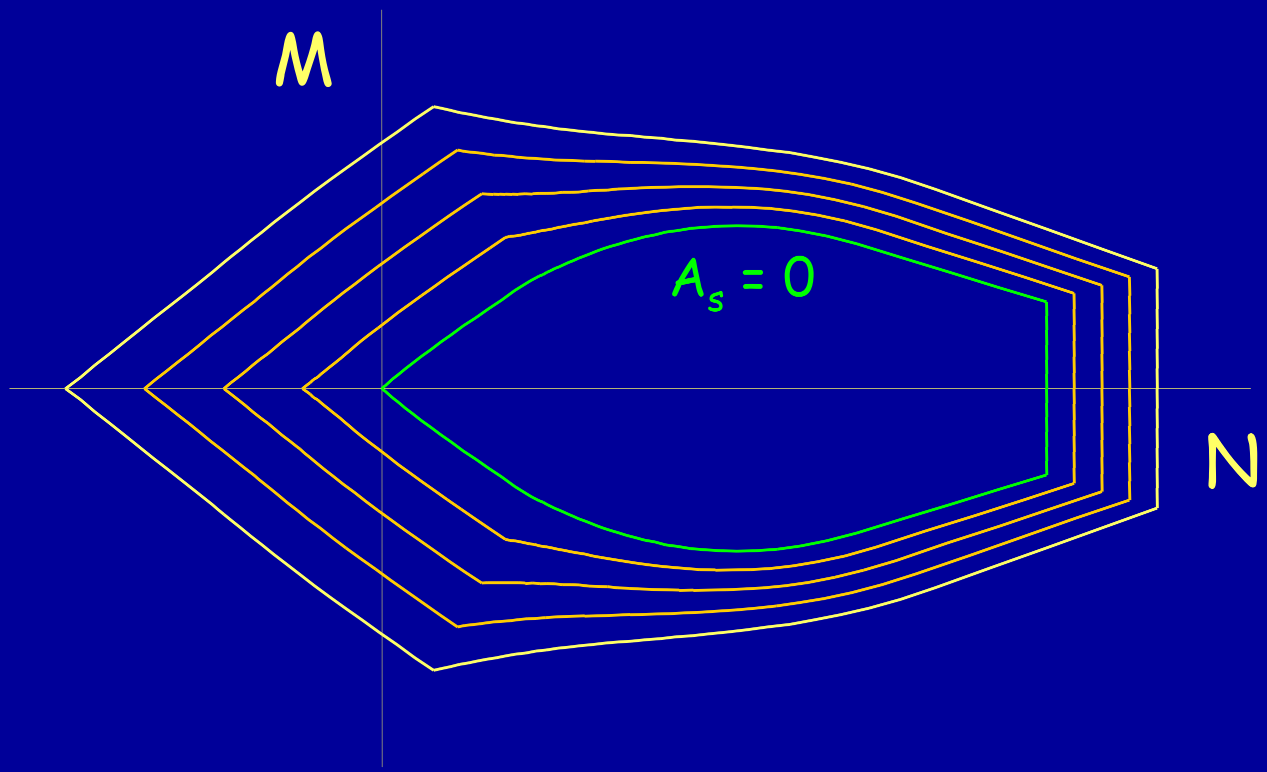
Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



Domini di resistenza – tensioni ammissibili

Cambiando l’armatura, si ottengono tanti diagrammi

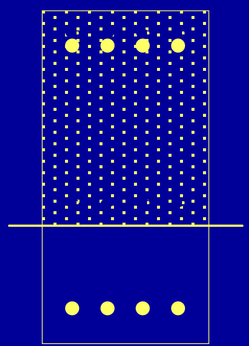


Domini di resistenza – stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione	=	insieme delle coppie M-N per cui ε_{max} è uguale a ε_{lim}

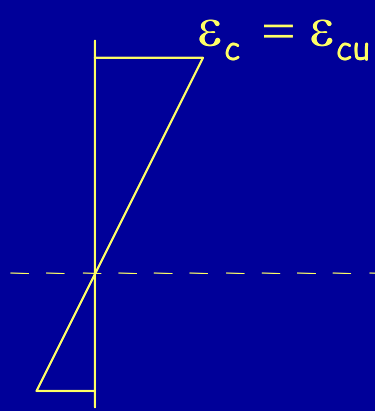
Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione

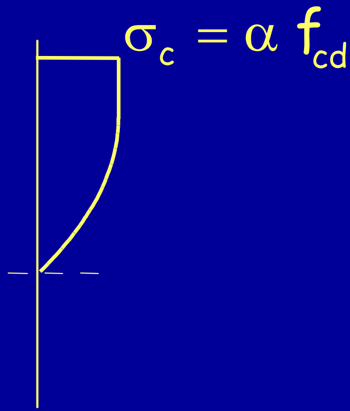


si assegna un diagramma

di ε



di σ



si calcolano
M ed N

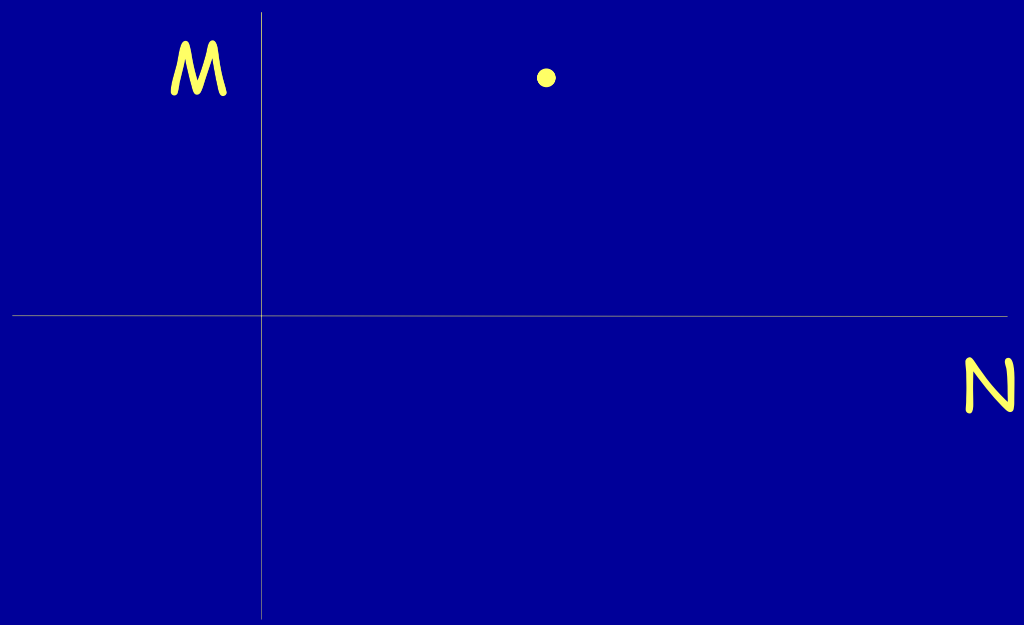
$$N = \int \sigma \, dA$$

$$M = -\int \sigma \, y \, dA$$

Domini di resistenza – stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ε_{max} è uguale a $\bar{\varepsilon}_{cu}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano M ed N

$$N = \int \sigma \, dA$$

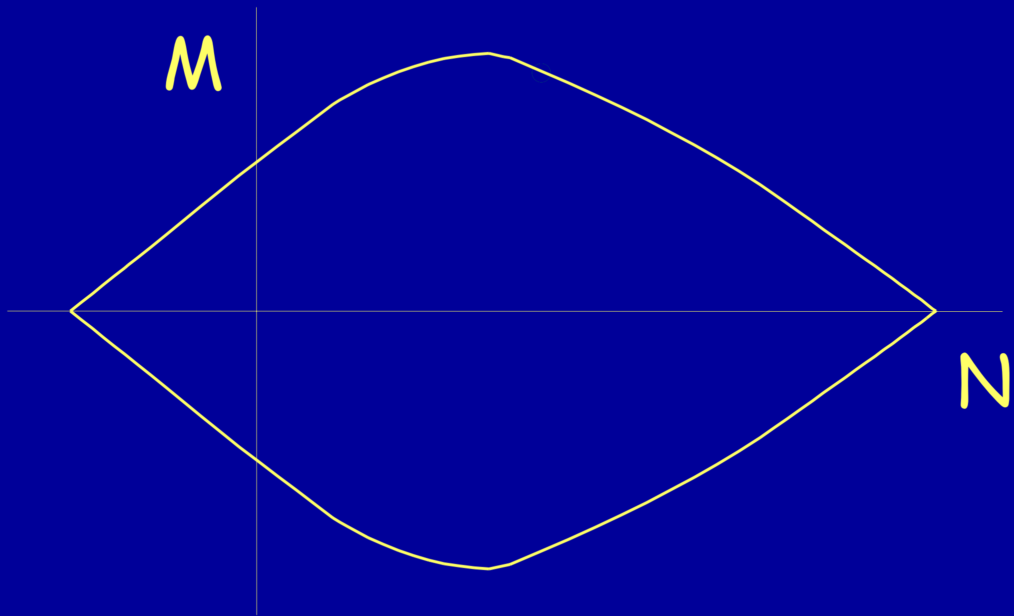
$$M = -\int \sigma \, y \, dA$$

e si riporta la coppia M – N nel diagramma

Domini di resistenza – stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ε_{max} è uguale a $\bar{\varepsilon}_{cu}$

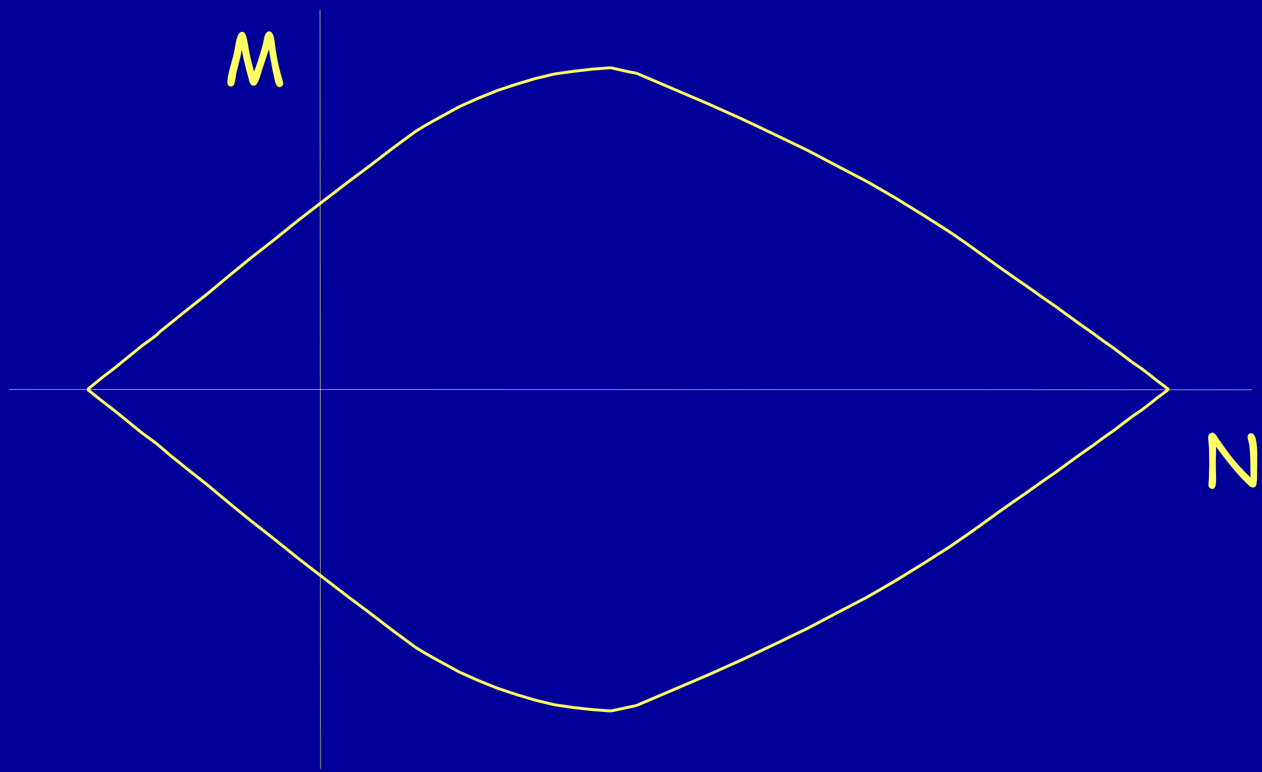
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi …



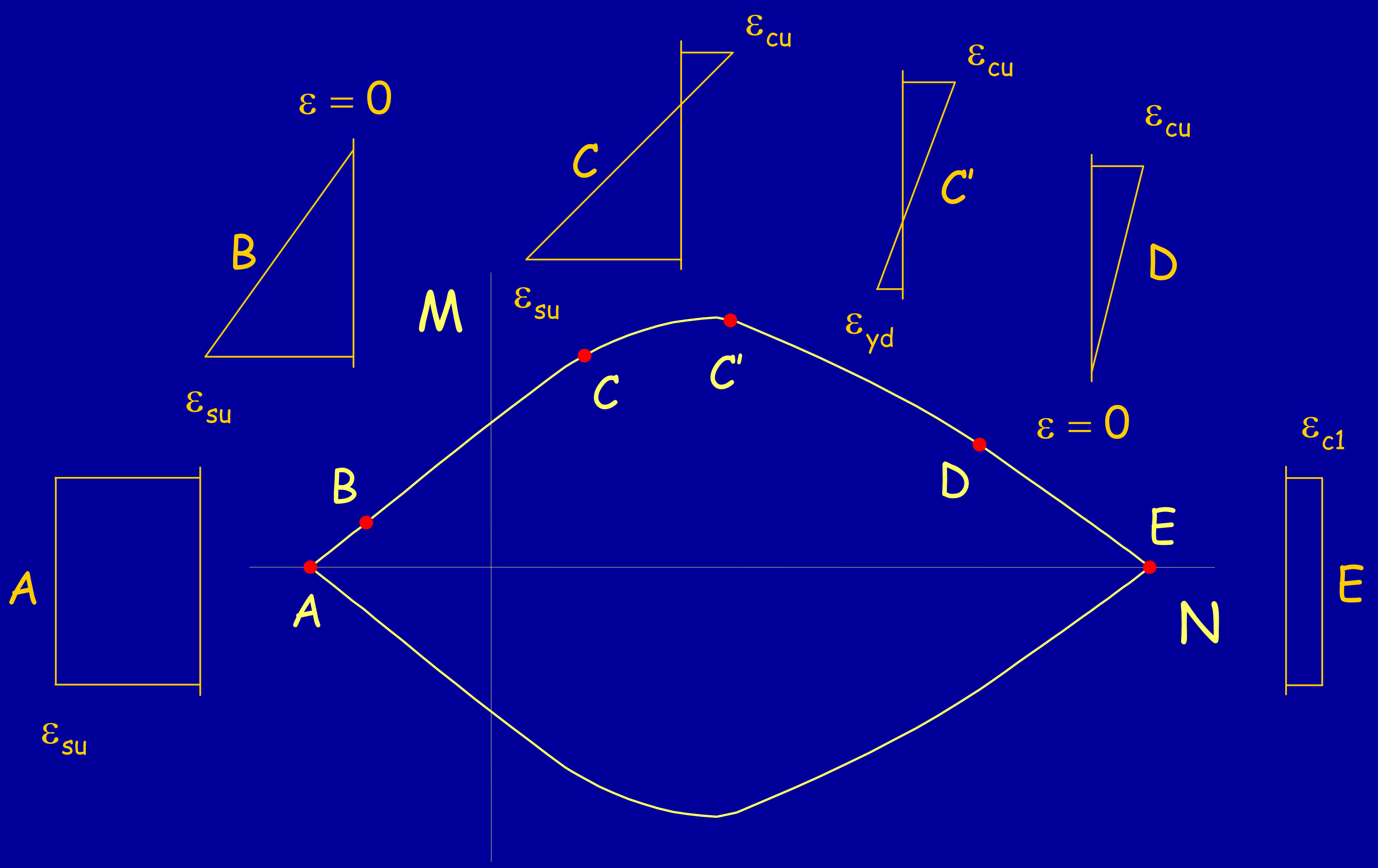
si ottiene il dominio completo

Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni

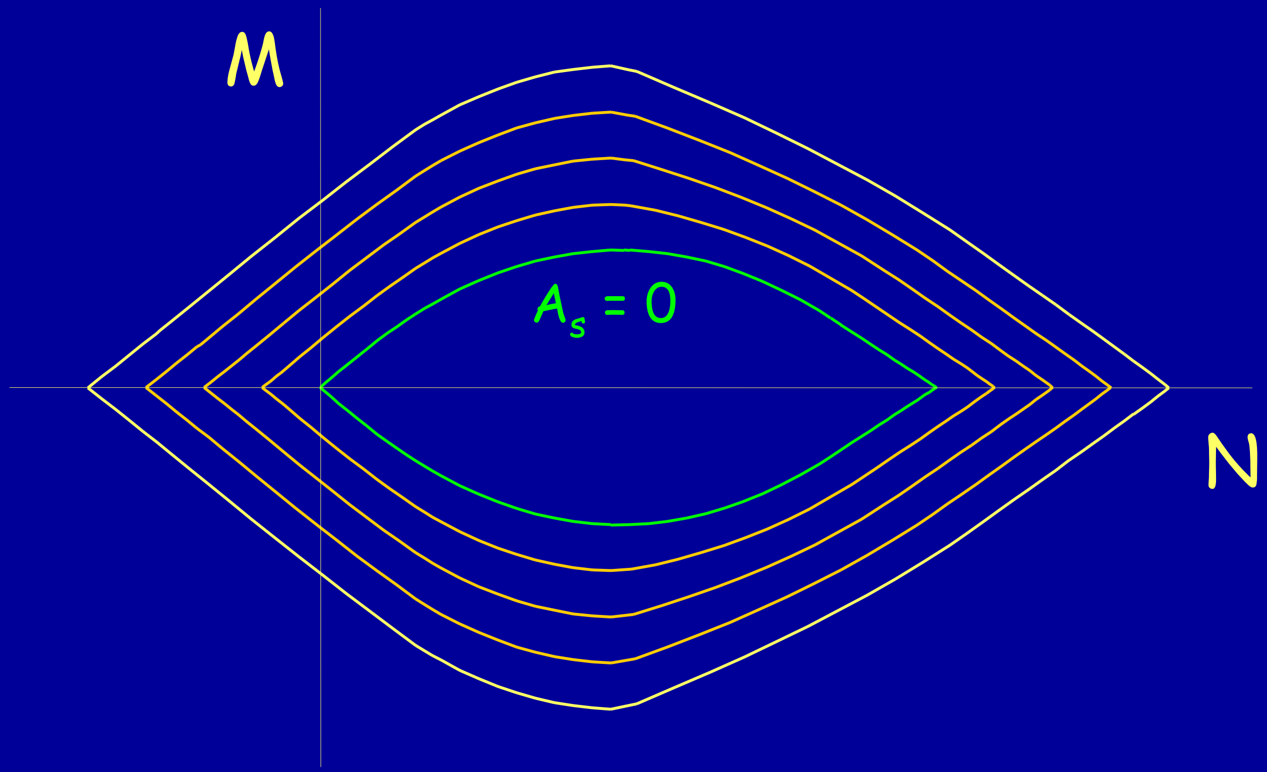


Domini di resistenza - stato limite ultimo



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

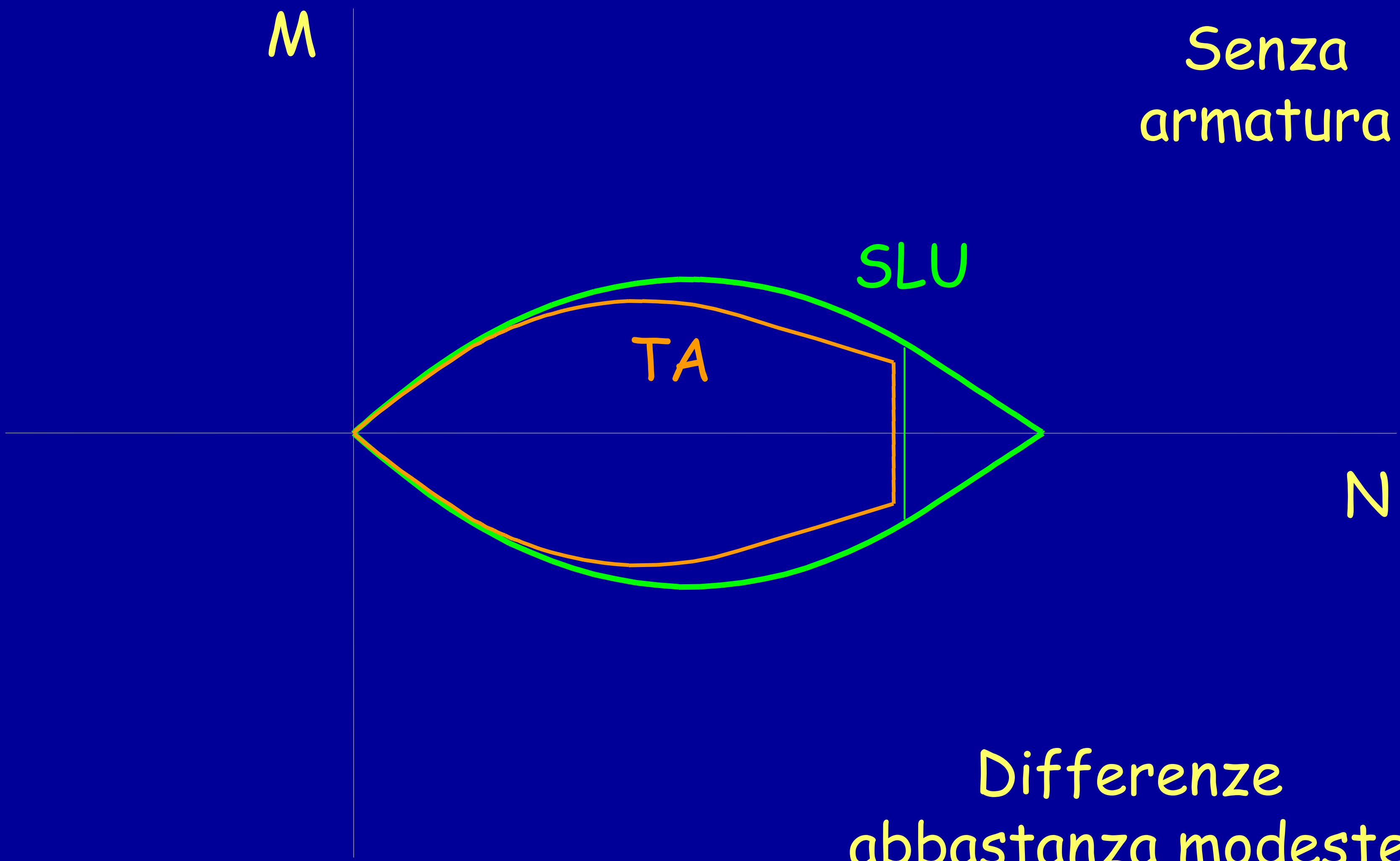


Domini: confronto tra TA e SLU

Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (di 1.4 ÷ 1.5) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio x 1,45)

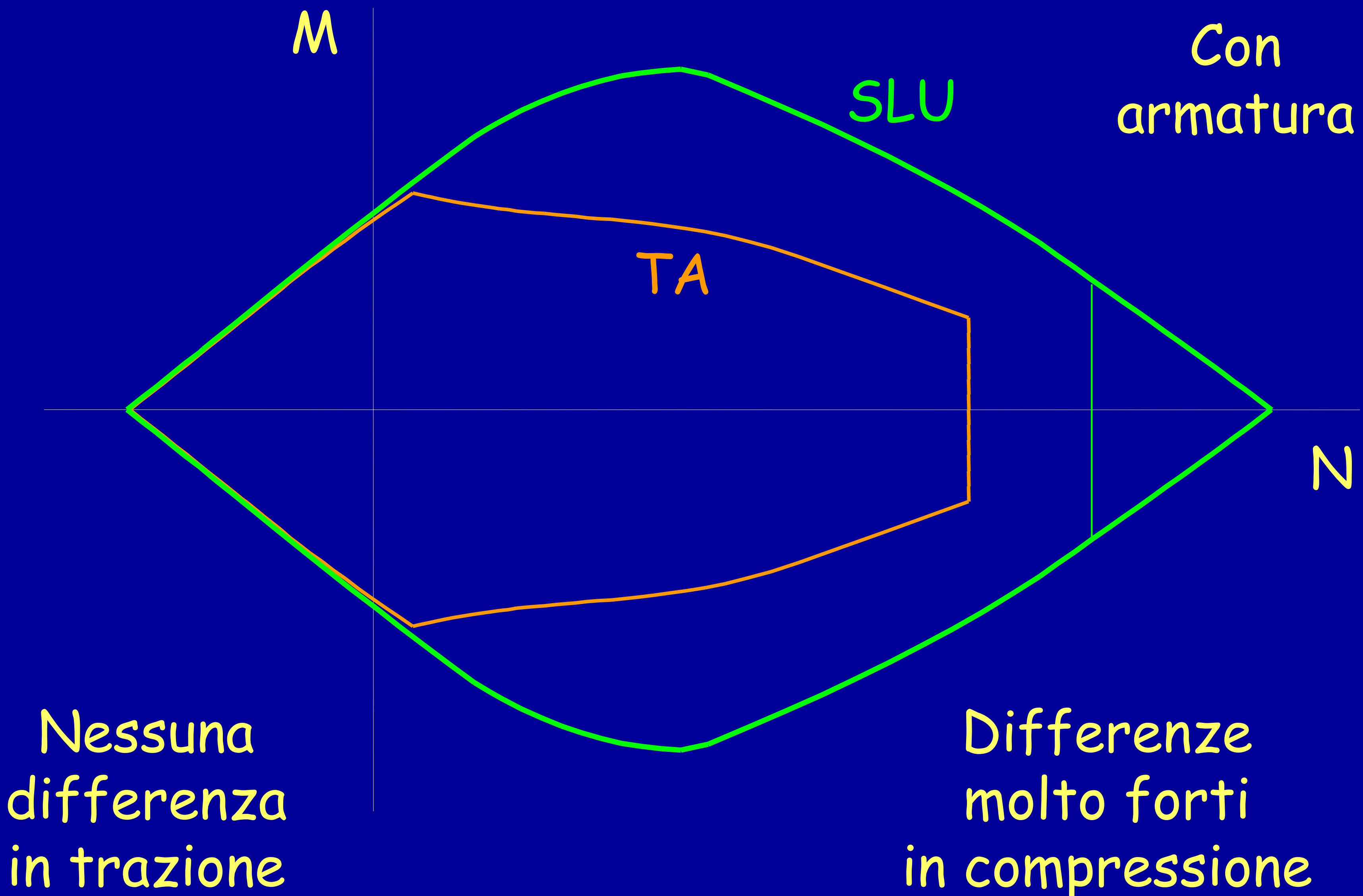
Domini: confronto tra TA e SLU



Senza armatura

Differenze abbastanza modeste

Domini: confronto tra TA e SLU

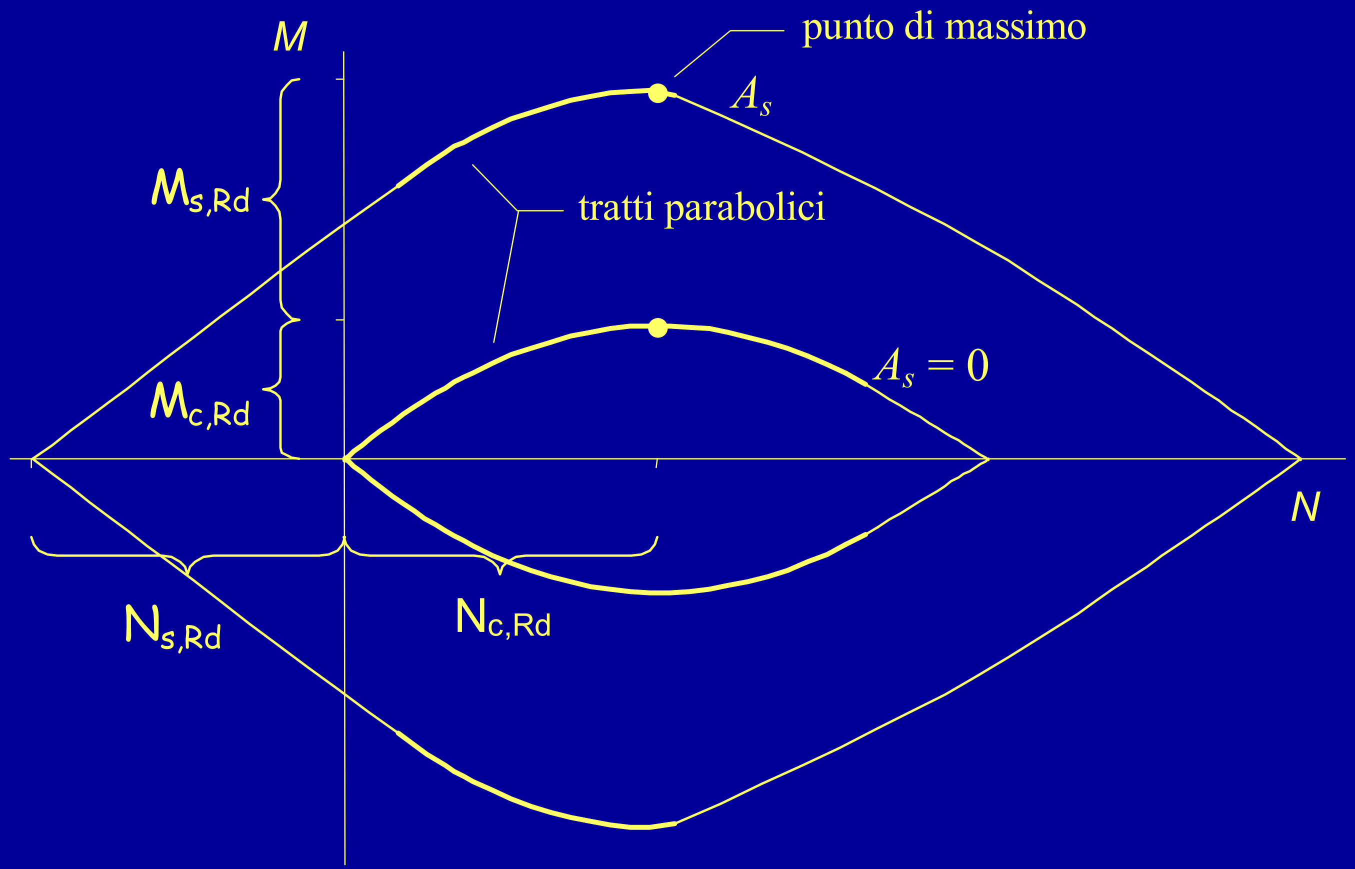


Progetto e verifica allo SLU con i domini M-N

(sezioni rettangolari, $A_s = A'_s$)

Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



Dominio M-N allo SLU

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$M = \beta\, b\, x\, \alpha\, f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa\, x \right) + 2\, A_s\, f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\, b\, \alpha\, f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2\, \kappa\, x \right) = 0 \qquad\qquad x = \frac{h}{4\, \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60\, h$$

Il punto di massimo è individuato da

$$N = N_{cRd} \qquad\qquad M = M_{cRd} + M_{sRd}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376}\, b\, h^2\, \alpha\, f_{cd}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594}\, b\, h\, \alpha\, f_{cd}$$

$$M_{s,Rd} = A_s\, (h - 2\, c)\, f_{yd}$$

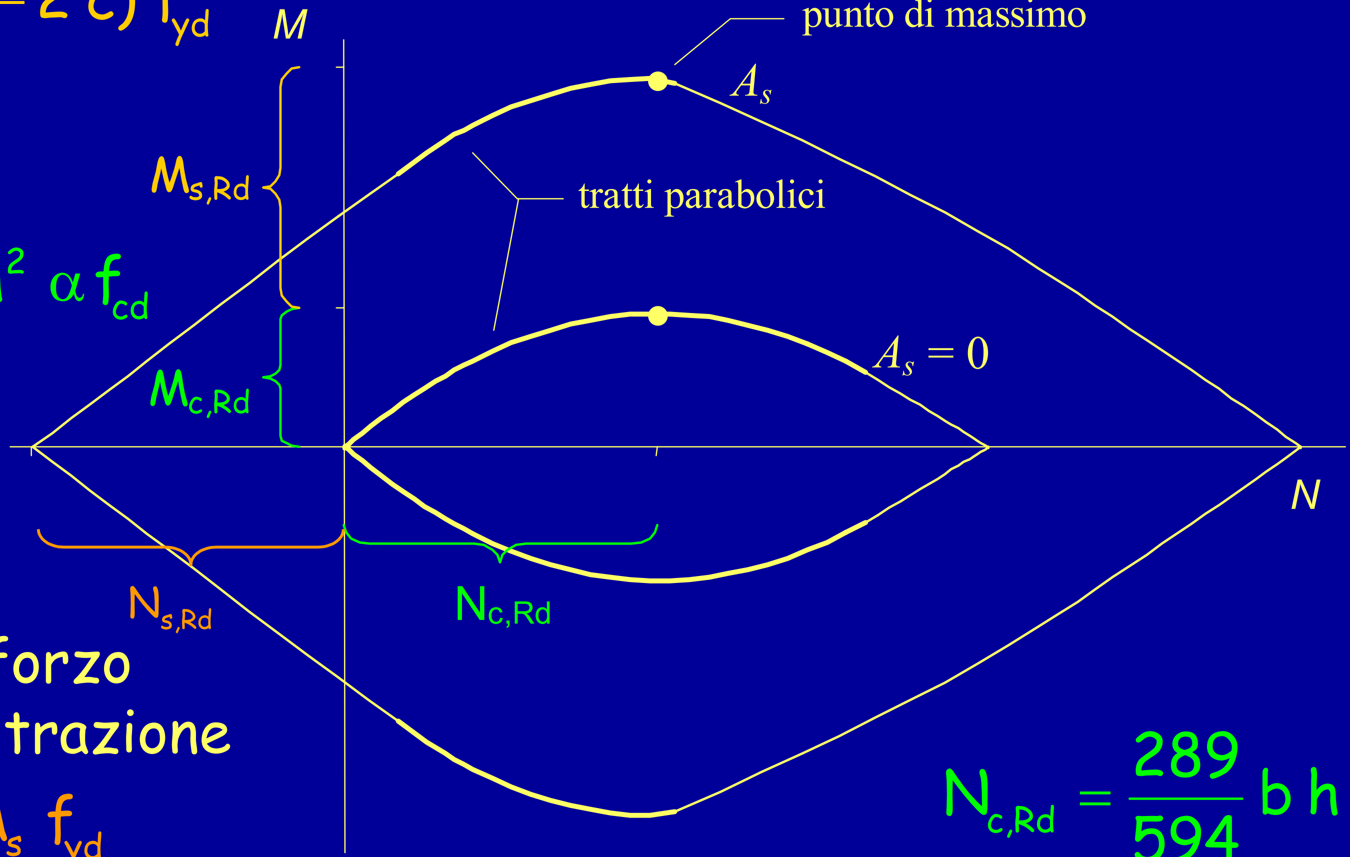
Dominio M-N allo SLU

$M_{s,Rd} =$

$= A_s\,(h - 2\,c)\,f_{yd}$

$M_{c,Rd} =$

$$= \frac{289}{2376}\,b\,h^2\,\alpha\,f_{cd}$$



Massimo sforzo normale di trazione

$N_{s,Rd} = 2\,A_s\,f_{yd}$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594}\,b\,h\,\alpha\,f_{cd}$$

Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594}\, b\, h\, \alpha\, f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2\, A_s\, f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376}\, b\, h^2\, \alpha\, f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s\, (h - 2\, c)\, f_{yd}$

Formulazione analitica

Momento resistente:

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd})\left[1 - \left|\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}\right|^{m}\right]$$

con $$m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$$

Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^{m} \leq 1$$

con $\quad m = 1 + \dfrac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

Formule alternative

- per $N_{Sd} < 0$ (tensoflessione)

$$\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1$$

- per $0 < N_{Sd} < N_{c,Rd}$

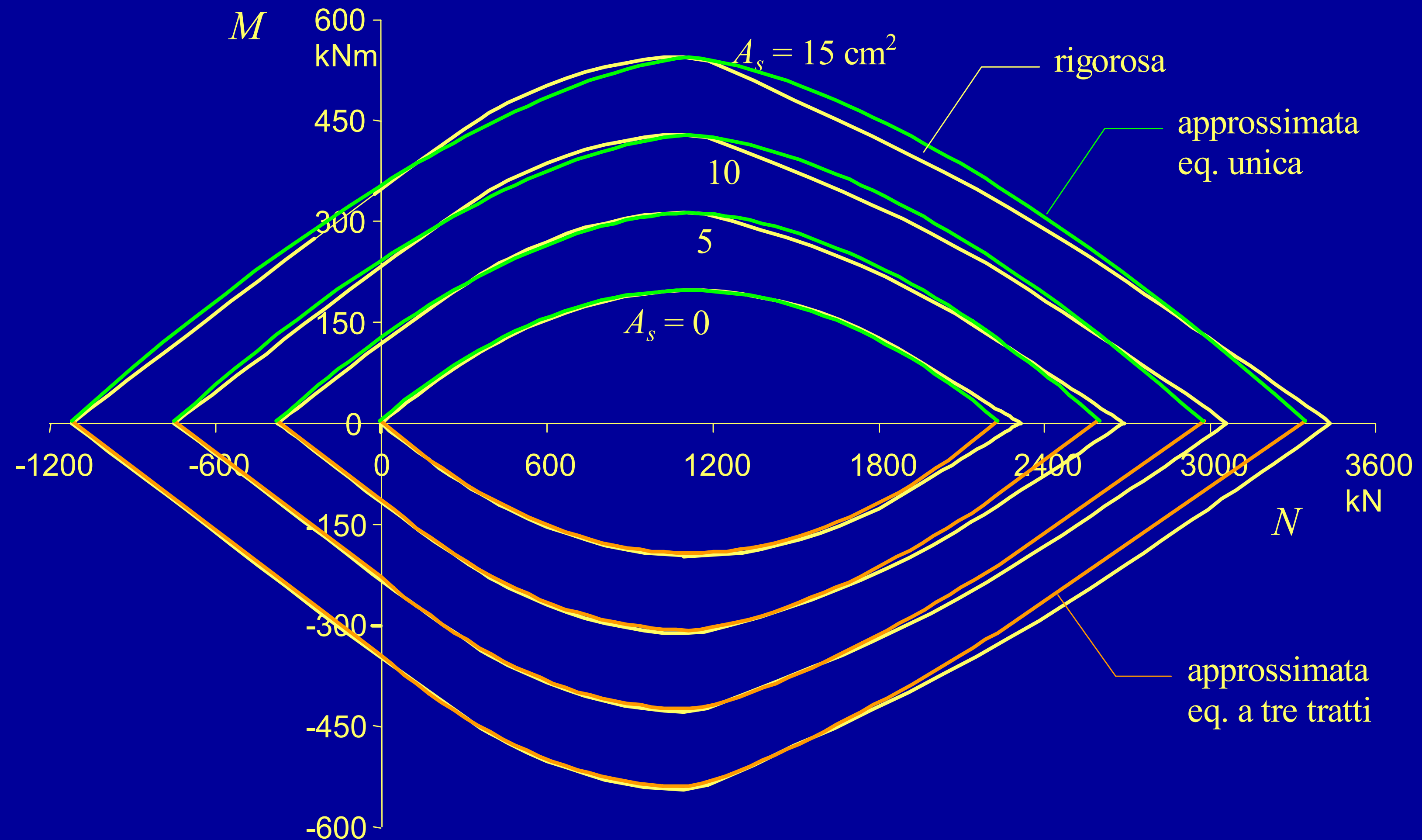
$$\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$$

- per $N_{Sd} > N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1$$

con $\quad n = 1 + \left(\dfrac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$

Confronto



M
600
kNm
450
300
150
0
-150
-300
-450
-600
$A_s = 15$ cm^2
10
5
$A_s = 0$
rigorosa
approssimata
eq. unica
approssimata
eq. a tre tratti
-1200
-600
0
600
1200
1800
2400
3000
3600
kN
N

Esempio – verifica a pressoflessione

Dati geometrici

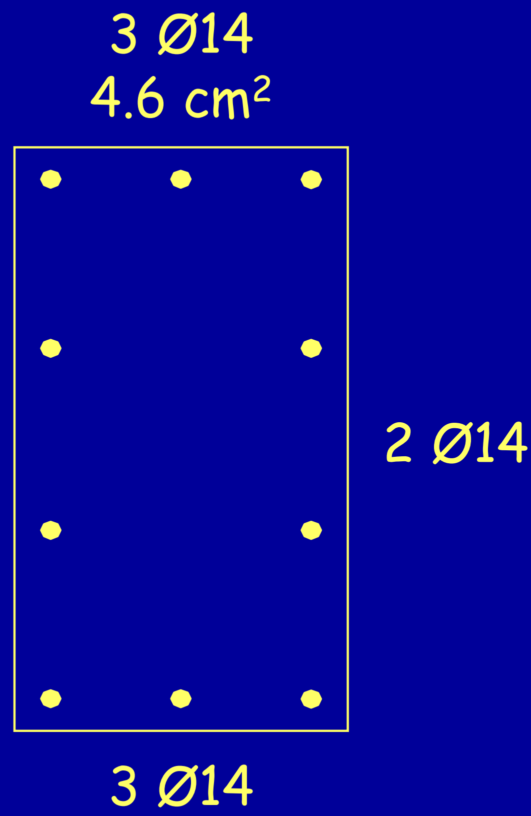
Sezione 40x70
$A_s = A'_s = 3$ Ø14

Materiale

Calcestruzzo R_{ck}=25 MPa
Acciaio FeB44k

Sollecitazioni

N_{sd} = 1300 kN
M_{sd} = 350 kNm



Esempio – verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594}\, b\, h\, \alpha\, f_{cd} = 0.486 \times 0.40 \times 0.70 \times 11.0 \times 10^{3}$$

$$N_{c,Rd} = 1497 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376}\, b\, h^{2}\, \alpha\, f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^{2} \times 11.0 \times 10^{3}$$

$$M_{c,Rd} = 262.2 \text{ kNm}$$

Esempio – verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,Rd} = 2\,A_s\,f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,Rd} = 345.5\ \text{kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s\left(h - 2c\right)f_{yd} = 4.62 \times \left(0.70 - 2 \times 0.04\right) \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,Rd} = 107.1\ \text{kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} = 1 + \frac{1497}{1497 + 355.5} = 1.808$$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd})\left[1 - \left|\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}\right|^{m}\right] =$$

$$= (262.2 + 107.1)\left[1 - \left|\frac{1300 - 1497}{1497 + 355.5}\right|^{1.808}\right] =$$

$$= 362.9 \text{ kNm}$$

$M_{Sd} < M_{Rd}$ Sezione verificata

Esempio – verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.808$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^{m} \leq 1$$

$$\frac{350}{262.2 + 107.1} + \left| \frac{1300 - 1497}{1497 + 355.5} \right|^{1.808} =$$

$$= 0.948 + 0.017 = 0.965 \leq 1$$

Sezione verificata

Progetto della sezione

Le espressioni possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione

$$d = r\sqrt{\frac{M}{b}}$$

Il coefficiente r è in questo caso dipendente da:

- sforzo normale adimensionalizzato $\nu = N_{Sd} / 2\, N_{c,Rd}$
- percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre $\rho = A_s / b\, h$
- caratteristiche dei materiali

Valori di r

ν	ρ=0	ρ=0.002	ρ=0.004	ρ=0.006	ρ=0.008	ρ=0.010
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.1	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.2	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.3	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.4	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
0.5	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
0.6	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
0.7	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
0.8	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
0.9	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
1.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd}\left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}}\right)^2\right]$$

L'armatura necessaria è quindi $$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z\, f_{yd}}$$

z è il braccio della coppia interna costituita dalle armature $$z = h - 2\,c \cong 0.9\,d$$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per $0 \le N_{Sd} \le N_{c,Rd}$

Esempio – progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

$A_s = A'_s = 3\ Ø14$

Sollecitazioni

$N_{sd} = 1300$ kN

$M_{sd} = 350$ kNm

$$M_{Sd,red} = 350 - 262.2\left[1 - \left(\frac{1300 - 1497}{1497}\right)^2\right] = 92.3\ \text{kNm}$$

Armatura necessaria:

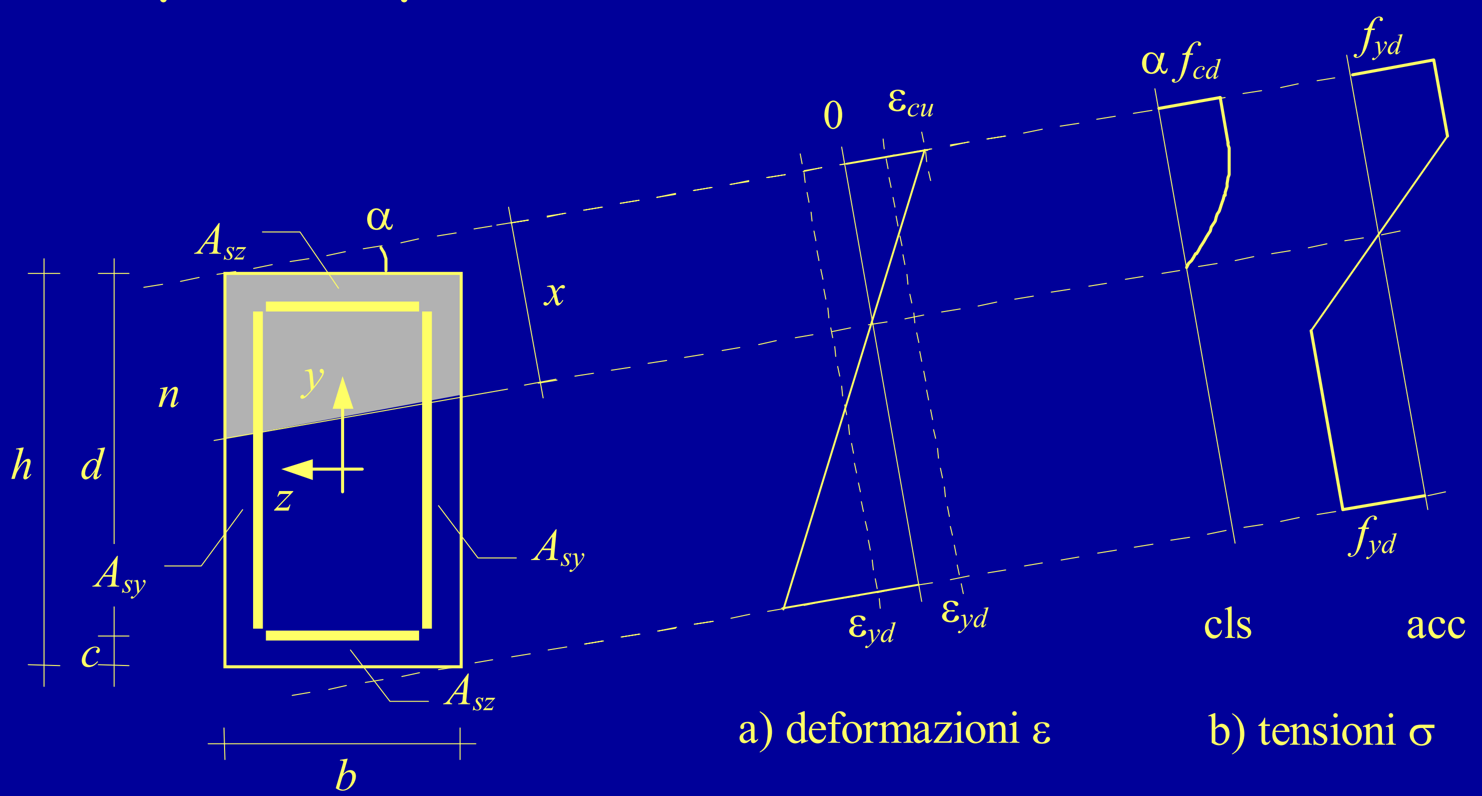
$$A_s = \frac{92.3}{0.9 \times 0.66 \times 373.9} \times 10 = 4.2\ \text{cm}^2$$

Domini M-N
per flessione composta deviata

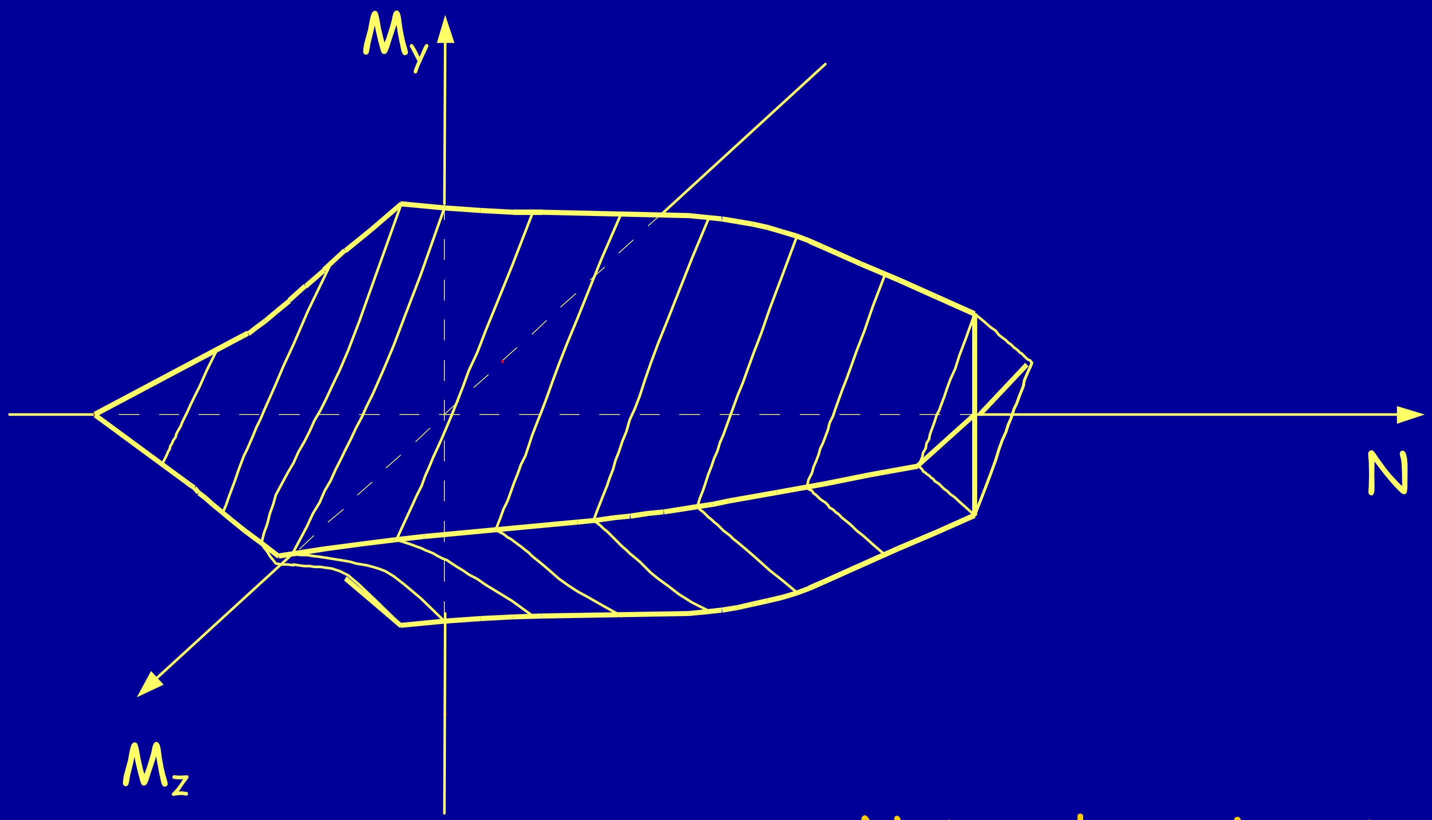
Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y-M_z-N

- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro



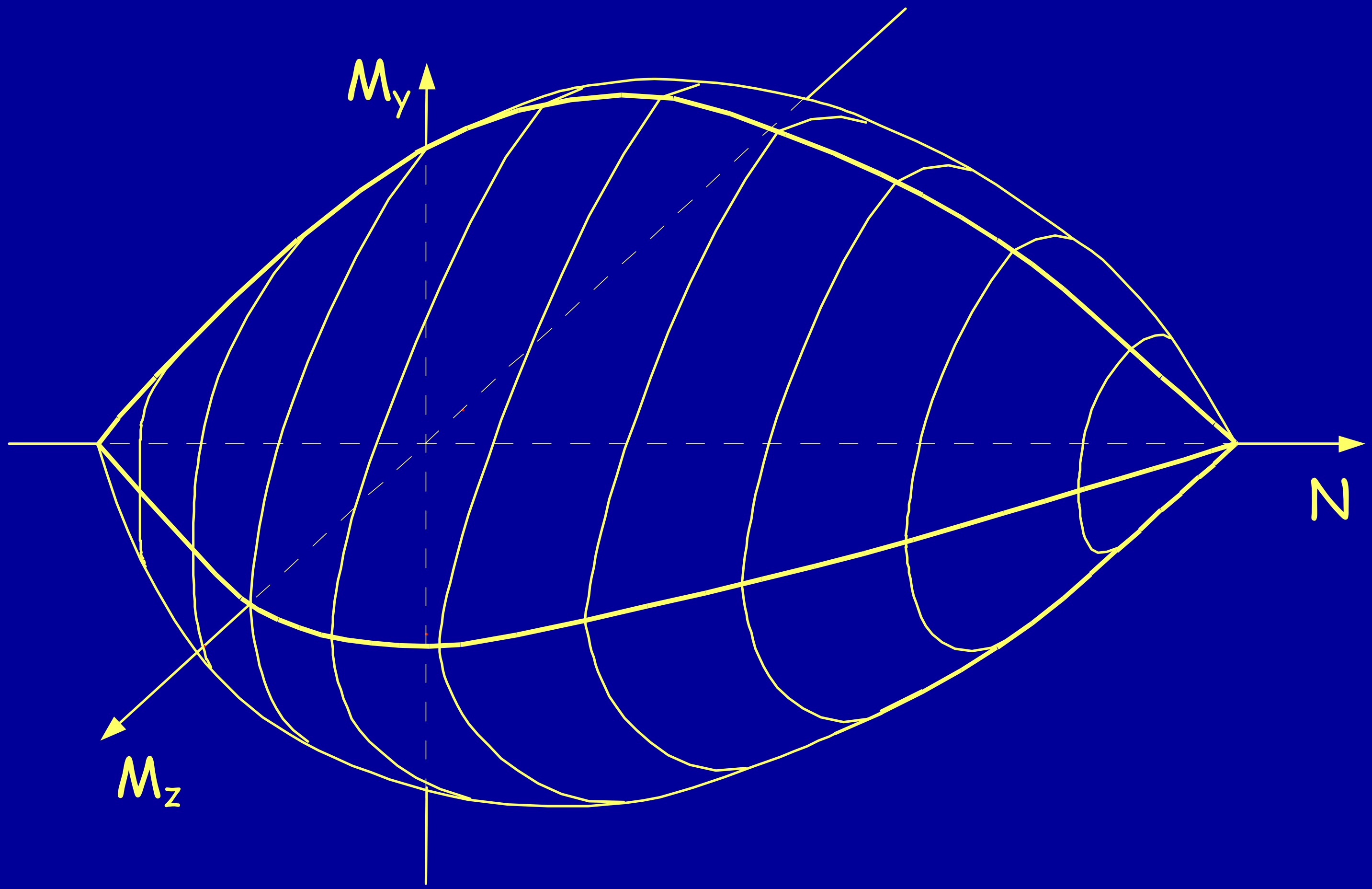
Dominio alle TA



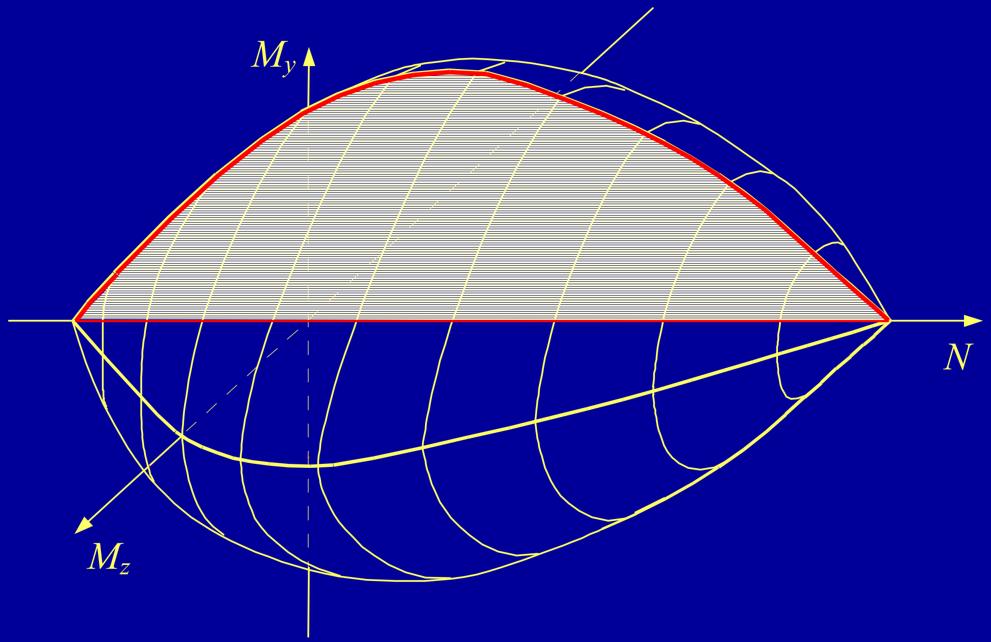
Notare la sezione trasversale:

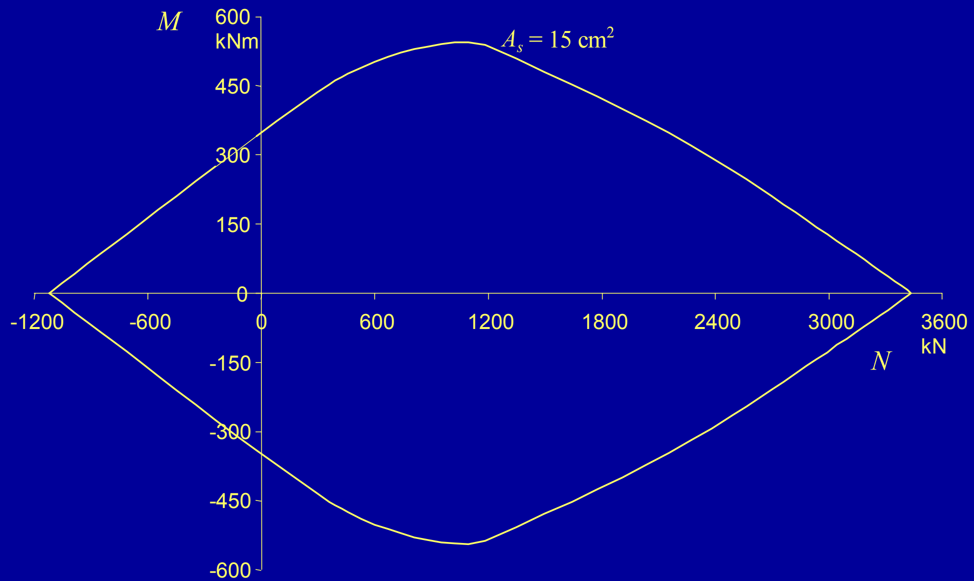
la presenza contemporanea di M_y e M_z è molto penalizzante

Dominio allo SLU

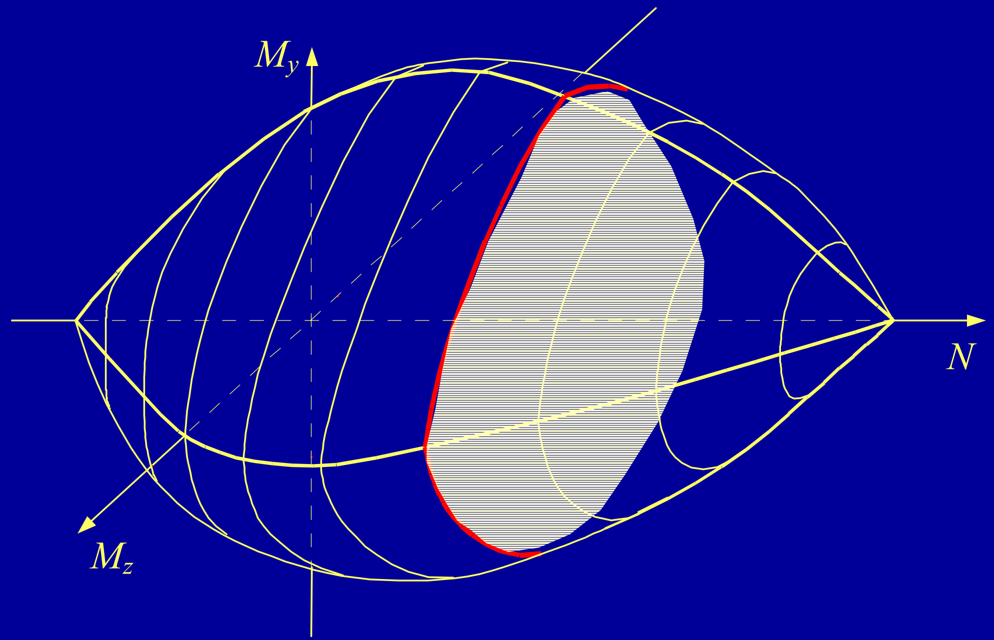


Dominio allo SLU





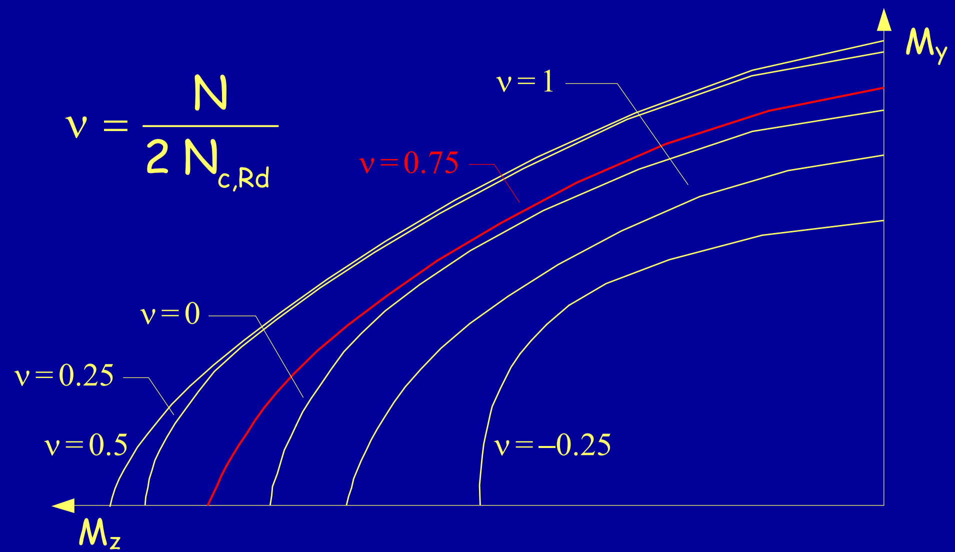
Dominio allo SLU



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}}\right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}}\right)^q = 1$$

Consiglio:
usare p = q = 1.5

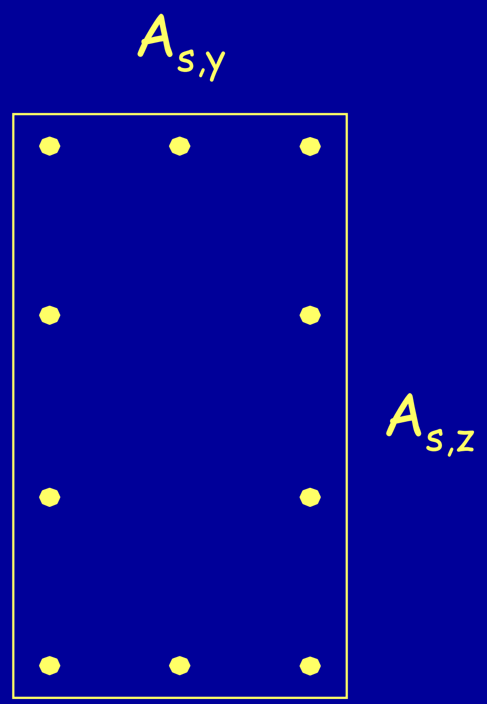
$$\nu = \frac{N}{2\,N_{c,Rd}}$$



Considerazioni

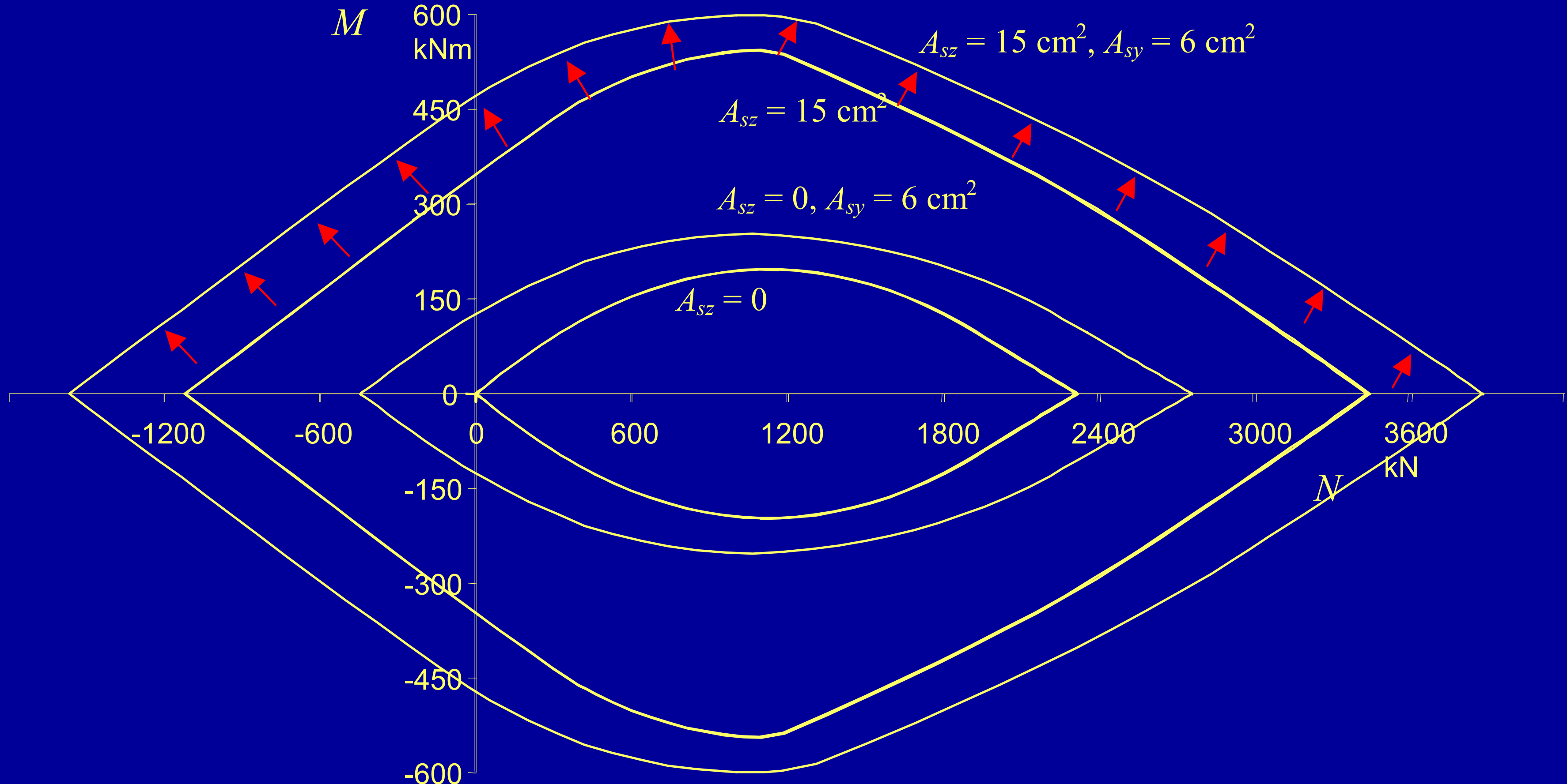
Nel calcolare il momento resistente $M_{Rd,y}$ si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



Considerazioni

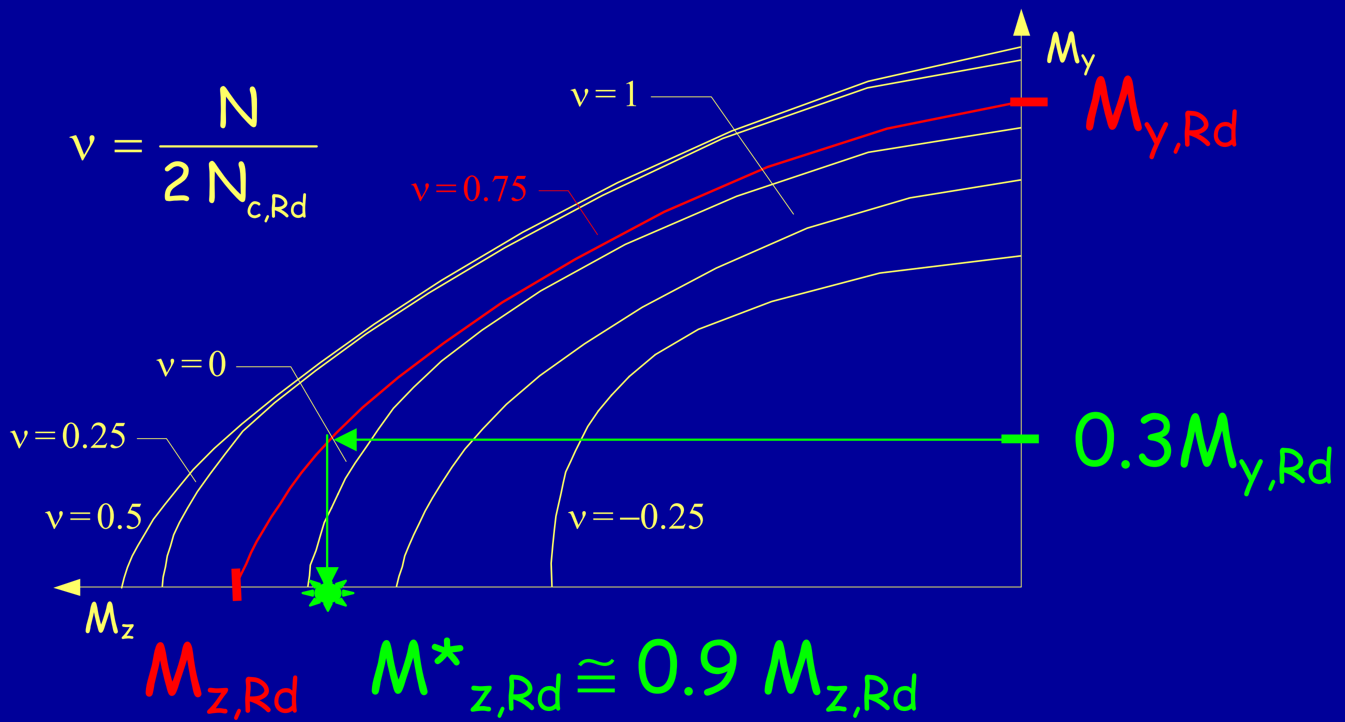
Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd})\left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}}\right)^{m}\right]$$

con $$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}}\right)$$

Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni,

e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata

FINE

Parzialmente tratto dalla presentazione
Cemento armato – 4 (MN)

Bibliografia:

A.Ghersi, M.Muratore
Verifica e progetto allo stato limite ultimo di pilastri in c.a. a sezione rettangolare: un metodo semplificato

Per questa presentazione:

coordinamento	A. Ghersi
realizzazione	A. Ghersi
ultimo aggiornamento	10/05/2004