

Sezioni in c.a.  
La flessione semplice

Teramo, 27-28 febbraio 2004

Marco Muratore

Sezioni in c.a.  
La flessione semplice

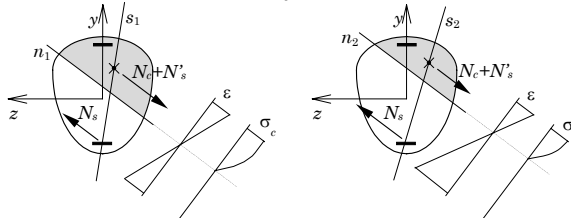
**ARGOMENTI**

1. Verifica di sezioni inflesse
2. Progetto di sezioni inflesse
3. Considerazioni sulla duttilità
4. Differenze tra T.A. e S.L.U.

## Verifica allo S.L.U. di sezione rettangolare

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

$$N = \int \sigma \, dA \quad M_y = \int \sigma \, z \, dA \quad M_z = -\int \sigma \, y \, dA$$



## Verifica allo S.L.U. di sezione rettangolare

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

~~$$N = \int \sigma \, dA \quad + \quad M_y = \int \sigma \, z \, dA \quad M_z = -\int \sigma \, y \, dA$$~~

Flessione  
semplice retta

Flessione  
composta retta

## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Equilibrio

### Dati noti:

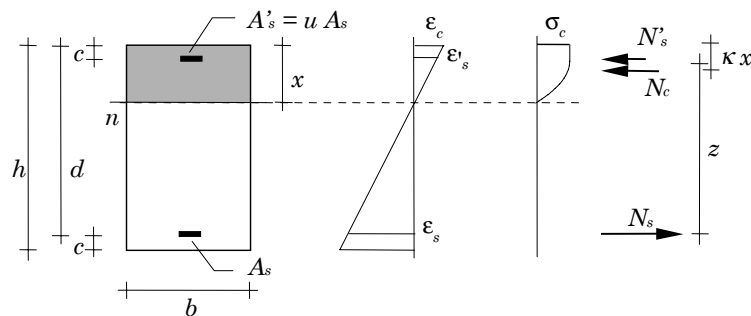
- Geometria della sezione
- Armature

### Incognite

- Diagramma di deformazione
- Momento resistente

### Equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Equilibrio

Alle Tensioni Ammissibili?

## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Equilibrio

### Dati

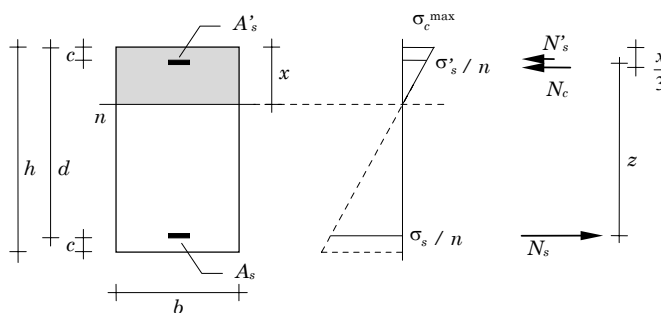
- Geometria della sezione
- Armature

### Incognite

- Diagramma di tensione
- Momento resistente

### Equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

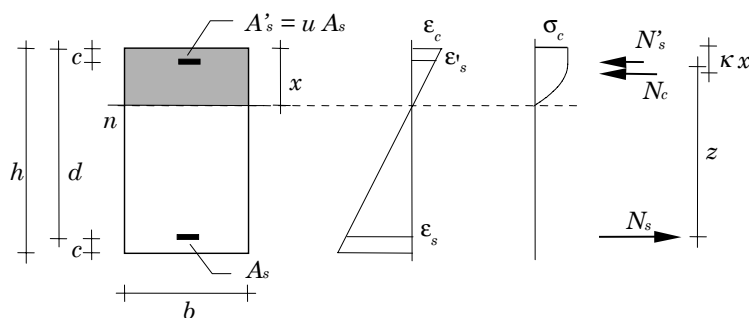


## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo CIs

### 1) Contributo del calcestruzzo compresso

la parte compressa ha un'area  $b x$  e la risultante delle tensioni di compressione vale

$$N_c = -\alpha f_{cd} b x \beta$$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo Cls

### 1) Contributo del calcestruzzo compresso

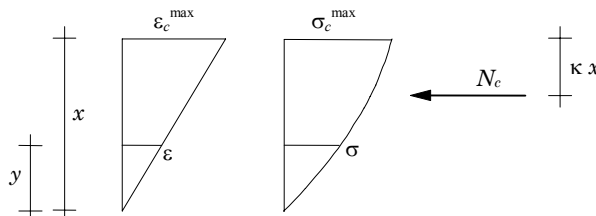
Il coefficiente di riempimento  $\beta$  dipende dal diagramma di deformazione.

Se la deformazione massima nel cls è inferiore a  $\varepsilon_{c1}$

In particolare per  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$

$$\beta = \eta_{\max} \left( 1 - \frac{1}{3} \eta_{\max} \right) \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

$\eta_{\max} = 1.00$   
 $\beta = 0.666$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo Cls

### 1) Contributo del calcestruzzo compresso

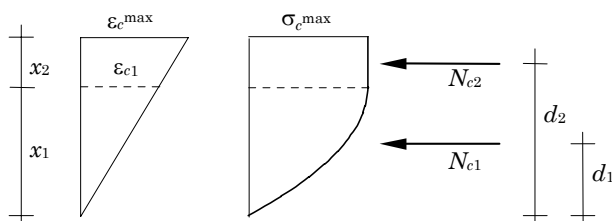
Il coefficiente di riempimento  $\beta$  dipende dal diagramma di deformazione.

Se la deformazione massima nel cls è superiore a  $\varepsilon_{c1}$

In particolare per  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$

$$\beta = 1 - \frac{1}{3 \eta_{\max}} \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

$\eta_{\max} = 1.75$   
 $\beta = 0.810$

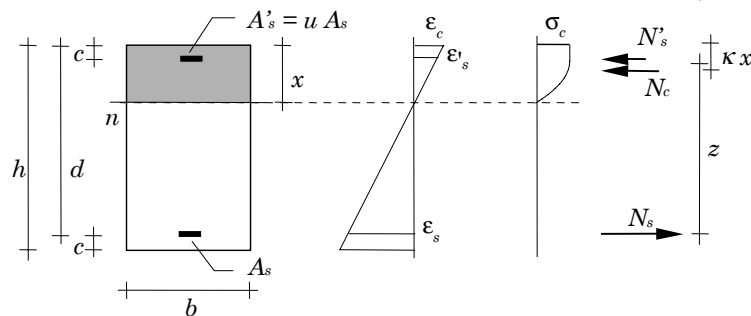


## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo $A_s$

### 2) Contributo dell'armatura tesa

In caso di flessione l'armatura tesa è generalmente snervata ( $s=1$ )

$$N_s = \sigma_s A_s = s A_s f_{yd} \quad s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$$

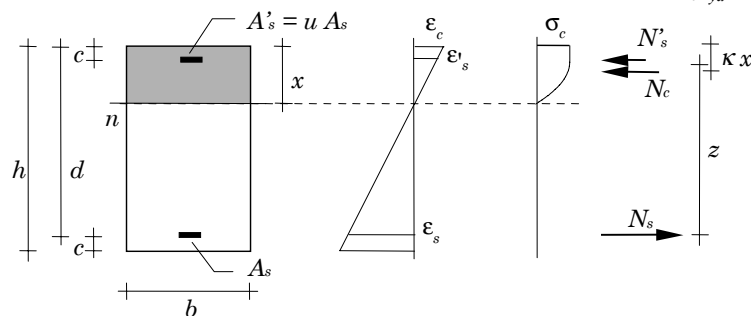


## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Contributo $A'_s$

### 3) Contributo dell'armatura compressa

In caso di flessione l'armatura compressa è spesso snervata ( $s'=1$ ); dipende soprattutto da  $c/d$

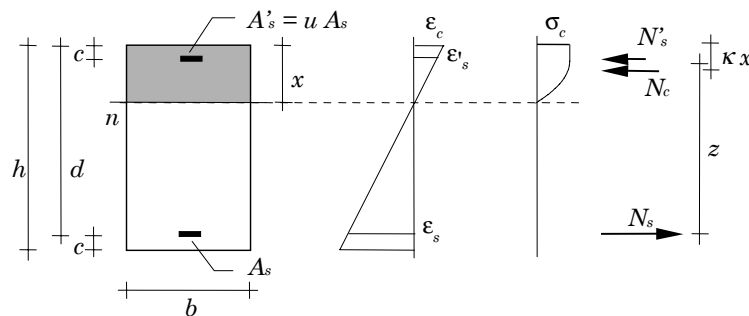
$$N'_s = \sigma'_s A'_s = -s' u A_s f_{yd} \quad s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}}$$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Deformazioni

Le tensioni  $\sigma_s$  e  $\sigma'_s$  devono essere ricavate dalle deformazioni  $\varepsilon_s$  ed  $\varepsilon'_s$  tenendo conto della legge costitutiva elastica-perfettamente plastica dell'acciaio.

$$\varepsilon_c = \chi x \quad \varepsilon'_s = \chi (x - c) \quad \varepsilon_s = \chi (x - d)$$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Deformazioni

Per un'assegnata posizione dell'asse neutro, il diagramma limite comporterà il raggiungimento della deformazione  $\varepsilon_{cu}$  al bordo compresso oppure di  $\varepsilon_{su}$  in corrispondenza dell'armatura tesa.

Nel primo caso si ha:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x}$$

$$\varepsilon_s = \frac{x-d}{x} \varepsilon_{cu} = -\frac{1-\xi}{\xi} \varepsilon_{cu}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{\xi-\gamma}{\xi} \varepsilon_{cu}$$

Nel secondo caso si ha:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{su}}{x-d}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x-d} \varepsilon_{su} = -\frac{\xi-\gamma}{1-\xi} \varepsilon_{su}$$

$$\varepsilon_c = \frac{x}{x-d} \varepsilon_{su} = -\frac{\xi}{1-\xi} \varepsilon_{su}$$

Le deformazioni  $\varepsilon_c, \varepsilon_s, \varepsilon'_s$  sono funzioni di  $x$

## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Procedura

In generale, quindi, si potrebbe procedere per tentativi:

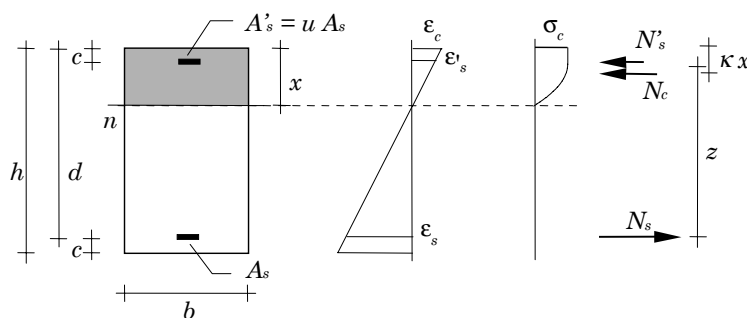
- assegnando una posizione  $x$  per l'asse neutro,
- individuando il corrispondente diagramma limite
- individuando il relativo stato tensionale
- calcolando le tre forze  $N_c$ ,  $N_s$ ,  $N'_s$ .

Se la somma algebrica di queste è nulla la posizione dell'asse neutro è esatta  $\rightarrow$  Equilibrio alla traslazione

## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Determinata la posizione dell'asse neutro si può calcolare il momento resistente:

$$M_{Rd} = N_s z$$





## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Il valore del coefficiente  $k$  dipende dal diagramma limite di deformazione.

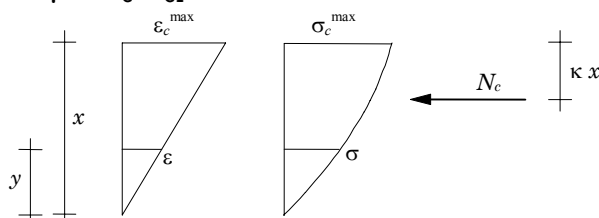
Se la deformazione massima nel cls è inferiore a  $\varepsilon_{c1}$

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{1 - \eta_{\max} / 4}{1 - \eta_{\max} / 3} \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

In particolare per  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$

$$\eta_{\max} = 1.00$$

$$\kappa = 0.375$$



## Verifica a flessione di sezione rettangolare - Momento resistente

Il valore del coefficiente  $k$  dipende dal diagramma limite di deformazione.

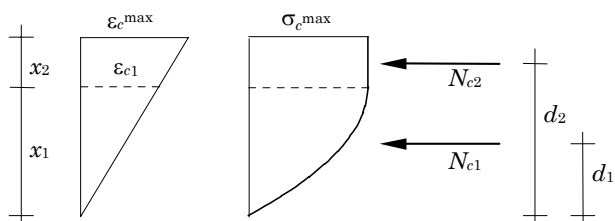
Se la deformazione massima nel cls è superiore a  $\varepsilon_{c1}$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3 \eta_{\max}} + \frac{1}{6 \eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3 \eta_{\max}}} \quad \eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}}$$

In particolare per  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$

$$\eta_{\max} = 1.75$$

$$\kappa = 0.416$$



## ESEMPIO N°1

### Verifica a flessione semplice di una sezione rettangolare

L'isola Lachea  
(ACITREZZA)  
Foto © Amastray

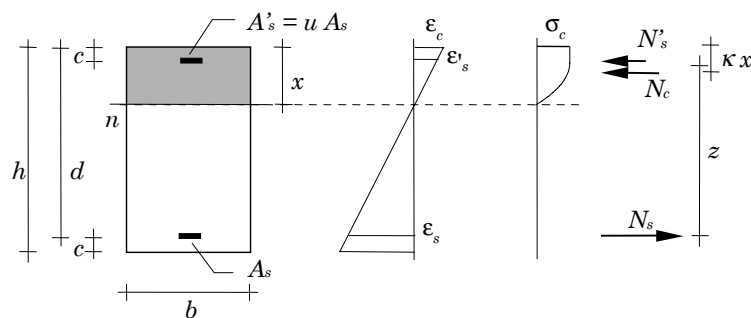
## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Dati noti:

- Geometria: 30x50
- Armature:  $A_s = 4\phi 20$     $A'_s = 4\phi 14$   
(FeB44k)

### Incognite

- $x = ?$
- $M_{rd} = ?$



## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Anziché proceder a caso, è utile individuare una prima posizione di tentativo dell'asse neutro con qualche ragionamento.

Una sezione correttamente progettata per la flessione avrà un diagramma limite quasi sicuramente ricadente nei campi 2 o 3, per i quali l'armatura tesa è snervata

$$N_s = f_{yd} A_s = 373.9 \times 12.56 \times 10^{-1} = 469.6 \text{ kN}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro:1° tentativo

Per quanto riguarda l'armatura compressa, non si può dire con altrettanta sicurezza che anch'essa sia snervata. Se fosse così, si avrebbe

$$N'_s = -f_{yd} A'_s = -373.9 \times 6.16 \times 10^{-1} = -230.3 \text{ kN}$$

Infine, se la deformazione del calcestruzzo raggiungesse il valore limite  $\varepsilon_{cu}$  il coefficiente di riempimento  $\beta$  varrebbe 0.810 e la forza  $N_c$  sarebbe proporzionale ad  $x$

$$N_c / x = -\alpha f_{cd} b \beta = -11.02 \times 30 \times 0.810 \times 10^{-1} = -26.78 \text{ kN/cm}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

In questo caso si potrebbe ricavare immediatamente la posizione dell'asse neutro che garantisce l'equilibrio alla traslazione

$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

$$-x \frac{N_c}{x} = N_s + N'_s$$

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x} = \frac{-230.3 + 469.6}{26.78} = 8.94 \text{ cm}$$

Si assegna come primo tentativo  $x=8.94$  cm.

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Il corrispondente diagramma limite di deformazioni deve annullarsi in corrispondenza dell'asse neutro e raggiungere il valore limite:

- al bordo superiore ( $\varepsilon = \varepsilon_{cu} = - 0.0035$ )
- o nell'armatura inferiore ( $\varepsilon = \varepsilon_{su} = 0.010$ ).

Nel primo caso si avrebbe:

$$\chi = \varepsilon_{cu} / x = -0.0035 / 0.0894 = -0.0392 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.46) = 0.0145 \text{ (valore non accettabile)}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

La risultante delle tensioni di compressione vale

$$N_c = -11.02 \times 30 \times 8.94 \times 0.723 \times 10^{-1} = -213.7 \text{ kN}$$

Inoltre l'armatura compressa non è snervata e si ha

$$\sigma'_s = \varepsilon'_s E_s = -0.001333 \times 206000 = -274.6 \text{ MPa}$$

$$N'_s = -274.6 \times 6.16 \times 10^{-1} = -169.1 \text{ kN}$$

La condizione di equilibrio alla traslazione non è rispettata

$$N_c + N'_s + N_s = -213.7 - 169.1 + 469.6 = 86.8 \text{ kN}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 2° tentativo

La risultante delle tensioni normali è positiva, cioè di trazione. Occorre quindi aumentare il valore di  $x$  in modo da aumentare il contributo delle tensioni di compressione.

Supponendo che non varino né  $N'_s$  né  $\beta$ , si potrebbe assumere come nuovo valore di  $x$

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x_{prec}} = \frac{-169.1 + 469.6}{213.7 / 8.94} = 12.57 \text{ cm}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: 2° tentativo

Con questa posizione dell'asse neutro il diagramma limite di deformazione non può corrispondere al raggiungimento della deformazione limite in corrispondenza dell'armatura inferiore, perché si avrebbe

$$\chi = \varepsilon_{su} / (x-d) = -0.0299 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_c = -0.0299 \times 0.1257 = -0.00376 \quad (\text{valore non accettabile})$$

Il diagramma limite ricade in campo 3,  $\beta=0.810$  ed entrambe le armature (tesa e compressa) sono snervate:

$$N_c = -336.6 \text{ kN} \qquad N'_s = -230.3 \text{ kN} \qquad N_s = 469.6 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -336.6 - 230.3 + 469.6 = -97.3 \text{ kN}$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione dell'asse neutro: soluzione

In questo caso la risultante delle tensioni normali è negativa, cioè di compressione, ed occorre ridurre il valore di  $x$ . Procedendo con ulteriori tentativi si trova:

$$x = 10.09 \text{ cm} \qquad \chi = -0.0278 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_c = -0.00281 \qquad \beta = 0.763 \qquad N_c = -254.5 \text{ kN}$$

$$\varepsilon'_s = -0.00170 \qquad \sigma'_s = -349.4 \text{ MPa} \qquad N'_s = -215.2 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_s = -0.010 \qquad \sigma_s = 373.9 \text{ MPa} \qquad N_s = 469.6 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -254.5 - 215.2 + 469.6 = -0.1 \text{ kN} \cong 0$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione del momento resistente

La posizione della risultante delle tensioni di compressione nel calcestruzzo si trova ad una distanza  $kx$  dal bordo superiore:

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_c^{\max}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{-0.00281}{-0.002} = 1.405 > 1$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3\eta_{\max}} + \frac{1}{6\eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3\eta_{\max}}} = 0.400$$

Si trova  $k=0.400$ , cioè  $kx = 4.04$  cm (dal bordo compresso).

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare

### Determinazione del momento resistente

La risultante delle tensioni di compressione di trova:

$$\frac{N_c \cdot kx + N_s' c}{N_c + N_s'}$$

cioè a 4.02 cm (dal bordo compresso)

Il braccio della coppia interna è  $z = d - 4.02 = 41.98$  cm ed il momento limite della sezione è

$$M_{Rd} = N_s z = 469.6 \times 0.4198 = 197.1 \text{ kNm}$$

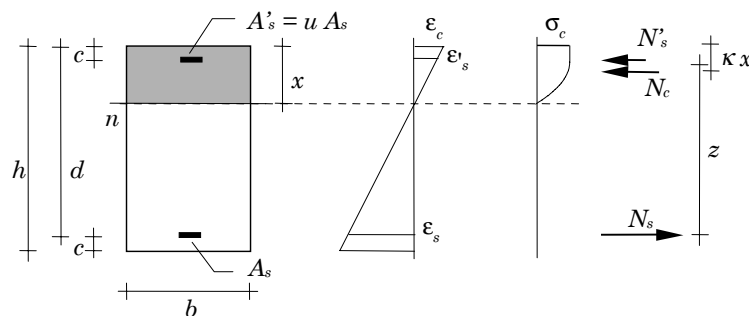
## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di $\varepsilon_{su}$

### Dati noti:

- Geometria: 30x50
- Armature:  $A_s = 4\phi 20$   $A'_s = 4\phi 14$   
(FeB44k)

### Incognite

- $x = ?$
- $M_{rd} = ?$



## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di $\varepsilon_{su}$

### Determinazione dell'asse neutro: 1° tentativo

Si procede come nel precedente esempio

$$N_s = f_{yd} A_s = 373.9 \times 12.56 \times 10^{-1} = 469.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = -f_{yd} A'_s = -373.9 \times 6.16 \times 10^{-1} = -230.3 \text{ kN}$$

$$N_c / x = -\alpha f_{cd} b \beta = -11.02 \times 30 \times 0.810 \times 10^{-1} = -26.78 \text{ kN/cm}$$

$$x = \frac{N'_s + N_s}{-N_c / x} = \frac{-230.3 + 469.6}{26.78} = 8.94 \text{ cm}$$



**Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di  $\varepsilon_{su}$**

**Per le ipotesi fatte il diagramma limite di deformazioni deve raggiungere il valore limite al bordo superiore:**

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = -0.0035,$$

$$\chi = \varepsilon_{cu} / x = -0.0392 \text{ m}^{-1}$$

**Le conseguenti deformazioni nelle armature sono**

$$\varepsilon_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.46) = 0.01451$$

$$\varepsilon'_s = -0.0392 \times (0.0894 - 0.04) = -0.00193$$

**Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di  $\varepsilon_{su}$**

**Entrambe le armature (tesa e compressa) sono quindi snervate**

$$N_s = 496.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = -230.3 \text{ kN}$$

**La risultante delle tensioni sul calcestruzzo è**

$$N_c = -239.4 \text{ kN}$$

$$N_c + N'_s + N_s = -0.1 \text{ kN} \cong 0$$

## Esempio -Verifica a flessione di sezione rettangolare in assenza di $\varepsilon_{su}$

La posizione dell'asse neutro ipotizzata è quella effettivamente necessaria per l'equilibrio.

$$\eta_{\max} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cl}} = 1.75 > 1 \quad \kappa = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3\eta_{\max}} + \frac{1}{6\eta_{\max}^2}}{1 - \frac{1}{3\eta_{\max}}} = 0.388$$

Il braccio della coppia interna è:

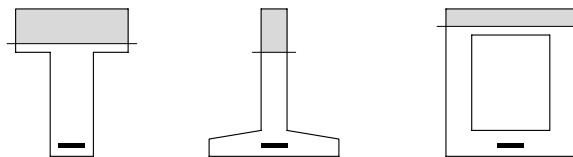
$$z = 42.04 \text{ cm}$$

Il momento limite della sezione è

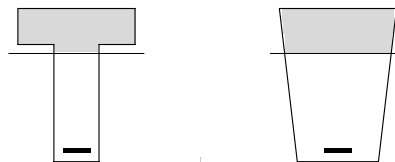
$$M_{Rd} = N_s z = 469.6 \times 0.4204 = 197.4 \text{ kNm}$$

## Verifica a flessione di sezioni generiche

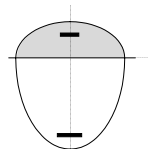
Sezioni  
"rettangolari"



Sezioni quasi  
"rettangolari"



Sezioni non  
rettangolari



Equilibrio alla traslazione

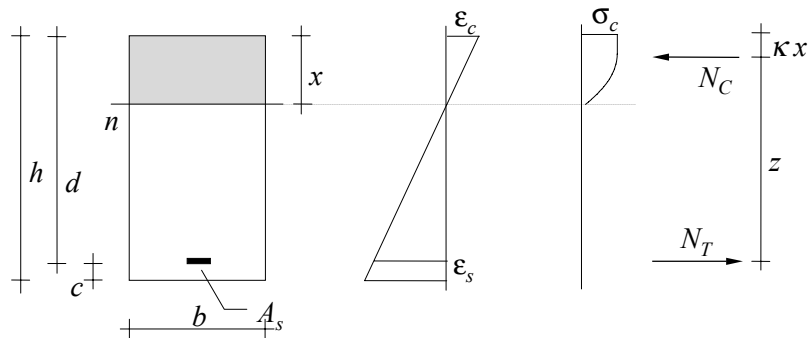
$$N_c + N_s + N'_s = 0$$

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Teatro greco di Taormina  
Foto © Rosario Trifirò

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Si assegni un qualsiasi diagramma limite di deformazioni, individuato dalla distanza  $x$  dell'asse neutro dal bordo superiore.

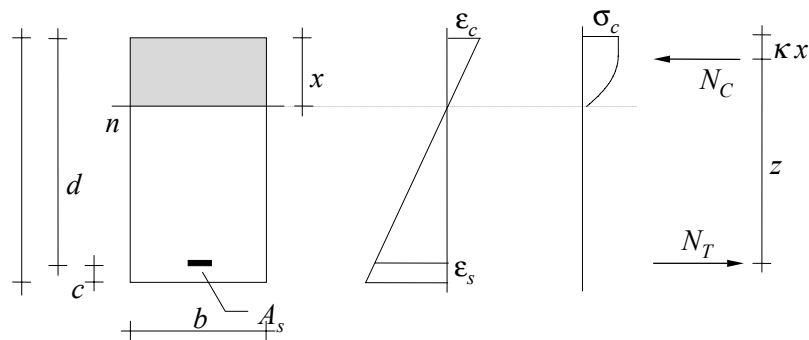


## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

La forza di compressione vale

$$N_C = -\alpha f_{cd} b x \beta$$

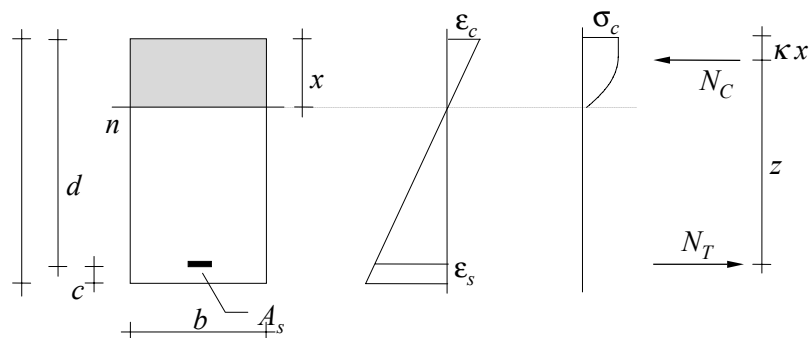
ed è applicata ad una distanza  $\kappa x$  dal bordo compresso



## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

La condizione di equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura tesa si scrive

$$M = -N_C(d - \kappa x) = bd^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}$$

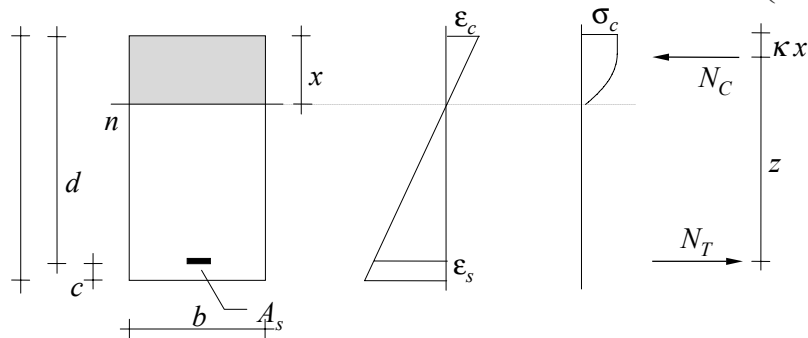


## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Ponendo:  $r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}}}$  si ha:  $M = \frac{b d^2}{r^2}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$b = r \left( \frac{M}{d} \right)^2$$



## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Per conferire alla sezione una buona duttilità può assumersi come diagramma di deformazioni di riferimento un diagramma caratterizzato dall'attingimento di

- $\epsilon_{cu}$  nel cls compresso
- $\epsilon_s = 1\%$  nell'acciaio teso.

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

Utilizzando tale diagramma (per brevità chiamato "C"), per il quale è  $\xi=0.259$ ,  $\beta=0.810$ ,  $\kappa=0.416$ , per un calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25$  MPa si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^{-3}}} = 0.0220$$

$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) |\sigma_c^{\max}|}}$

## ESEMPIO N°2

Progetto a flessione di una sezione rettangolare a semplice armatura

Il castello  
(ACICASTELLO)  
Foto © Francesco Raciti

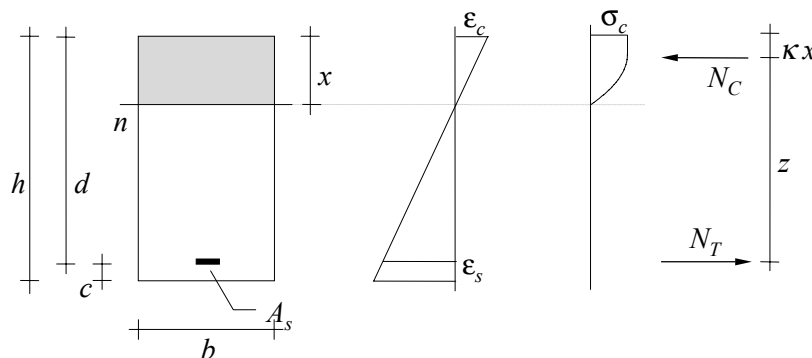
## Esempio-Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### Dati di partenza:

- momento flettente  $M_{sd} = 200 \text{ kNm}$
- diagramma di deformazioni "C"

### Incognite

- dimensioni della sezione  $b, h$
- armatura  $A_s$



## Esempio-Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma C, per il quale è:

- $\xi = 0.259$ ,
- $\beta = 0.810$ ,
- $\kappa = 0.416$

Per un calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$  si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \times \xi \times (1 - \kappa \times \xi) \times \alpha f_{cd}}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^3}} = 0.0220$$

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si assume per l'elemento inflesso una larghezza  $b = 30 \text{ cm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.022 \sqrt{\frac{200 \text{ kNm}}{0.30 \text{ m}}} \approx 0.57 \text{ m}$$

T.A.  $\approx 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$

0.0282

$\Rightarrow h = d + c \approx 0.60 \text{ m}$

T.A. 0.59 m

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

### Progetto dell'armatura

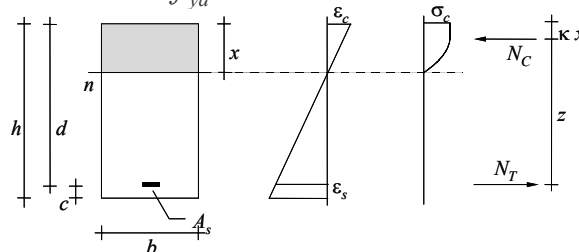
Per quanto riguarda il progetto delle armature, l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto di applicazione di  $N_c$  fornisce l'espressione

$$A_s = \frac{M}{z f_{yd}}$$

con

$$z = \zeta d$$

$$\zeta = 1 - \kappa \xi$$





## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

### Progetto dell'armatura

Facendo riferimento al diagramma di deformazioni  $\epsilon$ , si ha  $\zeta = 0.892$  e si può quindi ancora usare l'espressione approssimata

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Alle tensioni ammissibili la formula è analoga

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \sigma_s}$$

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si ha :

$$\zeta = 1 - 0.416 \cdot 0.259 = 0.892 \quad z = 0.892 \cdot 0.56 \text{ m} = 0.50$$

$$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa (FeB44k)}$$

T.A.

$$\cong 200 / 1.5 = 133 \text{ kNm}$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z f_{yd}} = \frac{200 \text{ kNm}}{0.50 \text{ m} \cdot 373.9 \text{ MPa}} \cdot 10 = 10.7 \text{ cm}^2$$

T.A.

$$255 \text{ MPa}$$

T.A.

$$10.4 \text{ cm}^2$$

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

### Sezione a doppia armatura

In maniera analoga, per sezione a doppia armatura si può giungere alle formule

$$M = \frac{bd^2}{r'^2} \quad d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} \quad b = r' \left( \frac{M}{d} \right)^2$$

$r'$  dipende dal rapporto  $u$  tra armatura compressa ed armatura tesa.

$$r' = k r \quad \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \quad k \cong \sqrt{1 - s' u}$$

## S.L.U. per flessione semplice

### Il coefficiente $r$ o $r'$

I valori dipendono sostanzialmente

- dal tipo di calcestruzzo
- dalla percentuale  $u$  di armatura compressa;
- dal rapporto  $\gamma$  tra copriferro ed altezza utile (ha influenza solo per sezioni molto basse)

**Il tipo di acciaio non interviene direttamente**, perché il limite di deformazione  $\varepsilon_{su}$  è uguale per tutti gli acciai, ma può comportare solo modeste variazioni sulla tensione dell'armatura compressa ( $\sigma'_s = s \sigma_s$ ).

## S.L.U. per flessione semplice

### Confronto tra i coefficienti $r$ o $r'$ : S.L.U.

Calcestruzzo  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$   $\alpha f_{cd} = 11.02 \text{ MPa}$

Acciaio

FeB44k

$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa}$

$\xi = 0.2593$

$1 - \kappa \xi = 0.8921$

|            |            |        |        |        |        |
|------------|------------|--------|--------|--------|--------|
|            | $\gamma =$ | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   |
|            | $s =$      | 1.0000 | 1.0000 | 0.8126 | 0.4407 |
| per $u =$  | $r =$      |        |        | 0.0220 |        |
| $u = 0.25$ | $r' =$     | 0.0189 | 0.0190 | 0.0197 | 0.0209 |
| $u = 0.50$ | $r' =$     | 0.0153 | 0.0155 | 0.0171 | 0.0197 |

## ESEMPIO N°3

Progetto a flessione di una sezione  
rettangolare a doppia armatura

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Dati di partenza:

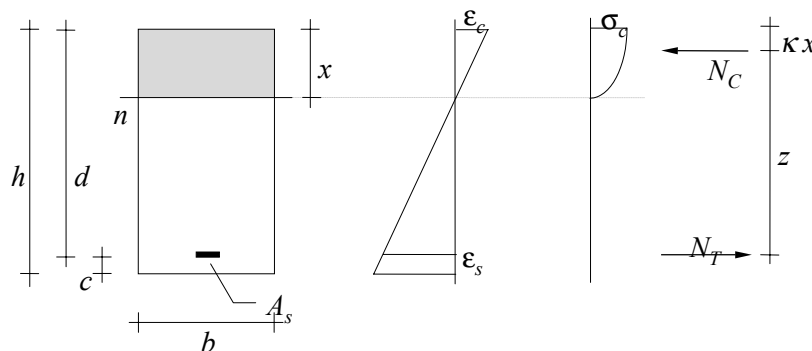
- momento flettente  $M = 200 \text{ kNm}$

- diagramma limite di deformazioni  $C$

Incognite

- dimensioni della sezione  $b, h$

- armatura  $A_s$



## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma  $C$ , per il quale è  $\xi = 0.259$ ,  $\beta = 0.810$ ,  $\kappa = 0.416$ , per un calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$  si ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \times \xi \times (1 - \kappa \times \xi) \times \alpha \times f_{cd}}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{0.810 \times 0.259 \times (1 - 0.416 \times 0.259) \times 11.02 \times 10^3}} = 0.0220$$

Si assume un'armatura in compressione del 25% :

$$k \cong \sqrt{1 - s' u} = \sqrt{1 - 1 \cdot 0.25} = 0.87$$

$$r' = k r = 0.019$$

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Utilizzando il diagramma C, per il quale è  $\xi=0.259$ ,  $\beta=0.810$ ,  $\kappa=0.416$ , per un calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$  si ha

|              |                           |                              |                                     |                              |        |        |          |  |        |        |
|--------------|---------------------------|------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|--------|--------|----------|--|--------|--------|
| Calcestruzzo | $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ |                              | $\alpha f_{cd} = 11.02 \text{ MPa}$ |                              |        |        |          |  |        |        |
| Acciaio      |                           | FeB38k                       |                                     | FeB44k                       |        |        |          |  |        |        |
|              |                           | $f_{yd} = 326.1 \text{ MPa}$ |                                     | $f_{yd} = 373.9 \text{ MPa}$ |        |        |          |  |        |        |
|              |                           | $\xi = 0.2593$               |                                     | $\xi = 0.2593$               |        |        |          |  |        |        |
|              |                           | $1 - \kappa \xi = 0.8921$    |                                     | $1 - \kappa \xi = 0.8921$    |        |        |          |  |        |        |
|              | $\gamma =$                | 0.05                         | 0.10                                | 0.15                         | 0.20   | 0.05   | 0.10     | 0.15   | 0.20   |        |
|              | $s =$                     | 1.0000                       | 1.0000                              | 0.9318                       | 0.5054 | 1.0000 | 1.0000   | 0.8126   | 0.4407 |        |
| per $u =$    | 0                         | $r =$                        | 0.0220                              |                              |        |        | $0.0220$ |  |        |        |
|              | $u = 0.25$                | $r' =$                       | 0.0189                              | 0.0190                       | 0.0194 | 0.0207 | 0.0189   | <span style="border: 1px solid black;">0.0190</span> | 0.0197 | 0.0209 |
|              | $u = 0.50$                | $r' =$                       | 0.0153                              | 0.0155                       | 0.0163 | 0.0193 | 0.0153   | 0.0155   | 0.0171 | 0.0197 |

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si assume per l'elemento inflesso una larghezza  $b = 30 \text{ cm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.19 \sqrt{\frac{200 \text{ kNm}}{30 \text{ cm}}} = 0.49 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = d + c \cong 0.50 \text{ m}$$

## Progetto di sezione rettangolare allo S.L.U. per flessione semplice

### Progetto dell'armatura

Per quanto riguarda il progetto delle armature, l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto di applicazione di  $N_c$  fornisce l'espressione

$$A_s = \frac{M}{z f_{yd}}$$

con

$$z = \zeta d$$

$$\zeta = 1 - \kappa \xi + s' u (\kappa \xi - \gamma)$$

Con buona approssimazione

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

## Esempio - Progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

Si ha :

$$\zeta = 1 - 0.416 \cdot 0.259 = 0.892 \quad z = 0.892 \cdot 0.46 \text{ m} = 0.41$$

$$f_{yd} = 373.9 \text{ MPa (FeB44k)}$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z f_{yd}} = \frac{200 \text{ kNm}}{0.41 \text{ m} \cdot 373.9 \text{ MPa}} \cdot 10 = 13.0 \text{ cm}^2$$

L'armatura compressa è:

$$A'_s = u A_s = 0.25 \cdot 13.0 = 3.3 \text{ cm}^2$$



Festa di S. Agata (CATANIA)  
Foto © Rosario Trifirò

## Alcune riflessioni sulla duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità, definita come **rapporto tra la rotazione ultima e la rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa**

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo.

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

## Esempio - Duttività della sezione

Sezione 30x50

Cl<sub>s</sub> R<sub>ck</sub>=25 MPa

M<sub>sd</sub>= 300 kNm

Acciaio FeB44k

Si sono presi in esame più casi, corrispondenti al raggiungimento dello stato limite in campi diversi, ottenuti utilizzando quattro percentuali di armatura compressa:

u=0.6

u=0.3

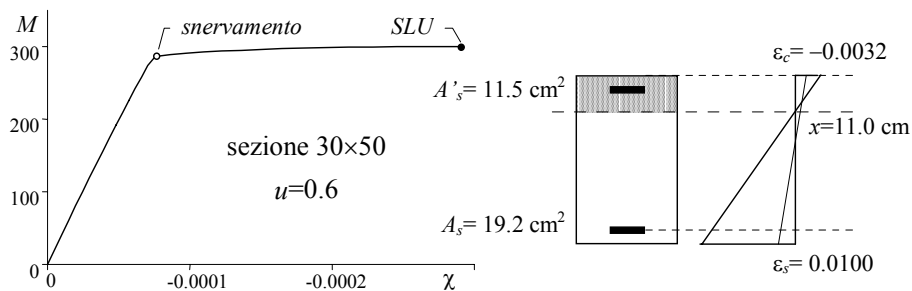
u=0.08

u=0

## Esempio - Duttività della sezione

CASO 1 (u=0.6)

$\varepsilon_s = 0.01$      $x = 11.0$  cm     $\chi = -0.000286$

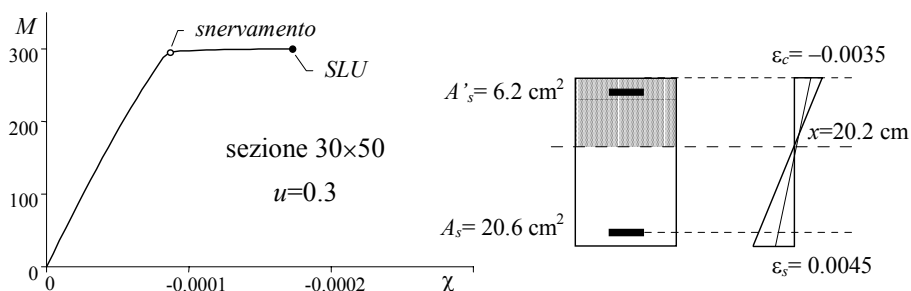




## Esempio - Duttività della sezione

CASO 2 ( $u=0.3$ )

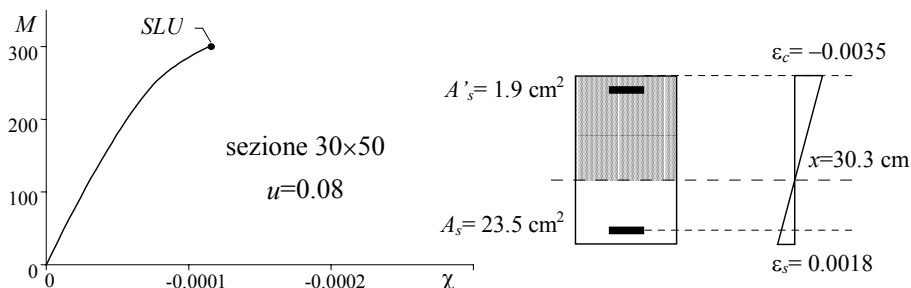
$$\varepsilon_s = 0.0045 \quad x = 20.2 \text{ cm} \quad \chi = -0.000084$$



## Esempio - Duttività della sezione

CASO 3 ( $u=0.08$ )

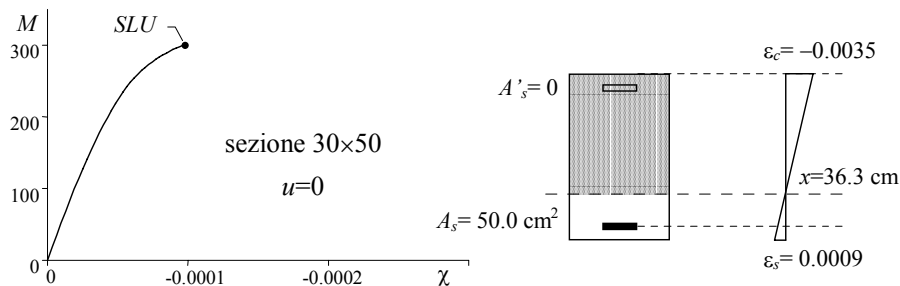
$$\varepsilon_s = 0.0018 \quad x = 30.3 \text{ cm} \quad \chi = -0.000116$$



## Esempio - Duttività della sezione

CASO 4 ( $u=0$ )

$$\varepsilon_s = 0.0009 \quad x = 36.2 \text{ cm} \quad \chi = -0.000097$$



## Duttività della sezione

E' la quantità di armatura tesa presente nella sezione a determinare in quale campo si avrà il collasso le sezioni possono essere denominate

- sezioni ad alta duttilità, o sezioni a debole armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 2;
- sezioni a media duttilità, o sezioni a media armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 3;
- sezioni a bassa duttilità, o sezioni a forte armatura, quando si raggiunge la deformazione limite nel campo 4.

**In fase di progetto è sempre bene mirare ad ottenere una buona duttilità e quindi a rientrare nel campo 2 o al più nel campo 3.**

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### Confronto tra i coefficienti: considerazioni

Il coefficiente  $r_{SLU}$  è circa il 20% più piccolo di  $r_{TA}$ .

Il valore di calcolo del carico  $F_d$  (e quindi di  $M_{sd}$ ) è maggiore di circa il 40-50% rispetto a  $F_k$  (e quindi di  $M_{sk}$ )

Il prodotto ( $r^2 M_{sd}$ ) assume in entrambi i casi all'incirca lo stesso valore

→ l'altezza  $d$  calcolata mediante la formula è sostanzialmente la stessa in entrambi i casi.

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### ALLO S.L.U.

Per  $M_{sd}=200\text{kNm}$

- per una sezione a semplice armatura

$$r = 0.022$$

$$d = 0.57$$

### ALLE T.A.

$M_{sk} = 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$

- per una sezione a semplice armatura

$$r = 0.0282$$

$$d = 0.59$$

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 2 - Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa è invece circa doppio rispetto al caso delle tensioni ammissibili (nel senso che  $\mu=0.50$  allo SLU equivale circa a  $\mu=1.00$  alle TA).

Ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo, o quasi ( $s \cong 1$ ) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ( $s = 0.3 \div 0.5$ ).

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 2 - Contributo dell'armatura compressa

SLU

l'armatura compressa  
lavora al massimo

( $s \cong 1$ )

$\mu=0.50$  allo SLU

T.A.

l'armatura compressa  
ha un tasso di lavoro  
molto più basso di  
quello ammissibile

( $s' = 0.3 \div 0.5$ )

$\mu=1.00$  alle T.A.

$\cong$

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### ALLO S.L.U.

Per  $M_{sd} = 200 \text{ kNm}$

- per una sezione con il 25% di armatura compressa

$$r = 0.019$$

$$d = 0.49$$

### ALLE T.A.

$M_{sk} = 200/1.5 = 133 \text{ kNm}$

- per una sezione con il 25% di armatura compressa

$$r = 0.0269$$

$$d = 0.57$$

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali

I valori proposti per il coefficiente  $r$  sono stati calcolati con riferimento a ben precisi diagrammi di tensione o deformazione.

Cosa cambia nei due metodi facendo variare il tasso di lavoro dell'armatura?

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali (T.A.)

Alle T.A., si utilizzano i valori limite delle tensioni  $\bar{\sigma}_c$  e  $\bar{\sigma}_s$ .

Se si usa  $\sigma_s < \bar{\sigma}_s$

→ la parte compressa aumenta

→ l'altezza necessaria diminuisce.

La riduzione di tensione rende necessaria una quantità di armatura maggiore sproporzionata al vantaggio che potrebbe comportare la riduzione di sezione

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali (T.A.)

Ad esempio

Se  $\sigma_s = 0.5 \times \bar{\sigma}_s$

$A_s = 2 A_s$

→  $d = 0.85 d$

si può ridurre l'altezza solo del 15%.

I margini di manovra del progettista sono limitati.

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali (T.A.)

In alternativa per ridurre  $d$  si può aumentare  $A$ 's.

Anche questo non è troppo vantaggioso:

per  $u = 1 \rightarrow d \cong 0.70 d_{u=0}$  (Riduzione del 30%)

$A_{\text{tot}} \cong 3 A_{s,u=0}$  (se si tiene conto anche dell'effetto della riduzione dell'altezza)

I margini di manovra del progettista sono limitati.

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali (S.L.U.)

Nel caso dello stato limite ultimo, si è mirato a raggiungere contemporaneamente:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$$

Se

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{su} \rightarrow \sigma_s = f_{yd} \quad (\text{almeno fino a } \varepsilon_{yd})$$

Cresce, anche notevolmente, il contributo del calcestruzzo compresso

## Confronto sul progetto di una sezione rettangolare a flessione semplice

### 3 - Margini progettuali (S.L.U.)

Se:

$$A_s = 2 A_s$$

A parità di sezione si trova

$$M_{rd} \cong 1.80 M_{rd}$$

→ Si può ridurre l'altezza di oltre il 30%.

