

Sezioni in c.a. La flessione semplice

Teramo, 27-28 febbraio 2004

Marco Muratore

Sezioni in c.a. La flessione semplice

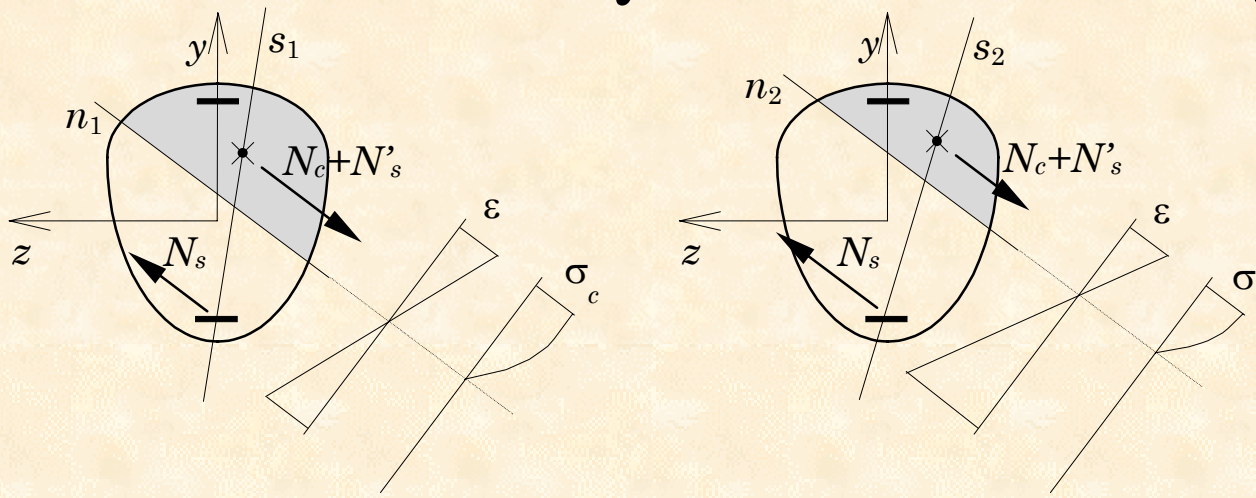
ARGOMENTI

1. Verifica di sezioni inflesse
2. Progetto di sezioni inflesse
3. Considerazioni sulla duttilità
4. Differenze tra T.A. e S.L.U.

Verifica allo S.L.U. di sezione rettangolare

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

$$N = \int \sigma \, dA \qquad M_y = \int \sigma \, z \, dA \qquad M_z = -\int \sigma \, y \, dA$$



Verifica allo S.L.U. di sezione rettangolare

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

$$\cancel{N = \int \sigma dA}$$

Flessione
semplice retta

+

$$\cancel{M_y = \int \sigma z dA}$$

Flessione
composta retta

$$M_z = -\int \sigma y dA$$

Verifica a flessione di sezione rettangolare - Equilibrio

Dati noti:

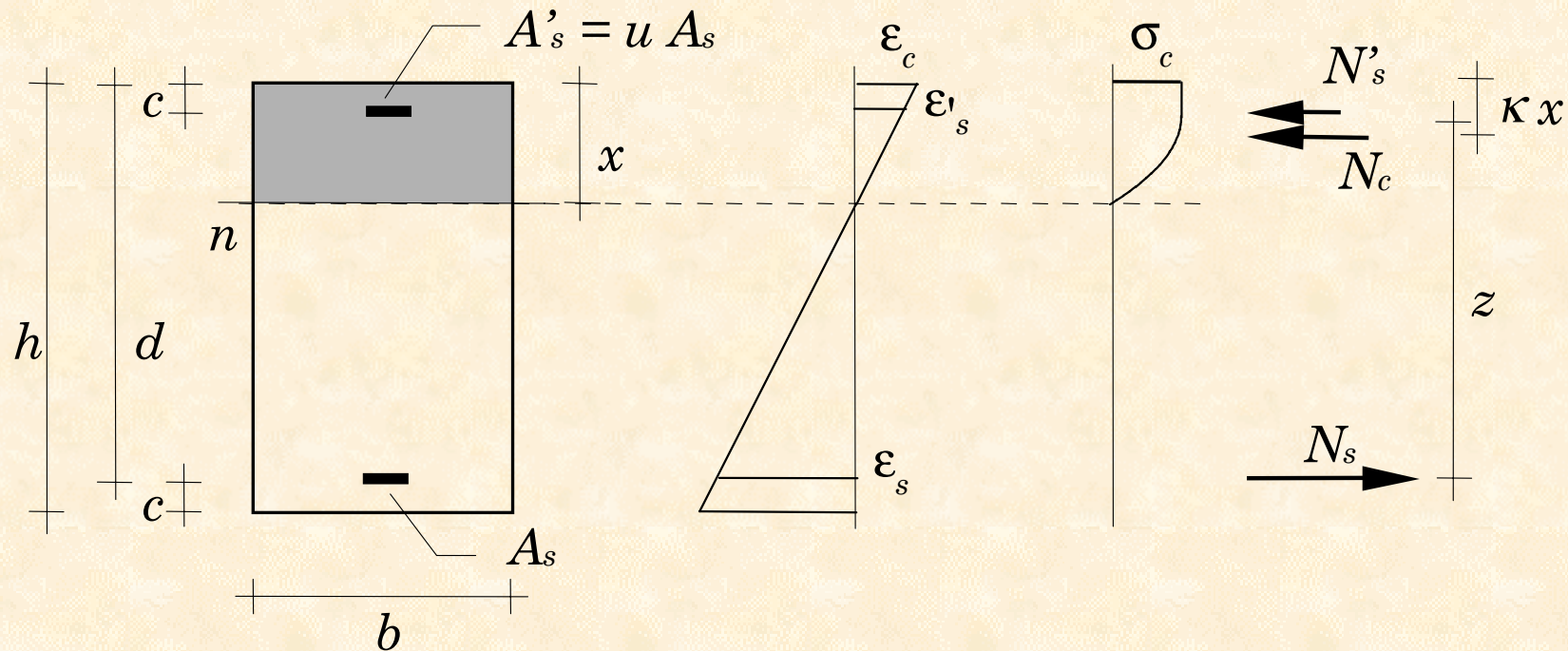
- Geometria della sezione
- Armature

Incognite

- Diagramma di deformazione
- Momento resistente

Equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$



Verifica a flessione di sezione
rettangolare - Equilibrio

Alle Tensioni Ammissibili?

Verifica a flessione di sezione rettangolare - Equilibrio

Dati

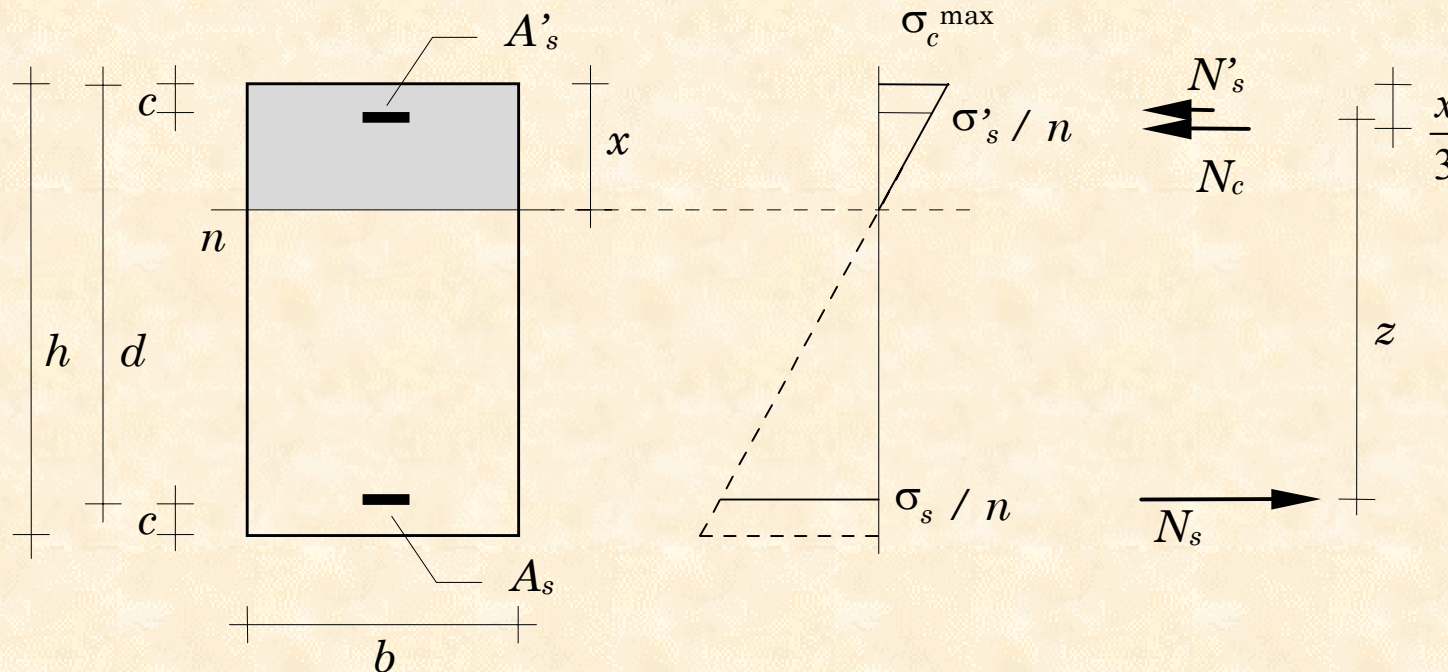
- Geometria della sezione
- Armature

Incognite

- Diagramma di tensione
- Momento resistente

Equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

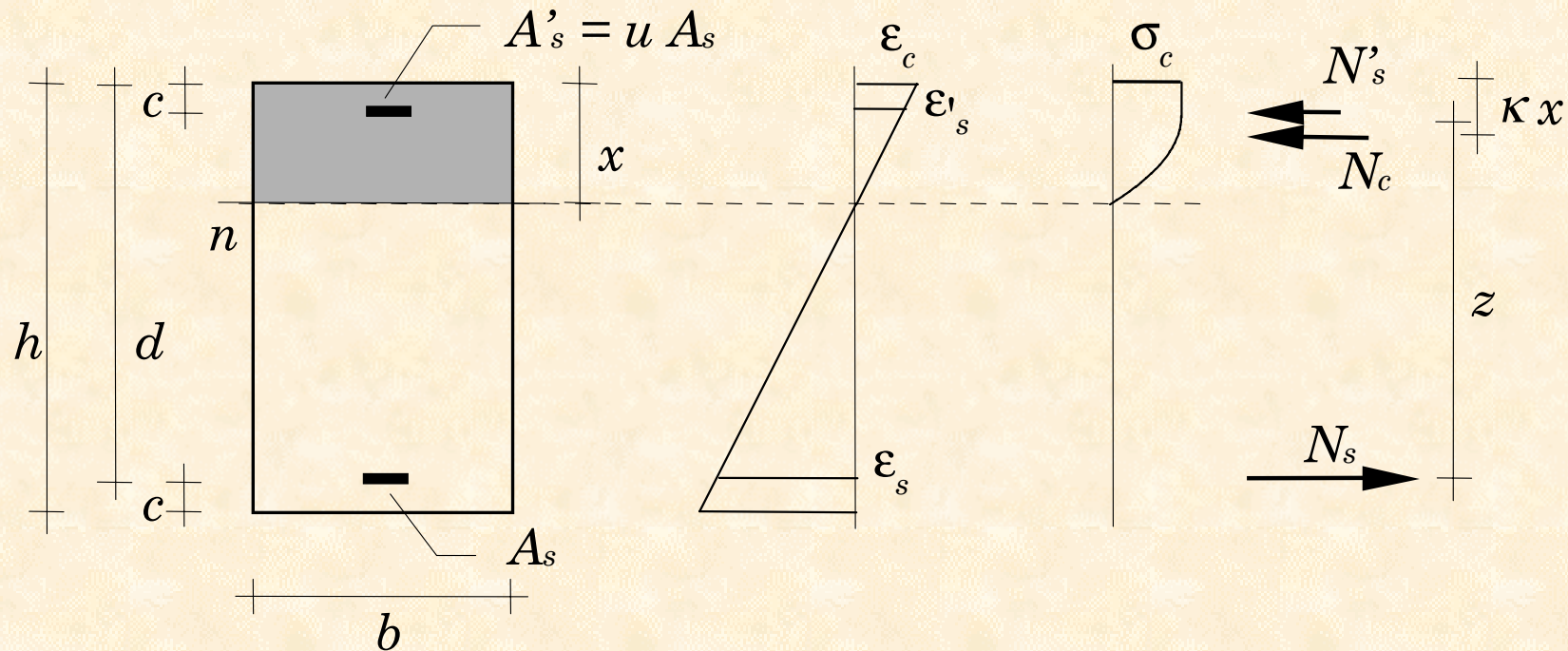


Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo Cls

1) Contributo del calcestruzzo compresso

la parte compressa ha un'area $b x$ e la risultante delle tensioni di compressione vale

$$N_c = -\alpha f_{cd} b x \beta$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo Cls

1) Contributo del calcestruzzo compresso

Il coefficiente di riempimento β dipende dal diagramma di deformazione.

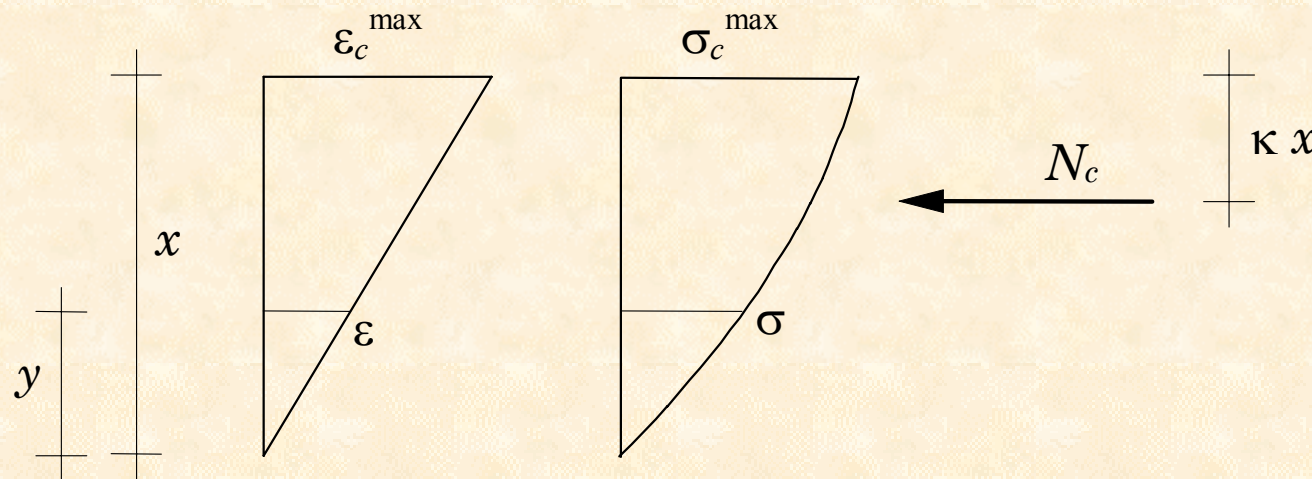
Se la deformazione massima nel cls è inferiore a ε_{c1}

In particolare per $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$

$$\beta = \eta_{\max} \left(1 - \frac{1}{3} \eta_{\max} \right) \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

$$\eta_{\max} = 1.00$$

$$\beta = 0.666$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo Cls

1) Contributo del calcestruzzo compresso

Il coefficiente di riempimento β dipende dal diagramma di deformazione.

Se la deformazione massima nel cls è superiore a ε_{c1}

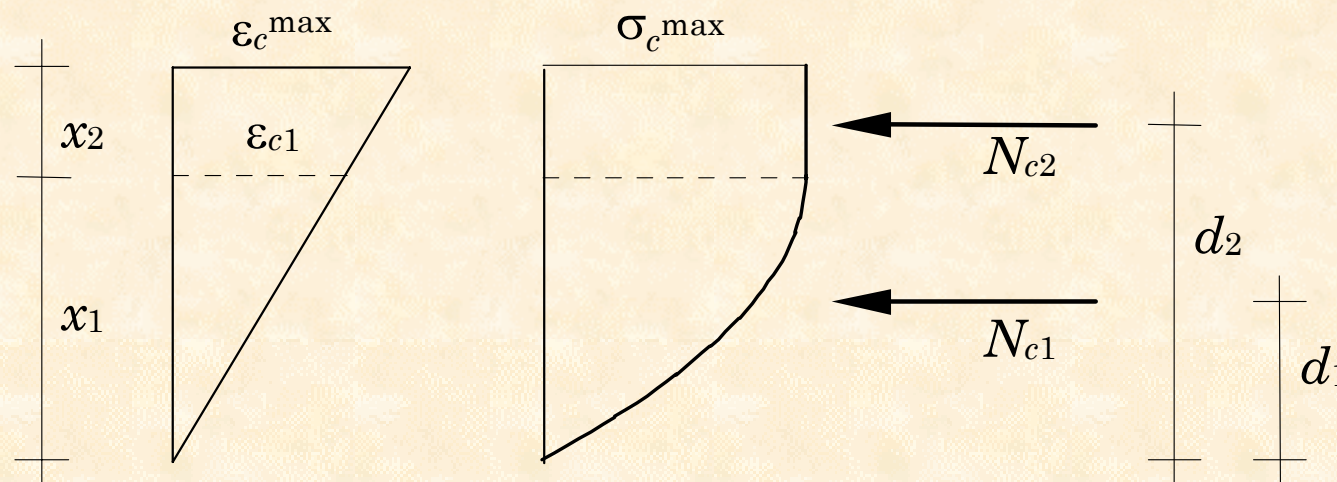
In particolare per $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$

$$\eta_{\max} = 1.75$$

$$\beta = 0.810$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{3 \eta_{\max}}$$

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$



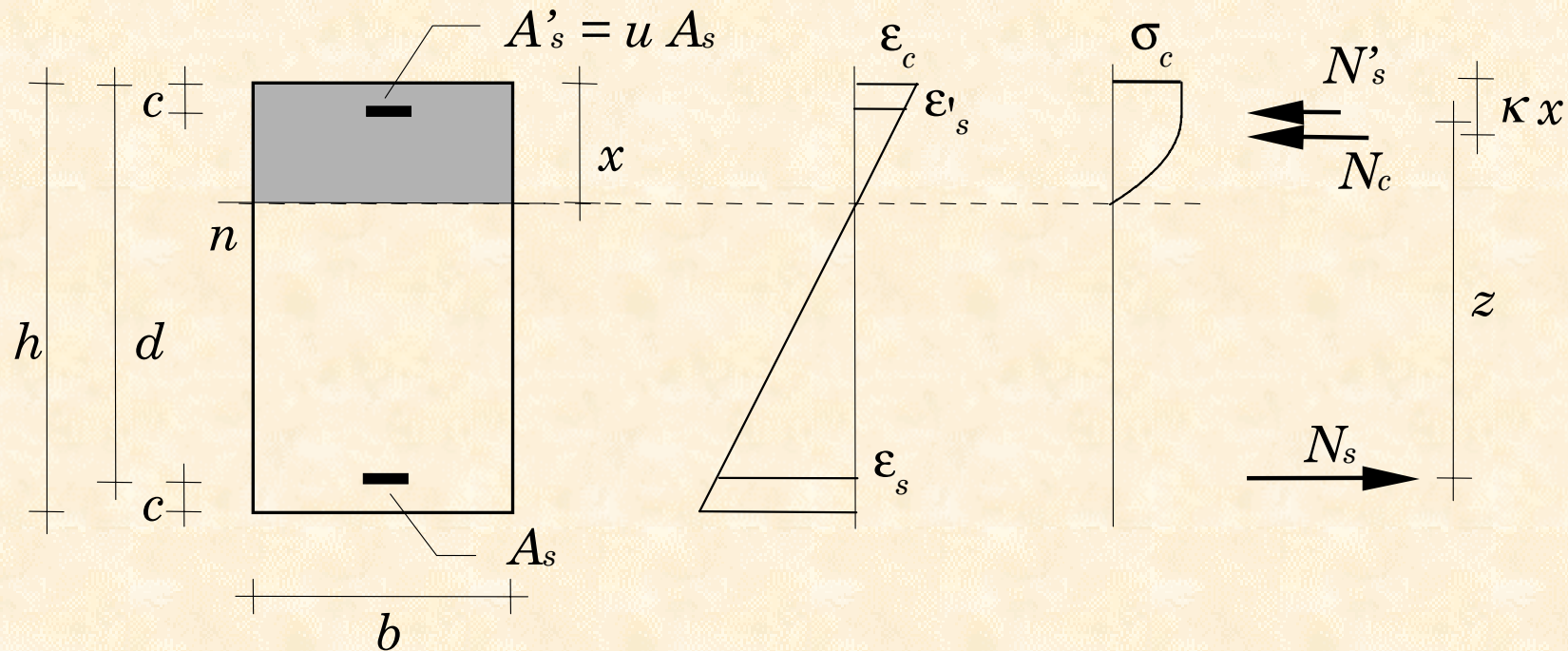
Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo A_s

2) Contributo dell'armatura tesa

In caso di flessione l'armatura tesa è generalmente snervata ($s=1$)

$$N_s = \sigma_s A_s = s A_s f_{yd}$$

$$s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$$

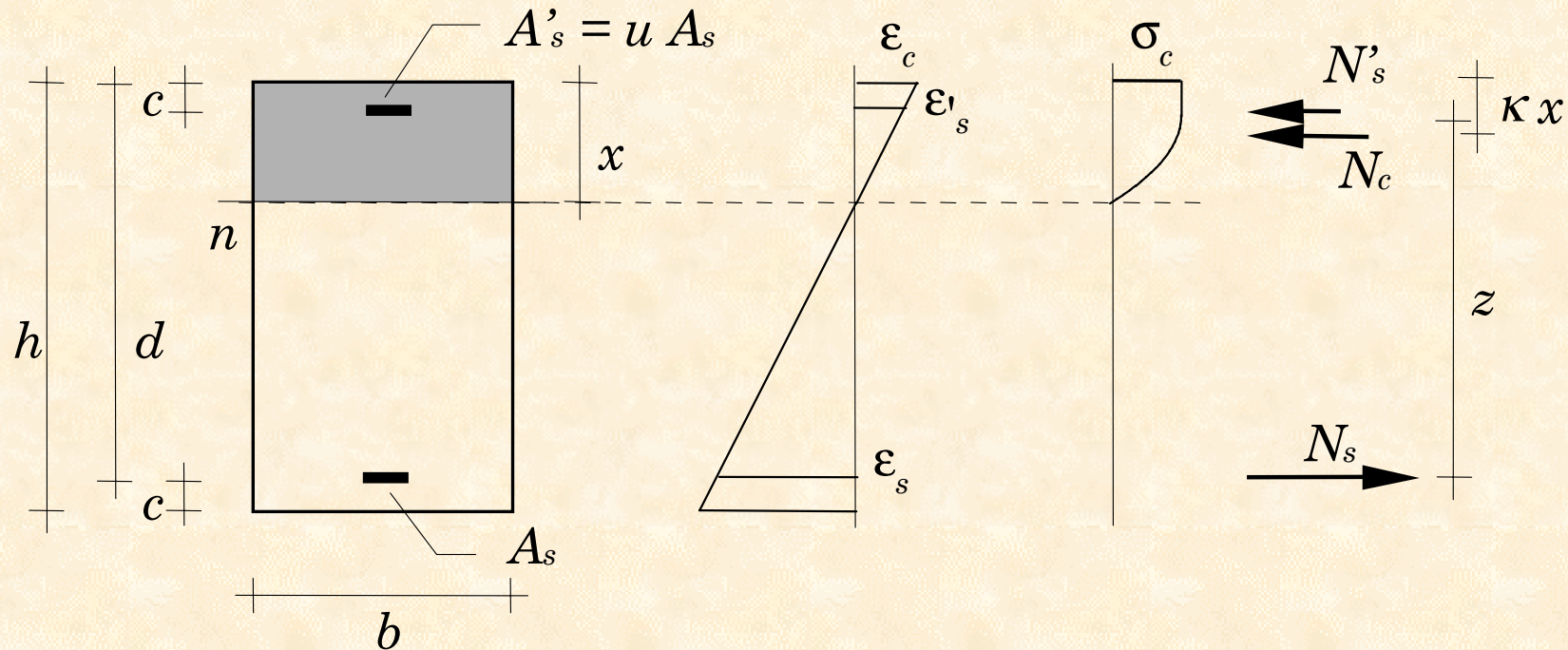


Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo $A's$

3) Contributo dell'armatura compressa

In caso di flessione l'armatura compressa è spesso snervata ($s'=1$); dipende soprattutto da c/d

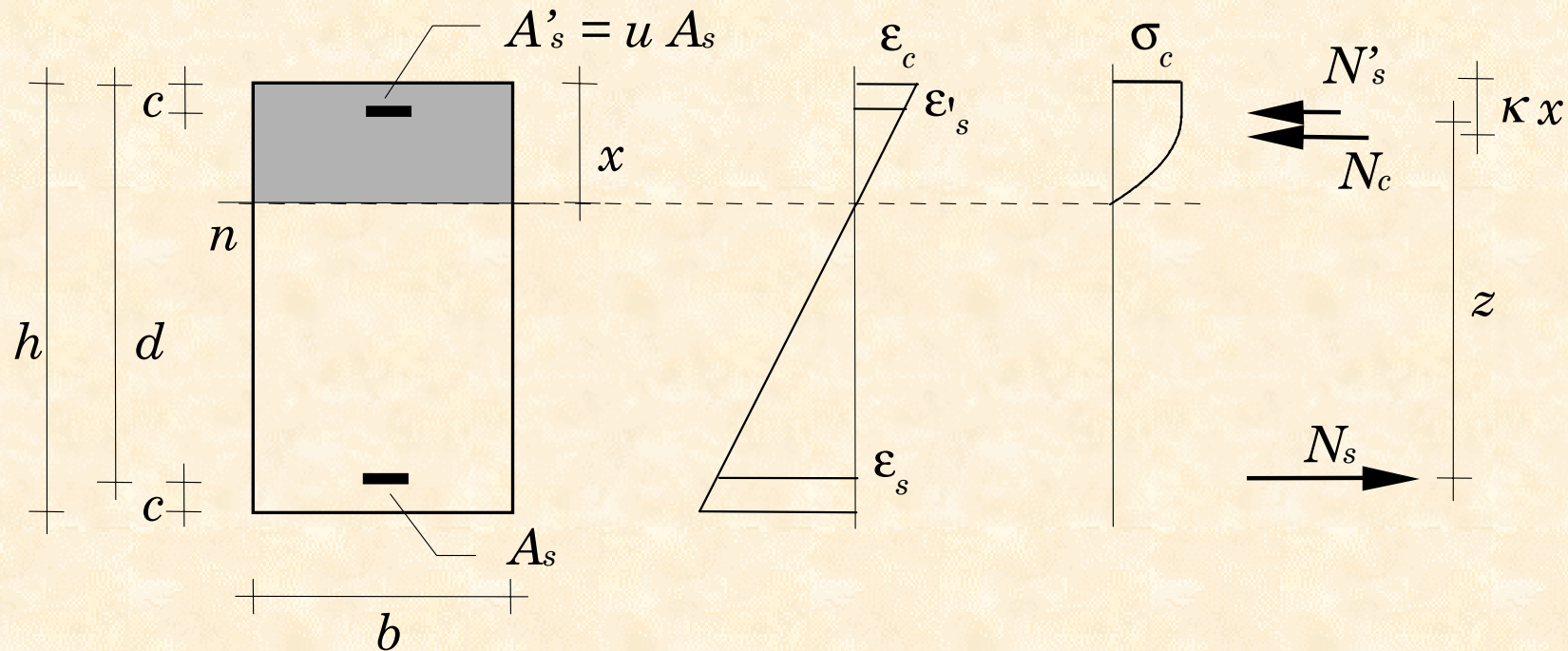
$$N'_s = \sigma'_s A'_s = -s' u A_s f_{yd} \quad s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}}$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Deformazioni

Le tensioni σ_s e σ'_s devono essere ricavate dalle deformazioni ε_s ed ε'_s tenendo conto della legge costitutiva elastica-perfettamente plastica dell'acciaio.

$$\varepsilon_c = \chi x \quad \varepsilon'_s = \chi (x - c) \quad \varepsilon_s = \chi (x - d)$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Deformazioni

Per un'assegnata posizione dell'asse neutro, il diagramma limite comporterà il raggiungimento della deformazione ε_{cu} al bordo compresso oppure di ε_{su} in corrispondenza dell'armatura tesa.

Nel primo caso si ha:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x}$$
$$\varepsilon_s = \frac{x-d}{x} \varepsilon_{cu} = -\frac{1-\xi}{\xi} \varepsilon_{cu}$$
$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{\xi-\gamma}{\xi} \varepsilon_{cu}$$

Nel secondo caso si ha:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{su}}{x-d}$$
$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x-d} \varepsilon_{su} = -\frac{\xi-\gamma}{1-\xi} \varepsilon_{su}$$
$$\varepsilon_c = \frac{x}{x-d} \varepsilon_{su} = -\frac{\xi}{1-\xi} \varepsilon_{su}$$

Le deformazioni $\varepsilon_c, \varepsilon_s, \varepsilon'_s$ sono funzioni di x

Verifica a flessione di sezione rettangolare - Procedura

In generale, quindi, si potrebbe procedere per tentativi:

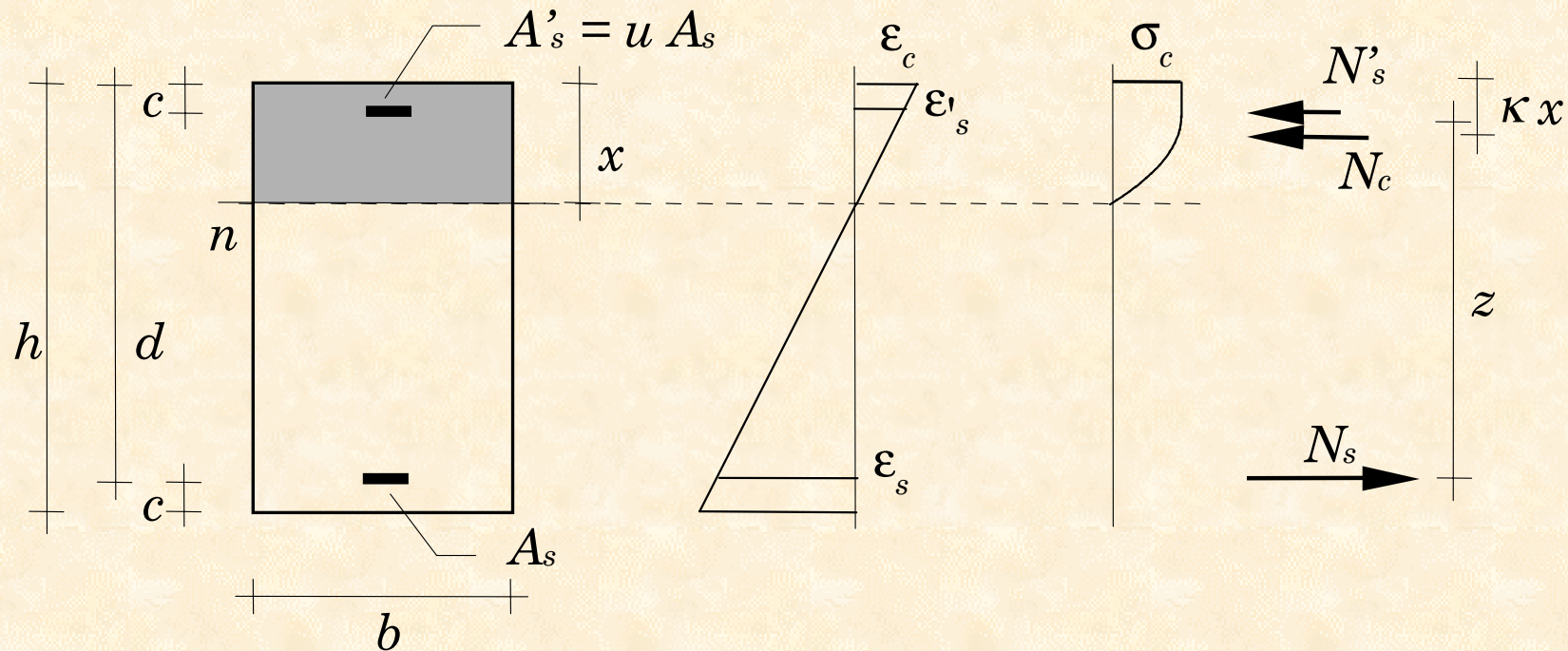
- assegnando una posizione x per l'asse neutro,
- individuando il corrispondente diagramma limite
- individuando il relativo stato tensionale
- calcolando le tre forze N_c, N_s, N'_s .

Se la somma algebrica di queste è nulla la posizione dell'asse neutro è esatta → **Equilibrio alla traslazione**

Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Determinata la posizione dell'asse neutro si può calcolare il momento resistente:

$$M_{Rd} = N_s z$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Il valore del coefficiente k dipende dal diagramma limite di deformazione.

Se la deformazione massima nel cls è inferiore a ε_{c1}

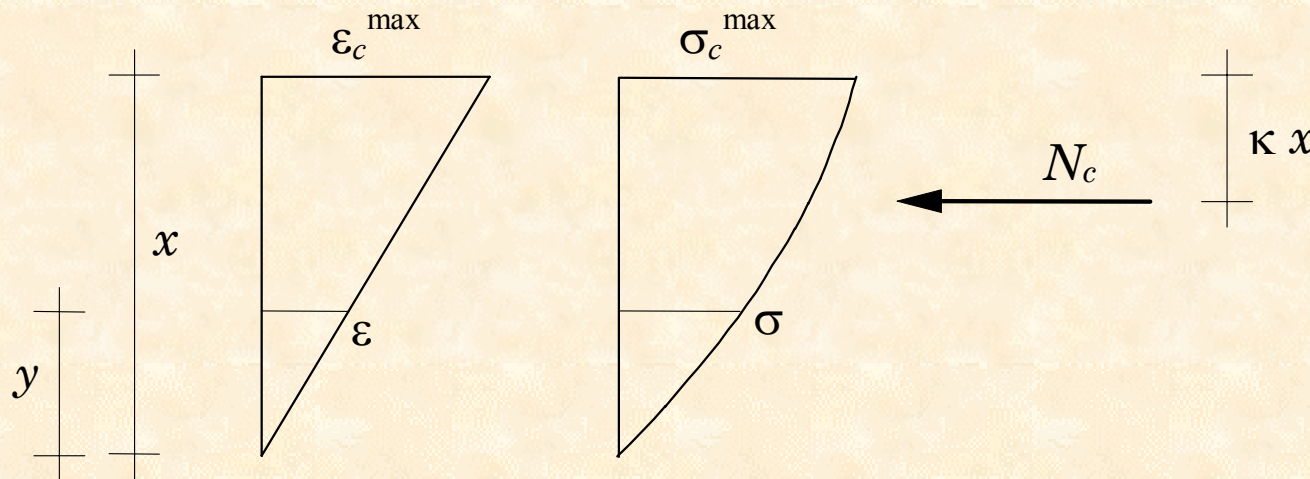
$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{1 - \eta_{\max} / 4}{1 - \eta_{\max} / 3}$$

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

In particolare per $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$

$$\eta_{\max} = 1.00$$

$$\kappa = 0.375$$



Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Il valore del coefficiente k dipende dal diagramma limite di deformazione.

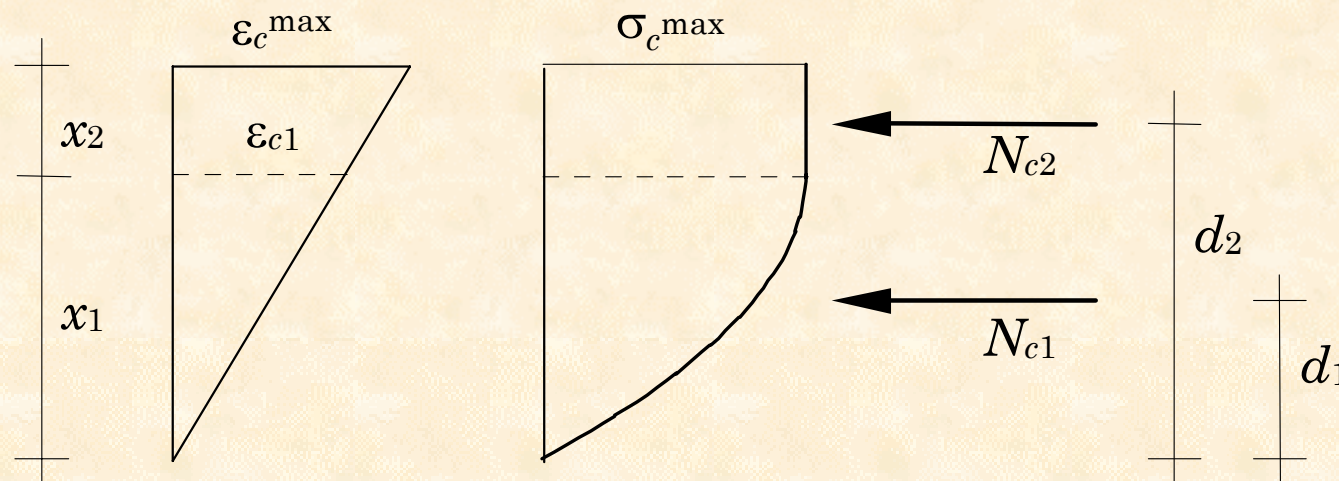
Se la deformazione massima nel cls è superiore a ε_{c1}

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3 \eta_{\max}} + \frac{1}{6 \eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3 \eta_{\max}}} \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

In particolare per $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$

$$\eta_{\max} = 1.75$$

$$\kappa = 0.416$$



ESEMPIO N°1

Verifica a flessione semplice di una sezione rettangolare



L'isola Lachea
(ACITREZZA)
Foto © [Amastray](#)

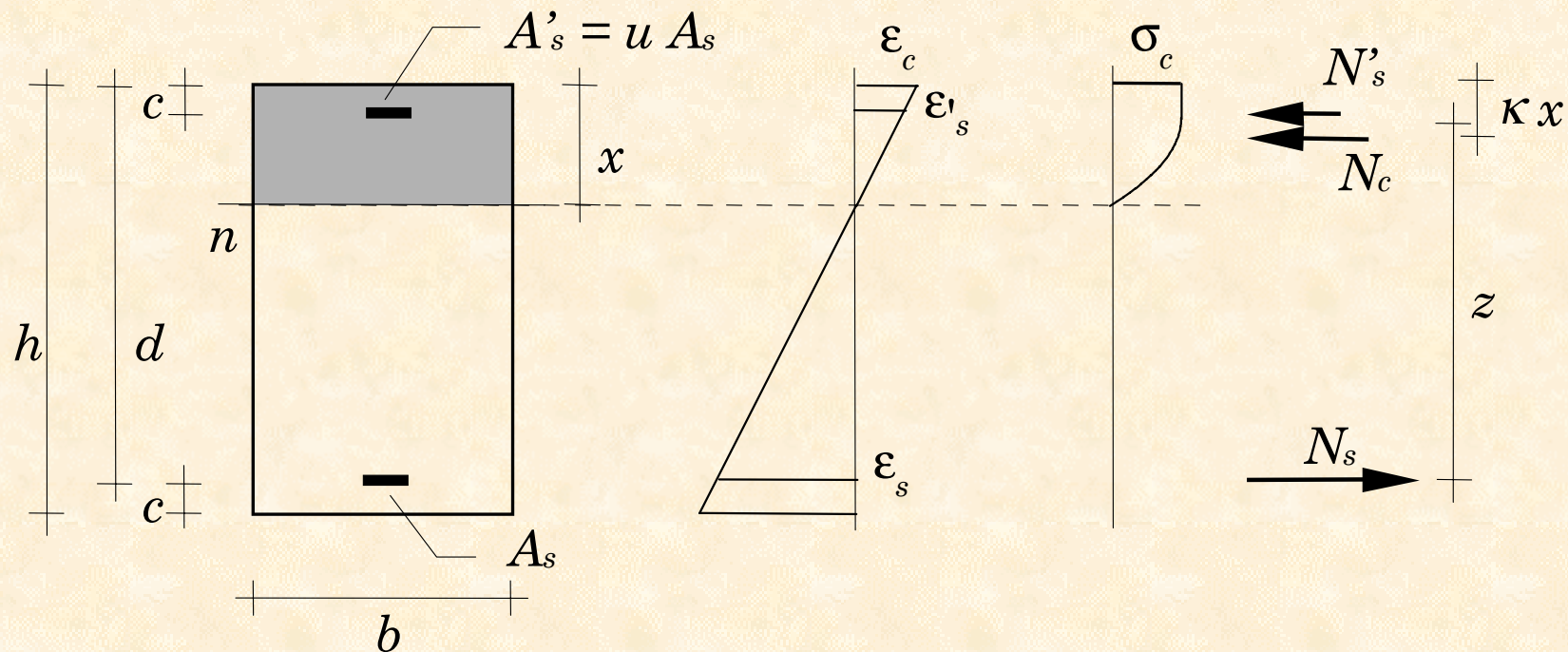
Esempio - Verifica a flessione di sezione rettangolare

Dati noti:

- Geometria: 30x50
- Armature: $A_s = 4\phi 20$ $A'_s = 4\phi 14$
(FeB44k)

Incognite

- $x = ?$
- $M_{rd} = ?$



Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Anziché proceder a caso, è utile individuare una prima posizione di tentativo dell'asse neutro con qualche ragionamento.

Una sezione correttamente progettata per la flessione avrà un diagramma limite quasi sicuramente ricadente nei campi 2 o 3, per i quali l'armatura tesa è snervata

$$N_s = f_{yd} A_s = 373.9 \times 12.56 \times 10^{-1} = 469.6 \text{ kN}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro:1° tentativo

Per quanto riguarda l'armatura compressa, non si può dire con altrettanta sicurezza che anch'essa sia snervata. Se fosse così, si avrebbe

$$N'_s = -f_{yd} A'_s = -373.9 \times 6.16 \times 10^{-1} = -230.3 \text{ kN}$$

Infine, se la deformazione del calcestruzzo raggiungesse il valore limite ε_{cu} il coefficiente di riempimento β varrebbe 0.810 e la forza N_c sarebbe proporzionale ad x

$$N_c / x = -\alpha f_{cd} b \beta = -11.02 \times 30 \times 0.810 \times 10^{-1} = -26.78 \text{ kN/cm}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

In questo caso si potrebbe ricavare immediatamente la posizione dell'asse neutro che garantisce l'equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

$$-x \frac{N_c}{x} = N_s + N'_s$$

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x} = \frac{-230.3 + 469.6}{26.78} = 8.94 \text{ cm}$$

Si assegna come primo tentativo $x=8.94$ cm.

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Il corrispondente diagramma limite di deformazioni deve annullarsi in corrispondenza dell'asse neutro e raggiungere il valore limite:

- al bordo superiore ($\varepsilon = \varepsilon_{cu} = - 0.0035$)
- o nell'armatura inferiore ($\varepsilon = \varepsilon_{su} = 0.010$).

Nel primo caso si avrebbe:

$$\chi = \varepsilon_{cu} / x = -0.0035 / 0.0894 = -0.0392 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.46) = 0.0145 \text{ (valore non accettabile)}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

La risultante delle tensioni di compressione vale

$$N_c = -11.02 \times 30 \times 8.94 \times 0.723 \times 10^{-1} = -213.7 \text{ kN}$$

Inoltre l'armatura compressa non è snervata e si ha

$$\sigma'_s = \varepsilon'_s E_s = -0.001333 \times 206000 = -274.6 \text{ MPa}$$

$$N'_s = -274.6 \times 6.16 \times 10^{-1} = -169.1 \text{ kN}$$

La condizione di equilibrio alla traslazione non è rispettata

$$N_c + N'_s + N_s = -213.7 - 169.1 + 469.6 = 86.8 \text{ kN}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 2° tentativo

La risultante delle tensioni normali è positiva, cioè di trazione. Occorre quindi aumentare il valore di x in modo da aumentare il contributo delle tensioni di compressione.

Supponendo che non varino né N'_s né β , si potrebbe assumere come nuovo valore di x

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x_{prec}} = \frac{-169.1 + 469.6}{213.7 / 8.94} = 12.57 \text{ cm}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: 2° tentativo

Con questa posizione dell'asse neutro il diagramma limite di deformazione non può corrispondere al raggiungimento della deformazione limite in corrispondenza dell'armatura inferiore, perché si avrebbe

$$\chi = \varepsilon_{su} / (x-d) = -0.0299 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_c = -0.0299 \times 0.1257 = -0.00376 \quad (\text{valore non accettabile})$$

Il diagramma limite ricade in campo 3, $\beta=0.810$ ed entrambe le armature (tesa e compressa) sono snervate:

$$N_c = -336.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = -230.3 \text{ kN}$$

$$N_s = 469.6 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -336.6 - 230.3 + 469.6 = -97.3 \text{ kN}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione dell'asse neutro: soluzione

In questo caso la risultante delle tensioni normali è negativa, cioè di compressione, ed occorre ridurre il valore di x . Procedendo con ulteriori tentativi si trova:

$$x = 10.09 \text{ cm}$$

$$\chi = -0.0278 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_c = -0.00281$$

$$\beta = 0.763$$

$$N_c = -254.5 \text{ kN}$$

$$\varepsilon'_s = -0.00170$$

$$\sigma'_s = -349.4 \text{ MPa}$$

$$N'_s = -215.2 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_s = -0.010$$

$$\sigma_s = 373.9 \text{ MPa}$$

$$N_s = 469.6 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -254.5 - 215.2 + 469.6 = -0.1 \text{ kN} \cong 0$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione del momento resistente

La posizione della risultante delle tensioni di compressione nel calcestruzzo si trova ad una distanza kx dal bordo superiore:

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{cl}} = \frac{-0.00281}{-0.002} = 1.405 > 1$$

$$k = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3\eta_{\max}} + \frac{1}{6\eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3\eta_{\max}}} = 0.400$$

Si trova $k=0.400$, cioè $k x = 4.04$ cm (dal bordo compresso).

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

Determinazione del momento resistente

La risultante delle tensioni di compressione di trova:

$$\frac{N_c \cdot k x + N'_s c}{N_c + N'_s}$$

cioè a 4.02 cm (dal bordo compresso)

Il braccio della coppia interna è $z = d - 4.02 = 41.98$ cm ed il momento limite della sezione è

$$M_{Rd} = N_s z = 469.6 \times 0.4198 = 197.1 \text{ kNm}$$

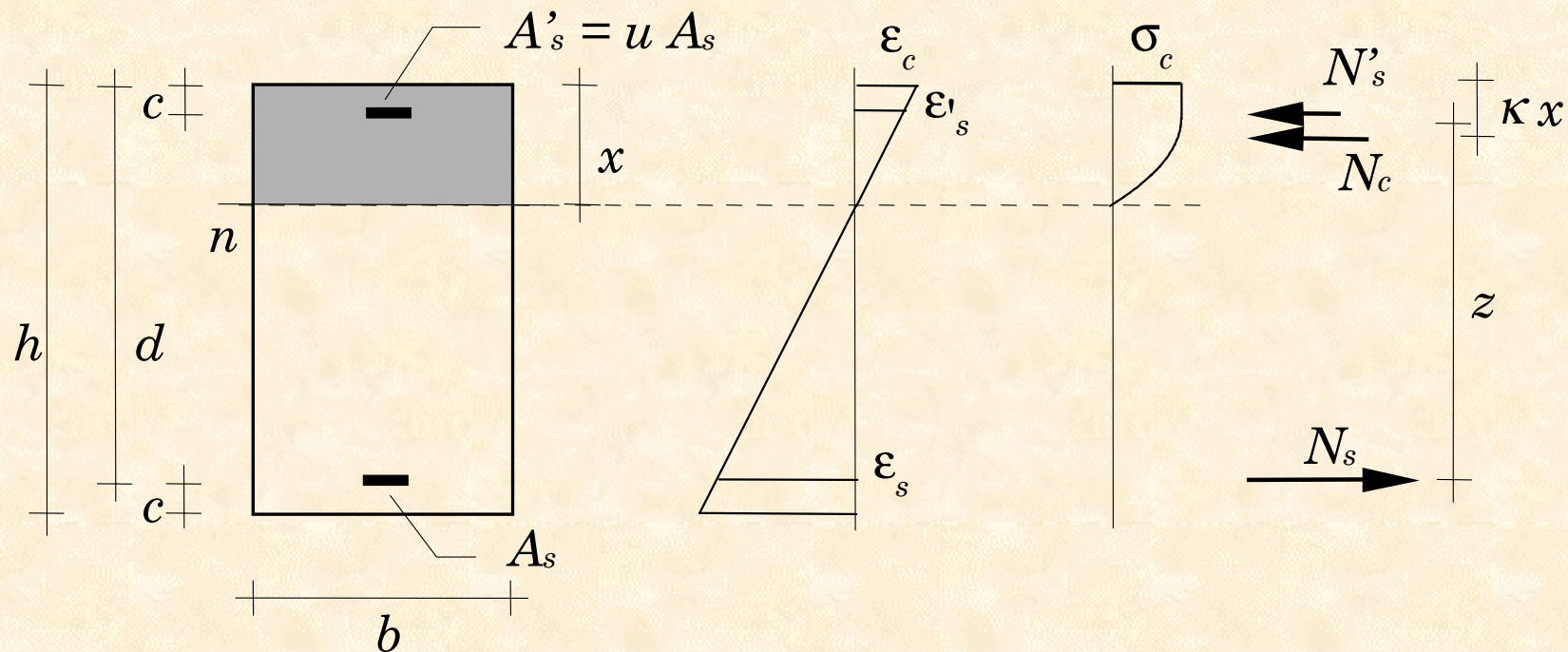
Esempio - Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di ε_{su}

Dati noti:

- Geometria: 30x50
- Armature: $A_s = 4\phi 20$ $A'_s = 4\phi 14$
(FeB44k)

Incognite

- $x = ?$
- $M_{rd} = ?$



Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di ε_{su}

Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Si procede come nel precedente esempio

$$N_s = f_{yd} A_s = 373.9 \times 12.56 \times 10^{-1} = 469.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = -f_{yd} A'_s = -373.9 \times 6.16 \times 10^{-1} = -230.3 \text{ kN}$$

$$N_c / x = -\alpha f_{cd} b \beta = -11.02 \times 30 \times 0.810 \times 10^{-1} = -26.78 \text{ kN/cm}$$

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x} = \frac{-230.3 + 469.6}{26.78} = 8.94 \text{ cm}$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di ε_{su}

Per le ipotesi fatte il diagramma limite di deformazioni deve raggiungere il valore limite al bordo superiore:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = -0.0035,$$

$$\chi = \varepsilon_{cu} / x = -0.0392 \text{ m}^{-1}$$

Le conseguenti deformazioni nelle armature sono

$$\varepsilon_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.46) = 0.01451$$

$$\varepsilon'_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.04) = -0.00193$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di ε_{su}

Entrambe le armature (tesa e compressa) sono quindi snervate

$$N_s = 496.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = -230.3 \text{ kN}$$

La risultante delle tensioni sul calcestruzzo è

$$N_c = -239.4 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -0.1 \text{ kN} \cong 0$$

Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di ε_{su}

La posizione dell'asse neutro ipotizzata è quella effettivamente necessaria per l'equilibrio.

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} = 1.75 > 1$$
$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3\eta_{\max}} + \frac{1}{6\eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3\eta_{\max}}} = 0.388$$

Il braccio della coppia interna è:

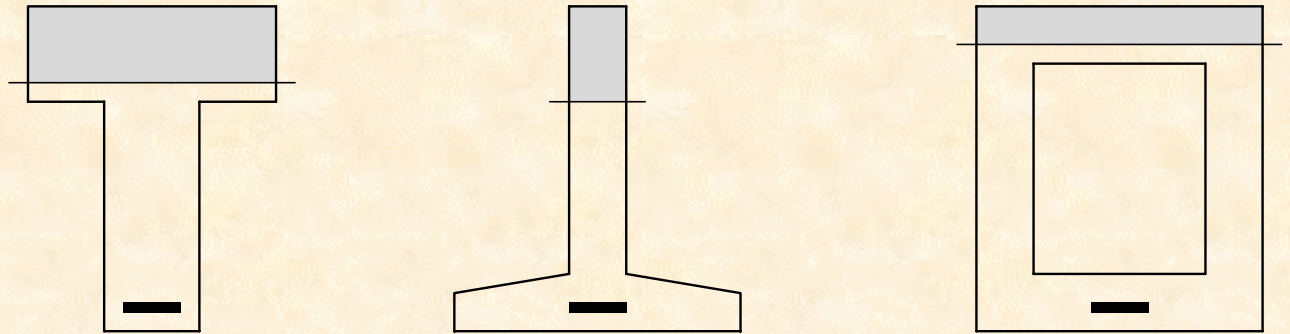
$$z = 42.04 \text{ cm}$$

Il momento limite della sezione è

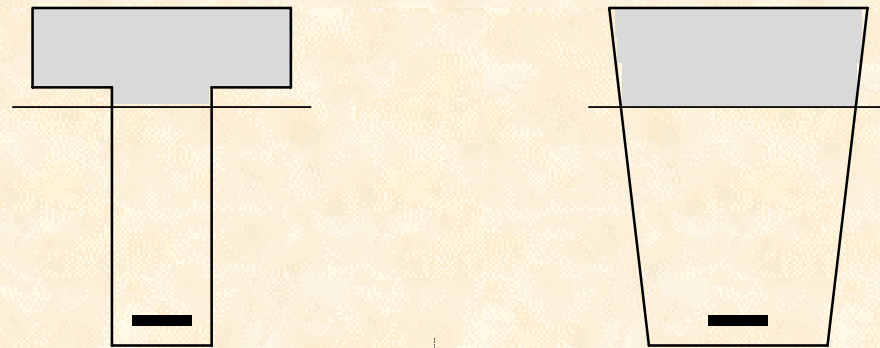
$$M_{Rd} = N_s z = 469.6 \times 0.4204 = 197.4 \text{ kNm}$$

Verifica a flessione di sezioni generiche

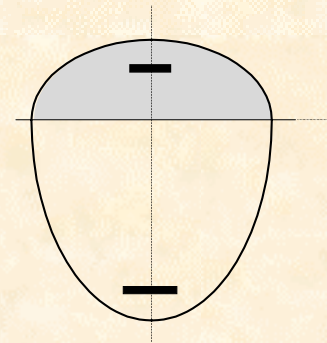
Sezioni
"rettangolari"



Sezioni quasi
"rettangolari"



Sezioni non
rettangolari



Equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

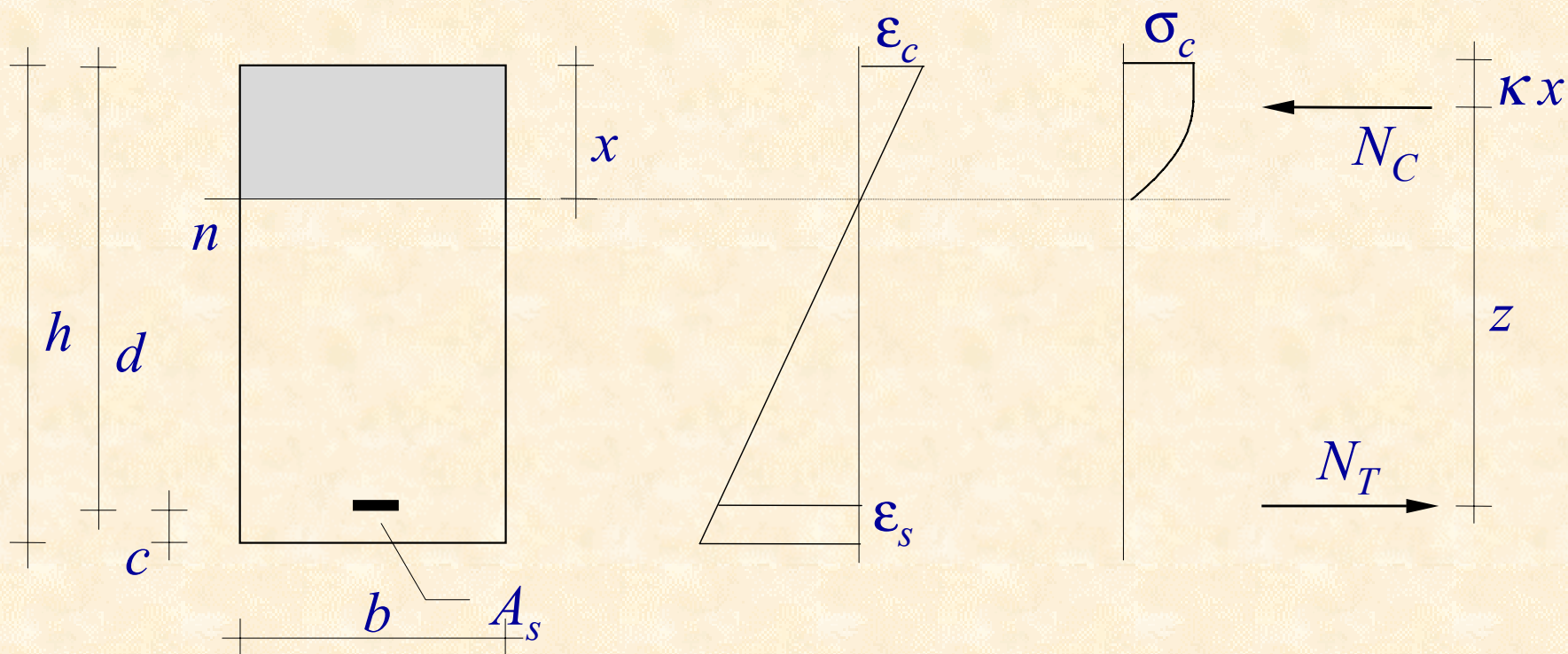
Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice



Teatro greco di Taormina
Foto © [Rosario Trifirò](#)

Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Si assegni un qualsiasi diagramma limite di deformazioni, individuato dalla distanza x dell'asse neutro dal bordo superiore.

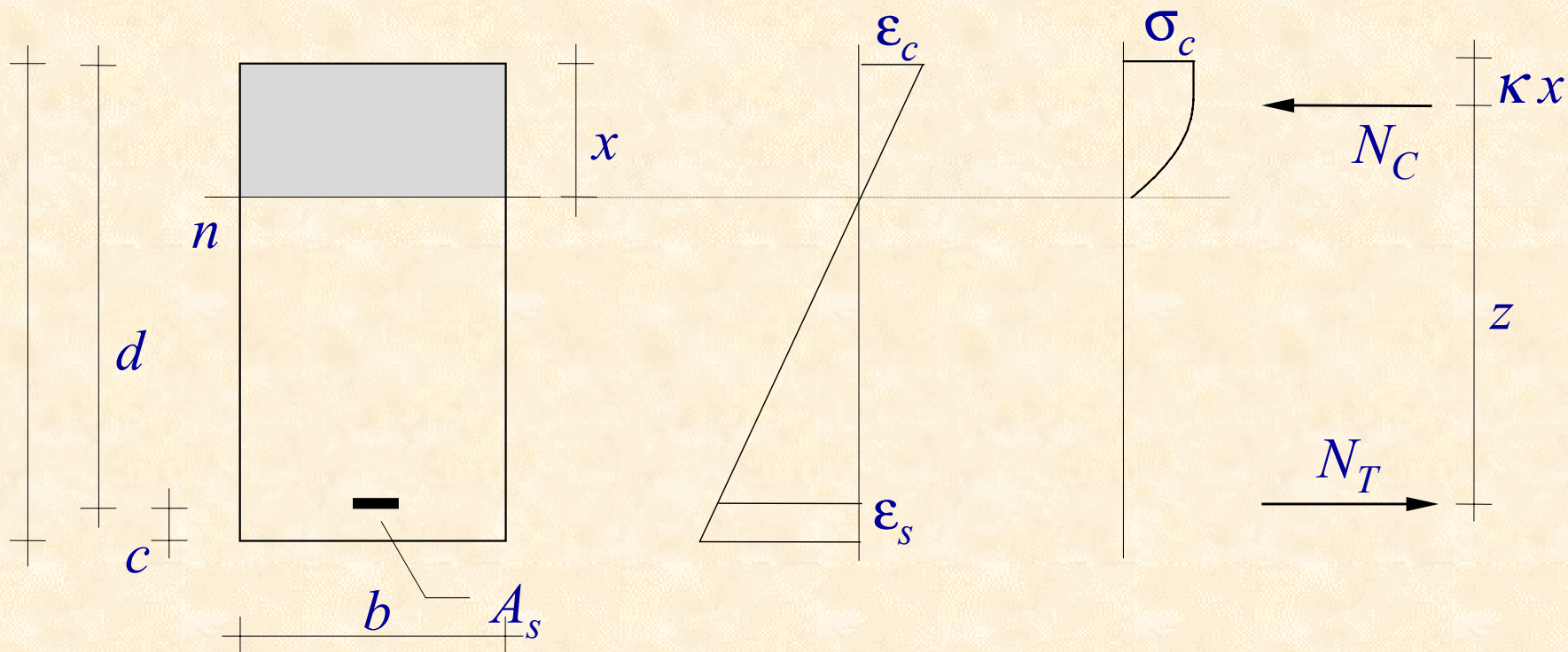


Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

La forza di compressione vale

$$N_C = -\alpha f_{cd} b x \beta$$

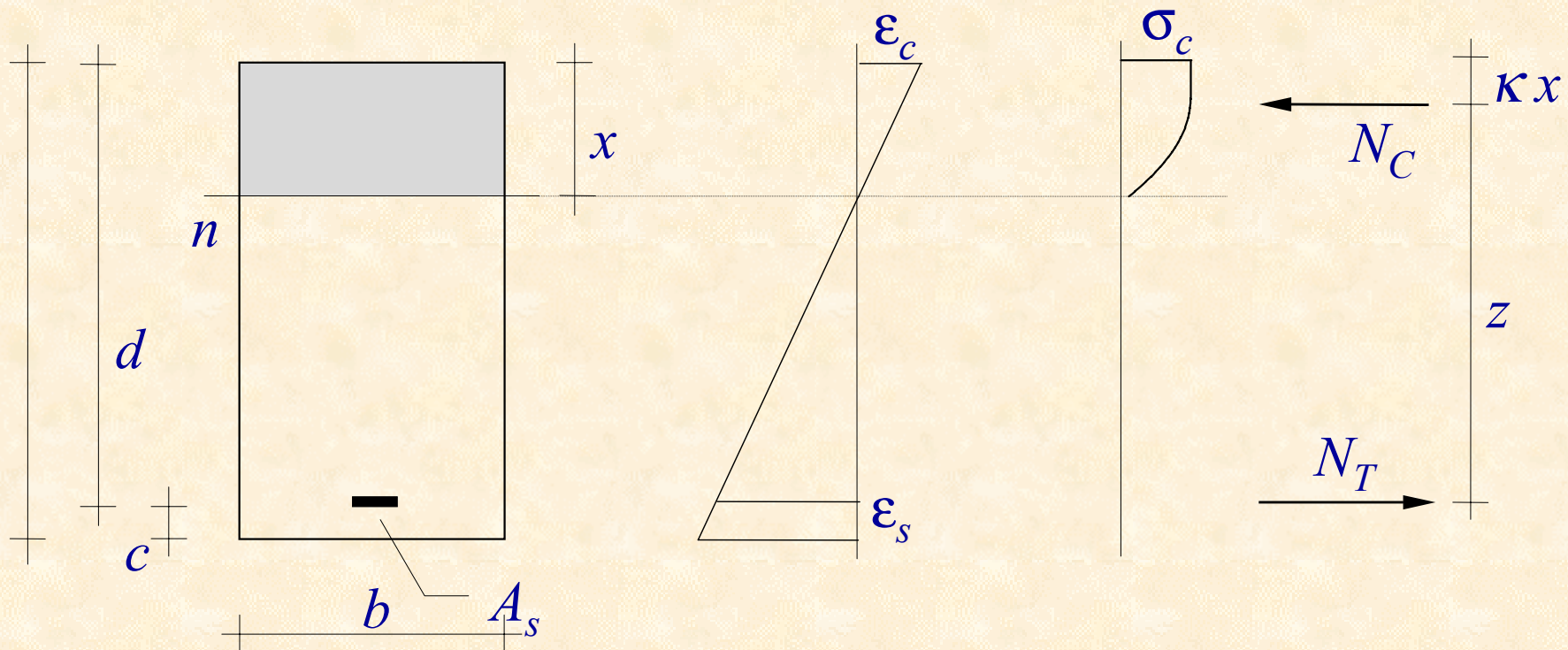
ed è applicata ad una distanza κx dal bordo compresso



Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

La condizione di equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura tesa si scrive

$$M = -N_C(d - \kappa x) = bd^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}$$

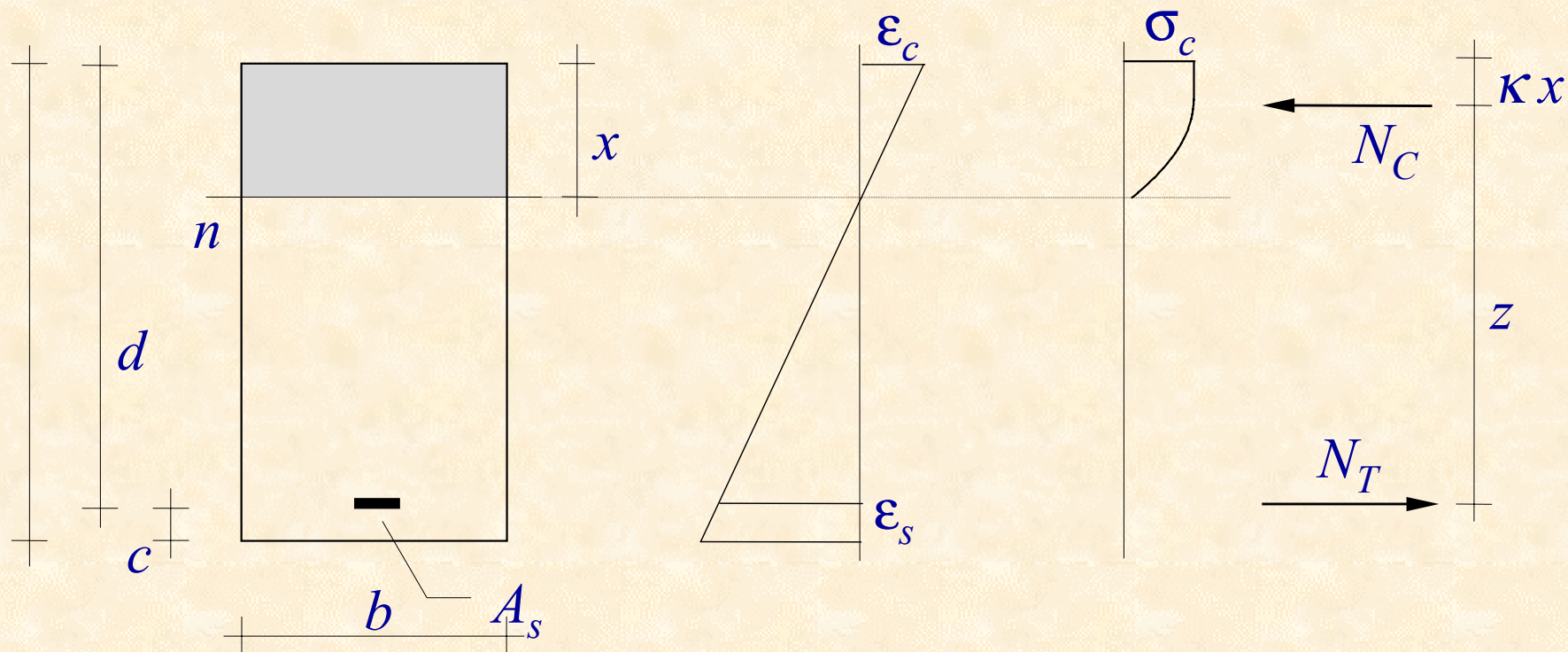


Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Ponendo: $r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}}}$ si ha: $M = \frac{b d^2}{r^2}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$b = r \left(\frac{M}{d} \right)^2$$



Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Per conferire alla sezione una buona duttilità può assumersi come diagramma di deformazioni di riferimento un diagramma caratterizzato dall'attingimento di

ε_{cu} nel cls compresso

$\varepsilon_s = 1\%$ nell'acciaio teso.

Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Utilizzando tale diagramma (per brevità chiamato "C"), per il quale è $\xi=0.259$, $\beta=0.810$, $\kappa=0.416$, per un calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^3}} = 0.0220$$

T.A. 0.500
 T.A. 0.333
 T.A. 0.333
 T.A. 8.50
 T.A. 0.0282

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) |\sigma_c^{\max}|}}$$

ESEMPIO N°2

Progetto a flessione di una sezione rettangolare a semplice armatura



Il castello

(ACICASTELLO)

Foto © [Francesco Raciti](#)

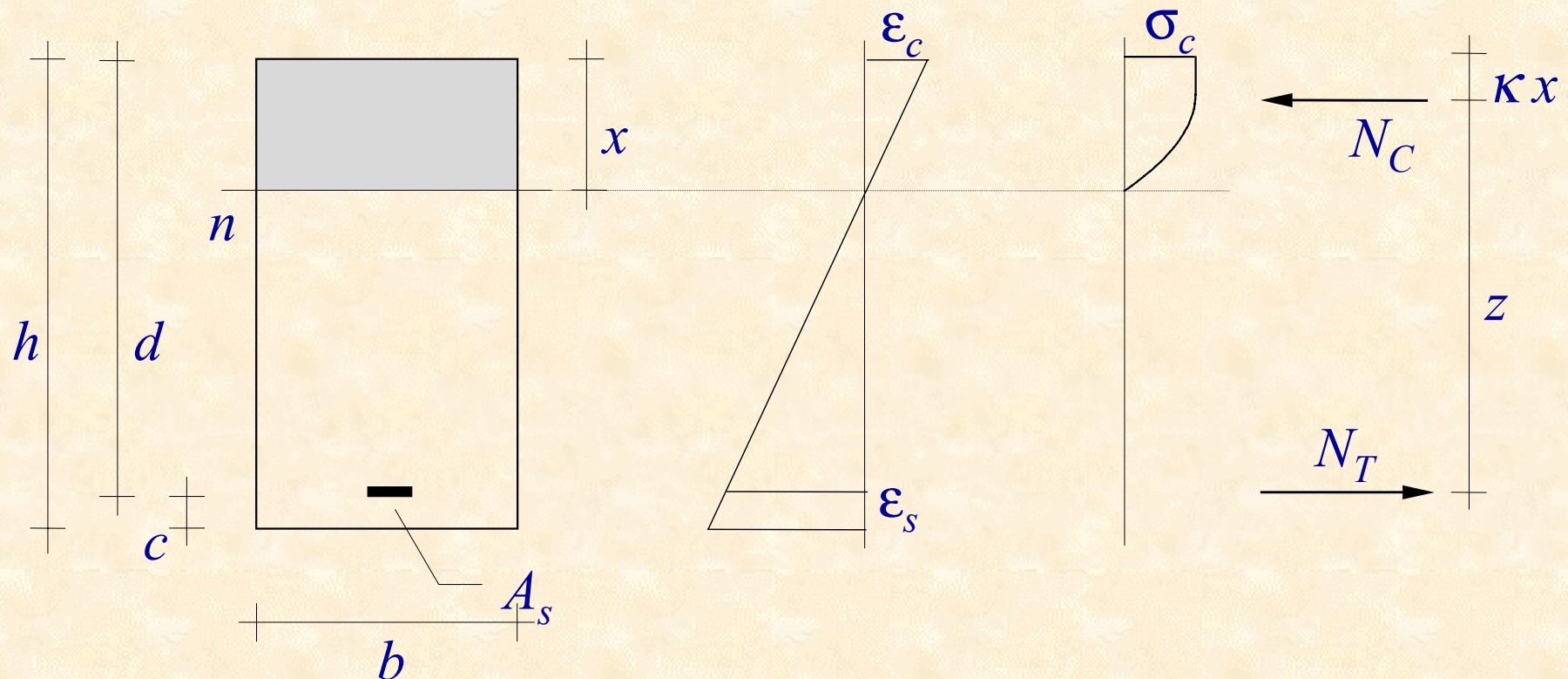
Esempio-Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Dati di partenza:

- momento flettente $M_{sd} = 200 \text{ kNm}$
- diagramma di deformazioni "C"

Incognite

- dimensioni della sezione b, h
- armatura A_s



Esempio-Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma C, per il quale è:

- $\xi=0.259$,
- $\beta=0.810$,
- $\kappa=0.416$

Per un calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \times \xi \times (1 - \kappa \times \xi) \times \alpha f_{cd}}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^3}} = 0.0220$$

Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si assume per l'elemento inflesso una larghezza
 $b = 30 \text{ cm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.022 \sqrt{\frac{200 \text{ kNm}}{0.30 \text{ m}}} = 0.57 \text{ m}$$

T.A. $\cong 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$

T.A.
0.0282

$\Rightarrow h = d + c \cong 0.60 \text{ m}$

T.A.
0.59 m

Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Progetto dell'armatura

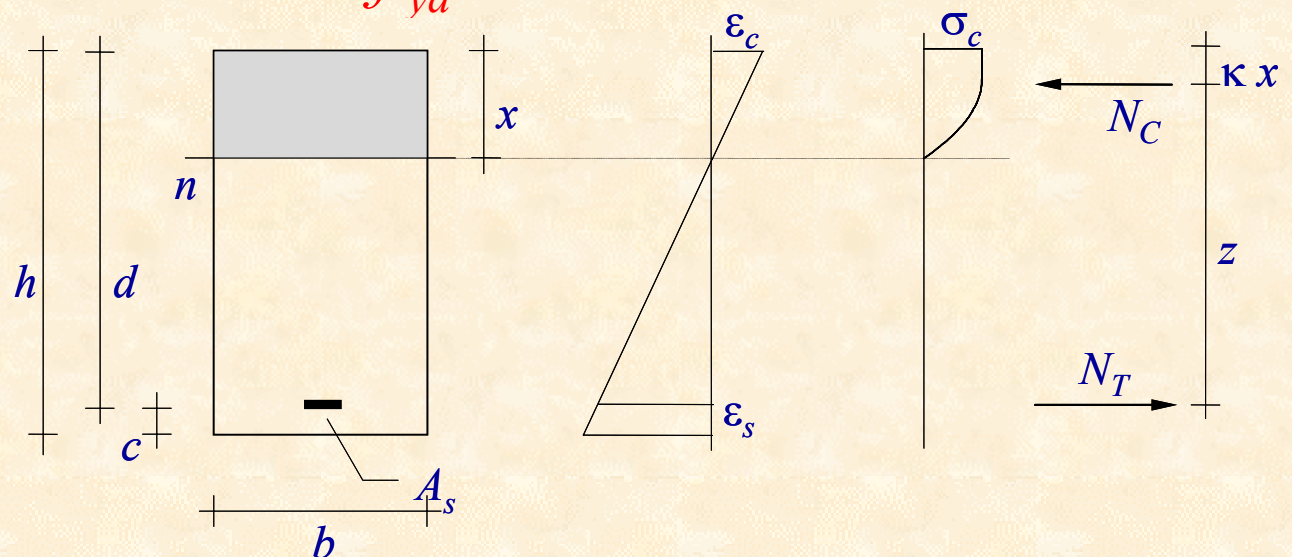
Per quanto riguarda il progetto delle armature, l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto di applicazione di N_c fornisce l'espressione

$$A_s = \frac{M}{z f_{yd}}$$

con

$$z = \zeta d$$

$$\zeta = 1 - \kappa \xi$$



Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Progetto dell'armatura

Facendo riferimento al diagramma di deformazioni C , si ha $\zeta = 0.892$ e si può quindi ancora usare l'espressione approssimata

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Alle tensioni ammissibili la formula è analoga

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \sigma_s}$$

Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si ha :

$$\zeta = 1 - 0.416 \cdot 0.259 = 0.892$$

$$z = 0.892 \cdot 0.56 \text{ m} = 0.50$$

$$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa (FeB44k)}$$

T.A.

$$\cong 200 / 1.5 = 133 \text{ kNm}$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z f_{yd}} = \frac{200 \text{ kNm}}{0.50 \text{ m} \cdot 373.9 \text{ MPa}} \cdot 10 = 10.7 \text{ cm}^2$$

T.A.

255 MPa

T.A.

10.4 cm²

Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Sezione a doppia armatura

In maniera analoga, per sezione a doppia armatura si può giungere alle formule

$$M = \frac{bd^2}{r'^2} \quad d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} \quad b = r' \left(\frac{M}{d} \right)^2$$

r' dipende dal rapporto u tra armatura compressa ed armatura tesa.

$$r' = k r \quad \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \quad k \cong \sqrt{1 - s' u}$$

S.L.U. per flessione semplice

Il coefficiente r o r'

I valori dipendono sostanzialmente

- dal tipo di calcestruzzo
- dalla percentuale u di armatura compressa;
- dal rapporto γ tra copriferro ed altezza utile (ha influenza solo per sezioni molto basse)

Il tipo di acciaio non interviene direttamente, perché il limite di deformazione ε_{su} è uguale per tutti gli acciai, ma può comportare solo modeste variazioni sulla tensione dell'armatura compressa ($\sigma'_s = s \sigma_s$).

S.L.U. per flessione semplice

Confronto tra i coefficienti r o r' : S.L.U.

Calcestruzzo $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ $\alpha f_{cd} = 11.02 \text{ MPa}$

Acciaio

FeB44k

$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa}$

$\xi = 0.2593$

$1 - \kappa \xi = 0.8921$

	$\gamma =$	0.05	0.10	0.15	0.20	
	$s =$	1.0000	1.0000	0.8126	0.4407	
per $u =$	$r =$	0		0.0220		
$u =$	$r' =$	0.25	0.0189	0.0190	0.0197	0.0209
$u =$	$r' =$	0.50	0.0153	0.0155	0.0171	0.0197

ESEMPIO N°3

Progetto a flessione di una sezione
rettangolare a doppia armatura

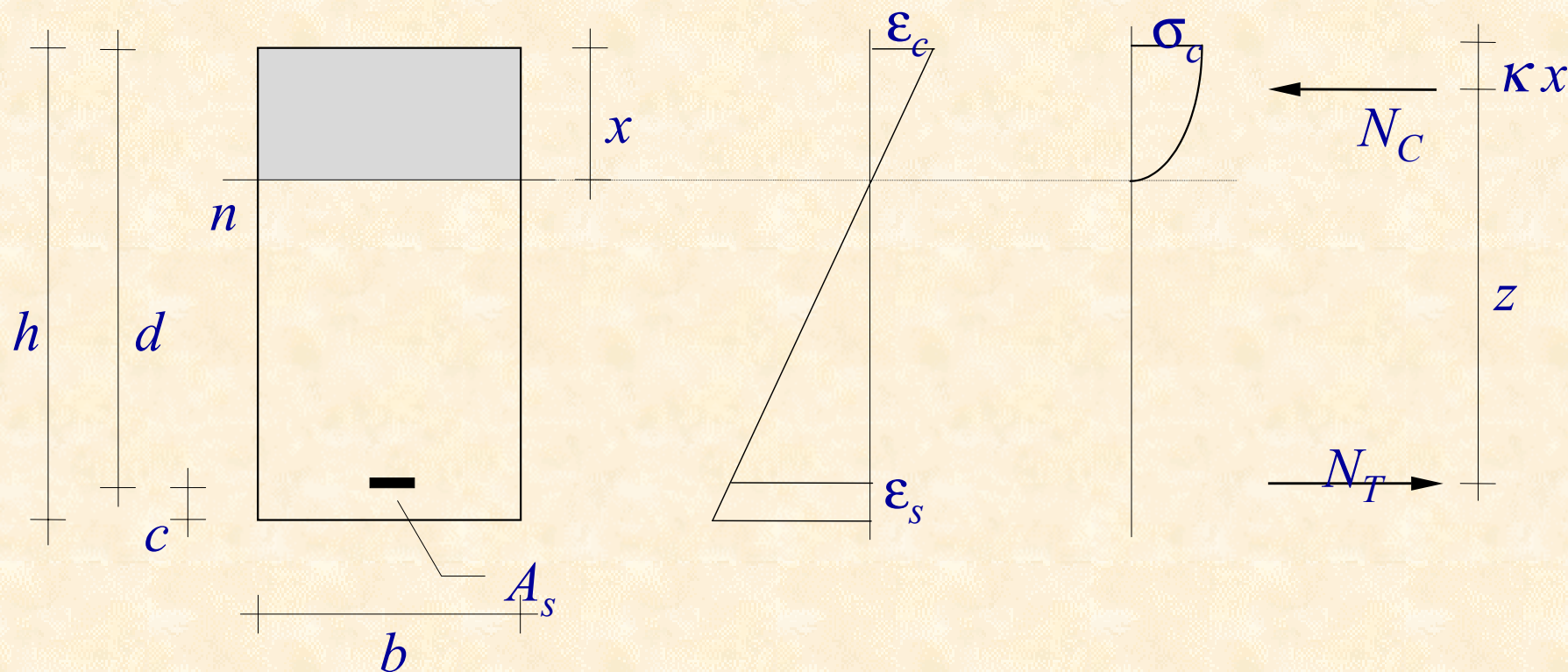
Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Dati di partenza:

- momento flettente $M = 200 \text{ kNm}$
- diagramma limite di deformazioni C

Incognite

- dimensioni della sezione b, h
- armatura A_s



Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma C, per il quale è $\xi=0.259$, $\beta=0.810$, $\kappa=0.416$, per un calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \times \xi \times (1 - \kappa \times \xi) \times \alpha f_{cd}}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^3}} = 0.0220$$

Si assume un'armatura in compressione del 25% :

$$k \cong \sqrt{1 - s' u} = \sqrt{1 - 1 \cdot 0.25} = 0.87$$

$$r' = k r = 0.019$$

Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma C, per il quale è $\xi=0.259$, $\beta=0.810$, $\kappa=0.416$, per un calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa si ha

Calcestruzzo	$R_{ck} = 25$ MPa	$\alpha f_{cd} = 11.02$ MPa							
Acciaio		FeB38k				FeB44k			
		$f_{yd} = 326.1$ MPa				$f_{yd} = 373.9$ MPa			
		$\xi = 0.2593$				$\xi = 0.2593$			
		$1 - \kappa \xi = 0.8921$				$1 - \kappa \xi = 0.8921$			
	$\gamma =$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.05	0.10	0.15	0.20
	$s =$	1.0000	1.0000	0.9318	0.5054	1.0000	1.0000	0.8126	0.4407
per $u =$	0	$r = 0.0220$				$r = 0.0220$			
	$u = 0.25$	$r' = 0.0189$	0.0190	0.0194	0.0207	0.0189	0.0190	0.0197	0.0209
	$u = 0.50$	$r' = 0.0153$	0.0155	0.0163	0.0193	0.0153	0.0155	0.0171	0.0197

Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si assume per l'elemento inflesso una larghezza $b = 30 \text{ cm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.19 \sqrt{\frac{200 \text{ kNm}}{30 \text{ cm}}} = 0.49 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = d + c \cong 0.50 \text{ m}$$

Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Progetto dell'armatura

Per quanto riguarda il progetto delle armature, l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto di applicazione di N_c fornisce l'espressione

$$A_s = \frac{M}{z f_{yd}}$$

con

$$z = \zeta d$$

$$\zeta = 1 - \kappa \xi + s' u (\kappa \xi - \gamma)$$

Con buona approssimazione

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si ha :

$$\zeta = 1 - 0.416 \cdot 0.259 = 0.892 \quad z = 0.892 \cdot 0.46 \text{ m} = 0.41$$

$$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa (FeB44k)}$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z f_{yd}} = \frac{200 \text{ kNm}}{0.41 \text{ m} \cdot 373.9 \text{ MPa}} \cdot 10 = 13.0 \text{ cm}^2$$

L'armatura compressa è:

$$A'_s = u A_s = 0.25 \cdot 13.0 = 3.3 \text{ cm}^2$$



Festa di S. Agata (CATANIA)
Foto © [Rosario Trifirò](#)

Alcune riflessioni sulla duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità, definita come rapporto tra la rotazione ultima e la rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo.

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Esempio - Duttività della sezione

Sezione 30x50

Cls $R_{ck}=25$ MPa

$M_{sd}= 300$ kNm

Acciaio FeB44k

Si sono presi in esame più casi, corrispondenti al raggiungimento dello stato limite in campi diversi, ottenuti utilizzando quattro percentuali di armatura compressa:

$u=0.6$

$u=0.3$

$u=0.08$

$u=0$

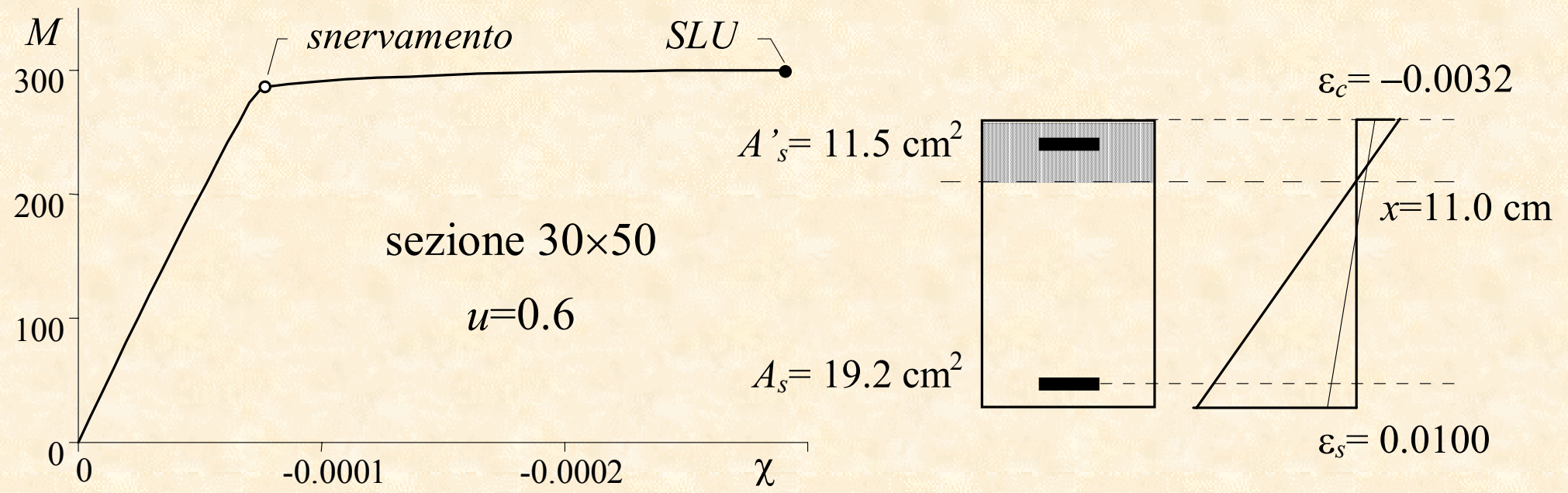
Esempio - Duttività della sezione

CASO 1 ($u=0.6$)

$$\varepsilon_s = 0.01$$

$$x = 11.0 \text{ cm}$$

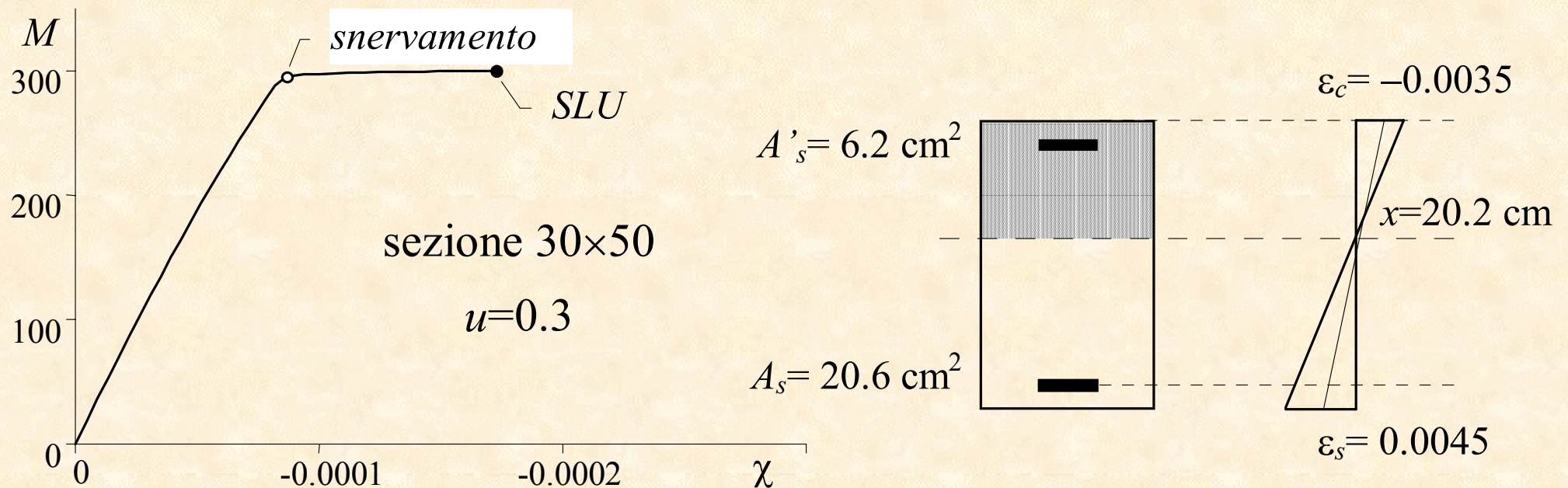
$$\chi = -0.000286$$



Esempio - Duttività della sezione

CASO 2 ($u=0.3$)

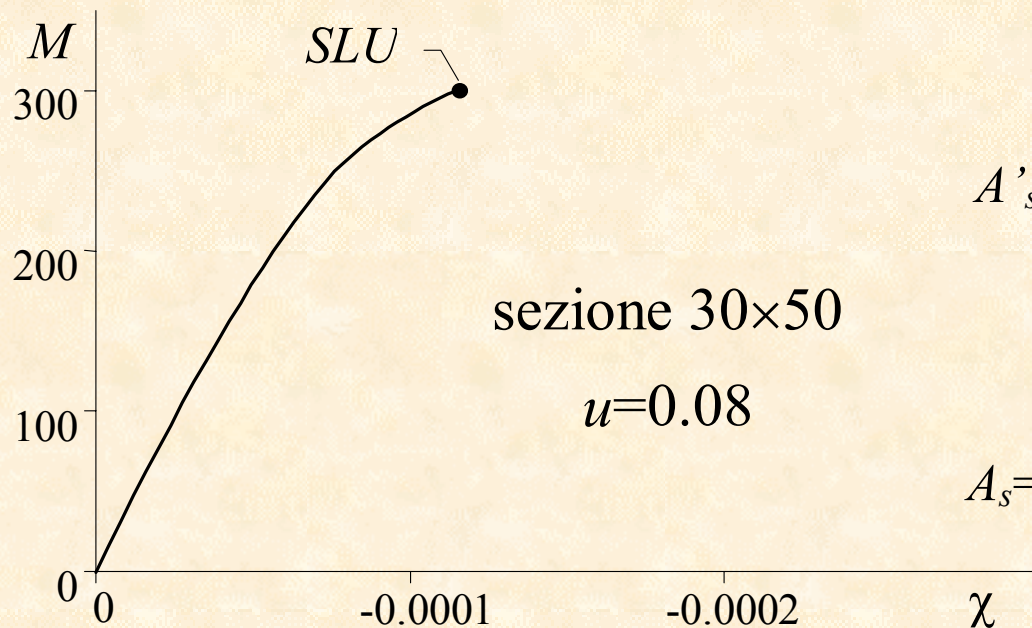
$$\varepsilon_s = 0.0045 \quad x = 20.2 \text{ cm} \quad \chi = -0.000084$$



Esempio - Duttività della sezione

CASO 3 ($u=0.08$)

$$\varepsilon_s = 0.0018 \quad x = 30.3 \text{ cm} \quad \chi = -0.000116$$

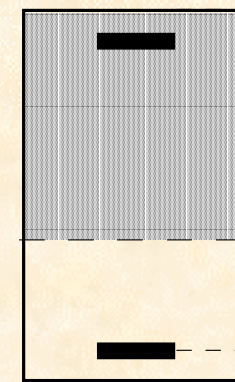


sezione 30×50

$$u=0.08$$

$$A'_s = 1.9 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 23.5 \text{ cm}^2$$



$$\varepsilon_c = -0.0035$$

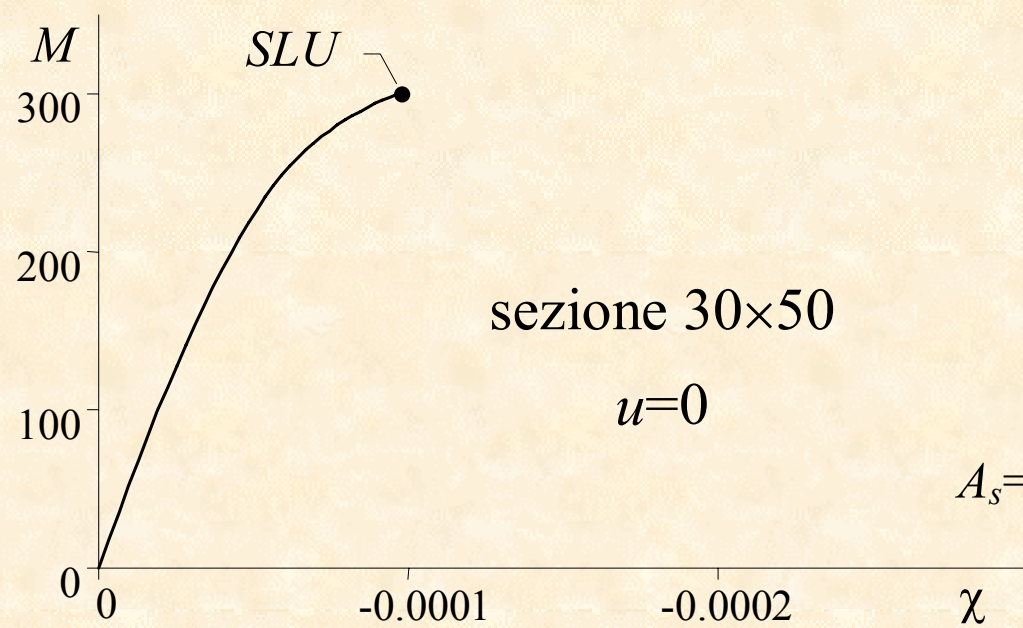
$$x = 30.3 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_s = 0.0018$$

Esempio - Duttività della sezione

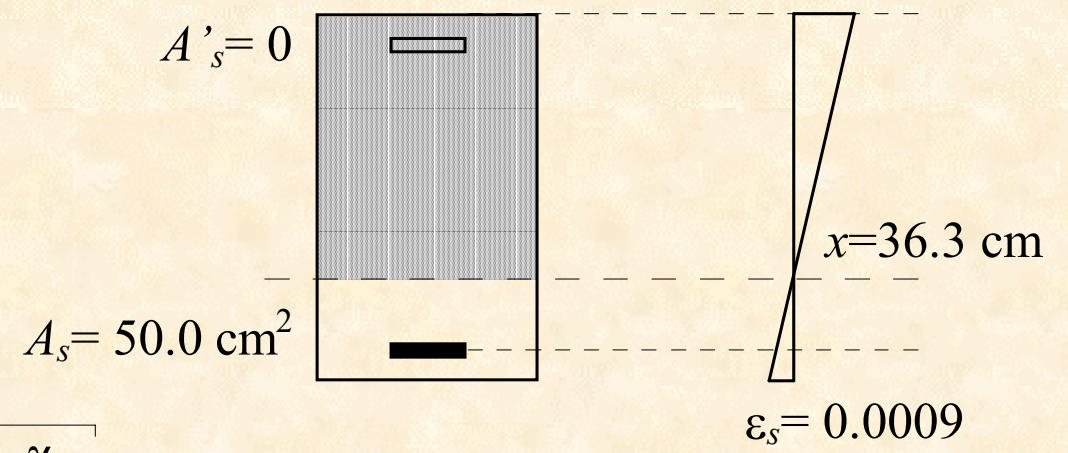
CASO 4 ($u=0$)

$$\varepsilon_s = 0.0009 \quad x = 36.2 \text{ cm} \quad \chi = -0.000097$$



sezione 30x50

$u=0$



Duttilità della sezione

E' la quantità di armatura tesa presente nella sezione a determinare in quale campo si avrà il collasso le sezioni possono essere denominate

- sezioni ad alta duttilità, o sezioni a debole armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 2;
- sezioni a media duttilità, o sezioni a media armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 3;
- sezioni a bassa duttilità, o sezioni a forte armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 4.

In fase di progetto è sempre bene mirare ad ottenere una buona duttilità e quindi a rientrare nel campo 2 o al più nel campo 3.

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Confronto tra i coefficienti: considerazioni

Il coefficiente r_{SLU} è circa il 20% più piccolo di r_{TA} .

Il valore di calcolo del carico F_d (e quindi di M_{sd}) è maggiore di circa il 40-50% rispetto a F_k (e quindi di M_{sk})

Il prodotto ($r^2 M_{sd}$) assume in entrambi i casi all'incirca lo stesso valore

→ l'altezza d calcolata mediante la formula è sostanzialmente la stessa in entrambi i casi.

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

ALLO S.L.U.

Per $M_{sd} = 200 \text{ kNm}$

- per una sezione a semplice armatura

$$r = 0.022$$

$$d = 0.57$$

ALLE T.A.

$$M_{sk} = 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$$

- per una sezione a semplice armatura

$$r = 0.0282$$

$$d = 0.59$$

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

2 - Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa è invece circa doppio rispetto al caso delle tensioni ammissibili (nel senso che $u=0.50$ allo SLU equivale circa a $u=1.00$ alle TA).

Ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo **l'armatura compressa lavora al massimo**, o quasi ($s \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s = 0.3 \div 0.5$).

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

2 - Contributo dell'armatura compressa

SLU

l'armatura compressa
lavora al massimo

$$(s' \cong 1)$$

$u=0.50$ allo SLU

T.A.

l'armatura compressa
ha un tasso di lavoro
molto più basso di
quello ammissibile

$$(s' = 0.3 \div 0.5)$$

$u=1.00$ alle T.A.

\cong

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

ALLO S.L.U.

Per $M_{sd} = 200 \text{ kNm}$

- per una sezione con il 25% di armatura compressa

$$r = 0.019$$

$$d = 0.49$$

ALLE T.A.

$M_{sk} = 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$

- per una sezione con il 25% di armatura compressa

$$r = 0.0269$$

$$d = 0.57$$

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali

I valori proposti per il coefficiente r sono stati calcolati con riferimento a ben precisi diagrammi di tensione o deformazione.

Cosa cambia nei due metodi facendo variare il tasso di lavoro dell'armatura?

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali (T.A.)

Alle T.A., si utilizzano i valori limite delle tensioni $\bar{\sigma}_c$ e $\bar{\sigma}_s$.

Se si usa $\sigma_s < \bar{\sigma}_s$

→ la parte compressa aumenta

→ l'altezza necessaria diminuisce.

La riduzione di tensione rende necessaria una quantità di armatura maggiore sproporzionata al vantaggio che potrebbe comportare la riduzione di sezione

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali (T.A.)

Ad esempio

$$\text{Se } \sigma_s = 0.5 \times \bar{\sigma}_s$$

$$A_s = 2 A_s$$

$$\rightarrow d = 0.85 d$$

si può ridurre l'altezza solo del 15%.

I margini di manovra del progettista sono limitati.

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali (T.A.)

In alternativa per ridurre d si può aumentare $A's$.

Anche questo non è troppo vantaggioso:

per $u = 1 \rightarrow d \cong 0.70 d_{u=0}$ (Riduzione del 30%)

$A_{tot} \cong 3 A_{s,u=0}$ (se si tiene conto anche dell'effetto della riduzione dell'altezza)

I margini di manovra del progettista sono limitati.

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali (S.L.U.)

Nel caso dello stato limite ultimo, si è mirato a raggiungere contemporaneamente:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$$

Se

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{su} \rightarrow \sigma_s = f_{yd} \quad (\text{almeno fino a } \varepsilon_{yd})$$

Cresce, anche notevolmente, il contributo del calcestruzzo compresso

Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

3 - Margini progettuali (S.L.U.)

Se:

$$A_s = 2 A_s$$

A parità di sezione si trova

$$M_{rd} \cong 1.80 M_{rd}$$

→ Si può ridurre l'altezza di oltre il 30%.



Veduta su Isola Bella
Foto © [Giuseppe Accordino](#)