

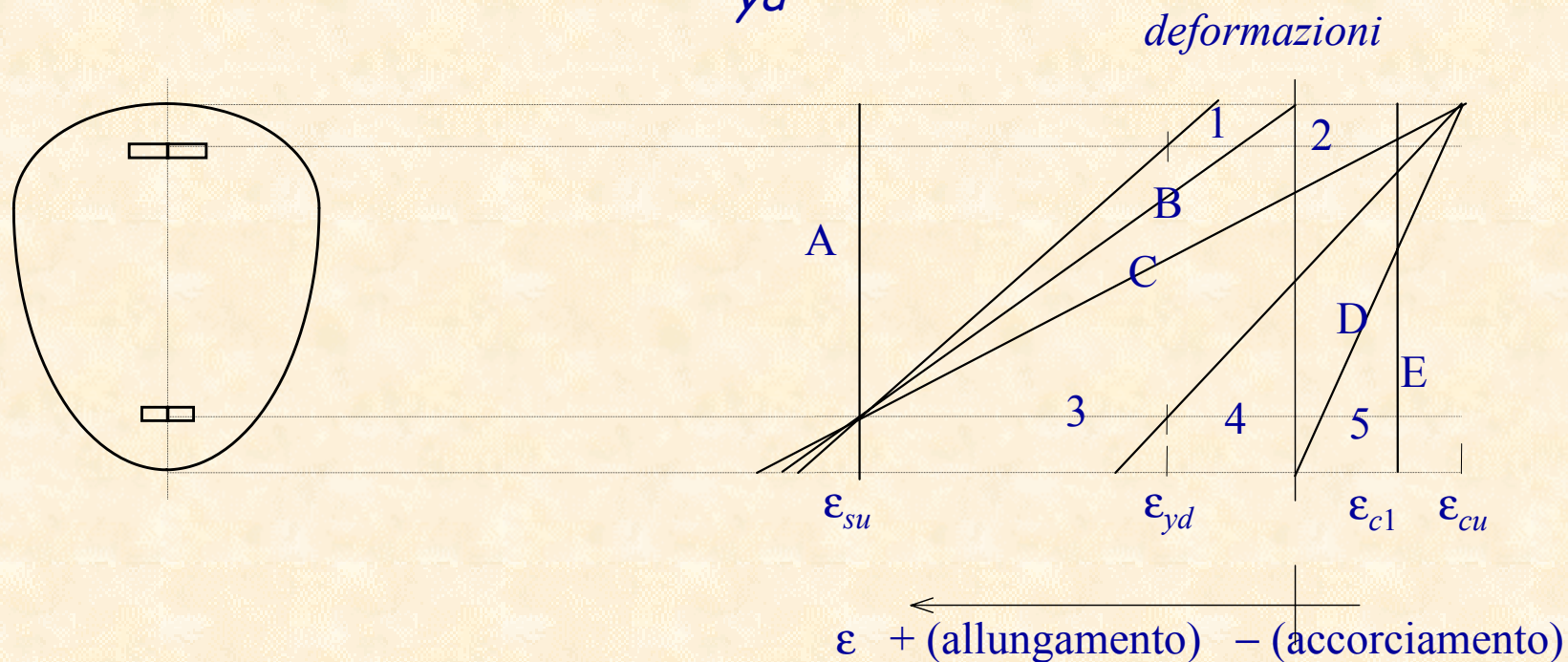
Sezioni in c.a.
La flessione composta

Teramo, 27-28 febbraio 2004

Marco Muratore

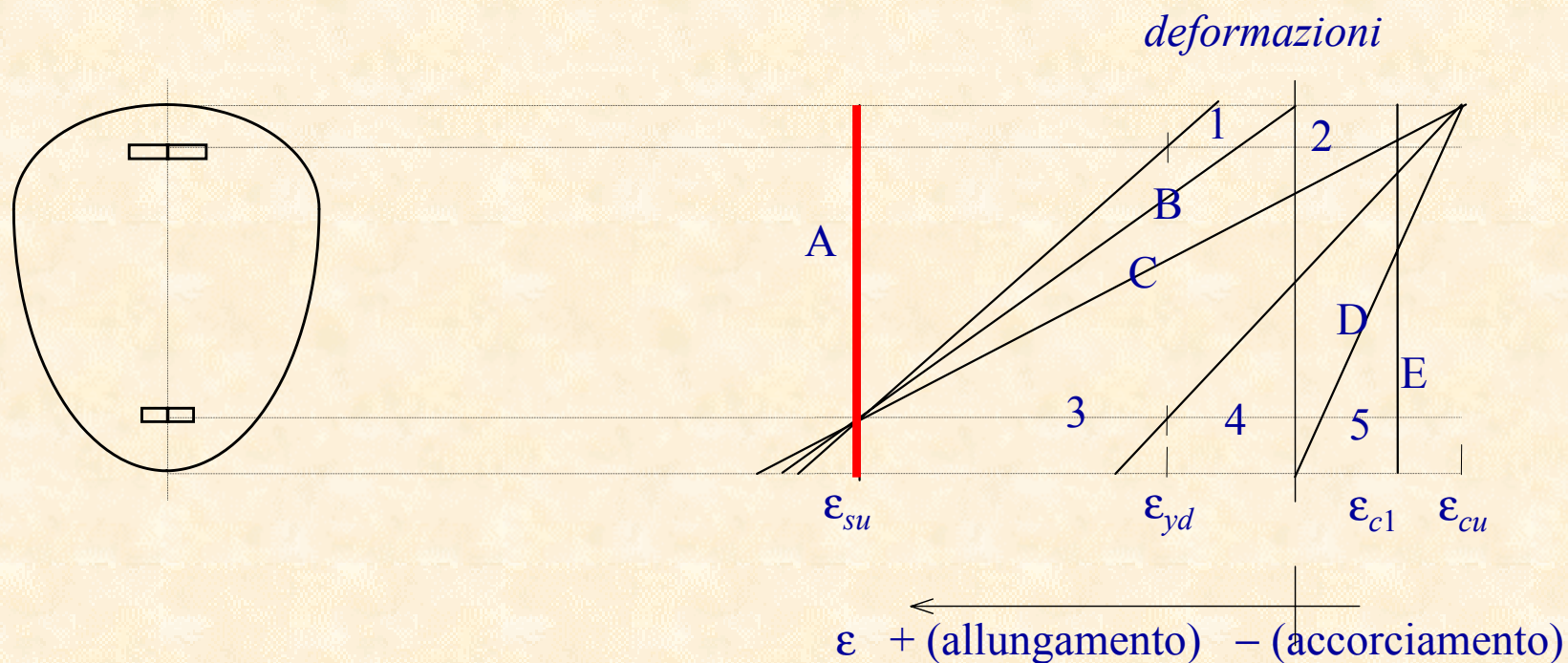
Diagrammi limite di deformazione

Si possono individuare **diagrammi limite di deformazione**, nei quali si raggiunge il valore ultimo della deformazione del calcestruzzo ϵ_{cu} o dell'acciaio ϵ_{su} ; hanno particolare importanza anche situazioni nelle quali si raggiunge la deformazione limite di snervamento ϵ_{yd} nell'acciaio.



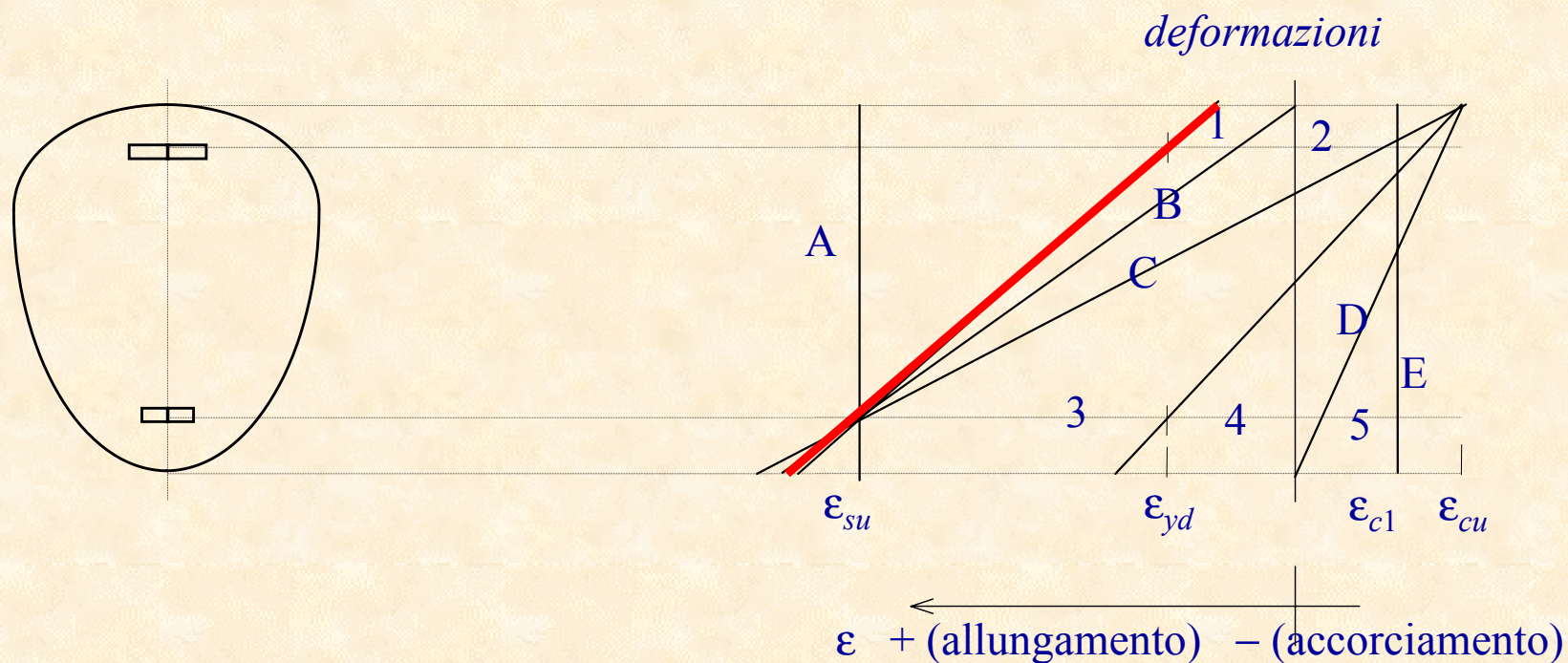
Diagrammi limite di deformazione

A) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore che in quella superiore;



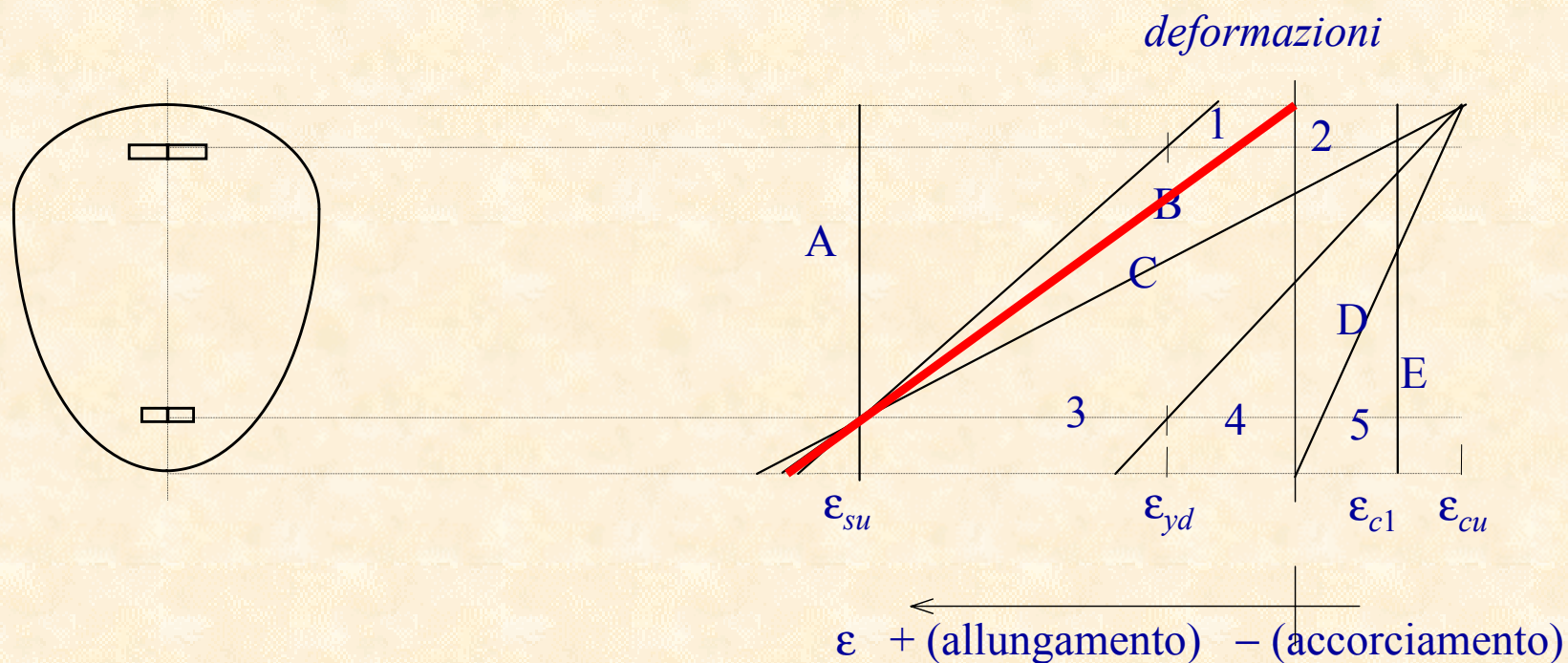
Diagrammi limite di deformazione

A') sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e ϵ_{sy} in quella superiore;



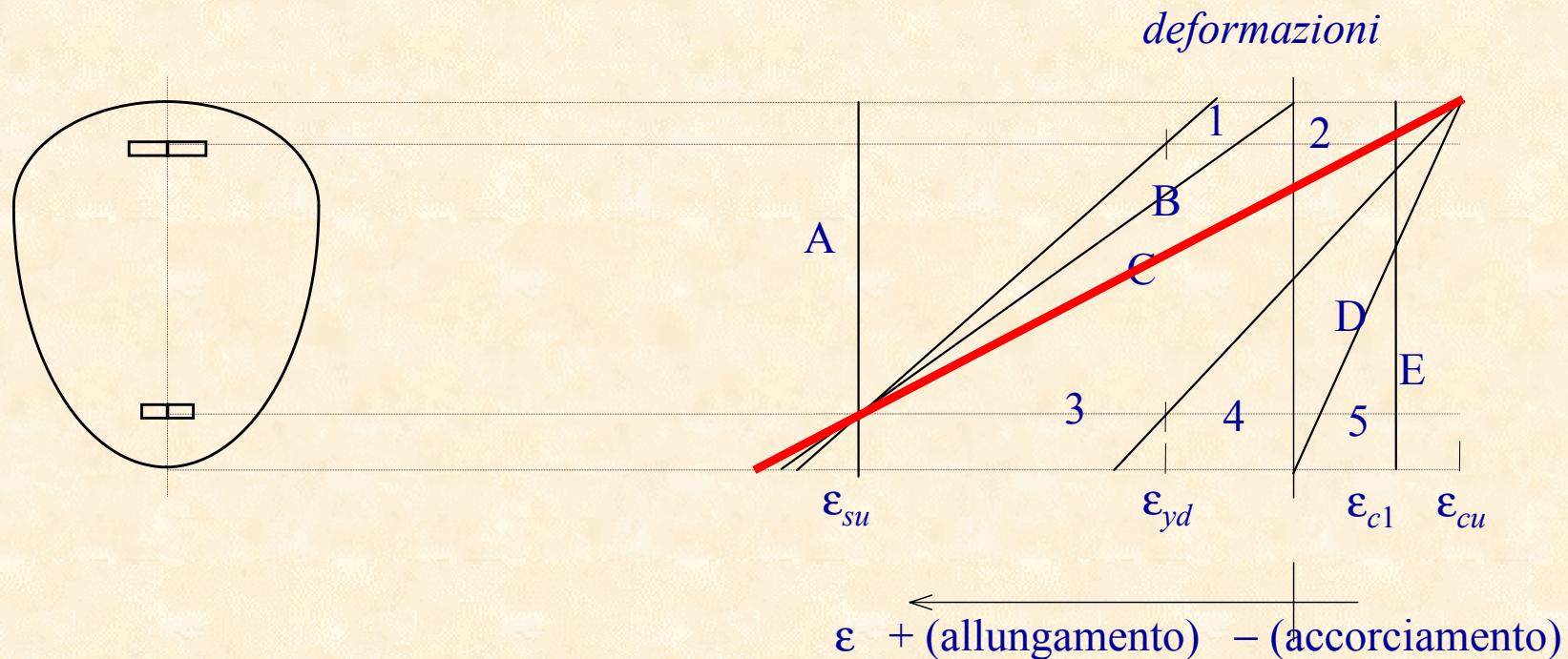
Diagrammi limite di deformazione

B) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e nulla al bordo superiore;



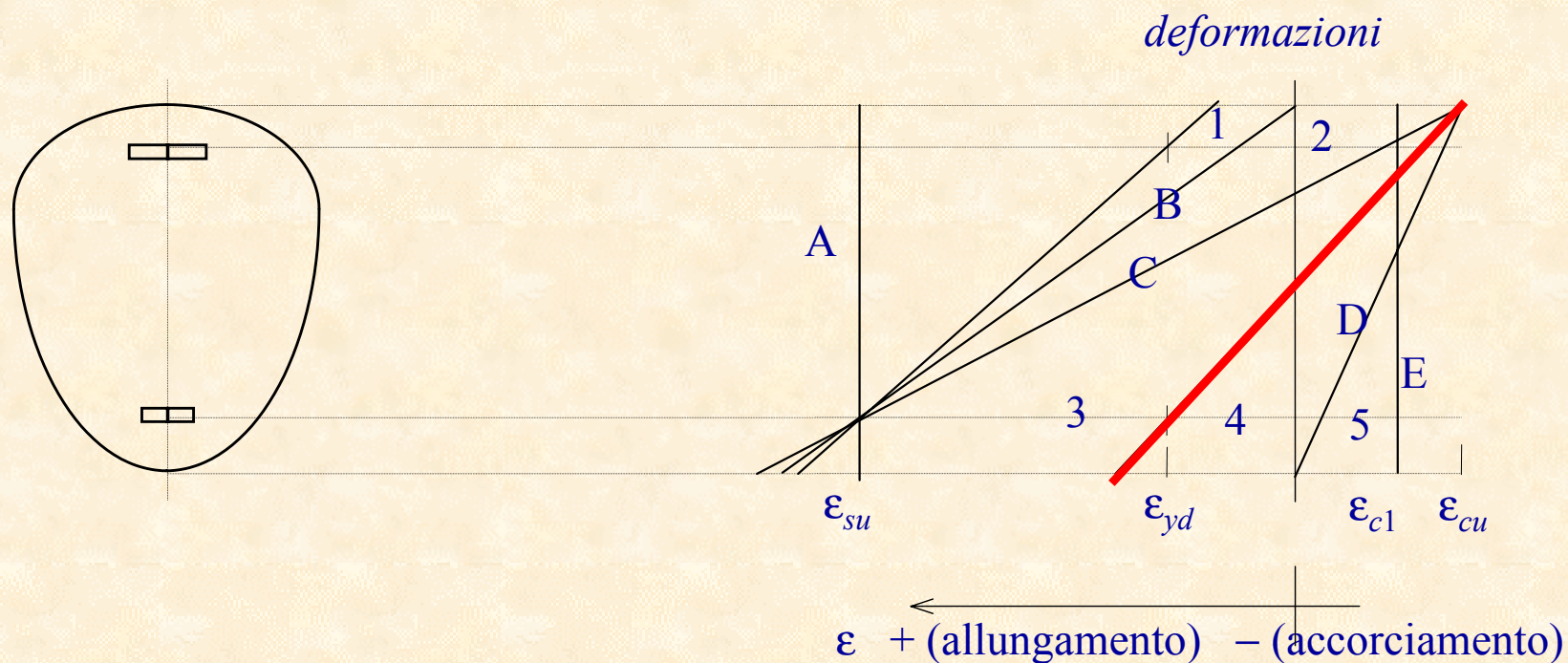
Diagrammi limite di deformazione

C) sezione parzializzata, con deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore e ϵ_{cu} al bordo superiore;



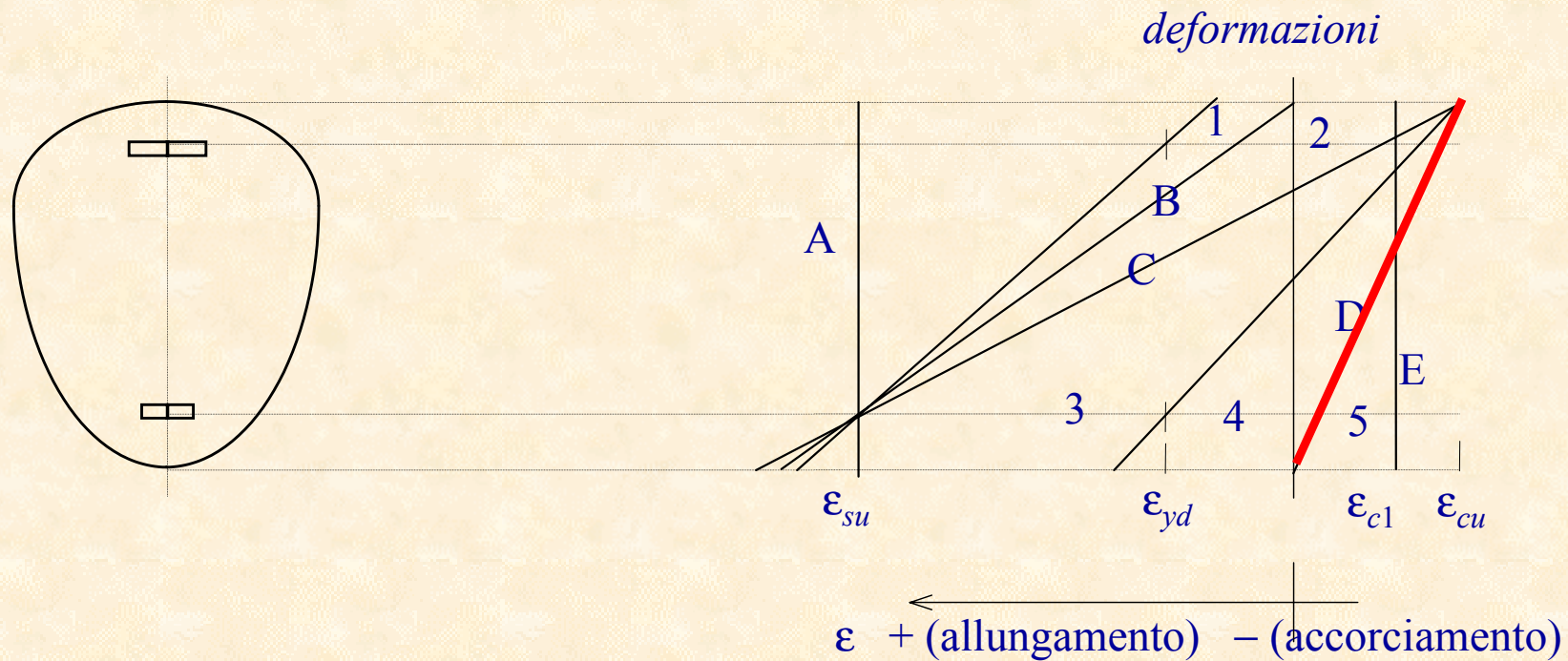
Diagrammi limite di deformazione

C') sezione parzializzata, con deformazione pari a ϵ_{sy} nell'armatura inferiore e ϵ_{cu} al bordo superiore;



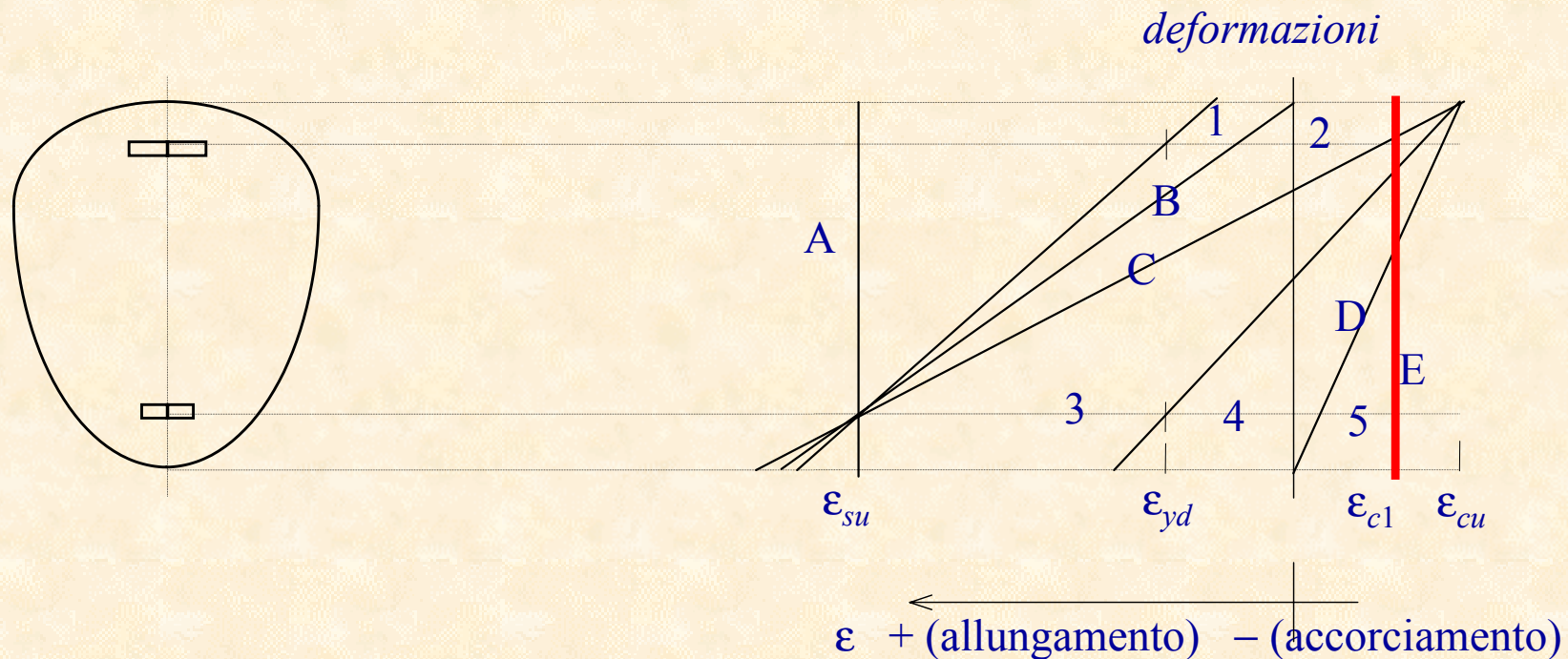
Diagrammi limite di deformazione

D) sezione tutta compressa, con deformazione nulla al bordo inferiore e ϵ_{cu} a quello superiore;



Diagrammi limite di deformazione

E) sezione tutta compressa, con deformazione pari a ϵ_{cl} sia al bordo inferiore che a quello superiore

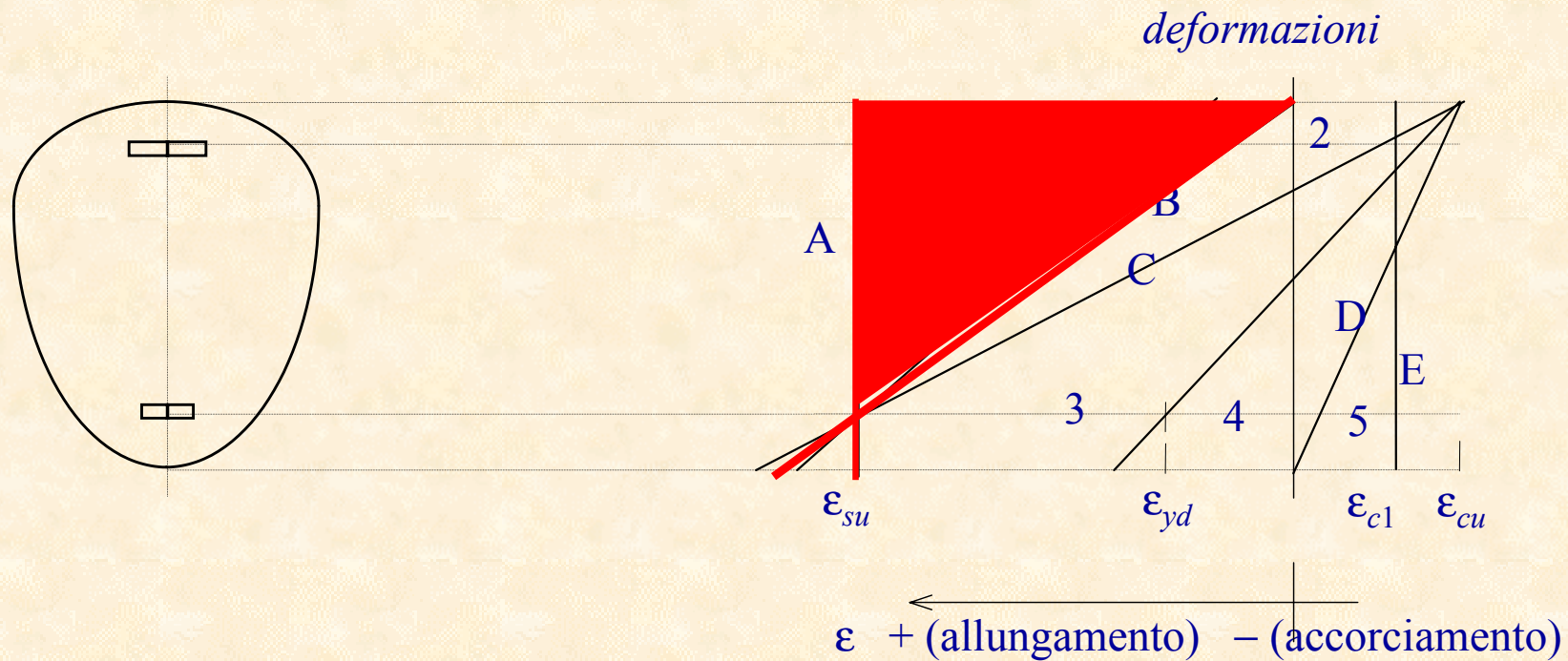


Diagrammi limite di deformazione

- A) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore che in quella superiore;
- A') sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e ε_{sy} in quella superiore;
- B) sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e nulla al bordo superiore;
- C) sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore e ε_{cu} al bordo superiore;
- C') sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{sy} nell'armatura inferiore e ε_{cu} al bordo superiore;
- D) sezione tutta compressa, con deformazione nulla al bordo inferiore e ε_{cu} a quello superiore;
- E) sezione tutta compressa, con deformazione pari a ε_{cl} sia al bordo inferiore che a quello superiore

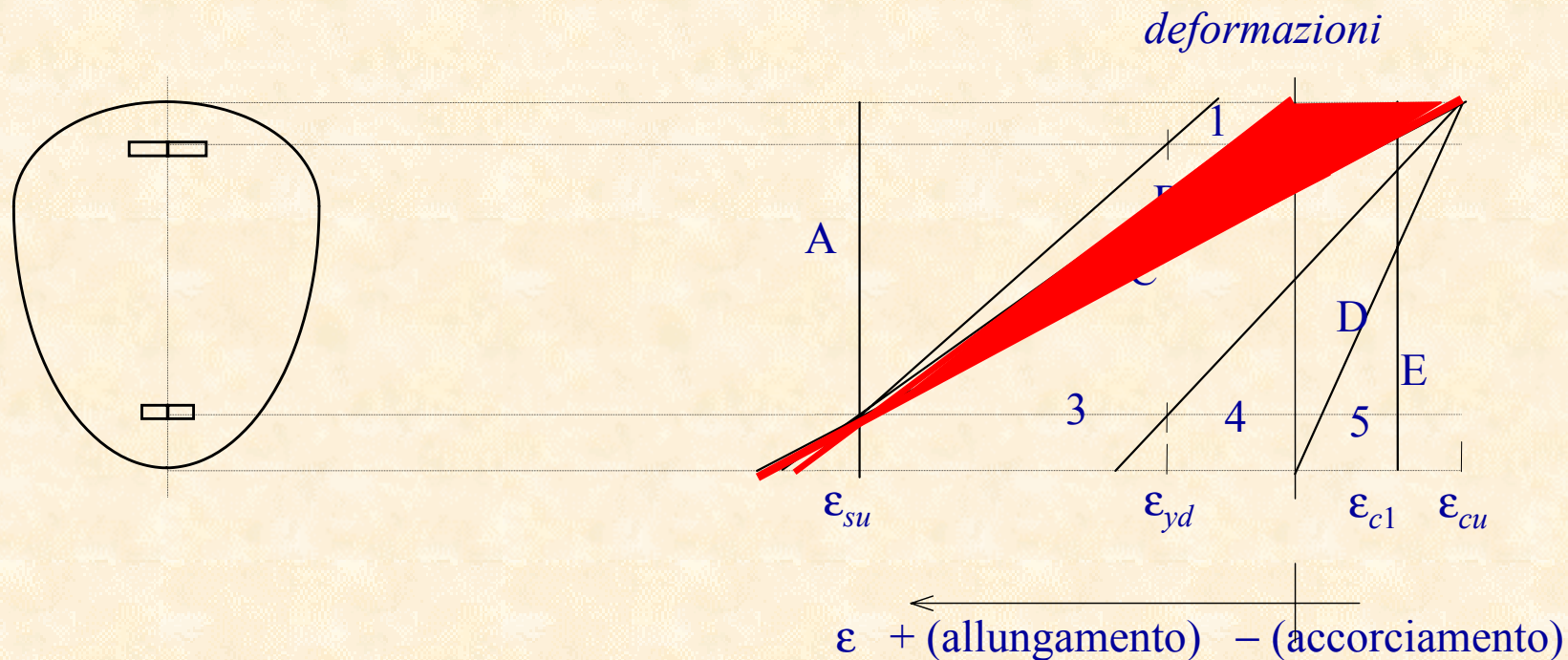
Campi limite di deformazione

- 1) compreso tra A e B:
sezione tutta tesa,
deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore;



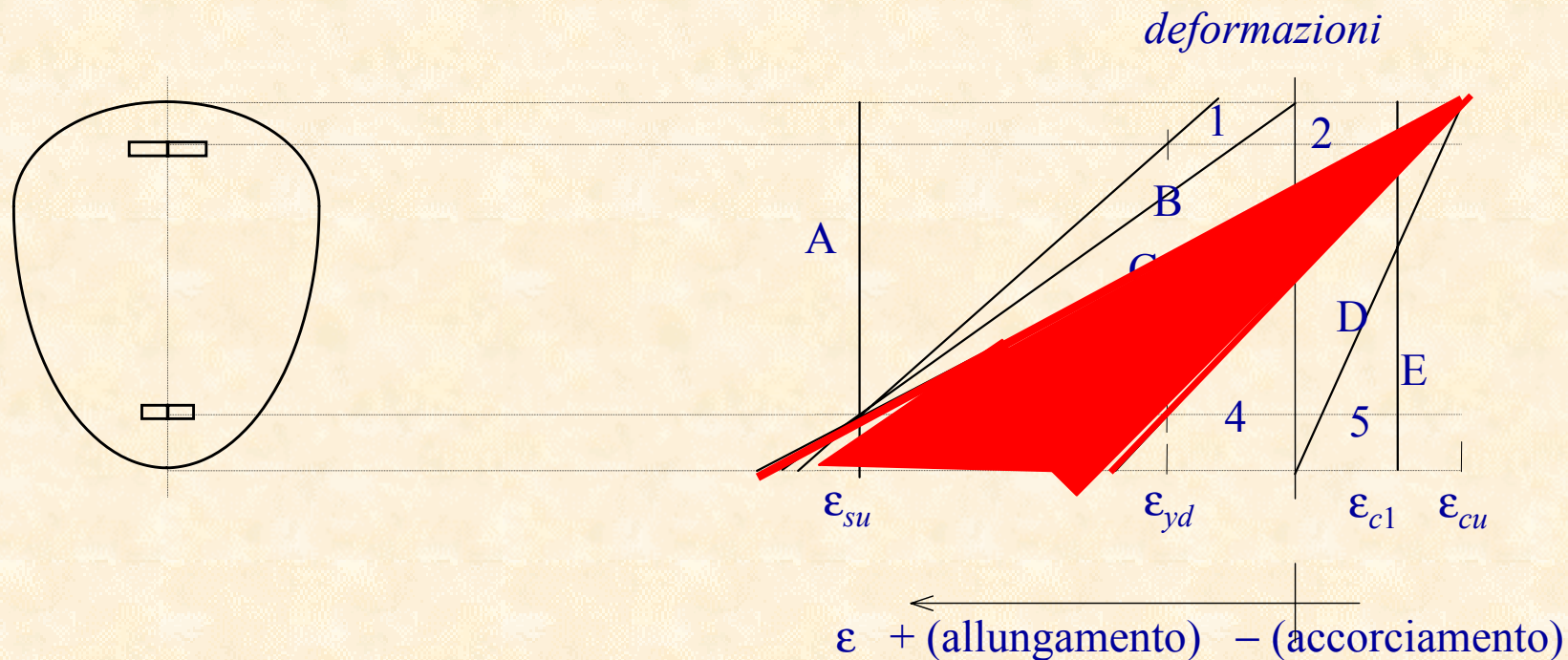
Campi limite di deformazione

2) compreso tra B e C:
sezione parzializzata,
deformazione pari a ϵ_{su} nell'armatura inferiore;



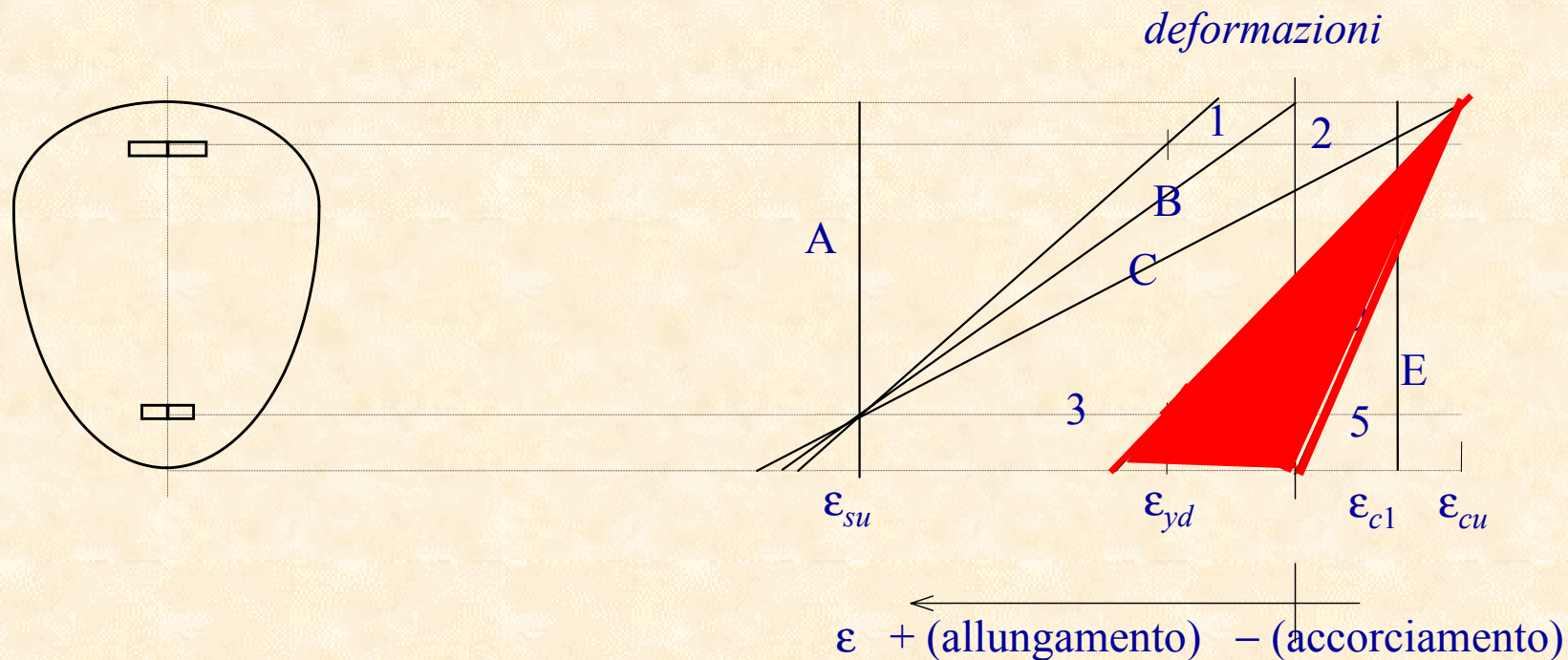
Campi limite di deformazione

3) compreso tra C e C' :
sezione parzializzata,
deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore
deformazione compresa tra ε_{yd} e ε_{su} al bordo inferiore;



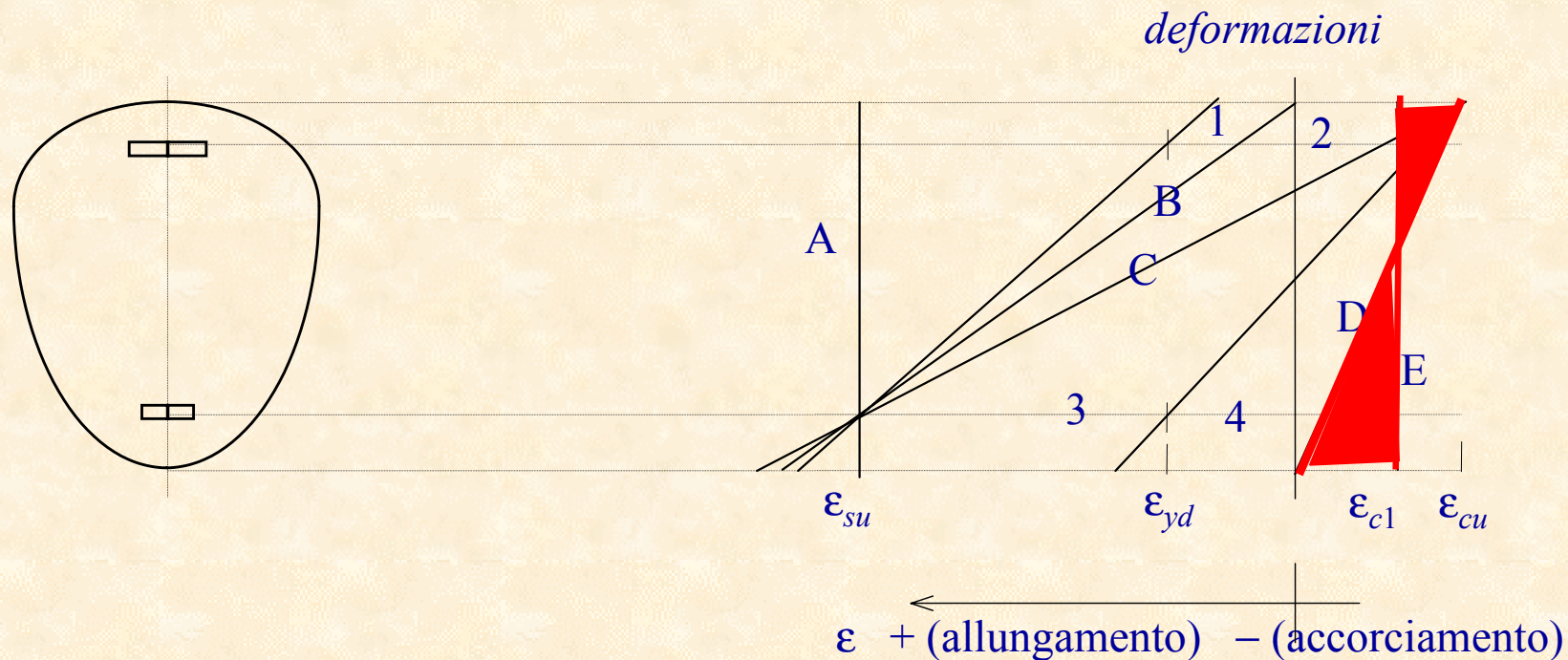
Campi limite di deformazione

4) compreso tra C' e D:
sezione parzializzata,
deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore
deformazione minore di ε_{yd} al bordo inferiore;



Campi limite di deformazione

5) compreso tra D ed E:
sezione tutta compressa,
deformazione pari a ϵ_{c1} in un punto opportunamente situato
rispetto al bordo superiore.



Campi limite di deformazione

I diagrammi limite individuano i seguenti campi di comportamento:

- 1) compreso tra A e B: sezione tutta tesa, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore;
- 2) compreso tra B e C: sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{su} nell'armatura inferiore;
- 3) compreso tra C e C': sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore e deformazione compresa tra ε_{yd} e ε_{su} al bordo inferiore;
- 4) compreso tra C' e D: sezione parzializzata, con deformazione pari a ε_{cu} al bordo superiore e deformazione minore di ε_{yd} al bordo inferiore;
- 5) compreso tra D ed E: sezione tutta compressa, con deformazione pari a ε_{cl} in un punto opportunamente situato rispetto al bordo superiore.

Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili

Per ciascun diagramma di deformazione che porta al raggiungimento del valore ultimo della deformazione nel calcestruzzo o nell'acciaio si può calcolare la corrispondente coppia limite $M-N$. L'insieme di queste coppie definisce una curva (dominio limite), all'esterno del quale si trovano le coppie $M-N$ non accettabili.

Questi domini, che consentono una valutazione immediata della capacità resistente della sezione, dipendono dalle caratteristiche del materiale, dalla sezione e dall'armatura presente.

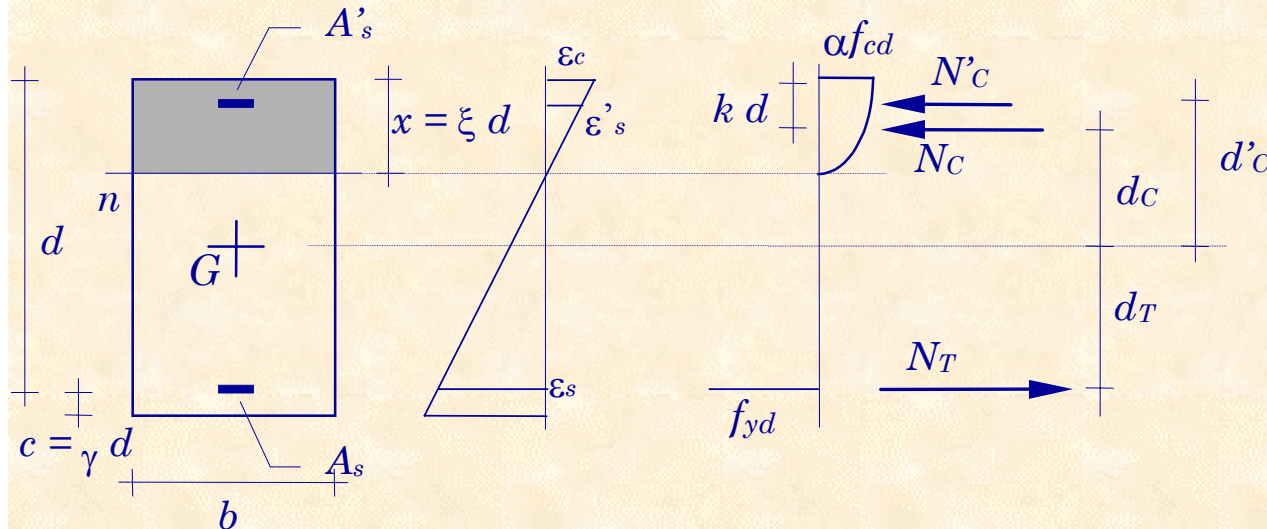
Costruzione del dominio M-N

Assegnata una deformata di rottura, si determina il diagramma delle deformazioni ed attraverso i legami costitutivi quello delle tensioni. Quindi si calcolano le risultanti delle tensioni di compressione e di trazione N_C , N'_C ed N_T :

$$N_T = \sigma_s A_s = s f_{yd} A_s \quad s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \leq 1$$

$$N'_C = \sigma'_s A'_s = s' u f_{yd} A_s \quad s' = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} \leq 1 \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

$$N_C = \alpha f_{cd} \beta \xi b d \quad \beta \text{ è tabellato in funzione di } \xi$$



Equilibrio alla traslazione:

$$N = N_T + N_C + N'_C$$

Equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro geometrico della sezione

$$M = N_T d_T + N_C d_C + N'_C d'_C$$

Le coordinate N ed M corrispondono ad una deformata di rottura ed individuano sul piano N-M un punto del dominio.

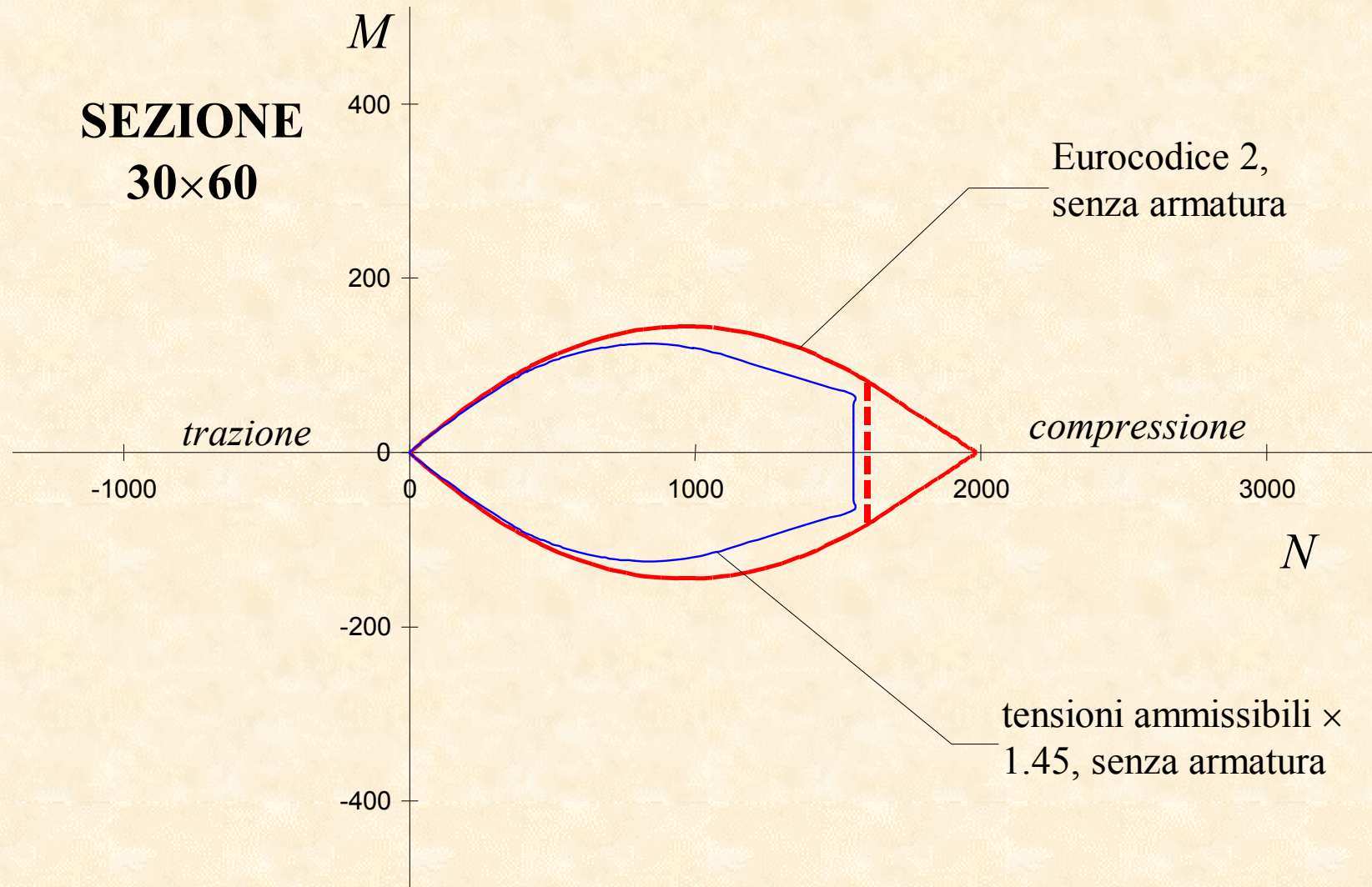
Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili

Analoghi domini limite si possono determinare operando col metodo delle tensioni ammissibili. Volendo effettuare un confronto tra i due approcci, occorre però tenere presente che operando col metodo delle tensioni ammissibili si utilizzano i valori caratteristici dei carichi, mentre allo stato limite ultimo questi sono moltiplicati per il coefficiente γ (1.4 o 1.5 a seconda che il carico sia permanente o variabile). Per effettuare un confronto a titolo esemplificativo si può sovrapporre il dominio relativo alle tensioni ammissibili (incrementato di 1.45, valore medio tra 1.4 e 1.5) a quello valutato secondo le prescrizioni dell'Eurocodice 2.

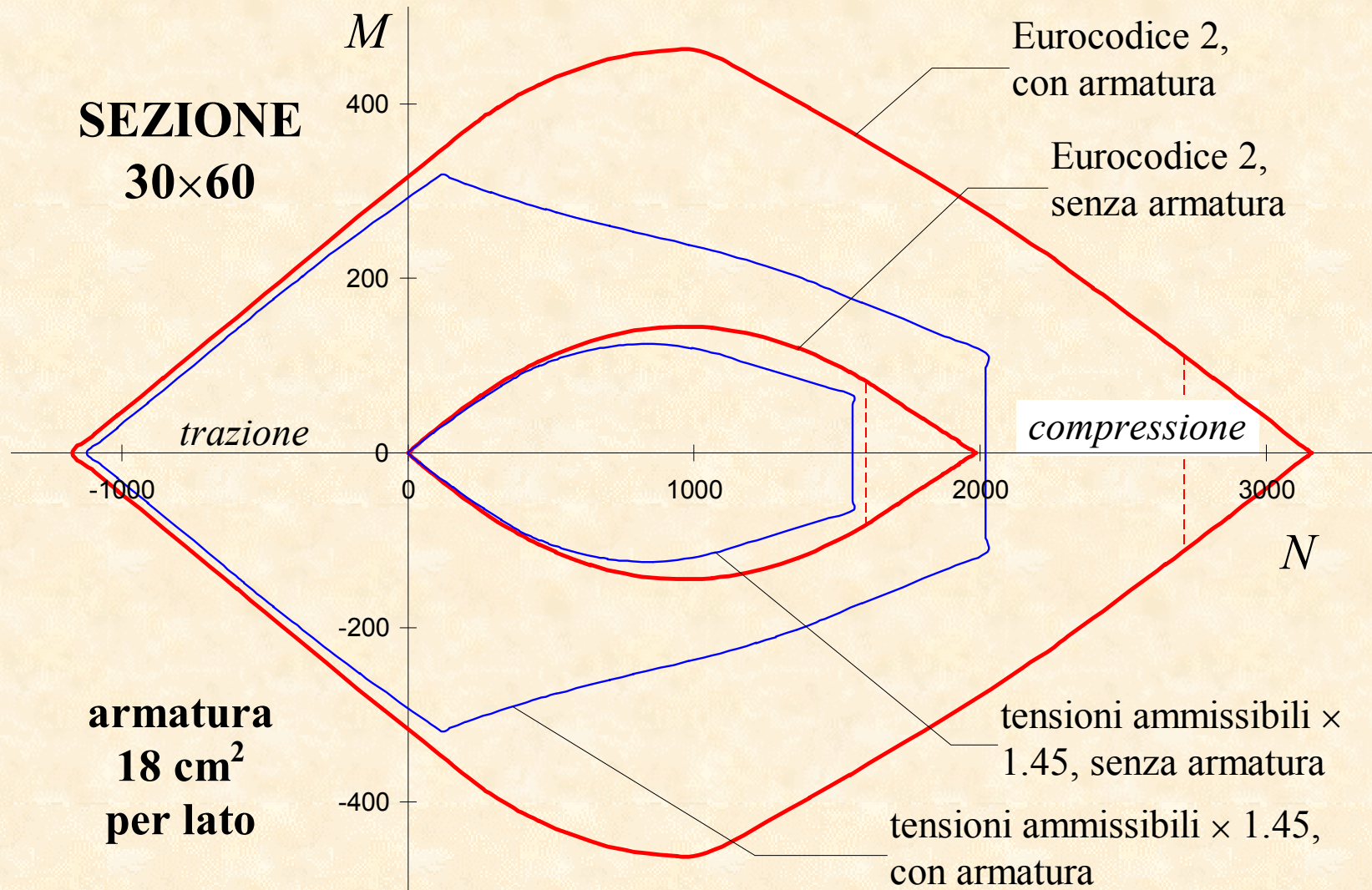
Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



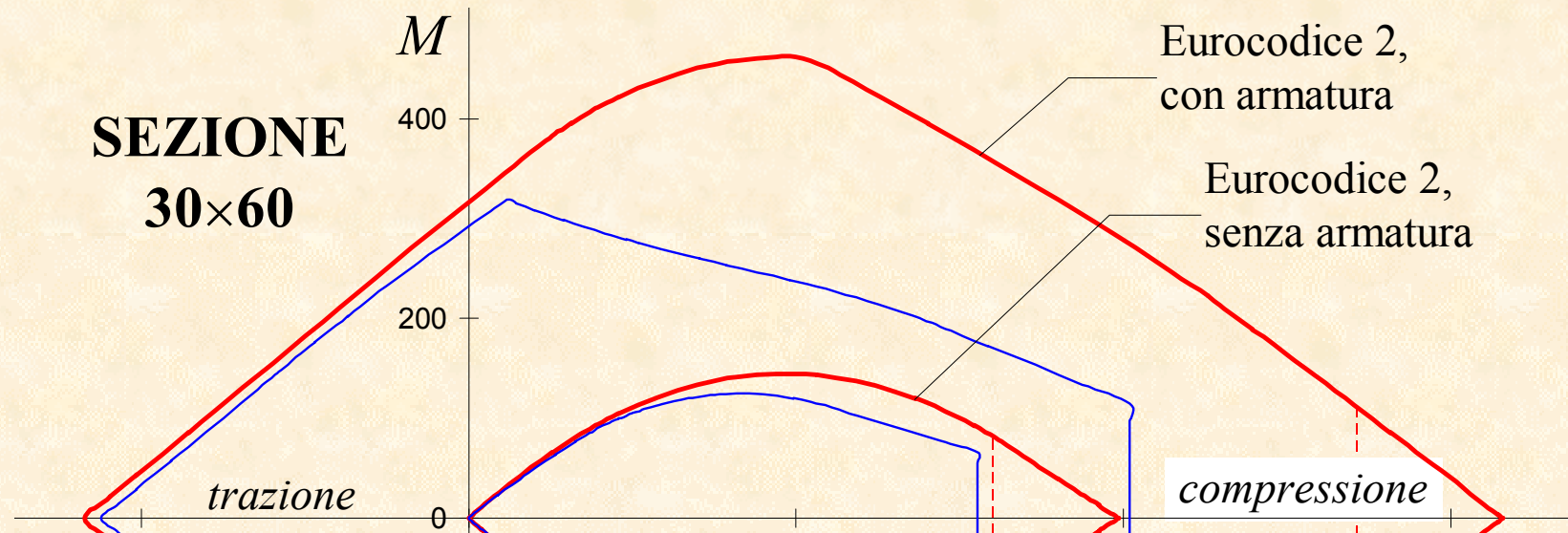
Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



Domini di resistenza

Confronto tra S.L.U. e Tensioni Ammissibili



in assenza di armatura i domini sono abbastanza prossimi l'un l'altro

si ha una buona concordanza per sforzi normali di trazione

in caso di compressione la differenza è notevole (contributo armatura compressa)



L'isola Lachea
(ACITREZZA)
Foto © [Amastray](#)

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Sezioni rettangolari

Si mostra un metodo semplificato per la progettazione o la verifica di sezioni rettangolari pressoinflesse.

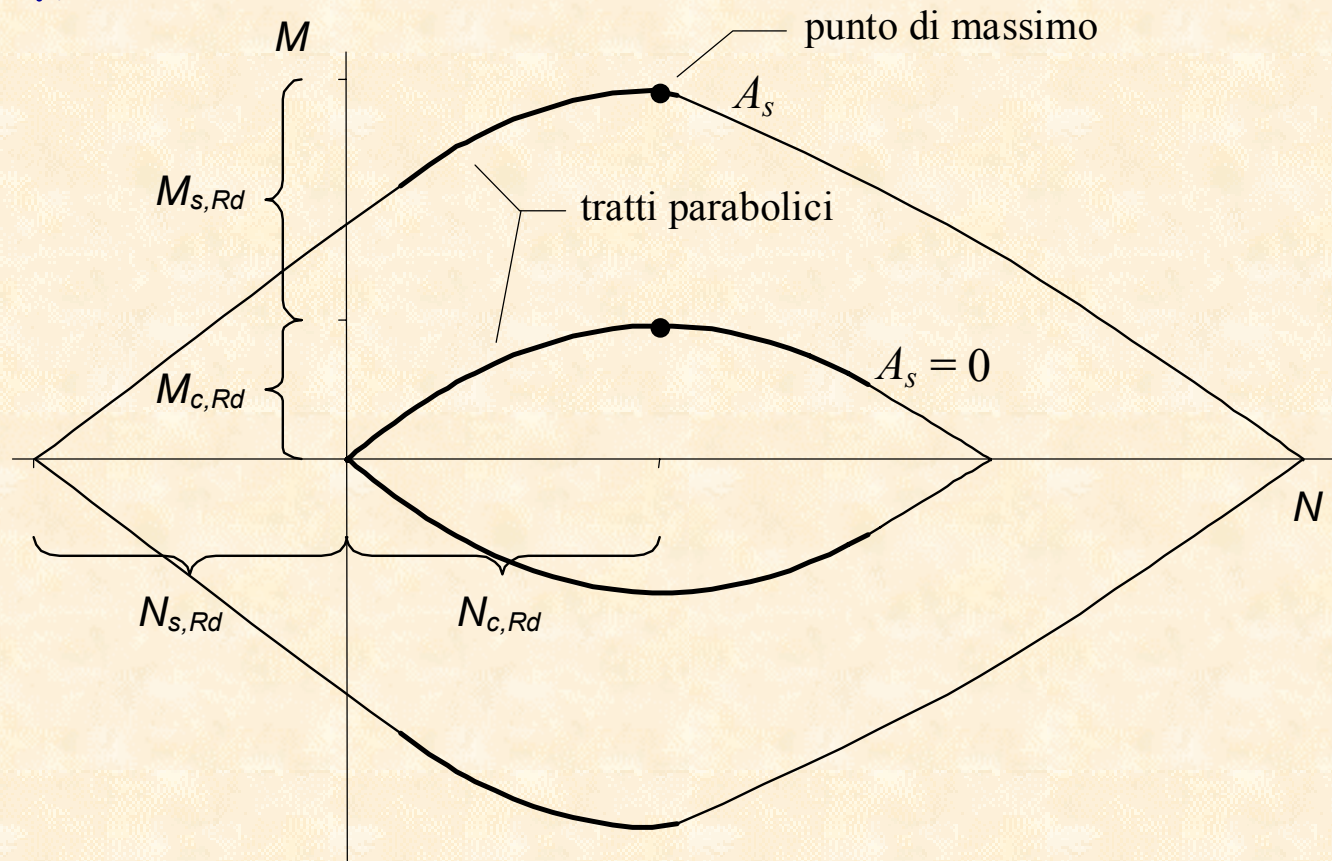
Il metodo si basa sull'approssimazione del dominio di resistenza con equazioni lineari e paraboliche che consentono una formulazione analitica chiusa della frontiera del dominio.

Le ipotesi di partenza è la simmetria dell'armatura tesa e compressa (caso assai frequente nei pilastri).

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Progetto e verifica di sezioni rettangolari

Il metodo si basa su alcuni elementi caratteristici
del dominio



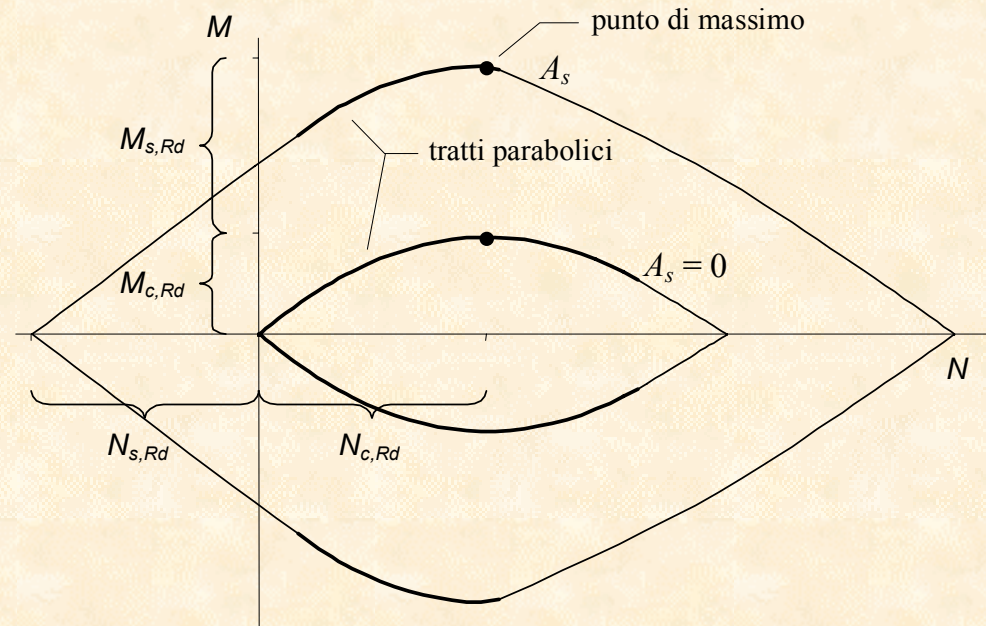
Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Progetto e verifica di sezioni rettangolari

$$M = \beta b x \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

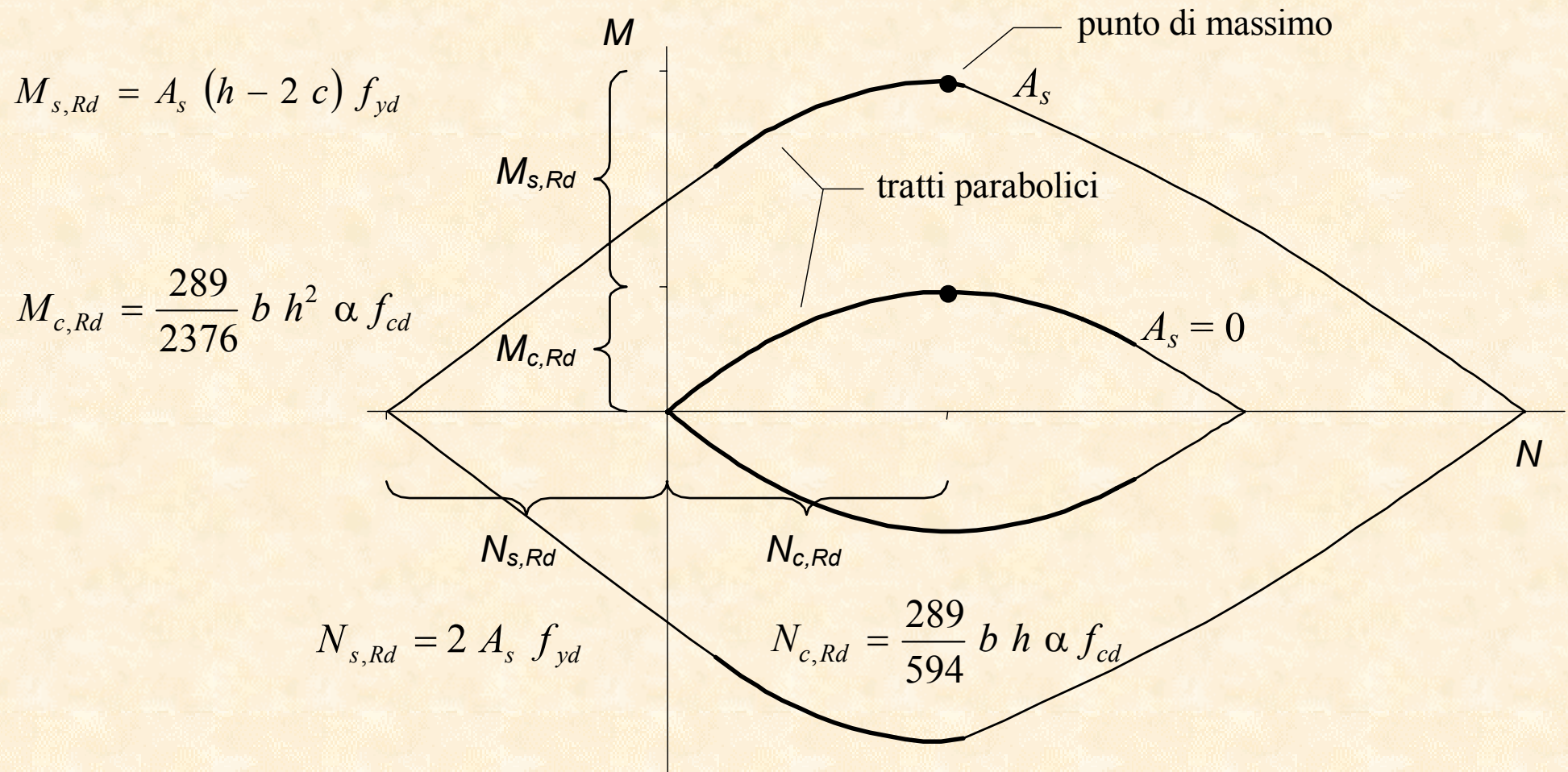


$$M = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2c) f_{yd} \cong 0.12 b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$N = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 b h \alpha f_{cd}$$

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Progetto e verifica di sezioni rettangolari



Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^m \right]$$

$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)$$

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Verifica a pressoflessione retta

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1 \quad m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)$$

In alternativa:

– per $N_{Sd} < 0$ (tensoflessione)

$$\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1$$

– per N_{Sd} compreso tra 0 e $N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$$

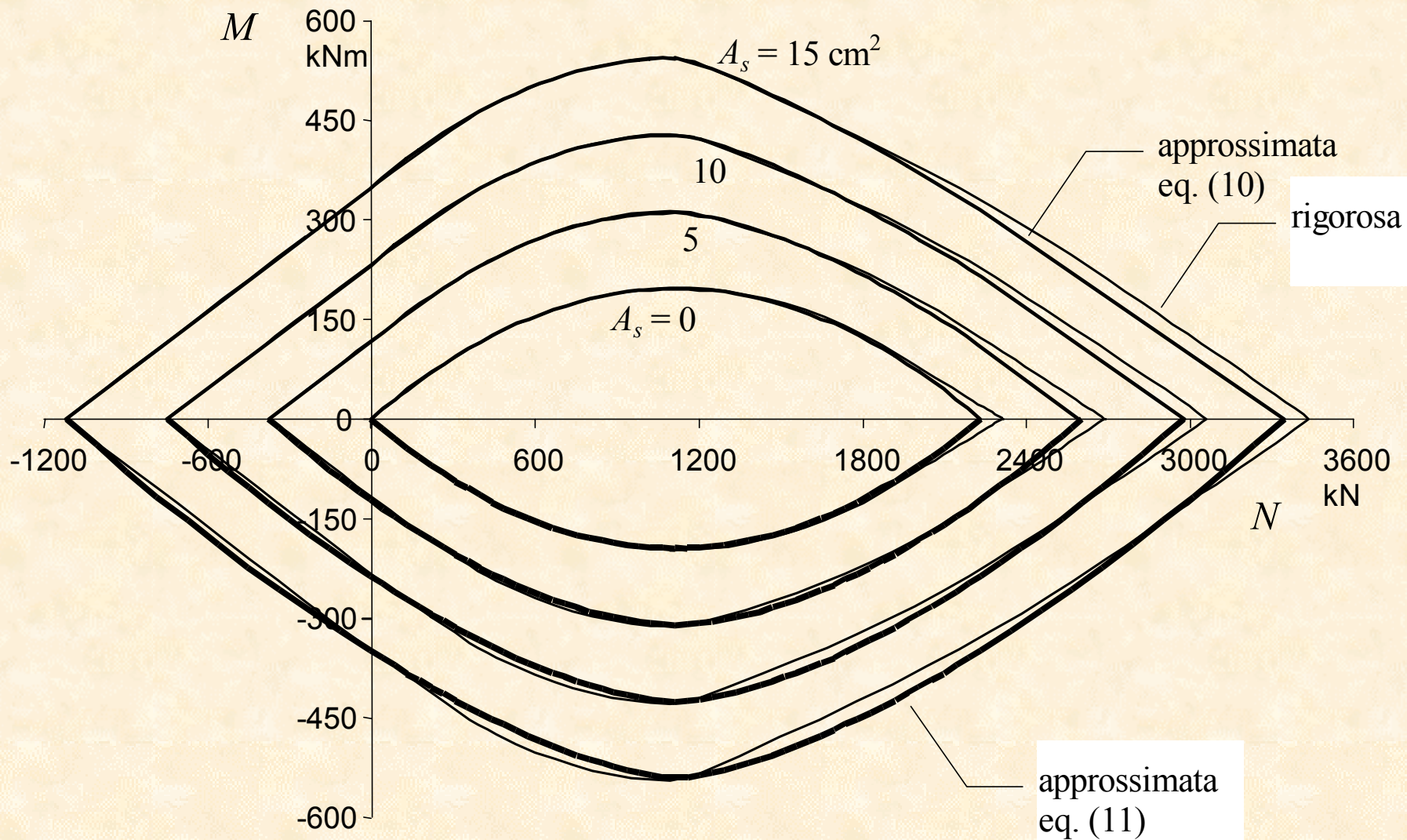
– per N_{Sd} superiore a $N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1$$

$$\text{con } n = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$$

Progetto e verifica di sezioni rettangolari a tenso-pressoflessione retta

Esempio - Sezione 30x70



Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Sollecitazioni

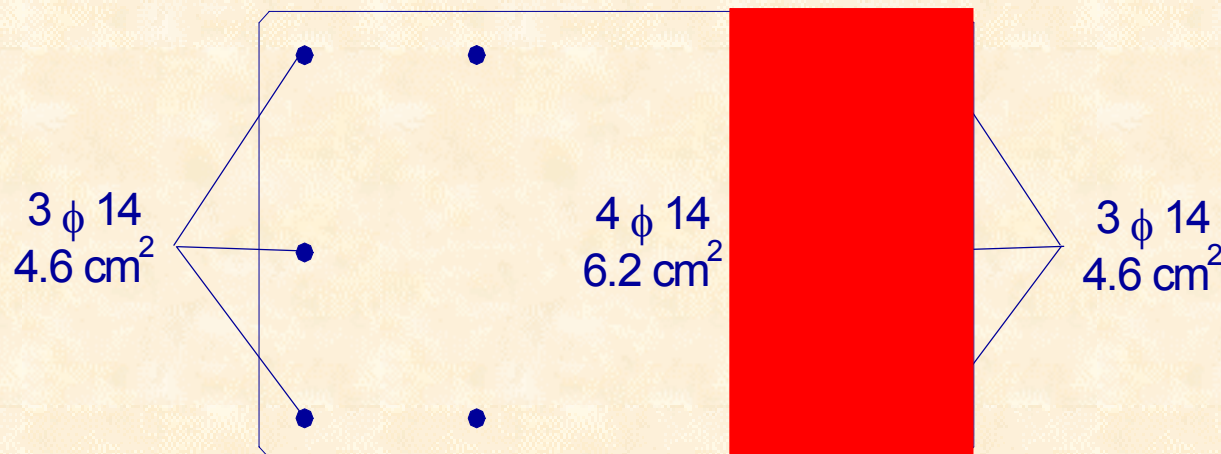
$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 40x70

$$A_s = A'_s = 3\phi 14$$



Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Calcolo dei valori resistenti del calcestruzzo

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 \cdot 0.40 \cdot 0.70 \cdot 11.02 \cdot 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 1481 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \cong 0.12 \cdot 0.40 \cdot 0.70^2 \cdot 11.02 \cdot 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 262,7 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Calcolo dei valori resistenti dell'armatura

$$N_{s,Rd} = 2A_s f_{yd} = 2 \cdot 4.62 \cdot 373.9 \cdot 10^3$$

$$N_{s,Rd} = 345.5 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = 2A_s (h - 2c) f_{yd} = 2 \cdot 4.62 \cdot (0.70 - 2 \cdot 0.04) \cdot 373.9 \cdot 10^3$$

$$M_{s,Rd} = 107,1 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Verifica

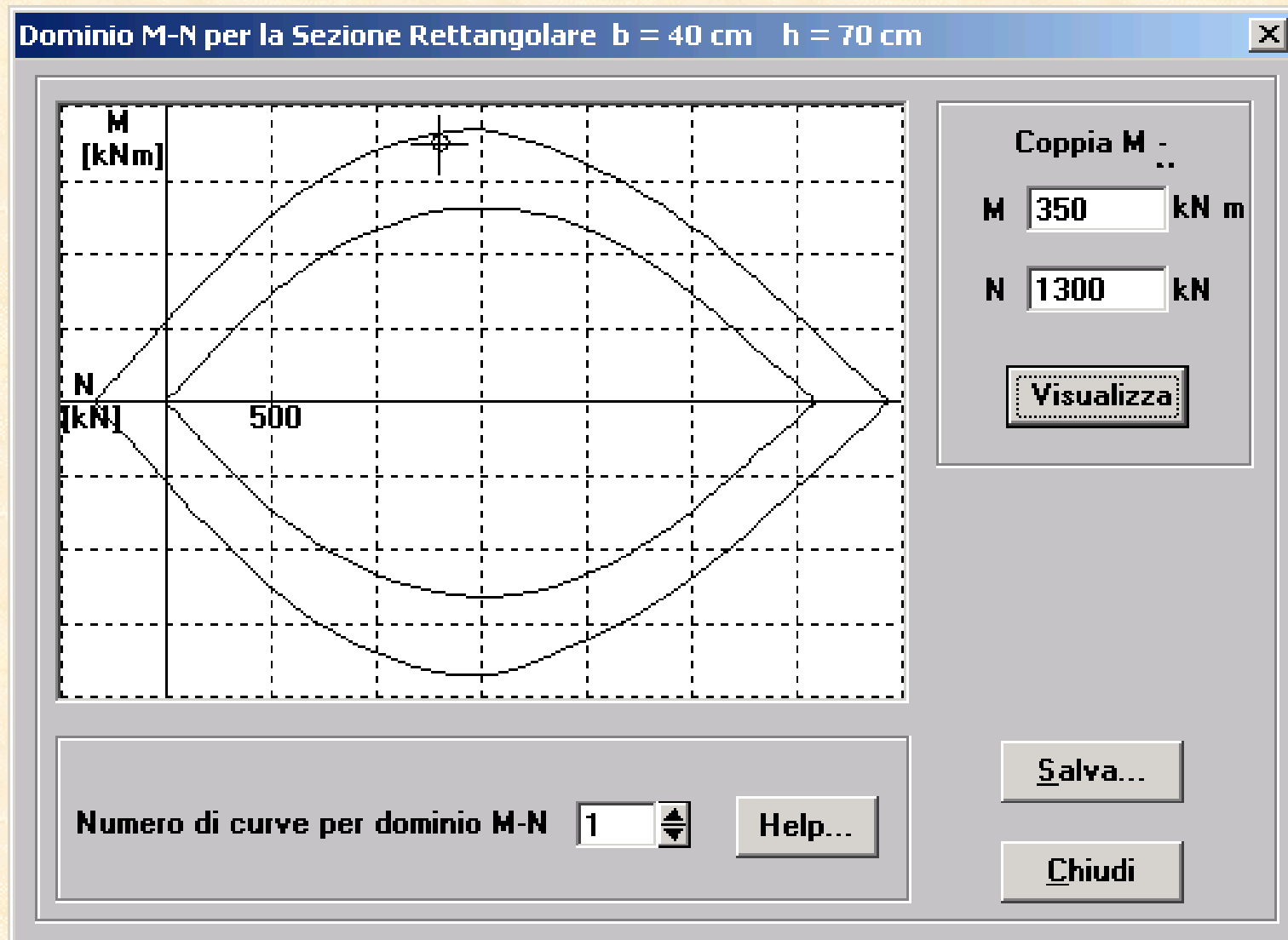
$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right) = 1 + \frac{1481}{1481 + 345.5} = 1.81$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{350}{262,7 + 107,1} + \left| \frac{1300 - 1481}{1481 + 345,5} \right|^{1,81} = 0.96 \leq 1$$

Esempio - verifica a pressoflessione retta

Controllo mediante domini M-N





Il castello

(ACICASTELLO)

Foto © [Francesco Raciti](#)

Progetto della sezione a pressoflessione retta

Le espressioni possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Il coefficiente r è in questo caso dipendente da:

- sforzo normale adimensionalizzato $v = N_{Sd} / N_{c,Rd}$
- percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre $\rho = A_s / b h$
- dalle caratteristiche dei materiali

Valori del coefficiente r

Progetto della sezione a pressoflessione retta

Tabella 1. Valori di r per calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa, acciaio FeB44k, $c/h = 0.1$

v	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.2	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.4	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.6	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.8	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
1.0	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
1.2	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
1.4	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
1.6	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
1.8	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
2.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria per portare tale momento è

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$$

$z = h - 2c$ è il braccio della coppia interna costituita dalle armature, pari ad (si può usare ancora, con buona approssimazione, l'espressione $z \cong 0.9 d$).

Progetto dell'armatura a pressoflessione retta

La formula per l'armatura:

- è valida solo per N_{Sd} compreso tra 0 e $N_{c,Rd}$
- fornisce un utile riferimento anche oltre tale intervallo;
- è cautelativa per la tensoflessione,
- è a svantaggio di sicurezza per forte compressione

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Applicazione del Metodo approssimato

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1400 \text{ kN}$$

$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

Dati geometrici

Sezione: 30x ?

$A_s = A'_s = ?$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Scelta dei parametri di progetto ν e ρ

Tabella 1. Valori di r per calcestruzzo di classe $R_{ck} = 25$ MPa, acciaio FeB44k, $c/h = 0.1$

ν	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.2	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.4	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.6	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.8	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
1.0	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
1.2	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
1.4	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
1.6	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
1.8	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
2.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

NOTA: r varia poco con ν , molto con ρ

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0184 \sqrt{\frac{250}{0.30}} = 0.53 \text{ m}$$

Si assume $h=0.60 \text{ m}$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 \cdot 0.30 \cdot 0.60 \cdot 11.02 \cdot 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 952,1 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \cong 0.12 \cdot 0.30 \cdot 0.60^2 \cdot 11.02 \cdot 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 142,8 \text{ kNm}$$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Progetto dell'armatura

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

$$M_{Sd,red} = 250 - 142,8 \left[1 - \left(\frac{1400 - 952,1}{952,1} \right)^2 \right] = 138.8 \text{ kNm}$$

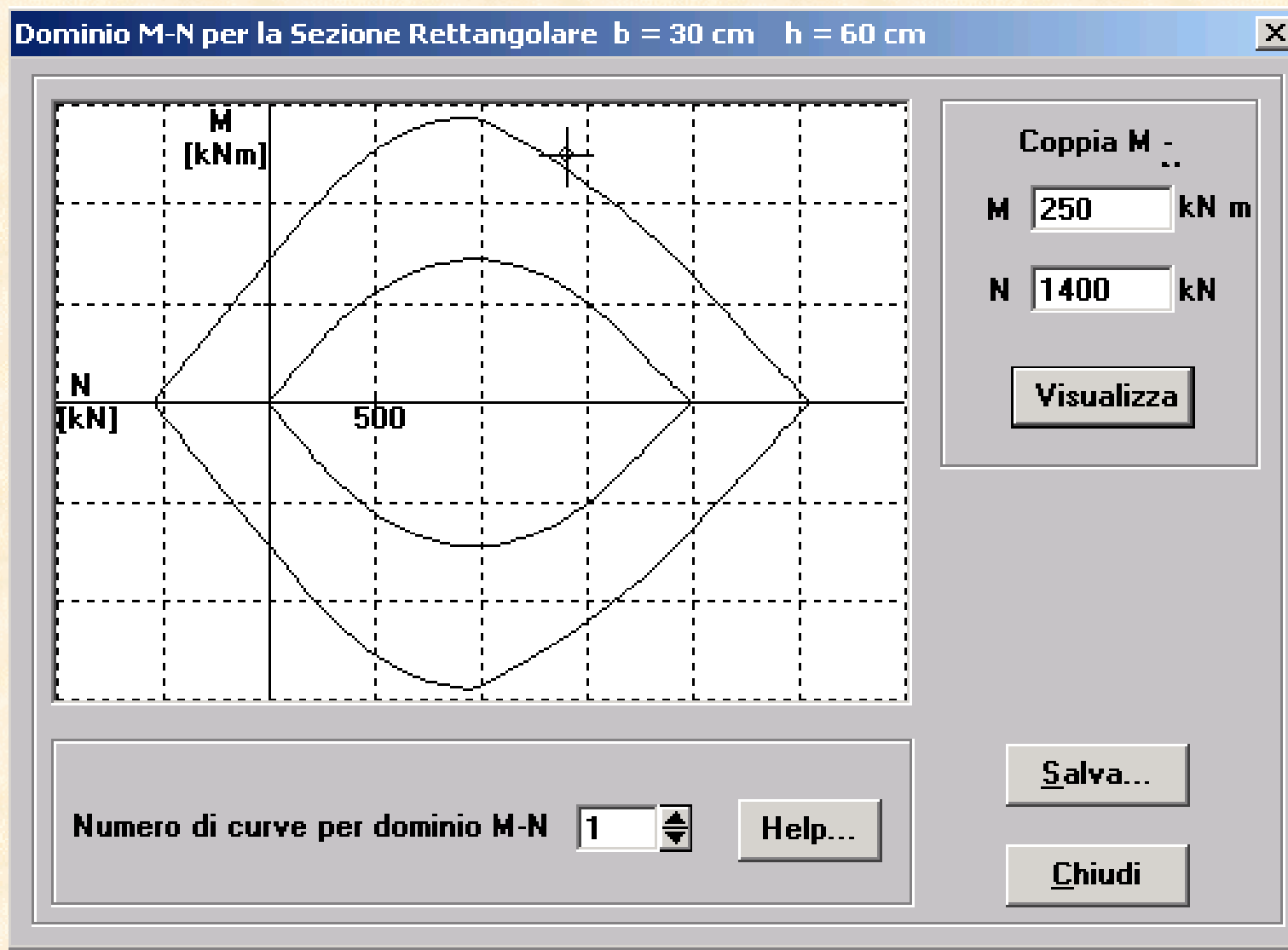
L'armatura necessaria è

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}} = \frac{138.8}{0.50 \cdot 373.9} \times 10 = 7.4 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = 0.0041$$

Esempio - progetto a pressoflessione retta

Verifica con domini M-N





Equitazione alla plaja di Catania
Foto © [Francesco Raciti](#)

Pressoflessione deviata

La nuova Ordinanza 3274 impone la verifica della struttura sottoposta simultaneamente a forze sismiche in due direzioni ortogonali, una principale e l'altra secondaria.

Come devono essere verificati gli elementi verticali?

Pressoflessione retta?

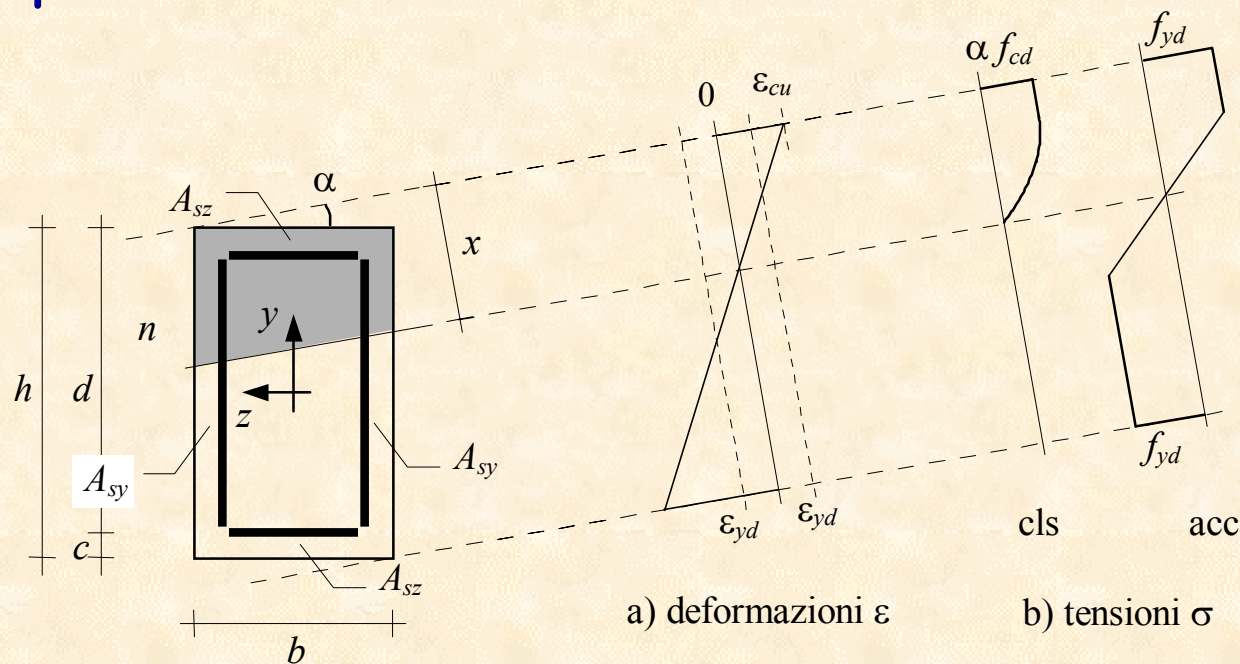
Pressoflessione deviata?

Cosa cambia?

Pressoflessione deviata

Qualche considerazione

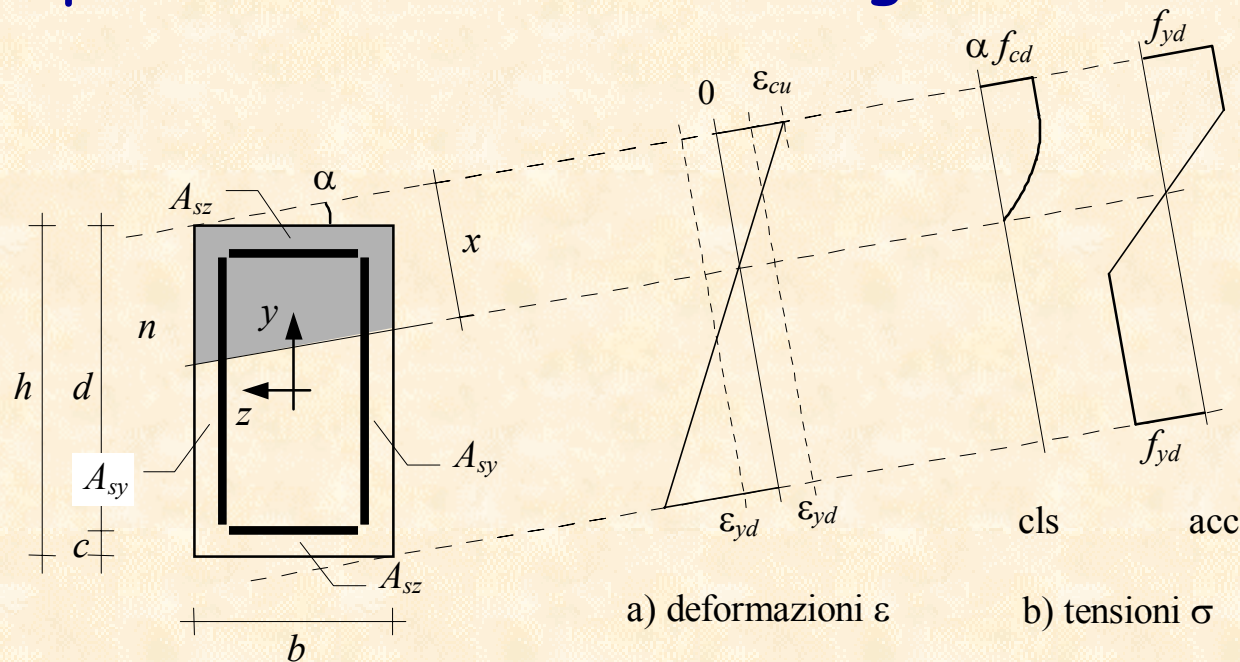
Il procedimento per la costruzione del dominio limite M_y - M_z - N ricalca concettualmente quello già descritto per la pressoflessione retta, ma si presenta notevolmente più complicato a causa della possibile inclinazione dell'asse neutro.



Pressoflessione deviata

Ipotesi

Le armature sono disposte lungo tutti i quattro lati della sezione. A rigore, bisognerebbe tener conto della posizione di ciascuna barra, ma è ugualmente accettabile ipotizzare che l'armatura sia disposta uniformemente lungo ciascun lato.



Pressoflessione deviata

Formulazione analitica

Utilizzando i legami costitutivi dei materiali si possono ricavare i valori delle tensioni e quindi le caratteristiche della sollecitazione

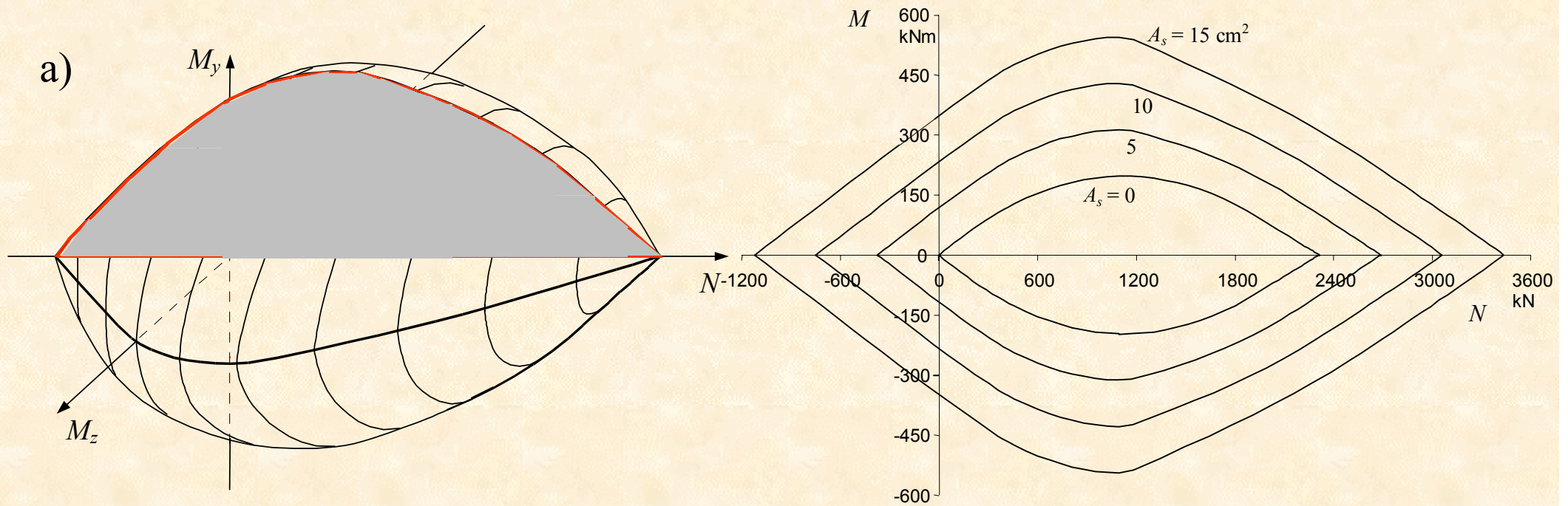
$$N = \int_{cls} \sigma_c dA_c + \int_{acc} \sigma_s dA_s = N_c + N_s$$

$$M_y = - \int_{cls} \sigma_c z dA_c - \int_{acc,y} \sigma_s z dA_s - \int_{acc,z} \sigma_s z dA_s = M_{y,c} + M_{y,sy} + M_{y,sz}$$

$$M_z = \int_{cls} \sigma_c y dA_c + \int_{acc,y} \sigma_s y dA_s + \int_{acc,z} \sigma_s y dA_s = M_{z,c} + M_{z,sy} + M_{z,sz}$$

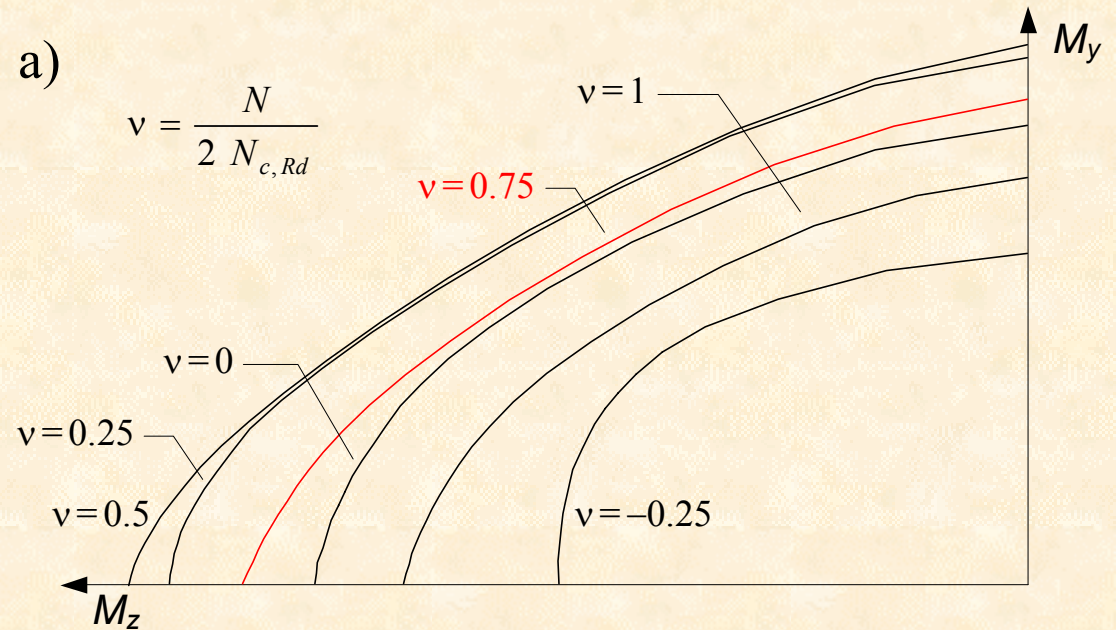
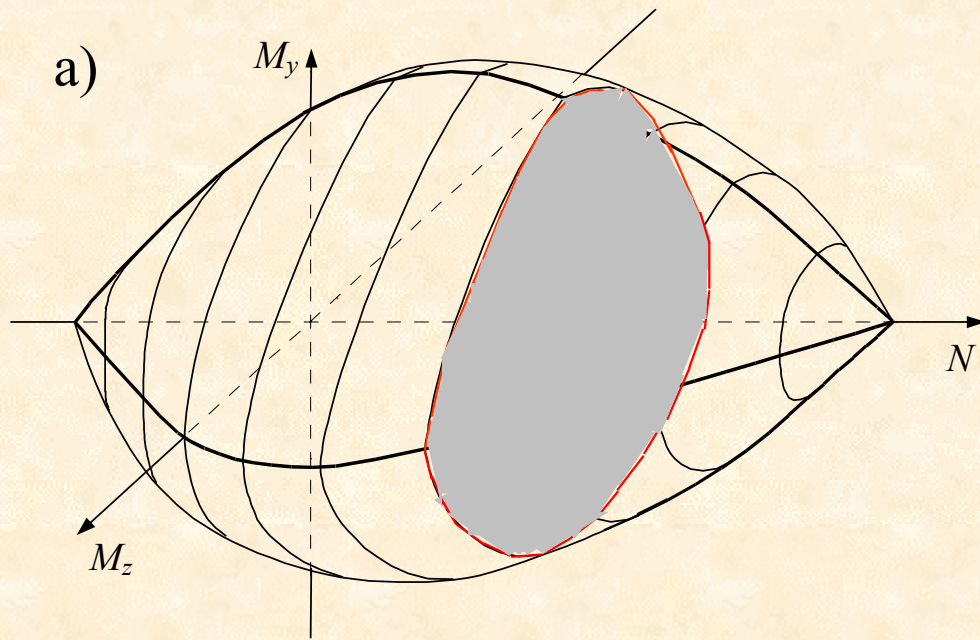
Pressoflessione deviata

Rappresentazione del dominio



Pressoflessione deviata

Rappresentazione del dominio



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

Verifica della sezione a pressoflessione deviata

La verifica a pressoflessione deviata può essere facilmente effettuata determinando preliminarmente i momenti resistenti $M_{z,Rd}$ e $M_{y,Rd}$ corrispondenti ad N assegnato (le stesse espressioni valgono per entrambi i momenti, purché si scambi b con h e y con z)

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$

e verificando che

$$\left(\frac{M_{z,Sd}}{M_{z,Rd}} \right)^{1.5} + \left(\frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right)^{1.5} \leq 1$$
$$m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$$

Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

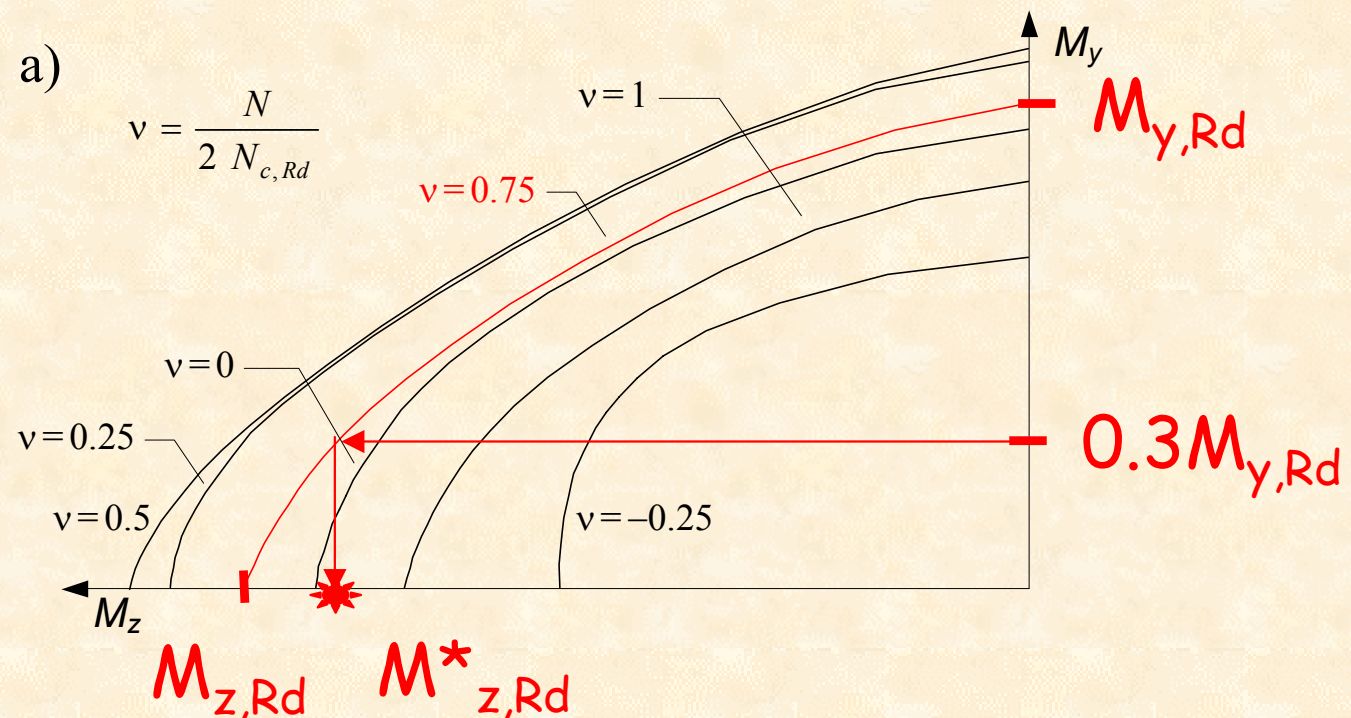
Nella maggior parte dei casi reali le sezioni rettangolari non sono soggette a forti momenti contemporaneamente rispetto ad entrambi gli assi.

Ad esempio, la nuova norma sismica italiana richiede di considerare l'effetto del sisma agente in una direzione più il 30% del sisma nella direzione ortogonale.

Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

Si può facilmente controllare che per $M_{y,Sd} = 0.3 M_{y,Rd}$ il massimo momento M_z che può essere sopportato dalla sezione è pari a $0.89 M_{z,Rd}$.



Progetto della sezione a pressoflessione deviata

Progetto della sezione e dell'armatura

La presenza della componente trasversale riduce la capacità portante della sezione di circa un 10%, ma tale riduzione è compensata, spesso ampiamente, dal contributo delle armature secondarie che in genere viene trascurato.

Si consiglia quindi di progettare la sezione e l'armatura a pressoflessione retta senza tener conto né del contributo peggiorativo del momento trasversale né dell'incremento di resistenza fornito dall'armatura secondaria

Progetto della sezione a pressoflessione deviata

