

Sezioni in c. a. dalle tensioni ammissibili agli stati limite

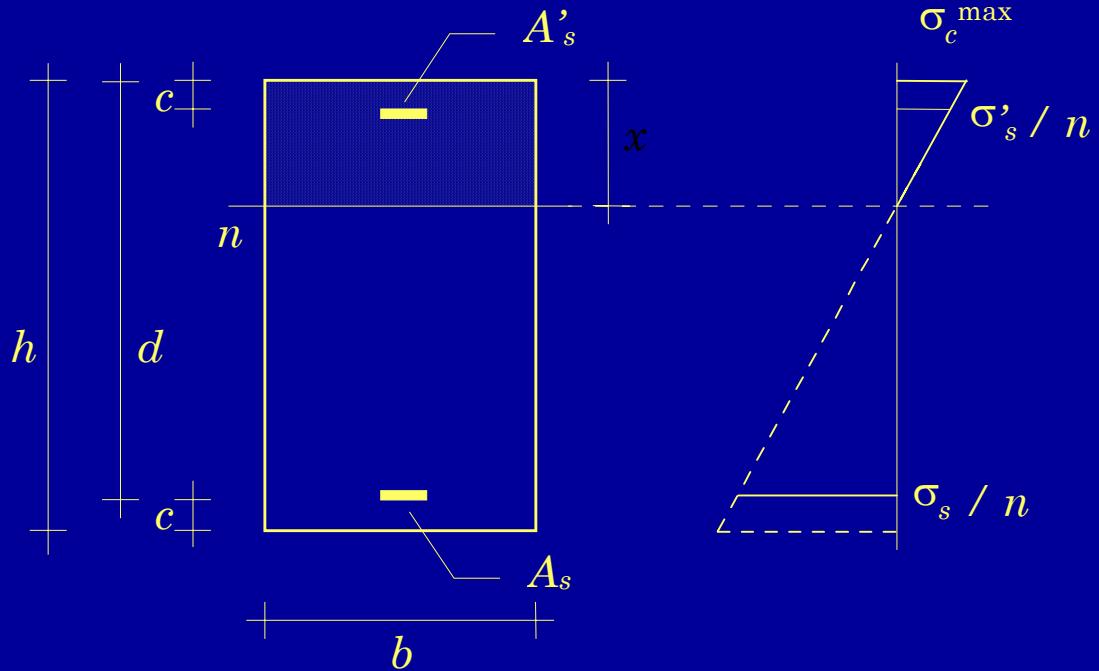
Flessione semplice e
flessione composta

Teramo, 20 ottobre 2006

Edoardo M. Marino

Verifica di sezioni inflesse

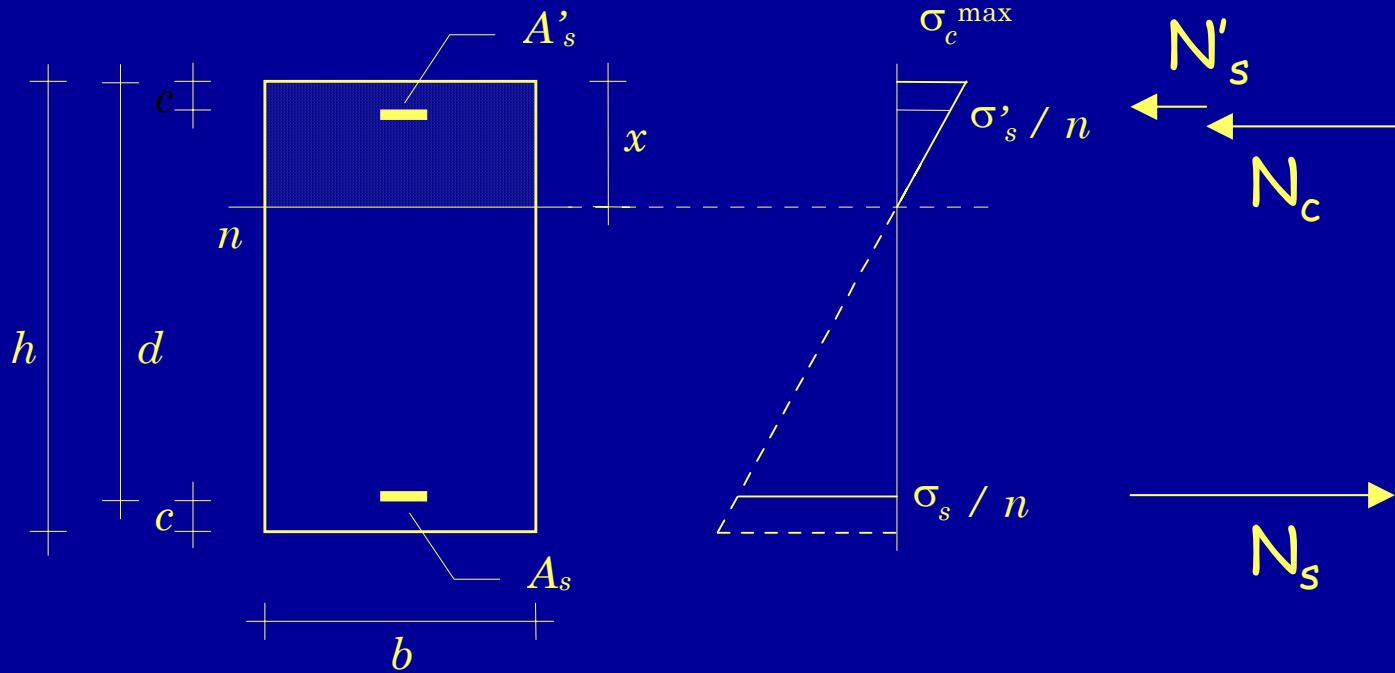
Verifica - tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:

$S_n = 0$
(l'asse neutro è baricentrico)

oppure:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Verifica - tensioni ammissibili

Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

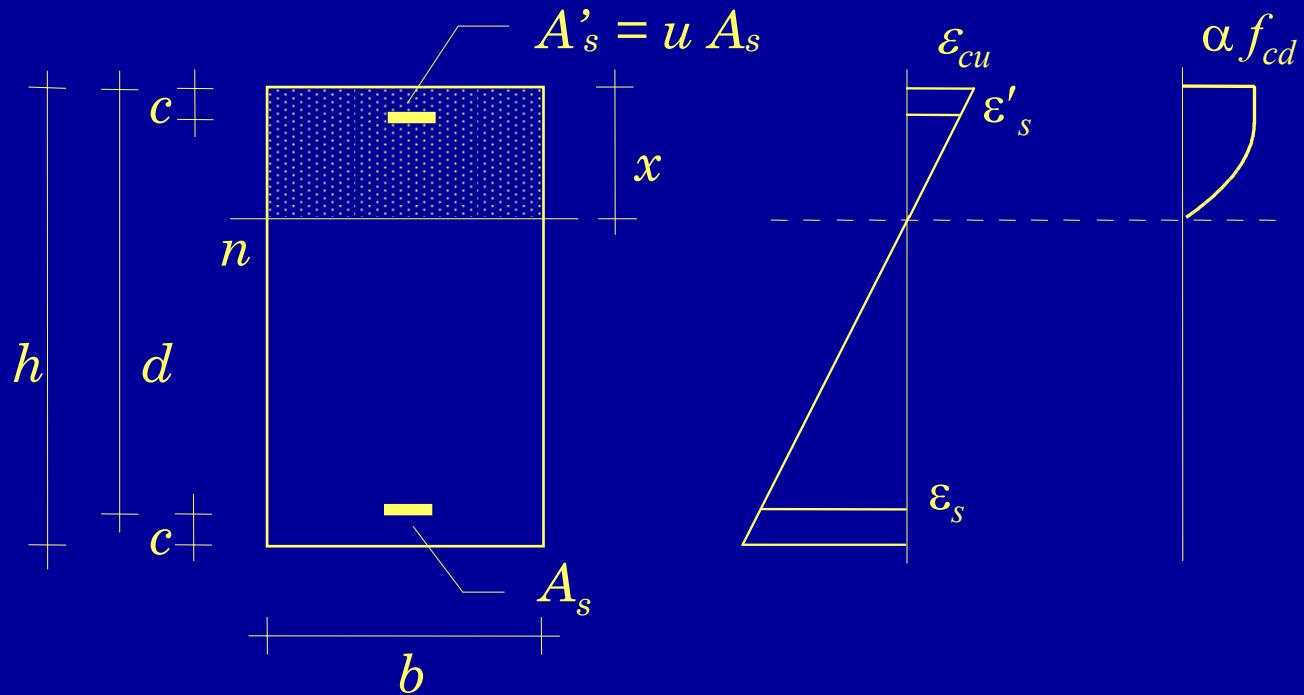
E poi:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

con:

$$I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Verifica - stato limite ultimo



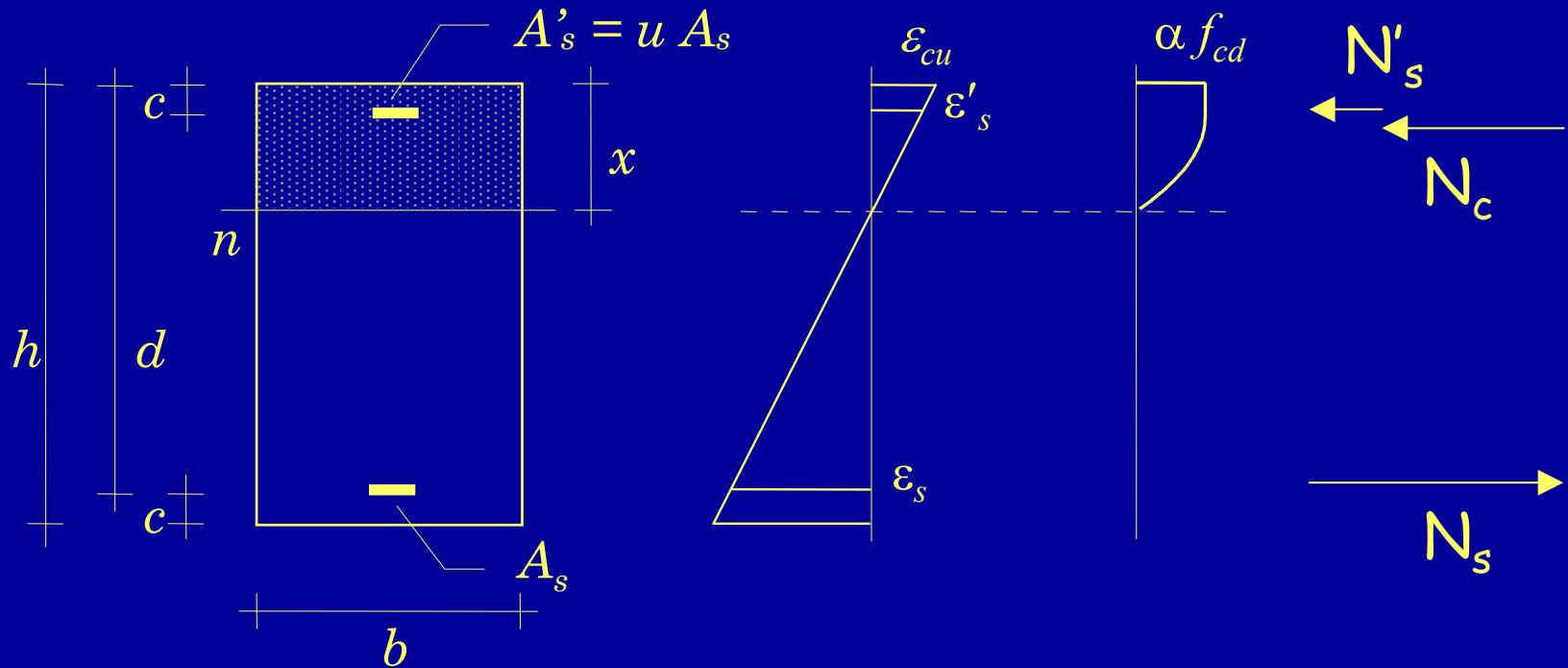
Dati: Geometria della sezione Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo

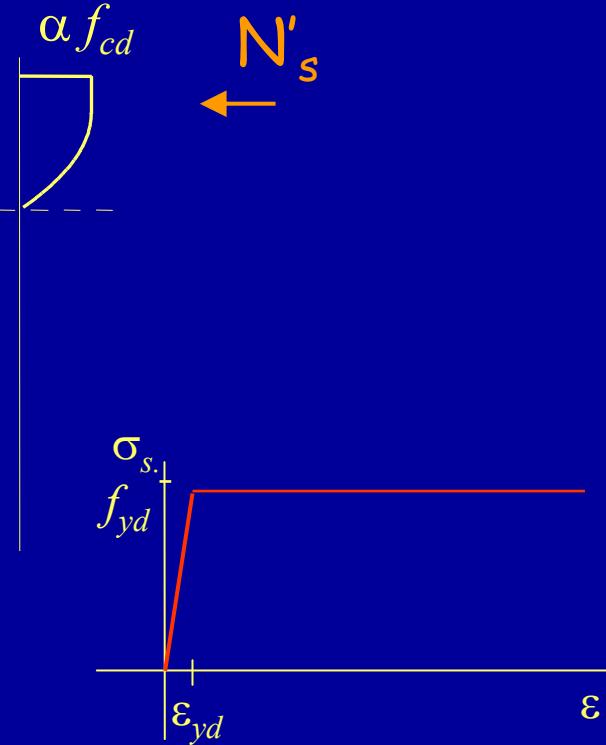
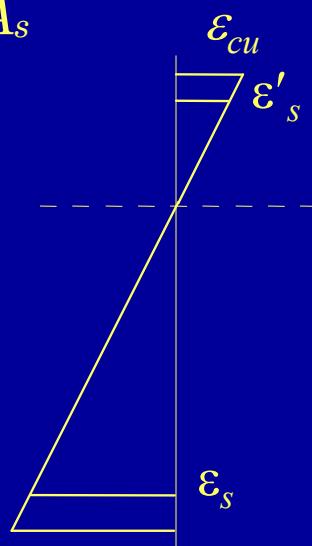
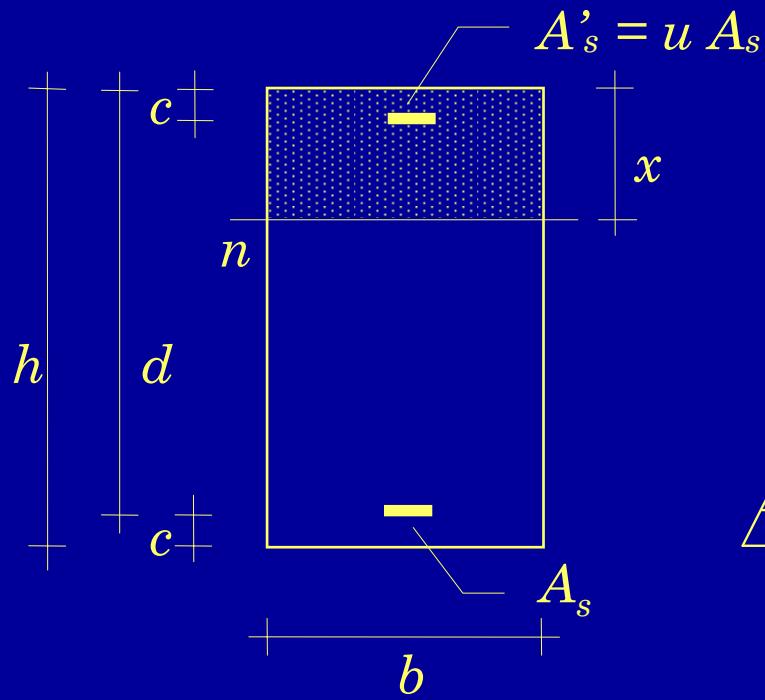


Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

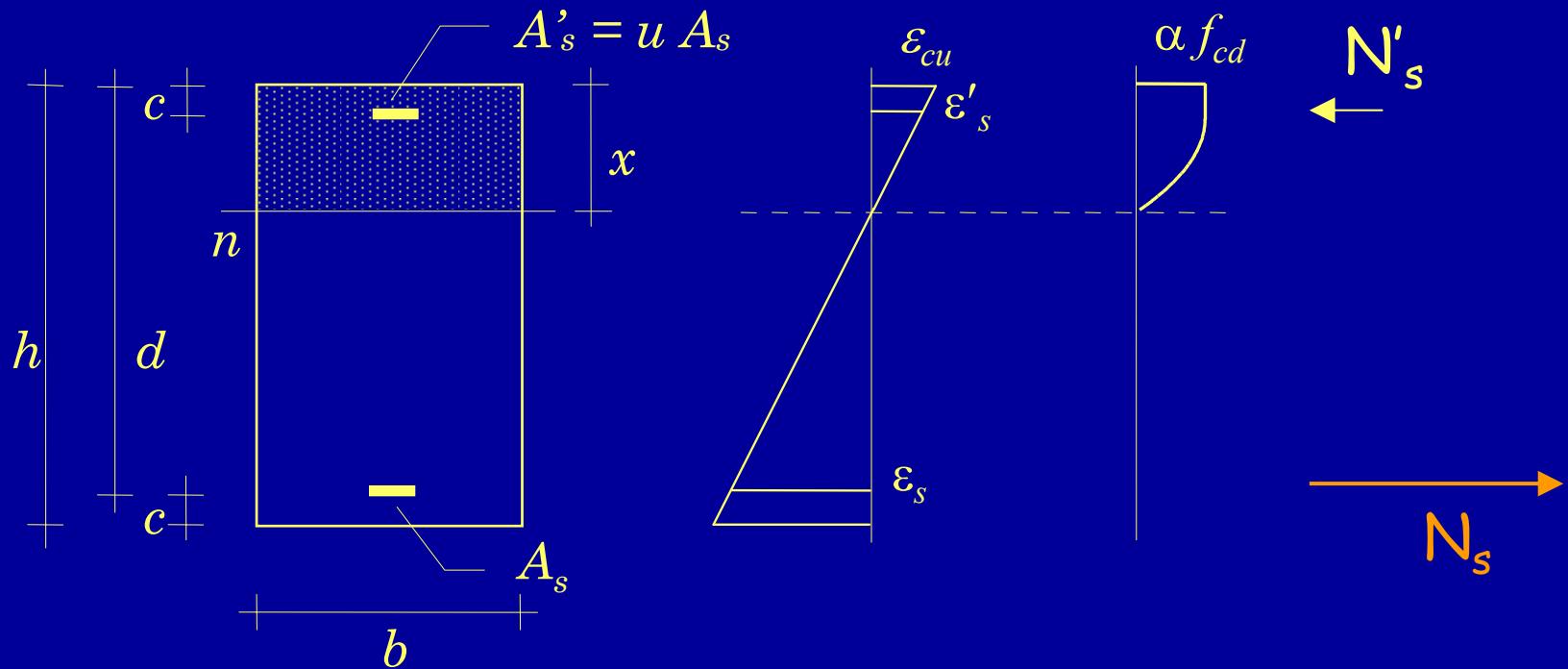


$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu}$$

in molti casi $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$

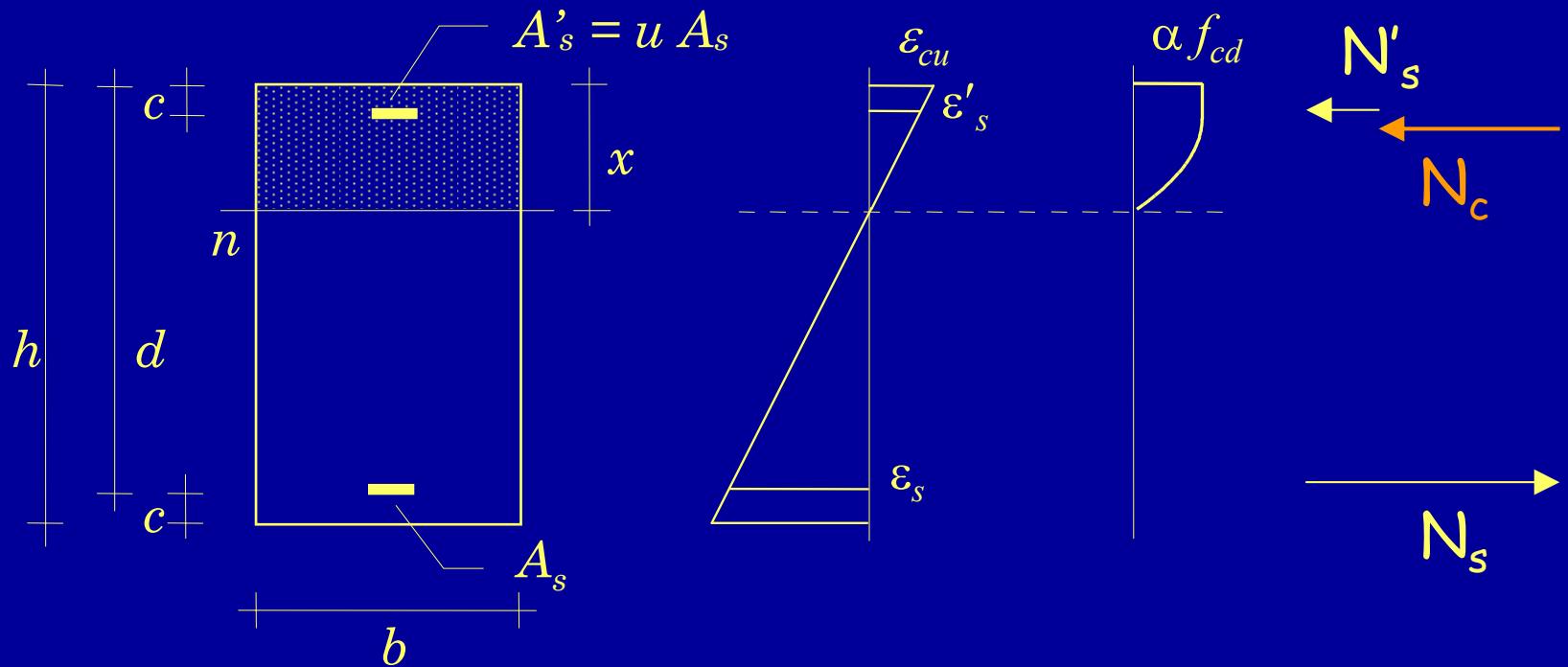
$$\Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$ \Rightarrow $N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta \ b \times \alpha \ f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Individuazione dell'asse neutro

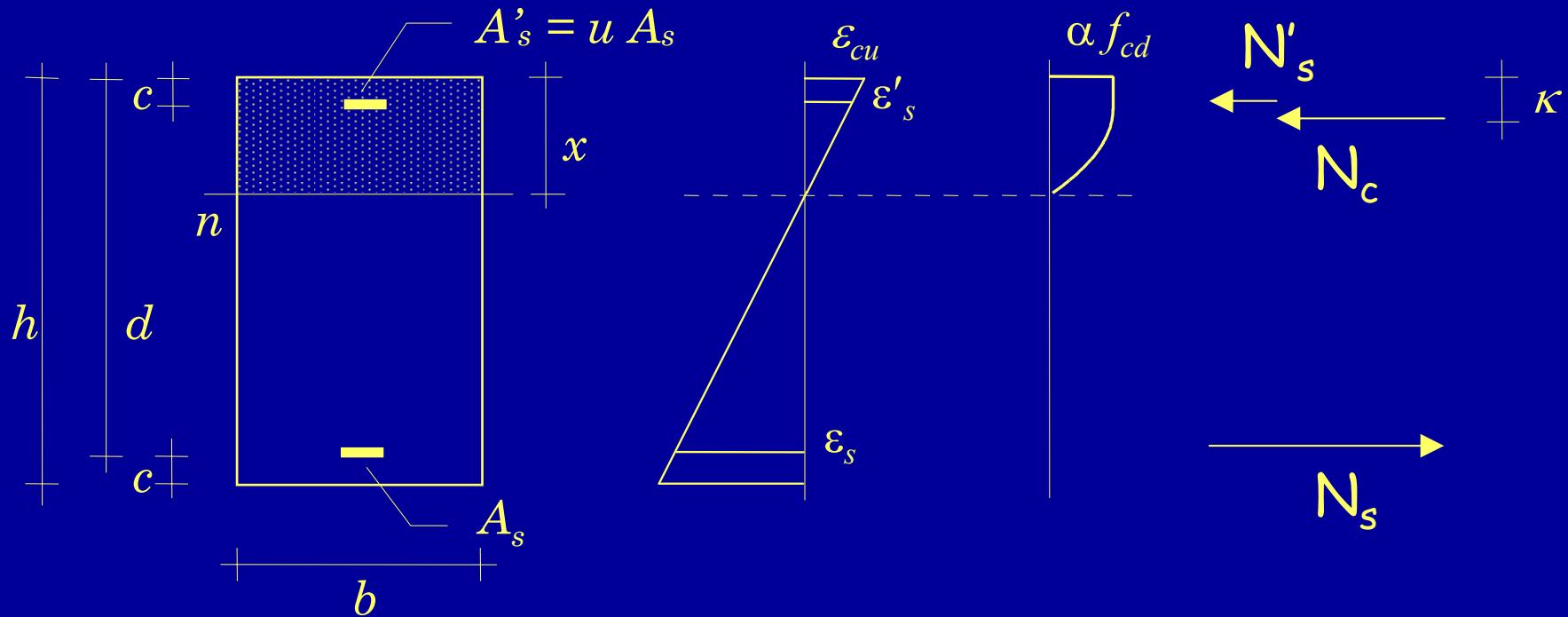
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b \alpha f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Sd} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione

30x50

Calcestruzzo

$R_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Armature

$$A_s = 4\varnothing 20$$

Acciaio

FeB44k

$$A'_s = 4\varnothing 14$$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Sd} e M_{Rd}

Esempio - individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}} = \frac{(12.56 - 6.16) \times 374}{0.810 \times 30 \times 11.0} = 8.95 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{8.95 - 4}{8.95} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.94 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ la posizione trovata è esatta

Esempio - calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 374 \times 10^{-1} = 469.7 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$N'_s = 6.16 \times 374 \times 10^{-1} = 230.4 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = [469.7 \times (46 - 0.416 \times 8.95) + \\ + 230.4 \times (0.416 \times 8.95 - 4)] \times 10^{-2}$$

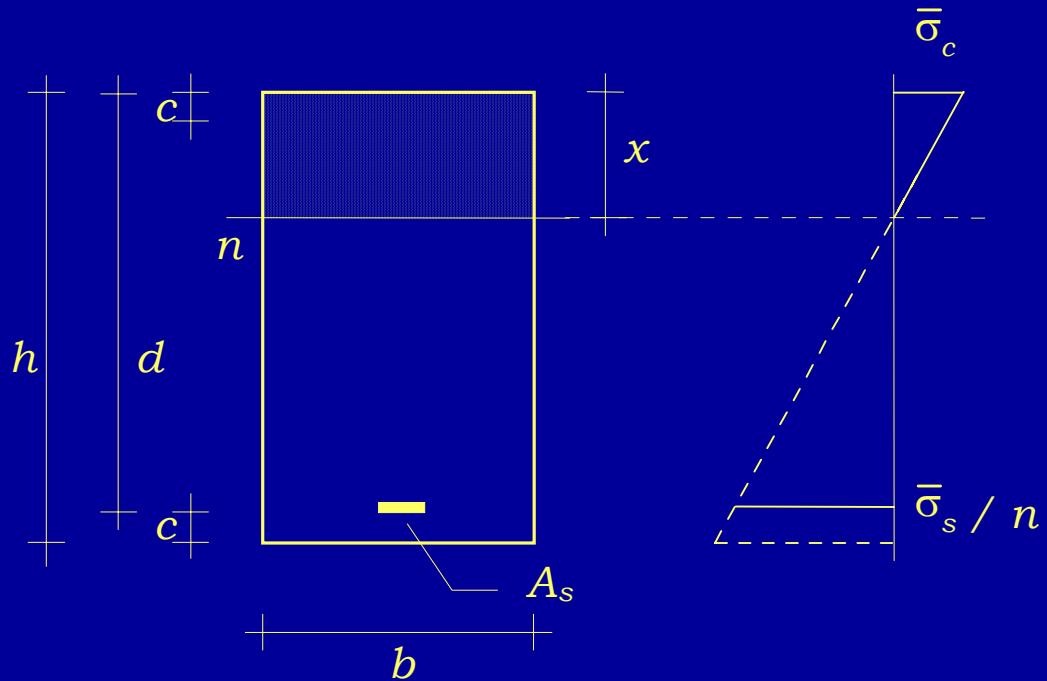
$$M_{Rd} = 197.9 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \approx c$

Poiché M_{Sd} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

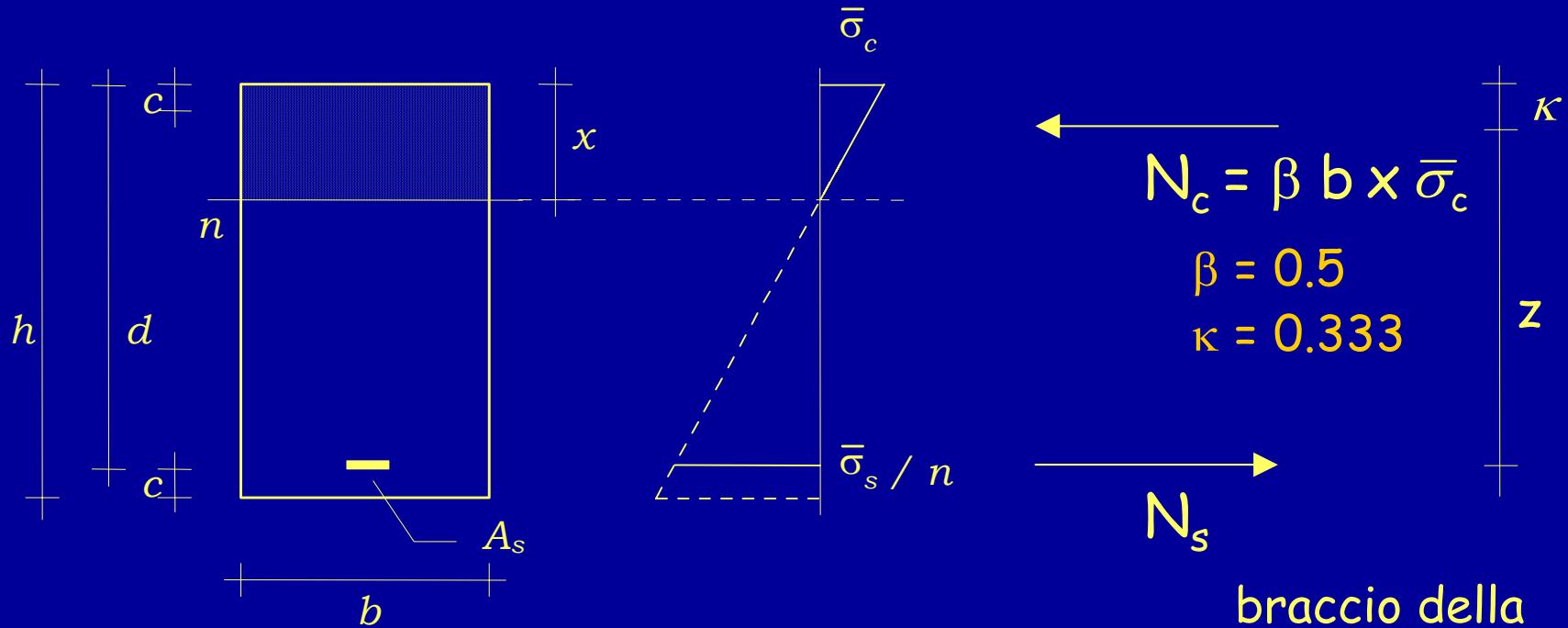
Progetto - tensioni ammissibili



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

Progetto - tensioni ammissibili



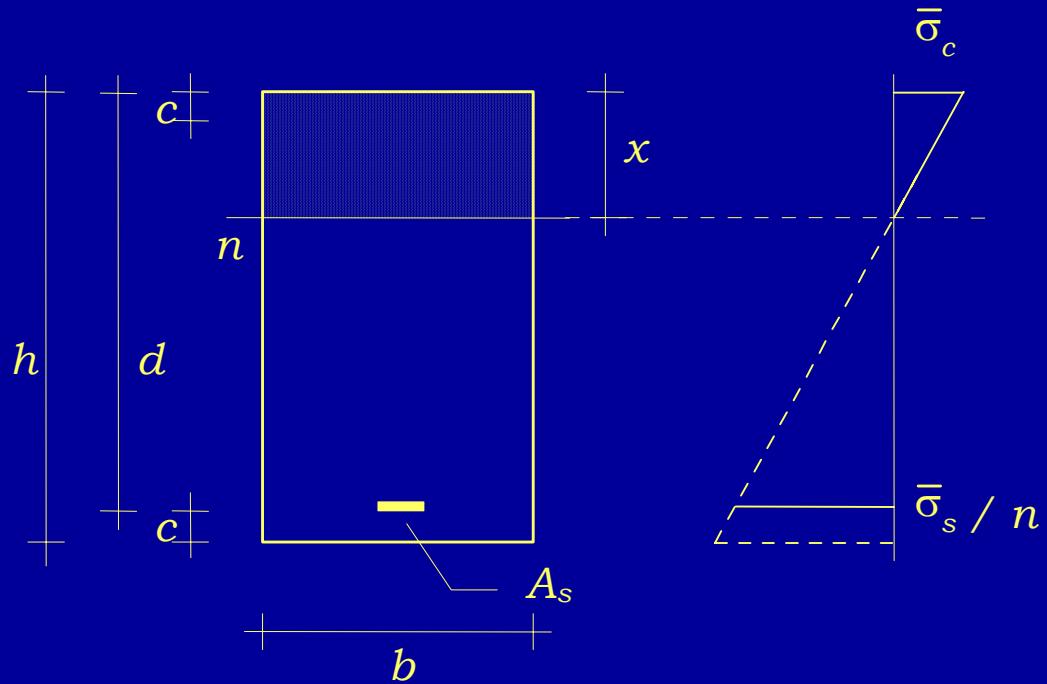
2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

braccio della coppia interna
 $z = d - \kappa x$

Progetto - tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b d^2}{r^2}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:

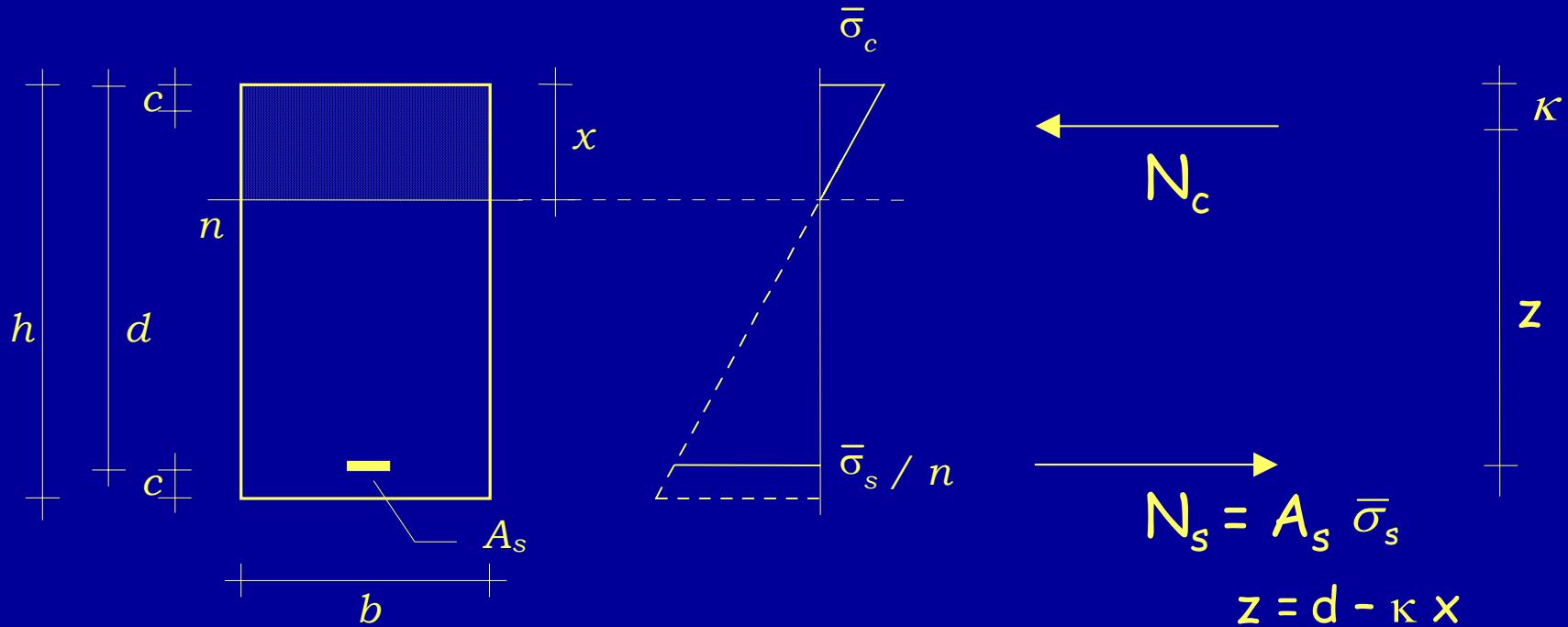
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



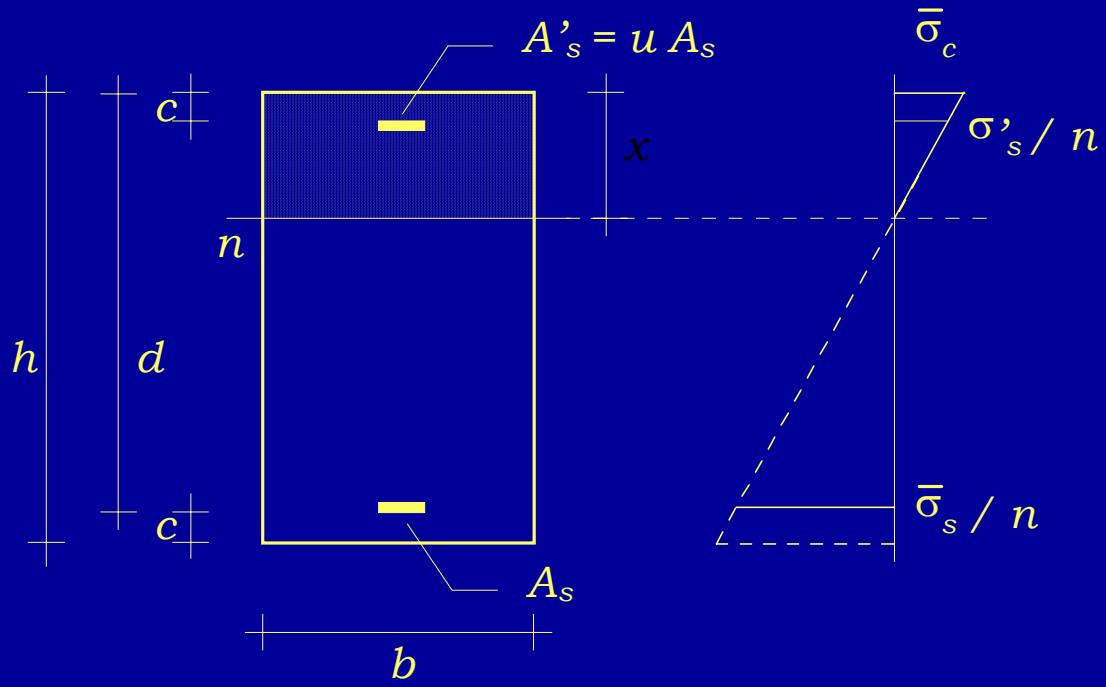
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$$M = N_s z$$

$$M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Progetto - tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s/n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x-c}{d-x}$$

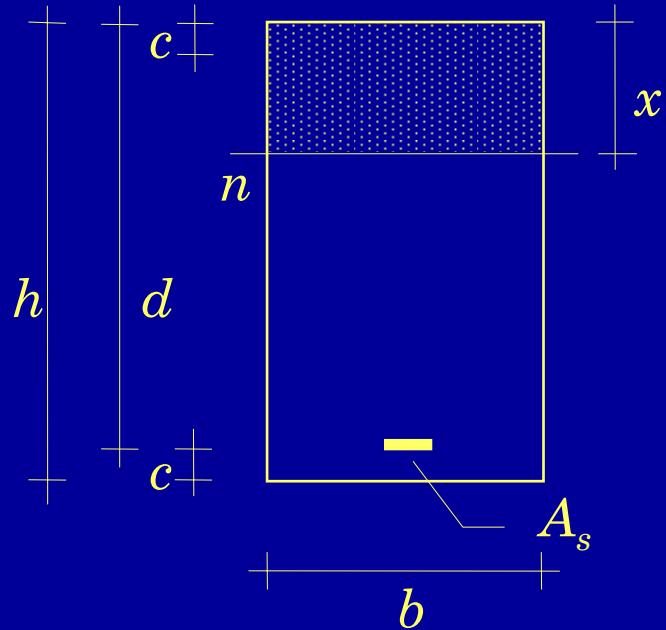
$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Analogamente per sezione
a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

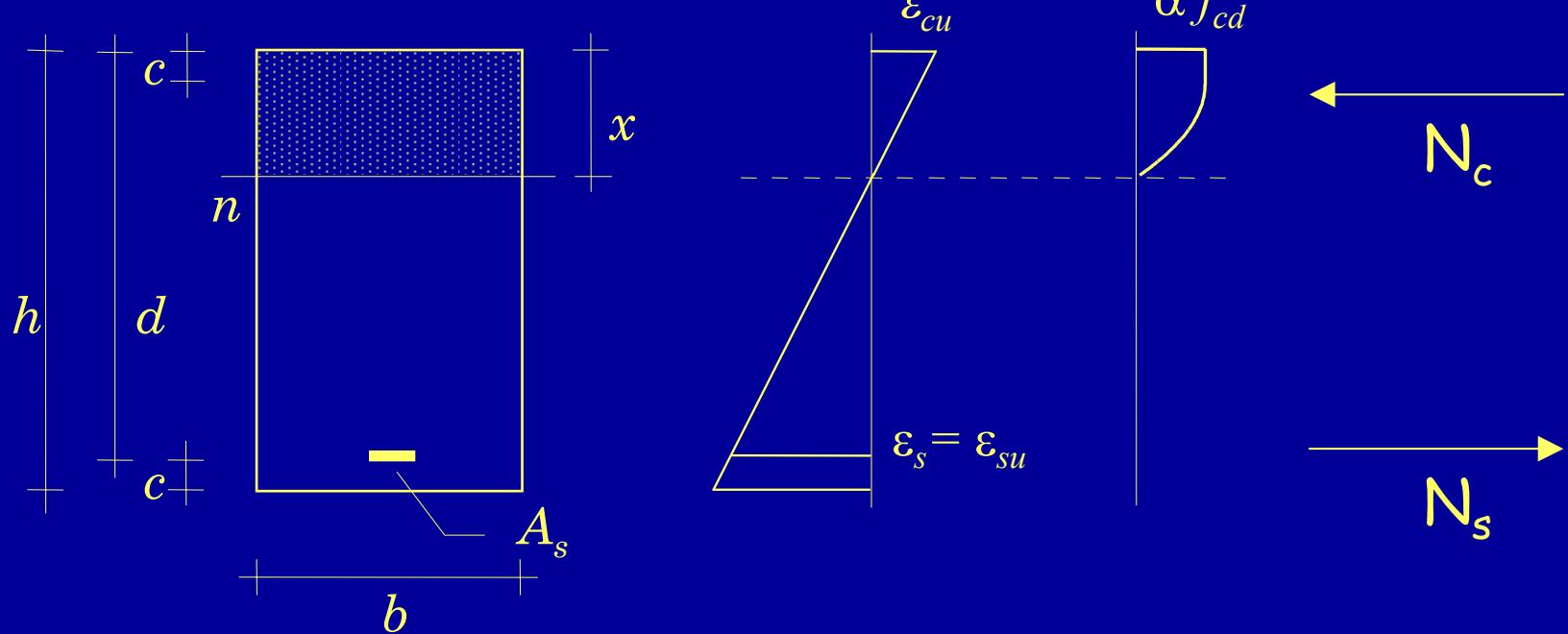
Progetto - stato limite ultimo



1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$

Progetto - stato limite ultimo

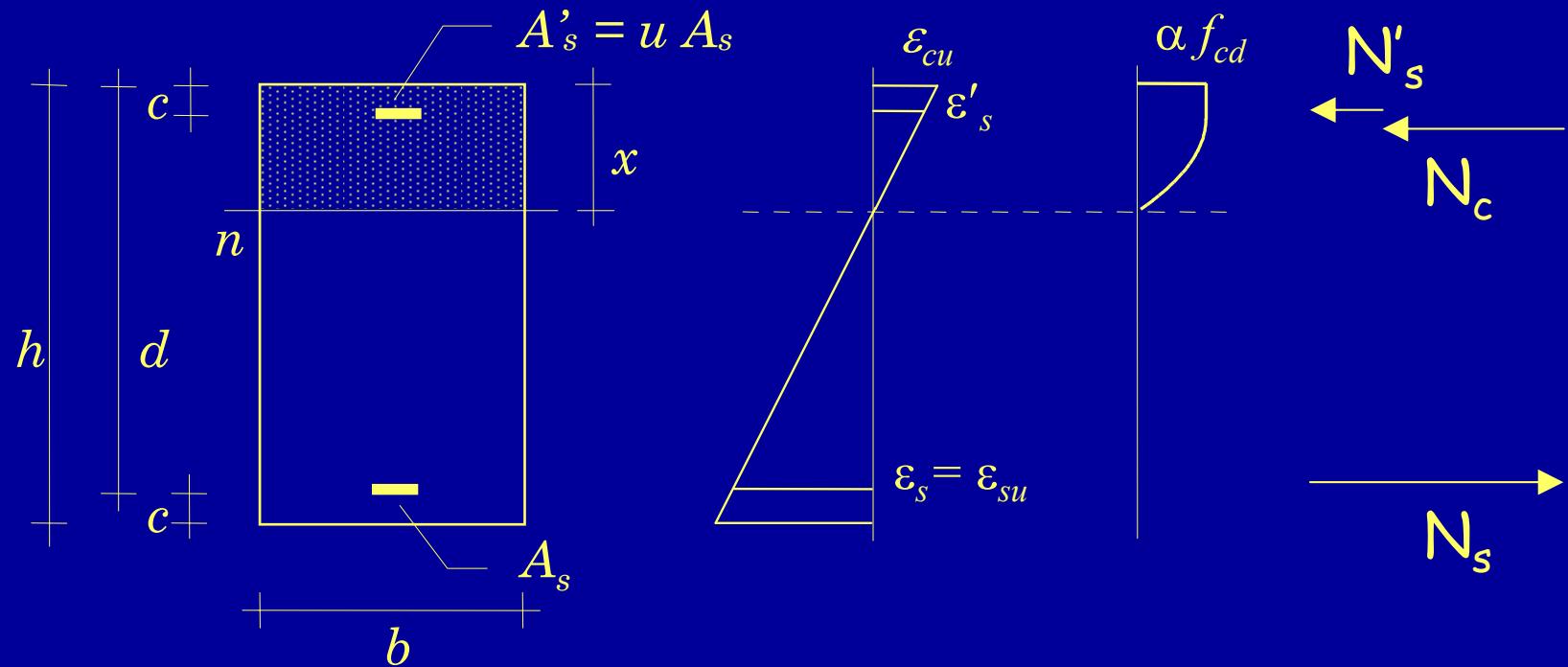


2 - Dall'equilibrio alla rotazione
rispetto all'armatura si ottiene

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con: $r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \alpha f_{cd}}}$

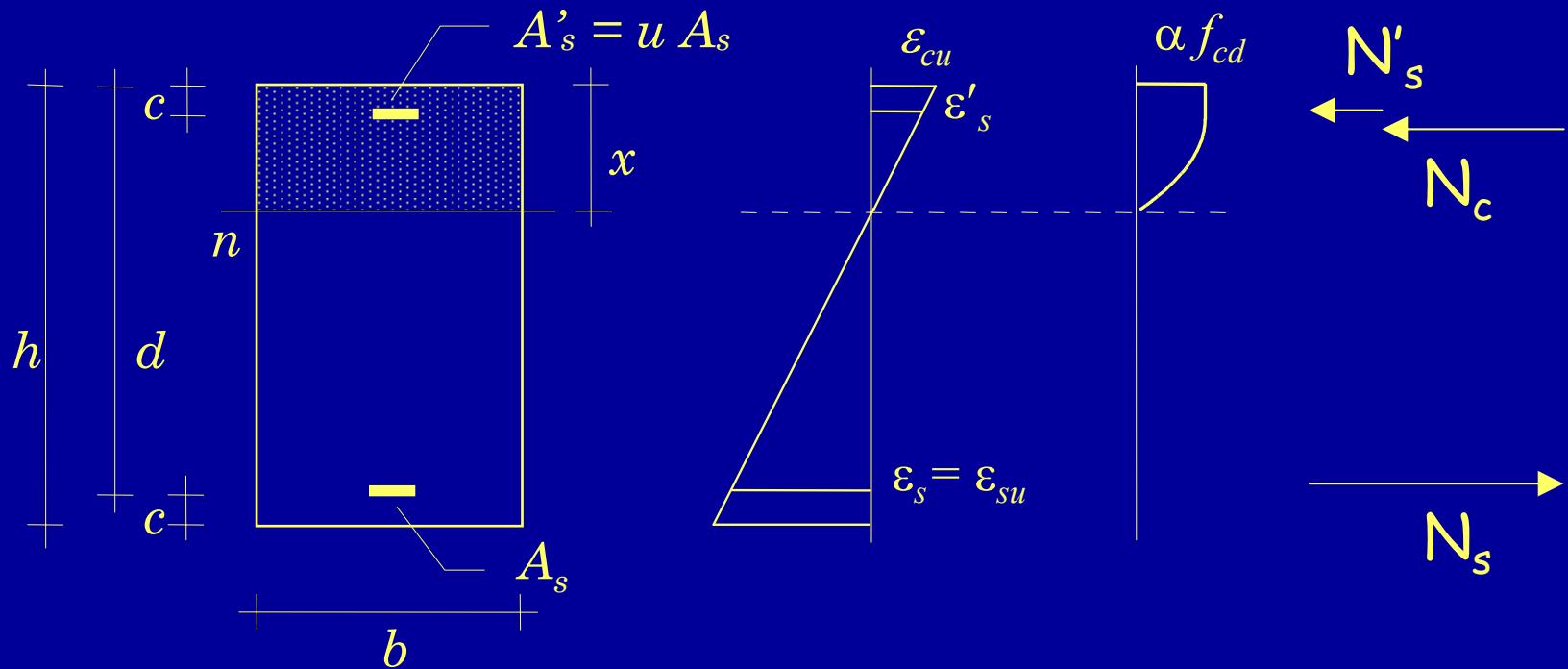
Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenta una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$u=0.6$

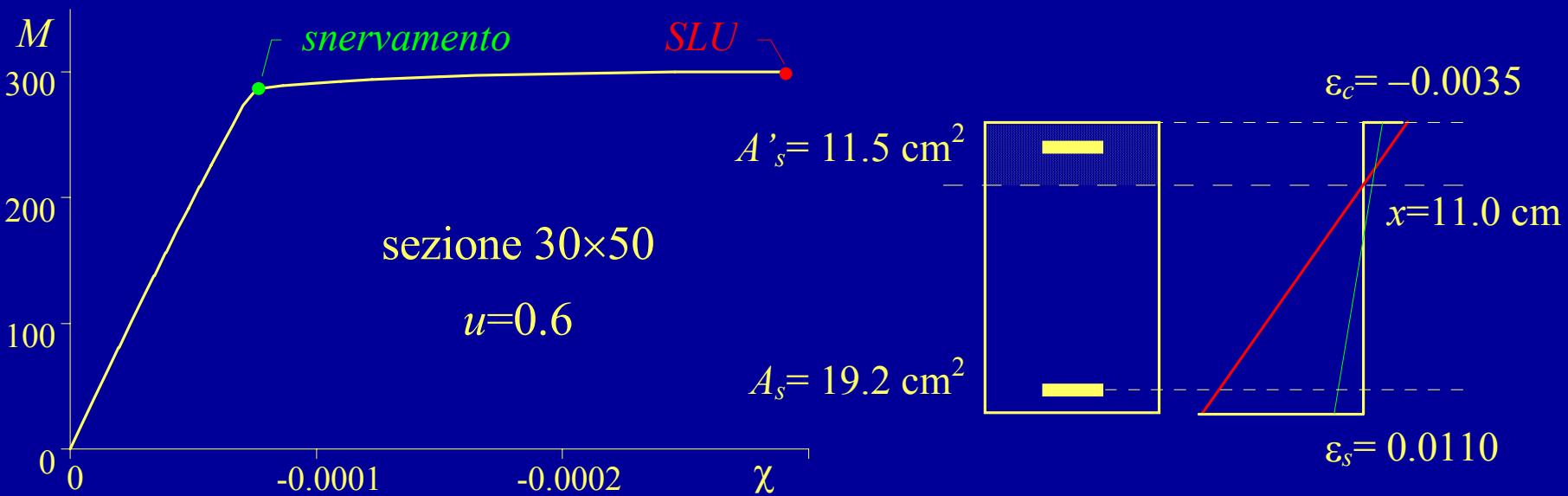
$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$

$x=11.0 \text{ cm}$

$\chi=-0.000286$

Buona duttilità



Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$

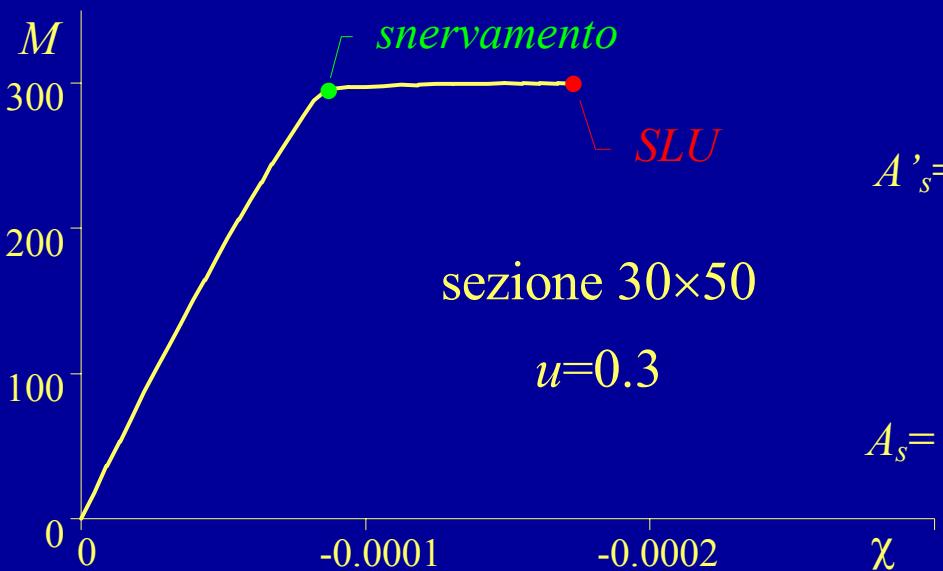
$u=0.3$

$x=20.2 \text{ cm}$

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\chi=-0.000184$

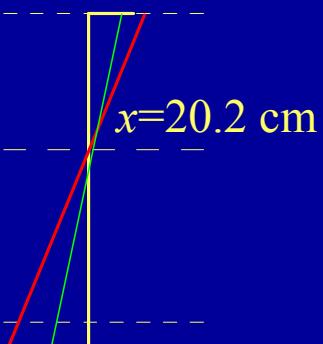
Duttilità discreta



$$A'_s = 6.2 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 20.6 \text{ cm}^2$$

$$\varepsilon_c = -0.0035$$



Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50

$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$

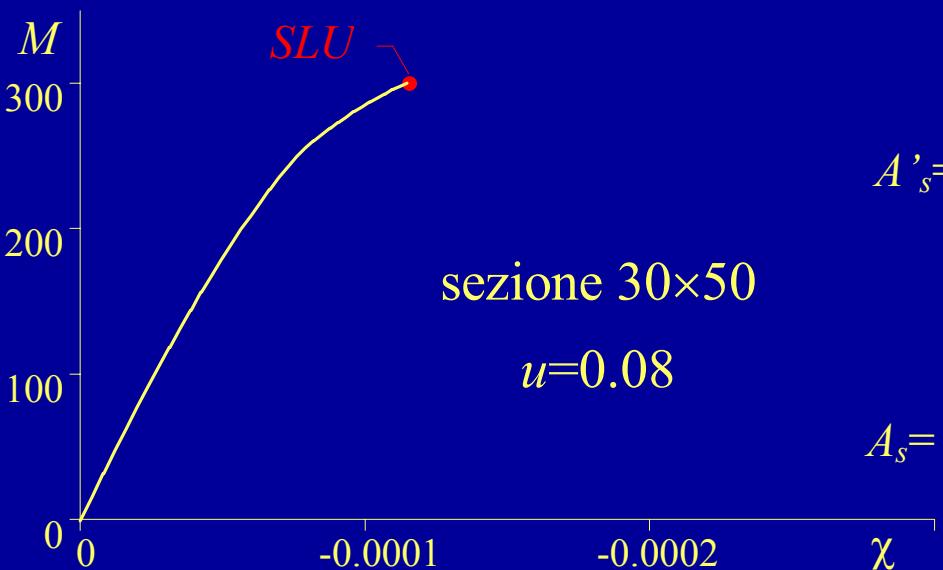
$u=0.08$

$x=30.3 \text{ cm}$

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$\chi=-0.000116$

Bassa duttilità



sezione 30x50

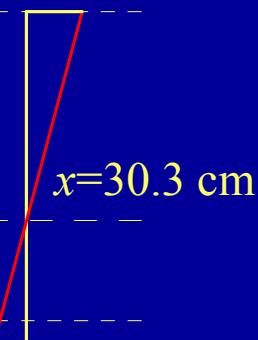
$u=0.08$

$A'_s = 1.9 \text{ cm}^2$

$A_s = 23.5 \text{ cm}^2$

$\varepsilon_c = -0.0035$

$\varepsilon_s = 0.0018$



Quanto vale il coefficiente r ?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$ e FeB44k: $r = 0.282$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$: $r = 0.220$

Esempio

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0282 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.552 \text{ m} \quad \text{uso 30x60}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9d\bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 255} = 8.95 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0220 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.524 \text{ m} \quad \text{uso 30x60}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9df_{yd}} = \frac{170 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 374} = 9.02 \text{ cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' ($R_{ck} = 25 \text{ MPa}$, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
0	0.0282	0.0282	0.0282
0.25	0.0265	0.0269	0.0275
0.50	0.0248	0.0256	0.0269
0.75	0.0230	0.0242	0.0262
1.00	0.0211	0.0227	0.0255

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
0	0.0220	0.0220	0.0220
0.25	0.0189	0.0190	0.0209
0.50	0.0153	0.0155	0.0197

Valori di r'/r ($R_{ck} = 25 \text{ MPa}$, FeB44k)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.43$	$s' = 0.35$	$s' = 0.20$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.940	0.954	0.975
0.50	0.879	0.908	0.954
0.75	0.816	0.858	0.929
1.00	0.748	0.805	0.904

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.44$
0	1.000	1.000	1.000
0.25	0.859	0.864	0.950
0.50	0.695	0.705	0.895

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.3 \div 0.5$)

Esempio

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$)

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0265 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.519 \text{ m} \quad \text{uso 30x60}$$

era 0.552 m per $u=0$

Stato limite ultimo: $M_{Sd} = 170 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0189 \sqrt{\frac{170}{0.30}} = 0.450 \text{ m} \quad \text{uso 30x50}$$

era 0.524 m per $u=0$

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
 $r' = 0.019$ o 0.020 (corrisponde a $u \approx 25\%$)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori
un po' maggiori
 $r' = 0.021$ (corrisponde a $u \approx 25\%$)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a 0.9 d

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore (0.8 d)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura compressa
determinare la differenza tra M_{sd} e momento
resistente per $u = 0$

$$M_0 = \frac{bd^2}{r^2}$$

$$\Delta M = M_{sd} - M_0$$

$$A_s' = \frac{\Delta M}{(d - c)f_{yd}}$$

Prescrizioni sull'armatura

Armatura minima:

$$A_s \geq \frac{0.6}{f_{yk}} b d \geq 0.15 \% b d$$

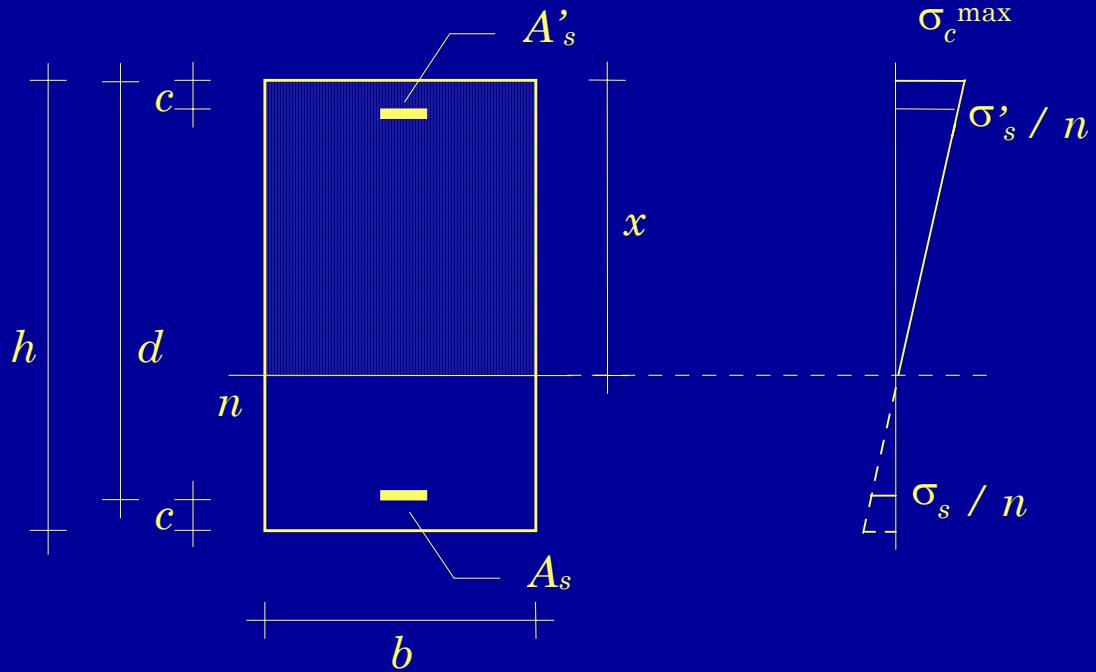
Armatura massima:

$$A_s \leq 3 \% b h$$

$$A'_s \leq 3 \% b h$$

Verifica di sezioni soggette flessione composta

Verifica - tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature
Coppia M-N

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili

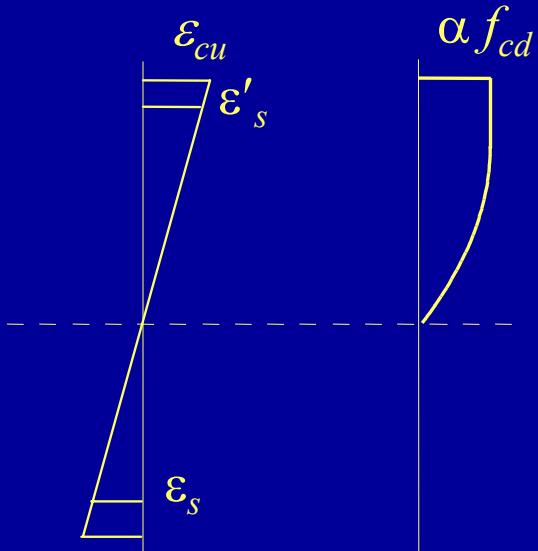
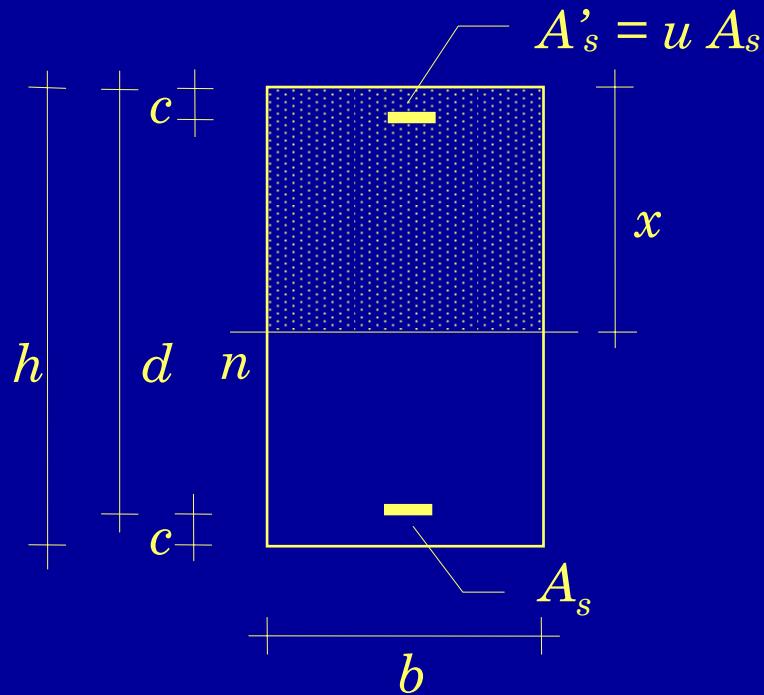
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se N è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se N è di compressione)

Imporre la condizione $I_n = e_n S_n$ se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo
(equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

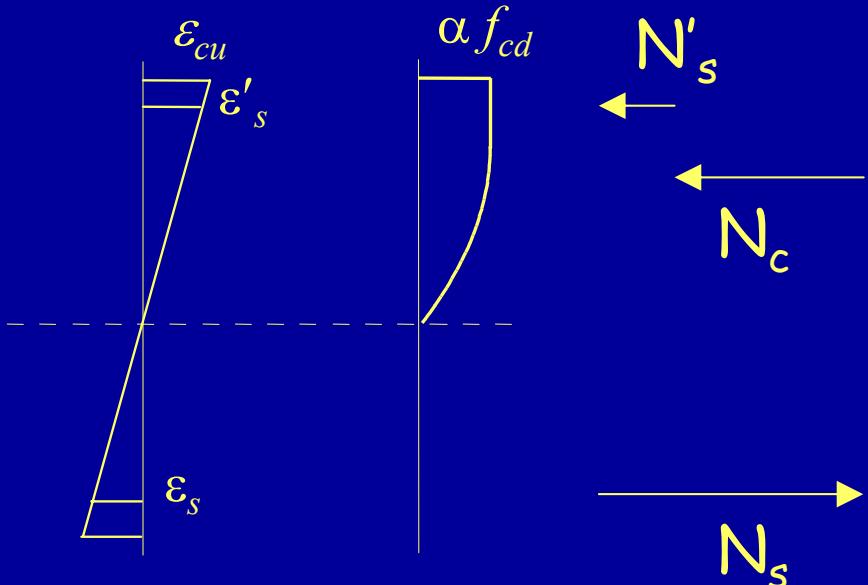
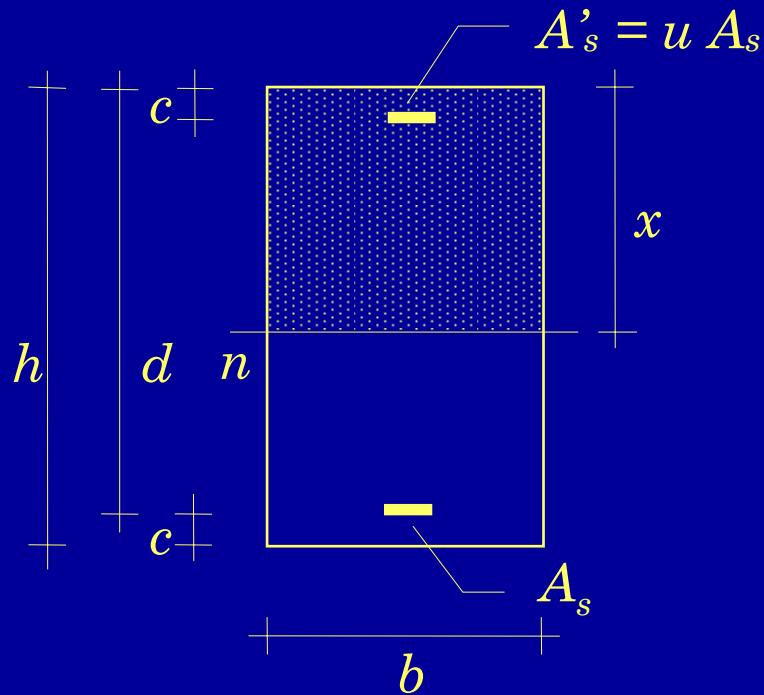
Verifica - stato limite ultimo



Dati: Geometria della sezione Armature Coppia M-N

Incognite: Posizione dell'asse neutro Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Sd}$$

(equilibrio alla traslazione)

E poi calcolare M_{Bd} , con equilibrio alla rotazione

Verifica - stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{N_{sd} + (A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b \alpha f_{cd}}$$

altrimenti si ottiene una equazione di secondo grado

Individuato il diagramma, si calcola facilmente il momento resistente M_{Rd} , da confrontare con M_{sd}

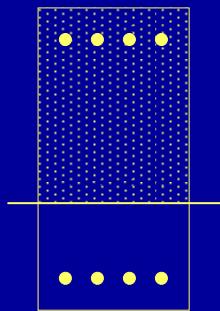
Domini M-N
per flessione composta retta

Domini di resistenza - tensioni ammissibili

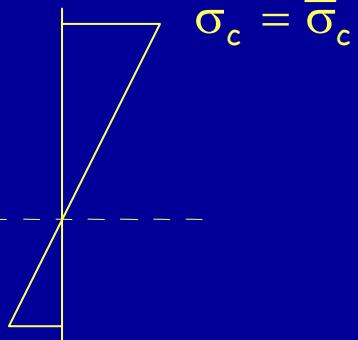
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un diagramma



si calcolano M ed N

$$N = \int \sigma \, dA$$

$$M = - \int \sigma y \, dA$$

Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie $M-N$ per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

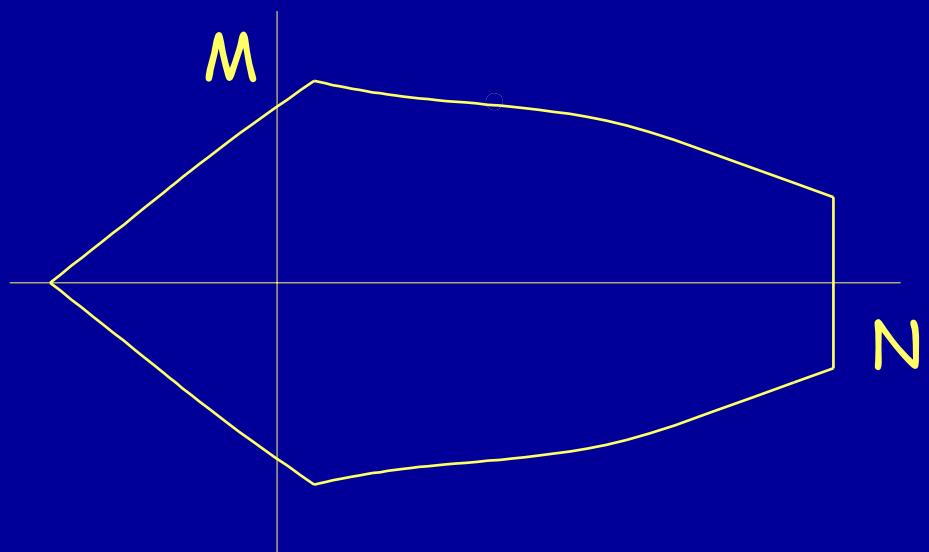
Per ricavare una coppia $M-N$ del dominio



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza,
o curva di interazione = insieme delle coppie $M-N$
per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

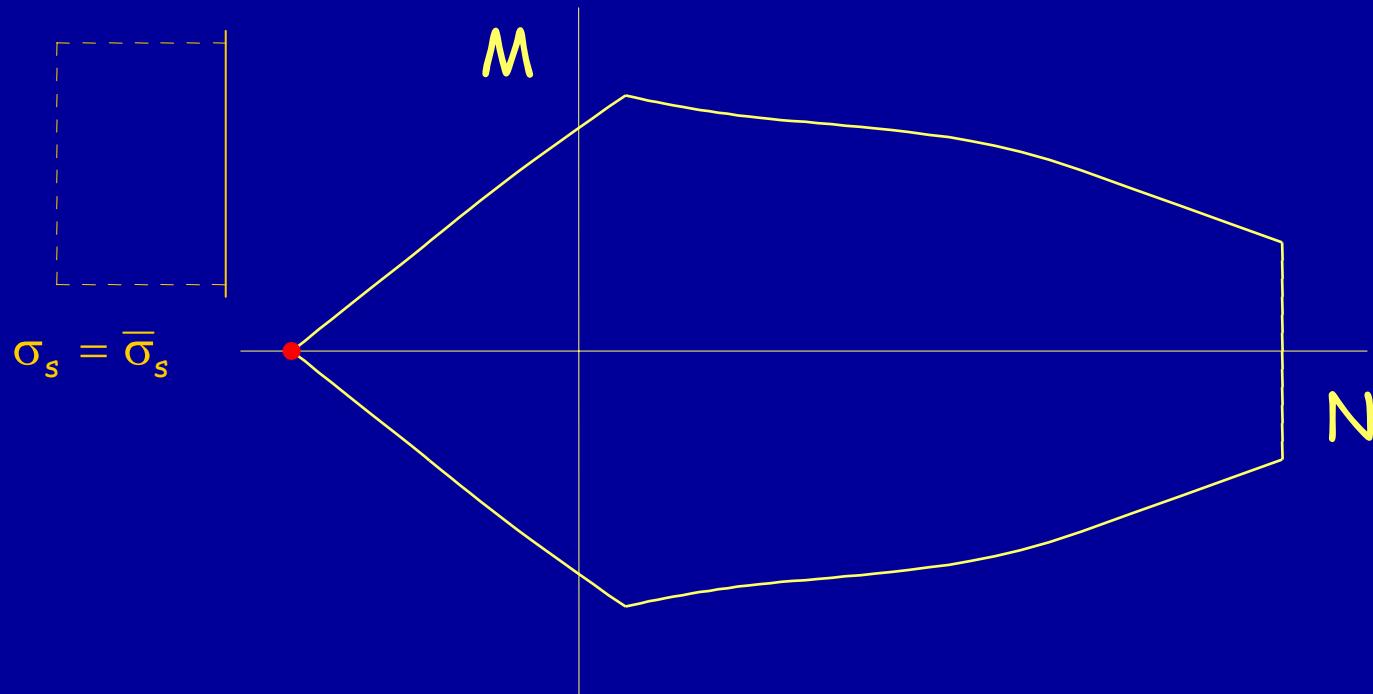
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



si ottiene il
dominio
completo

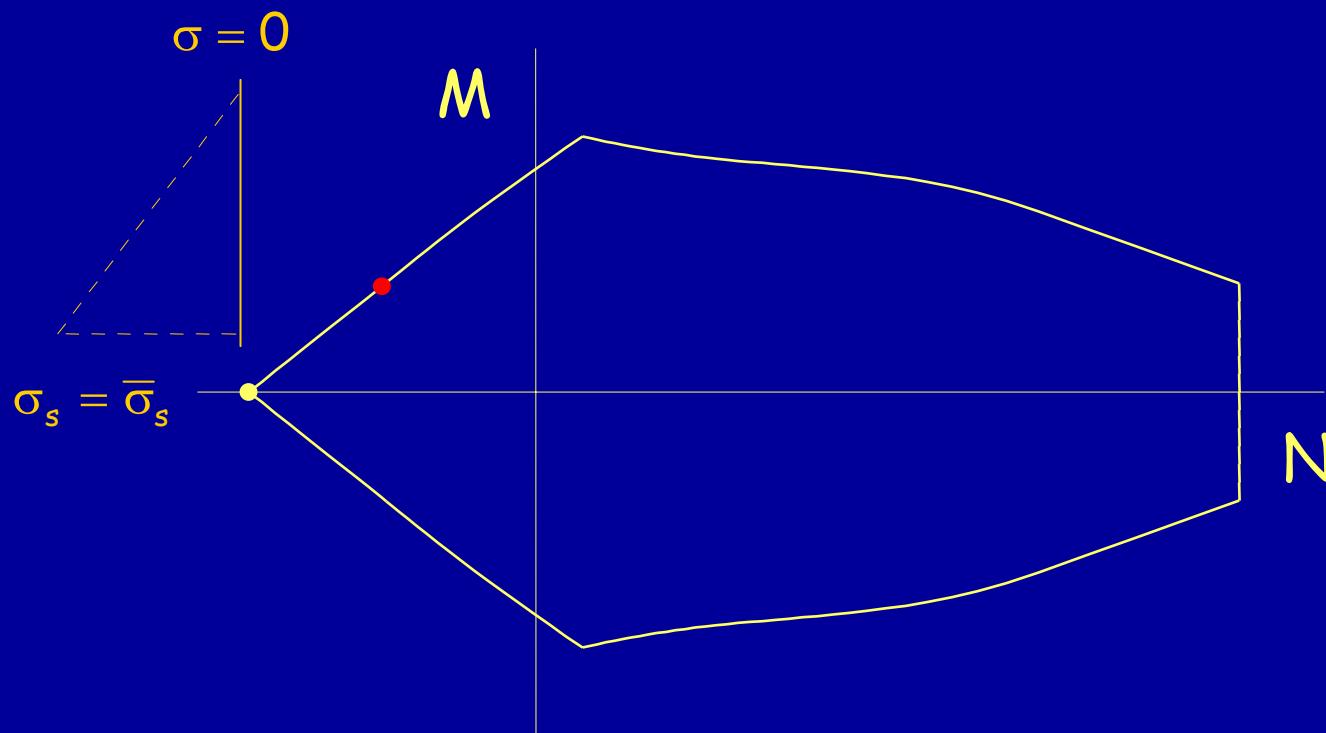
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



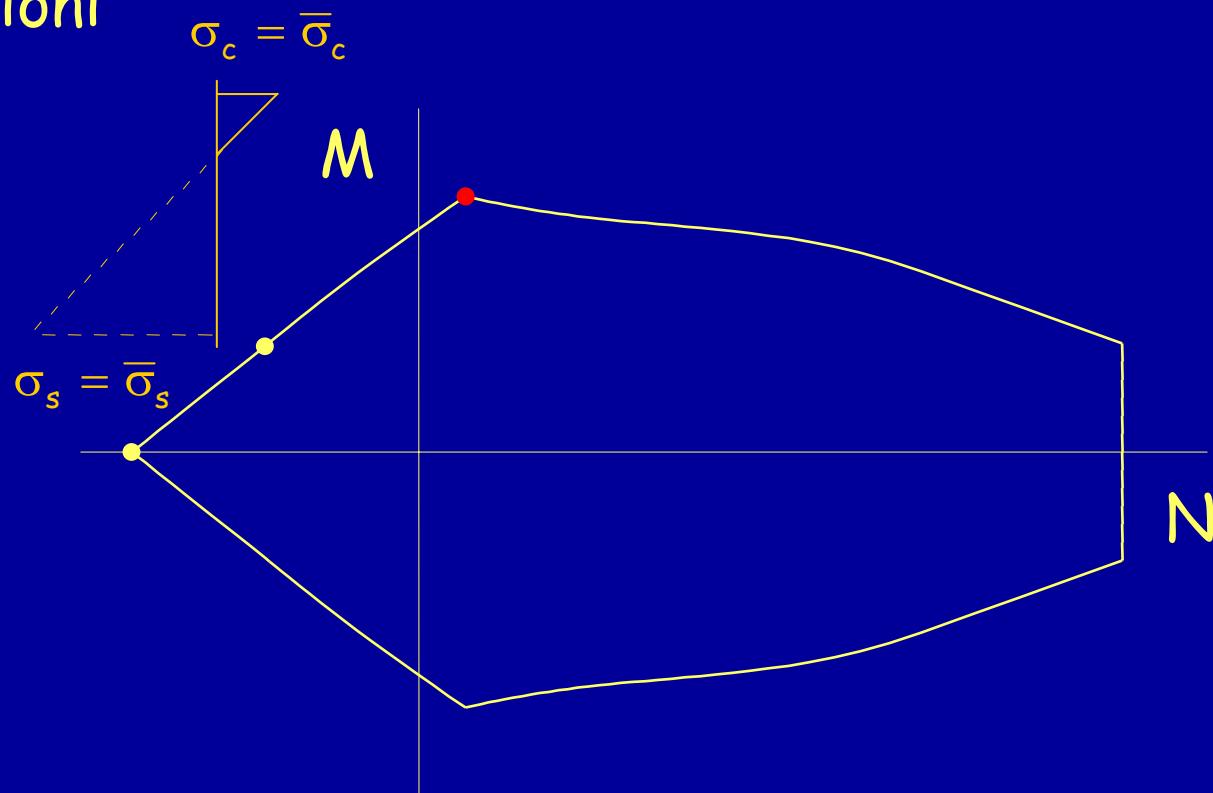
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



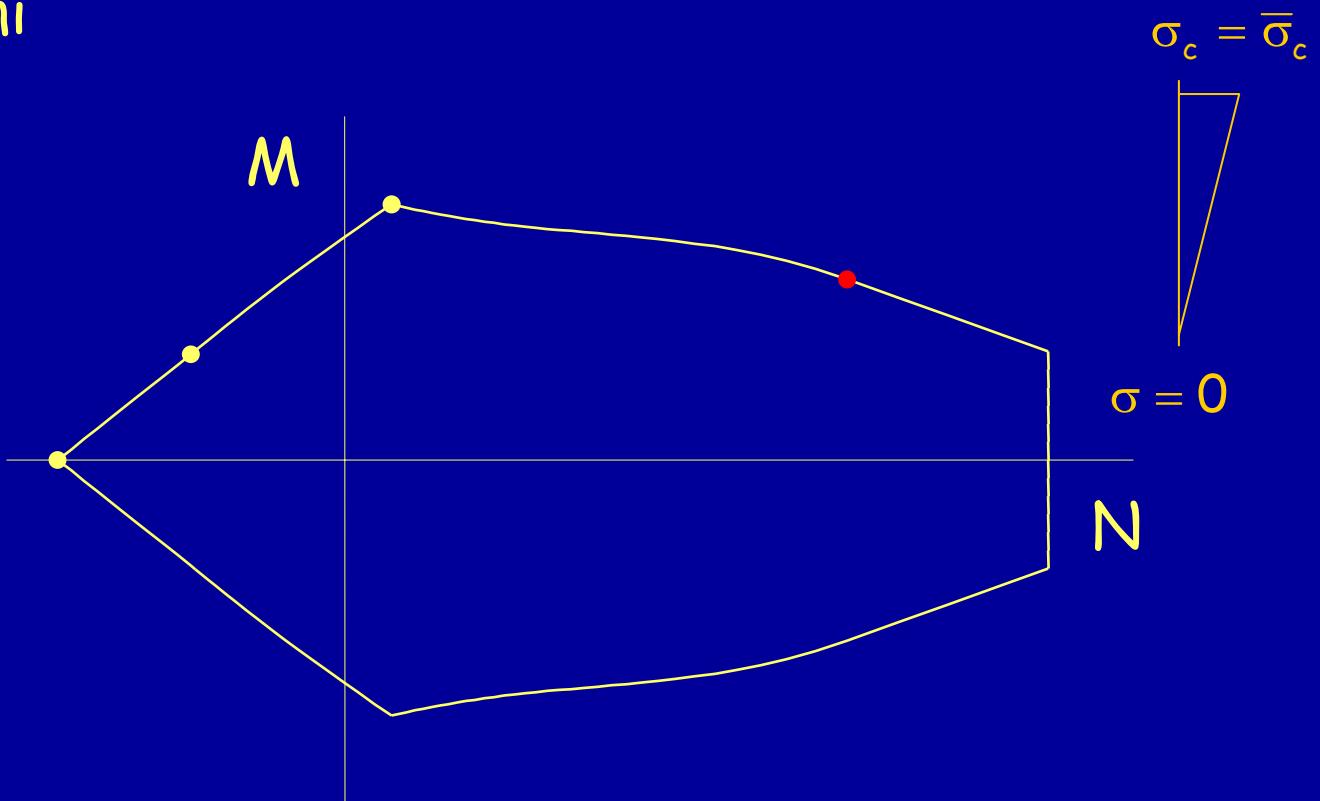
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



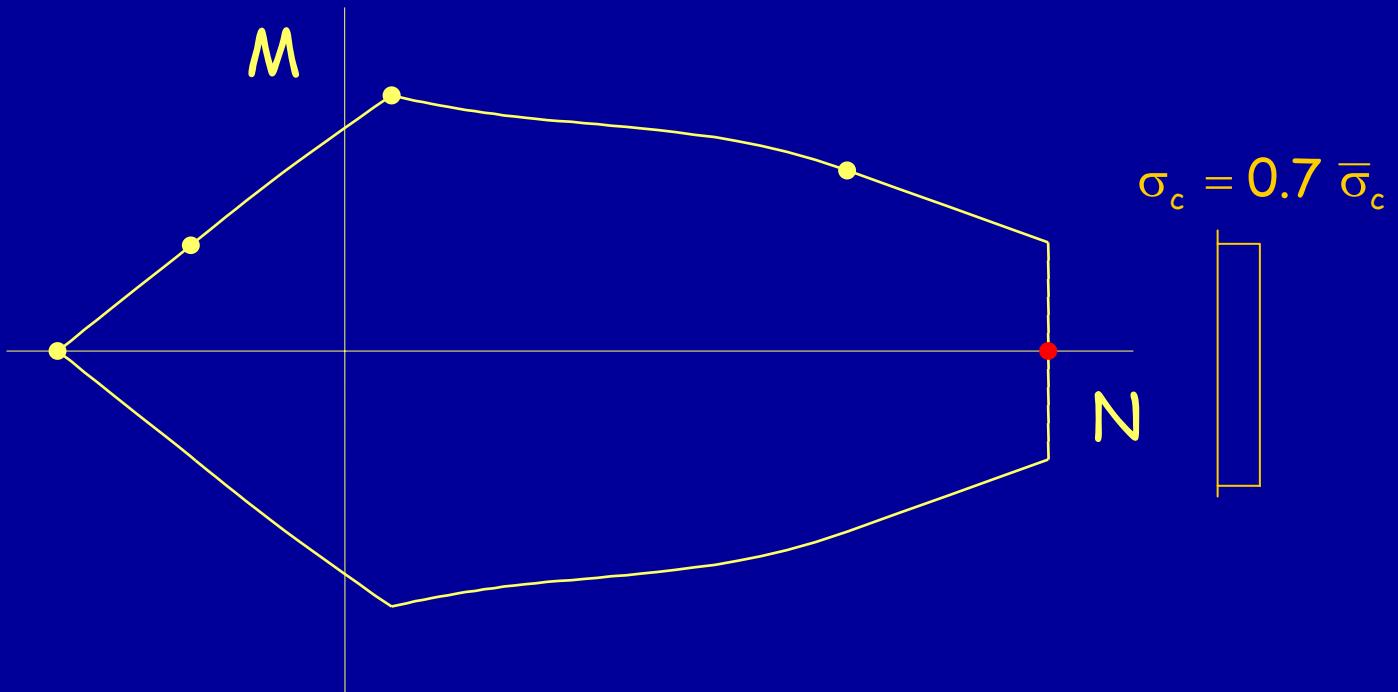
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



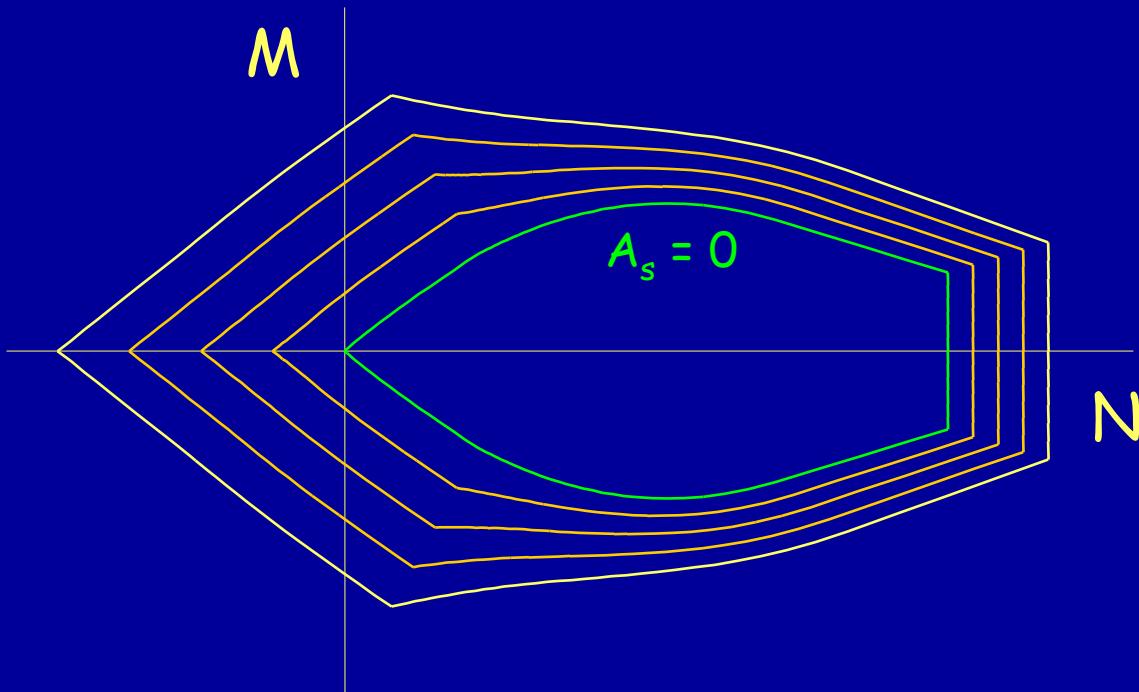
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

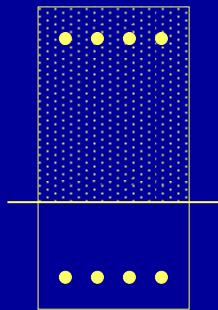


Domini di resistenza - stato limite ultimo

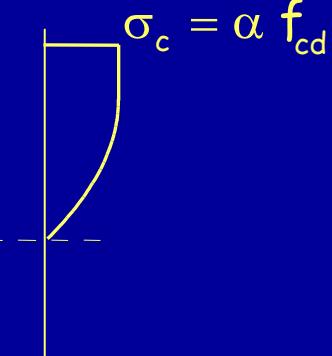
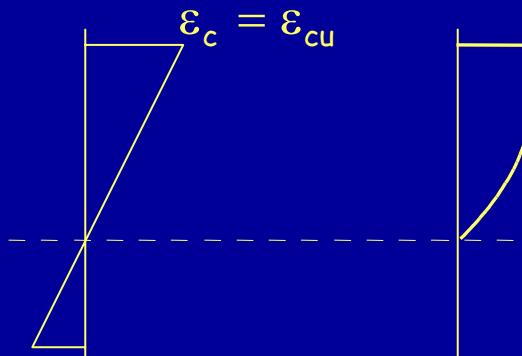
Dominio di resistenza,
o curva di interazione = insieme delle coppie M-N
per cui ε_{\max} è uguale a ε_{\lim}

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un diagramma
di ε



si calcolano
M ed N

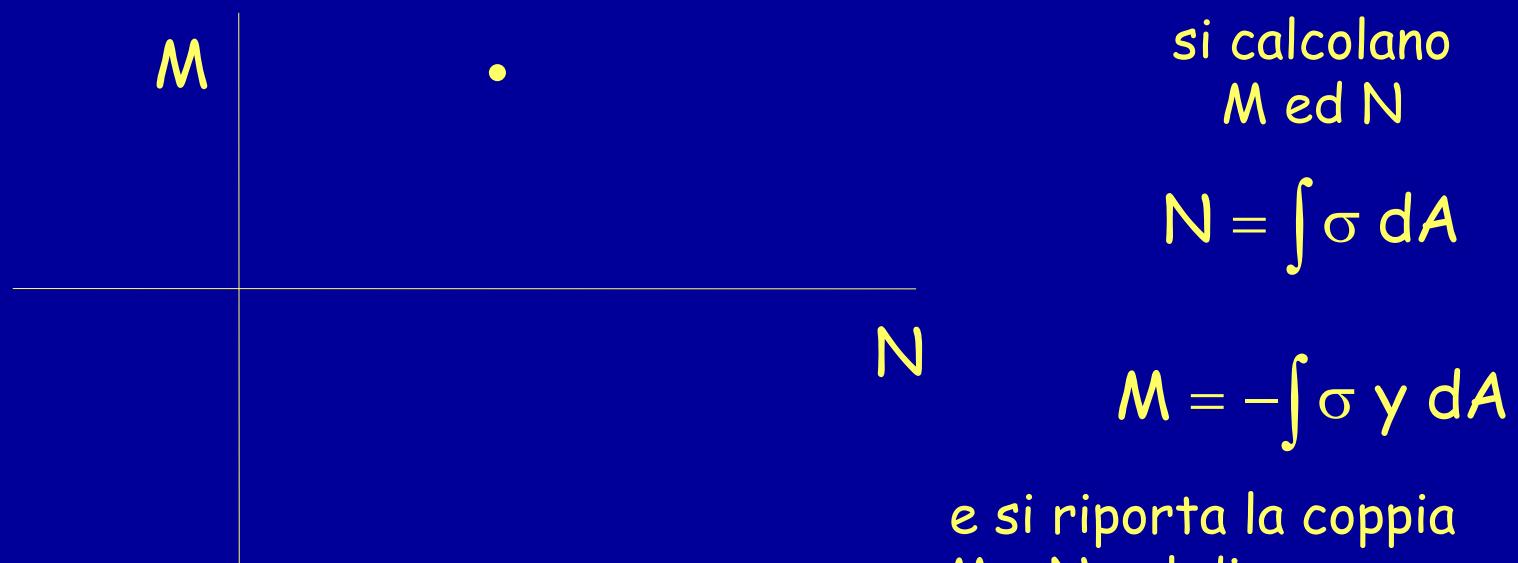
$$N = \int \sigma \, dA$$

$$M = - \int \sigma \, y \, dA$$

Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie $M-N$ per cui ε_{max} è uguale a $\bar{\varepsilon}_{cu}$

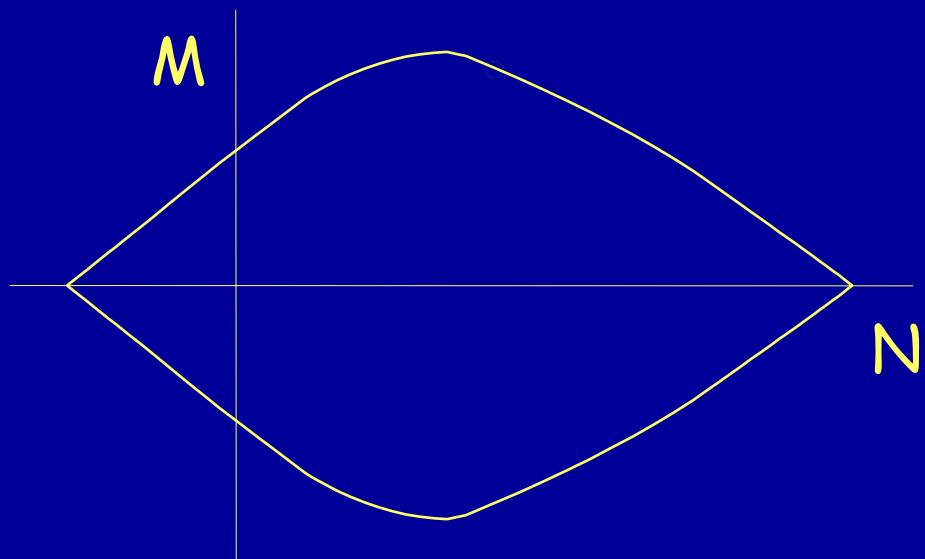
Per ricavare una coppia $M-N$ del dominio



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza,
o curva di interazione = insieme delle coppie $M-N$
per cui ε_{\max} è uguale a $\bar{\varepsilon}_{cu}$

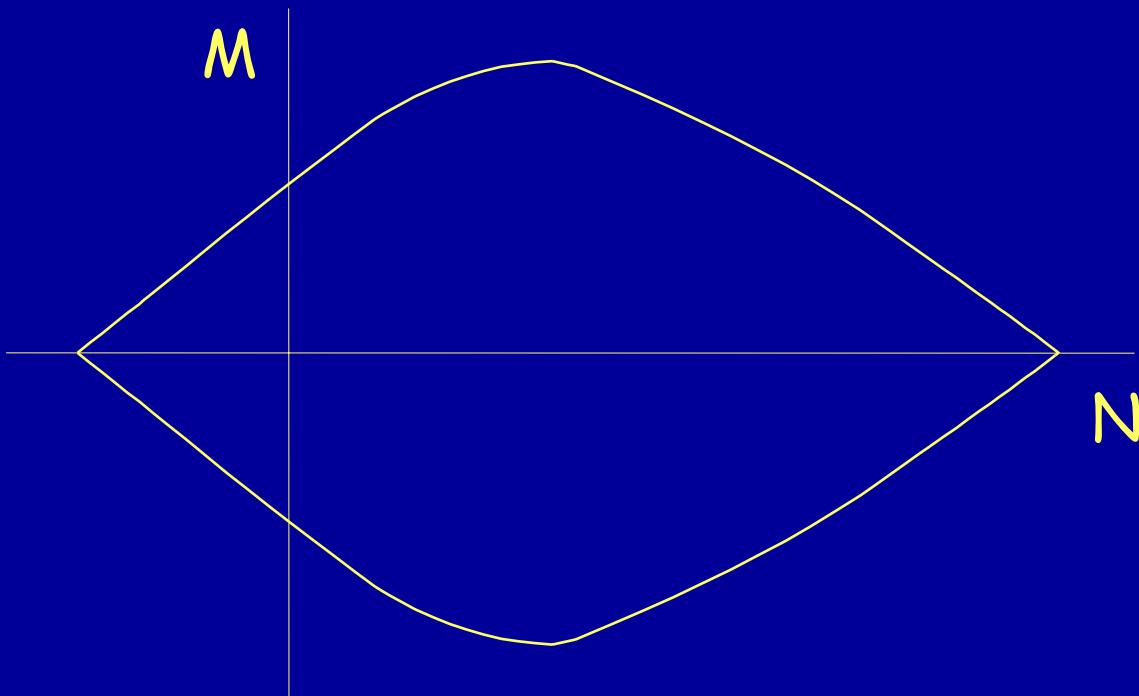
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



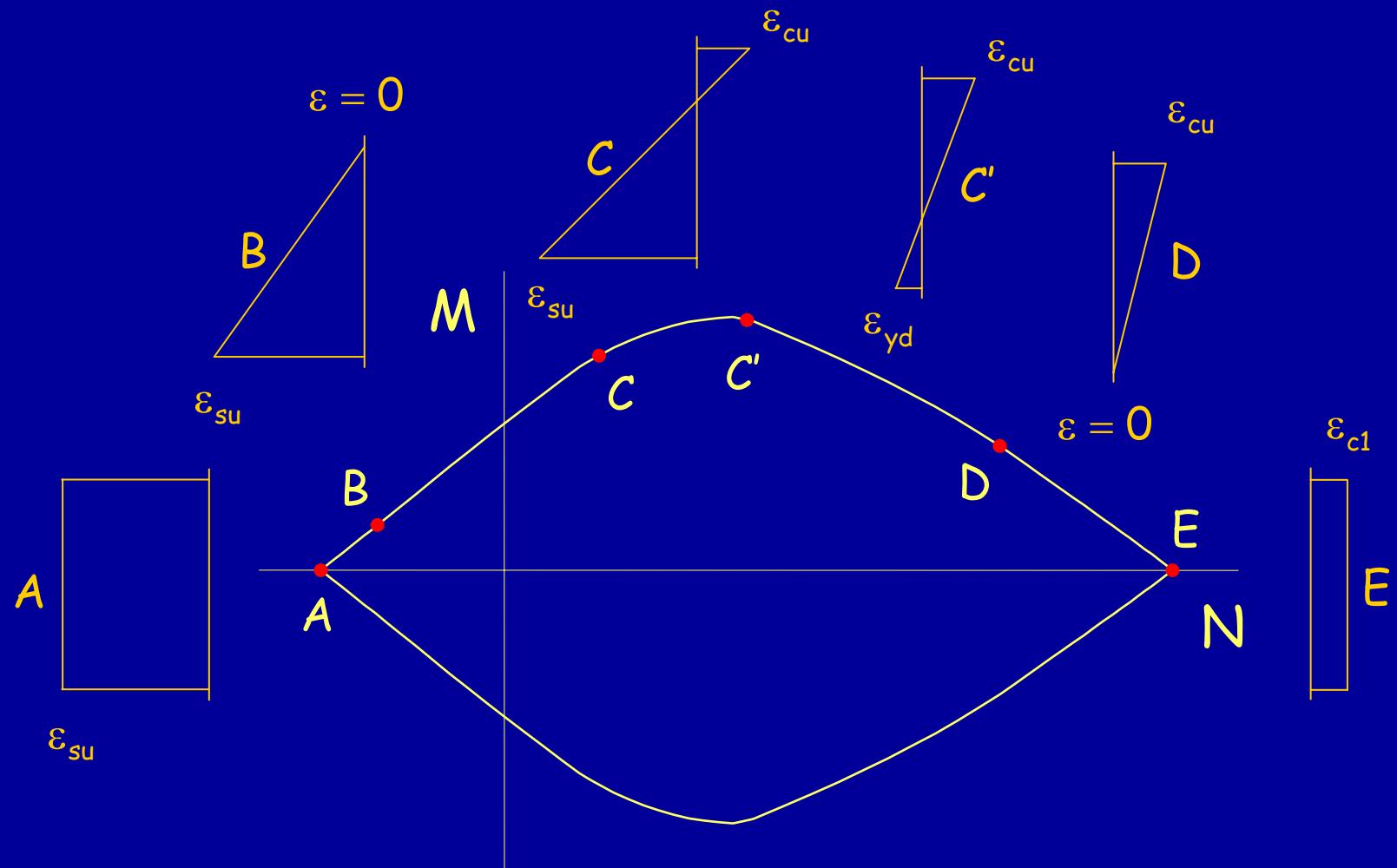
si ottiene il
dominio
completo

Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni

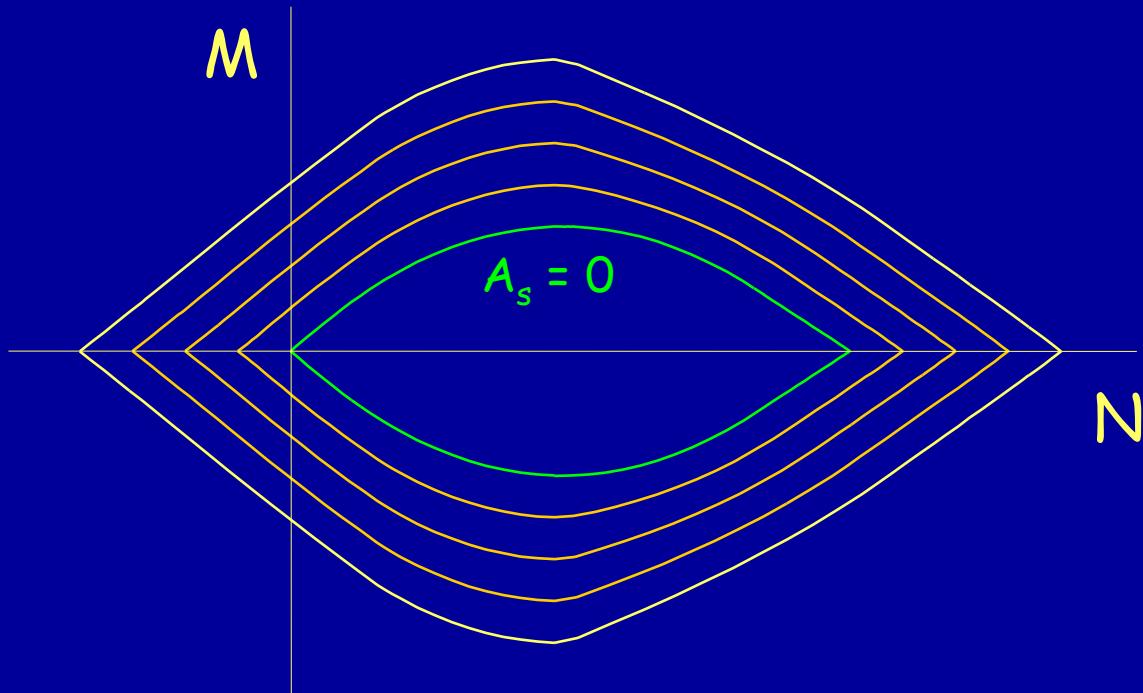


Domini di resistenza - stato limite ultimo



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

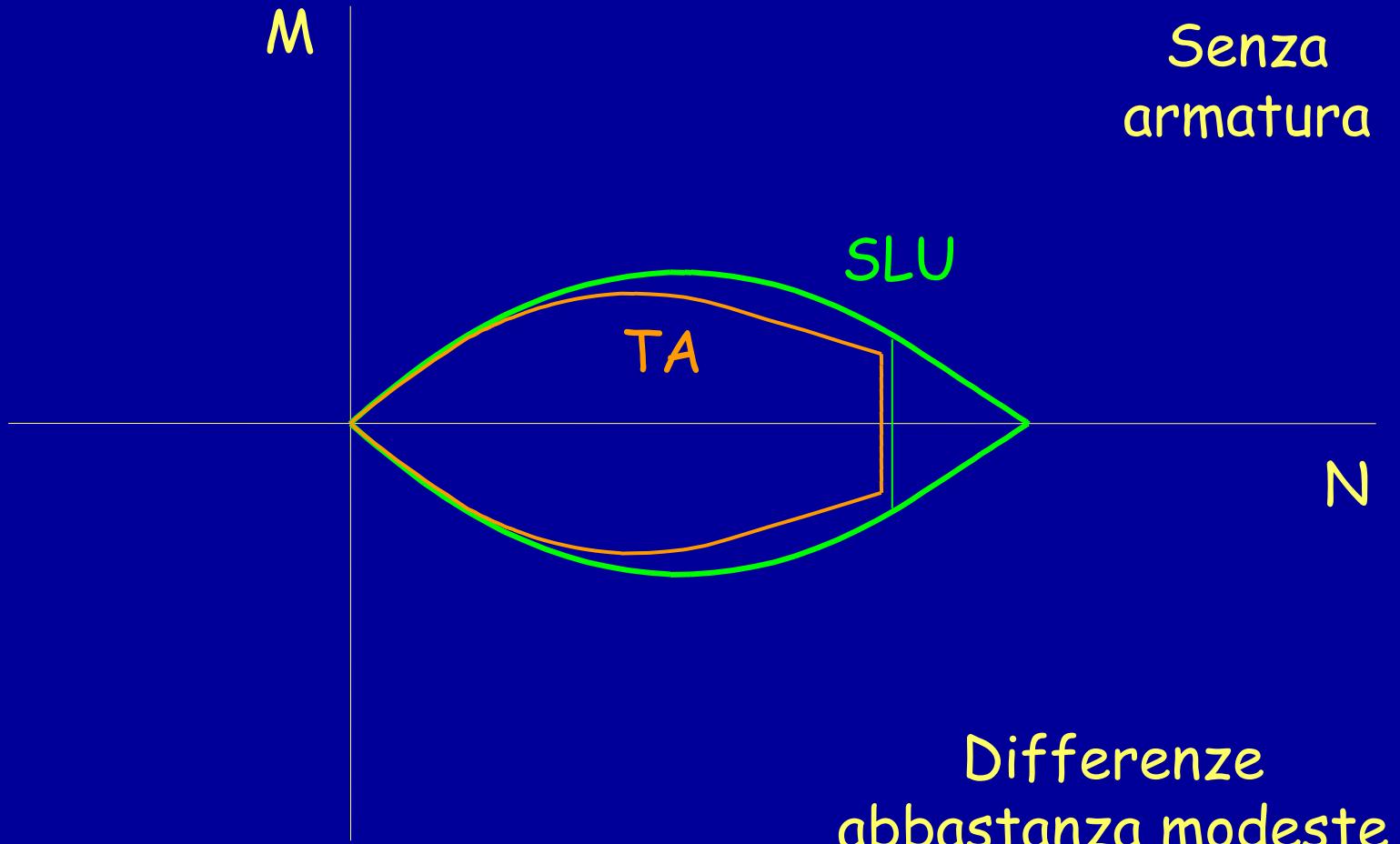


Domini: confronto tra TA e SLU

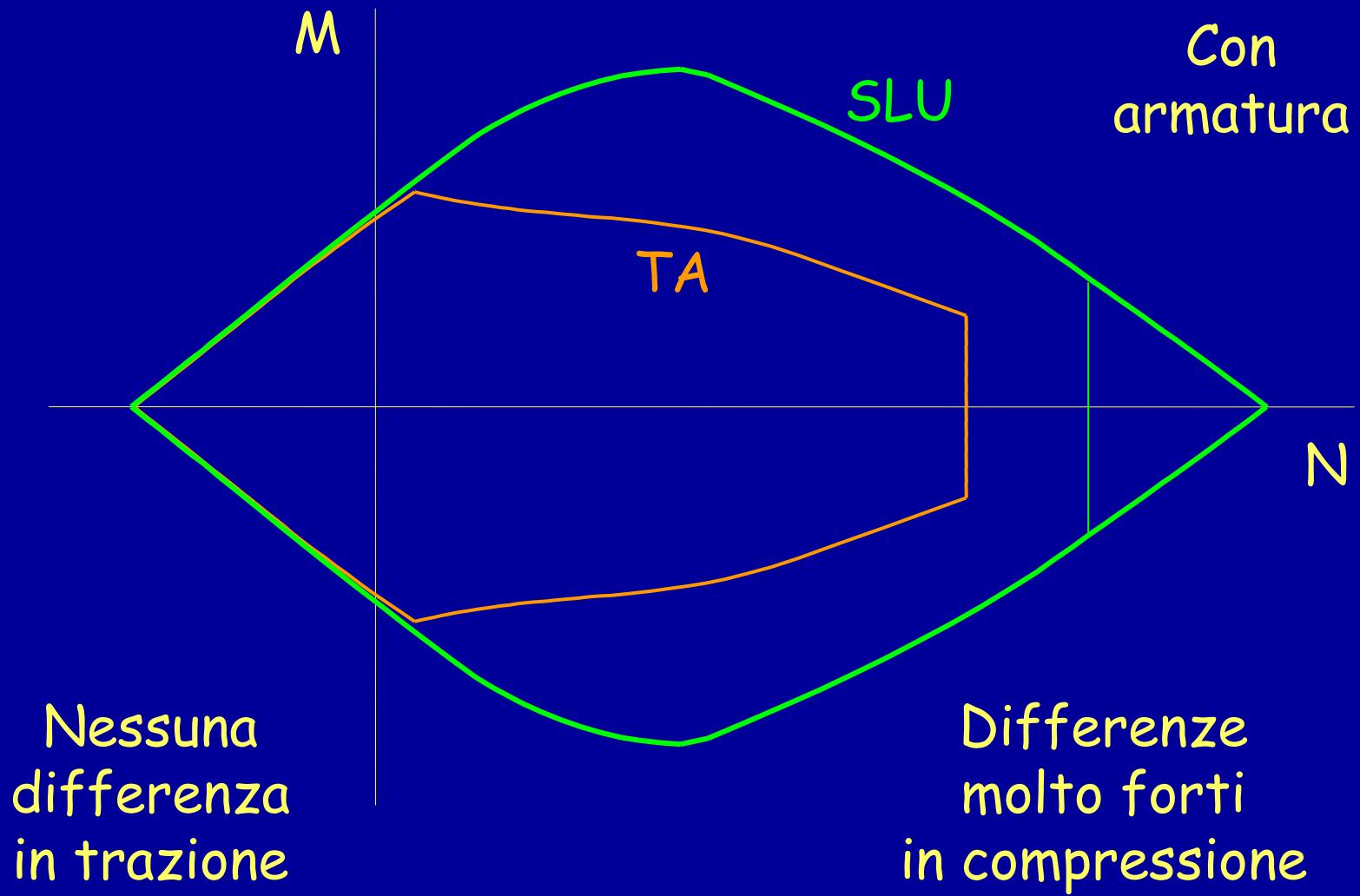
Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (di 1.4 ÷ 1.5) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio x 1,45)

Domini: confronto tra TA e SLU



Domini: confronto tra TA e SLU

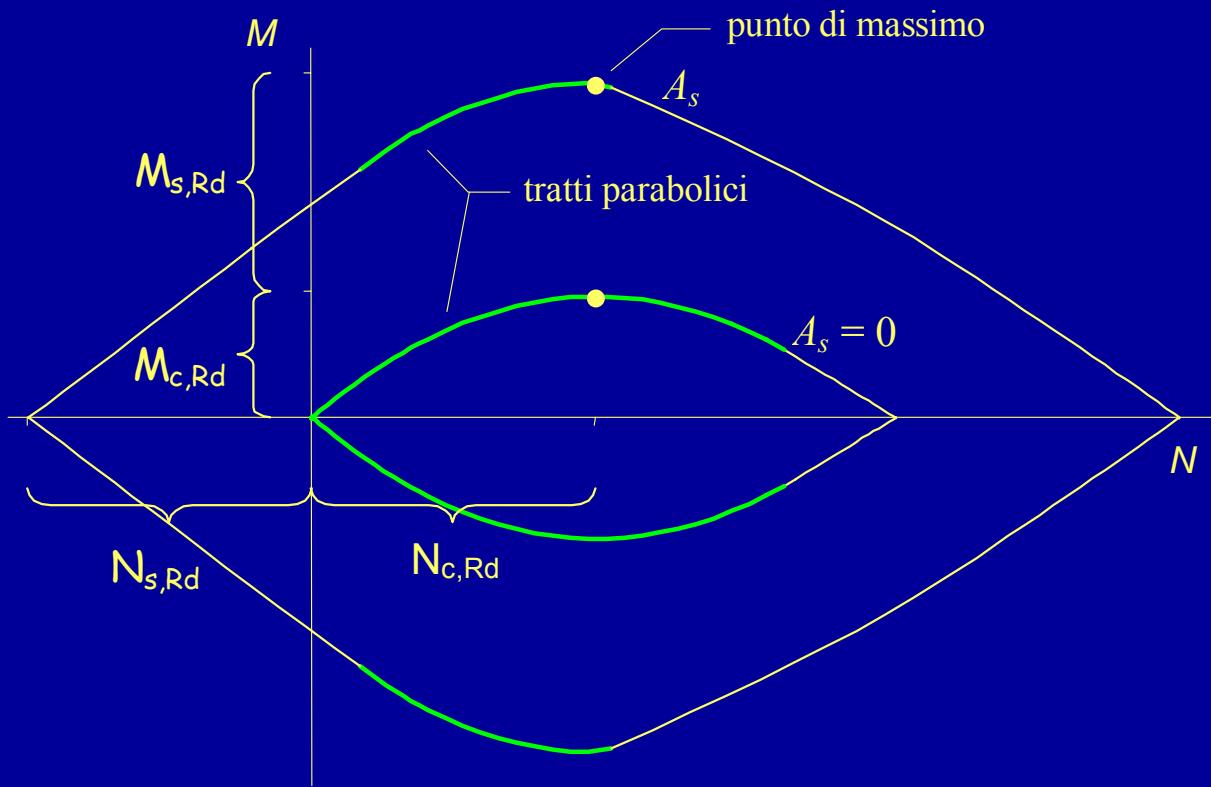


Progetto e verifica allo SLU
con i domini M-N

(sezioni rettangolari, $A_s = A'_s$)

Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



Dominio M-N allo SLU

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$M = \beta b \times \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b \alpha f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

Il punto di massimo
è individuato da

$$N = N_{c,Rd} \quad M = M_{c,Rd} + M_{s,Rd}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd}$$

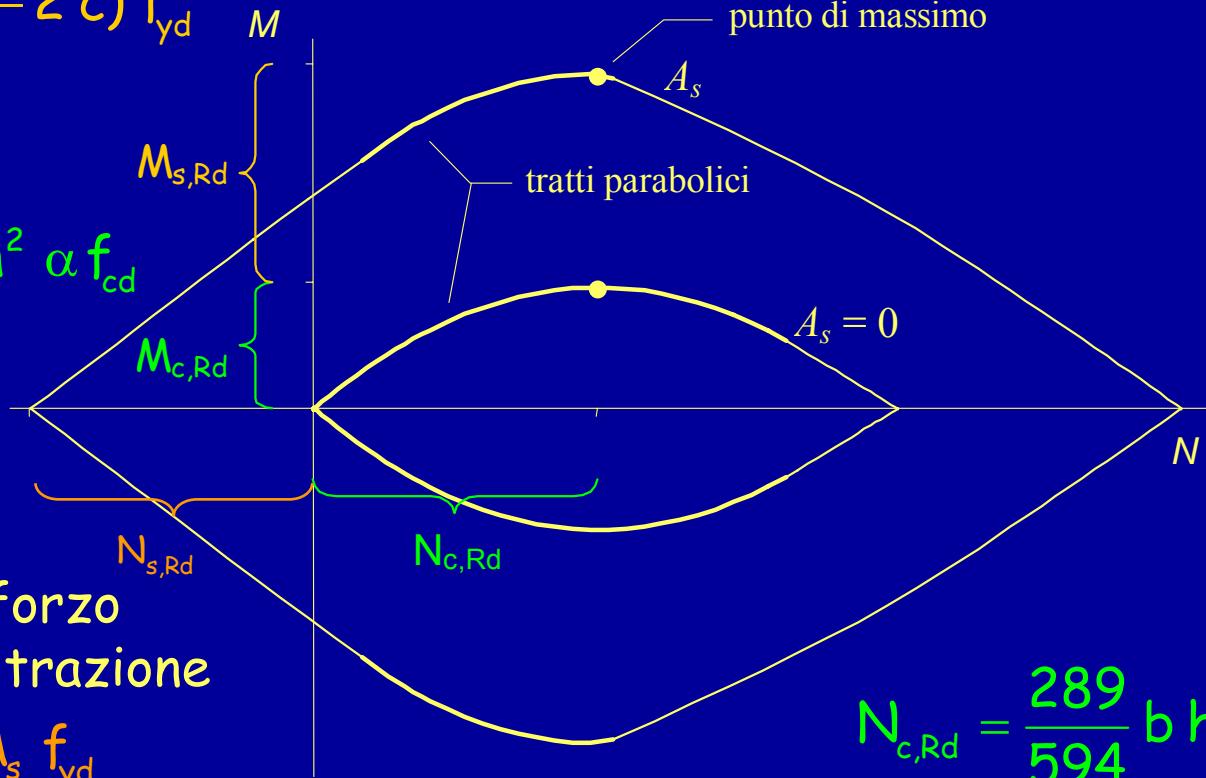
Dominio M-N allo SLU

$$M_{s,Rd} =$$

$$= A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$M_{c,Rd} =$$

$$= \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$$



$$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$$

Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd}$	$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd}$	$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd}$

Formulazione analitica

Momento resistente:

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \right]$$

con $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

con $m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}}$

Formule alternative

- per $N_{Sd} < 0$ (tensoflessione)

$$\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1$$

- per $0 < N_{Sd} < N_{c,Rd}$

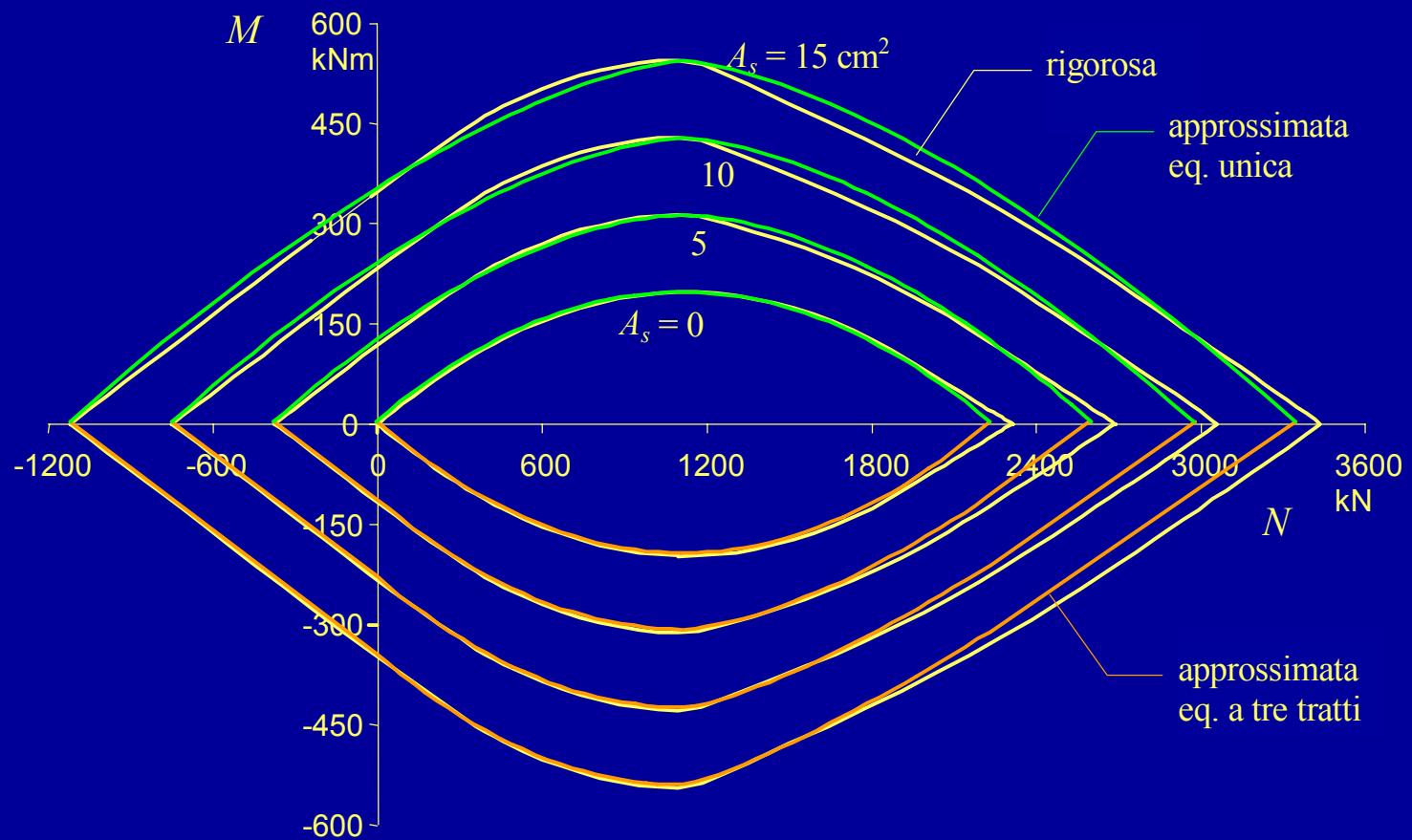
$$\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1$$

- per $N_{Sd} > N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^n \leq 1$$

con $n = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2$

Confronto



Esempio - verifica a pressoflessione

Dati geometrici

Sezione 40x70

$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$

Materiale

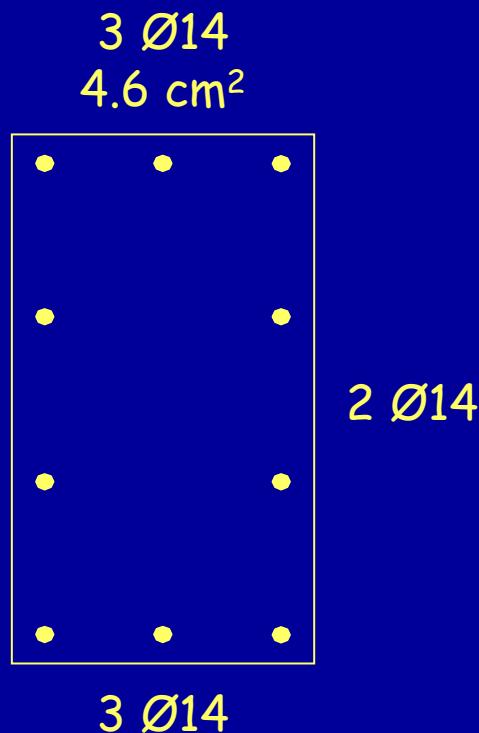
Calcestruzzo $R_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Acciaio FeB44k

Sollecitazioni

$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$

$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$



Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,Rd} = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} = 0.486 \times 0.40 \times 0.70 \times 11.0 \times 10^3$$

$$N_{c,Rd} = 1497 \text{ kN}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 11.0 \times 10^3$$

$$M_{c,Rd} = 262.2 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,Rd} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,Rd} = 345.5 \text{ kN}$$

$$M_{s,Rd} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 373.9 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,Rd} = 107.1 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} = 1 + \frac{1497}{1497 + 355.5} = 1.808$$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \right] =$$
$$= (262.2 + 107.1) \left[1 - \left| \frac{1300 - 1497}{1497 + 355.5} \right|^{1.808} \right] =$$

$$= 362.9 \text{ kNm}$$

$$M_{Sd} < M_{Rd}$$

Sezione
verificata

Esempio - verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.808$$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{350}{262.2 + 107.1} + \left| \frac{1300 - 1497}{1497 + 355.5} \right|^{1.808} =$$

$$= 0.948 + 0.017 = 0.965 \leq 1$$

Sezione
verificata

Progetto della sezione

Le espressioni possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Il coefficiente r è in questo caso dipendente da:

- sforzo normale adimensionalizzato $v = N_{Sd} / 2 N_{c,Rd}$
- percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre $\rho = A_s / b h$
- caratteristiche dei materiali

Valori di r

ν	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.1	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.2	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.3	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.4	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
0.5	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
0.6	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
0.7	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
0.8	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
0.9	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
1.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[1 - \left(\frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}}$$

z è il braccio della coppia interna
costituita dalle armature

$$z = h - 2c \cong 0.9 d$$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per $0 \leq N_{Sd} \leq N_{c,Rd}$

Esempio - progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$$N_{sd} = 1300 \text{ kN}$$
$$M_{sd} = 350 \text{ kNm}$$

$$M_{sd,red} = 350 - 262.2 \left[1 - \left(\frac{1300 - 1497}{1497} \right)^2 \right] = 92.3 \text{ kNm}$$

Armatura necessaria:

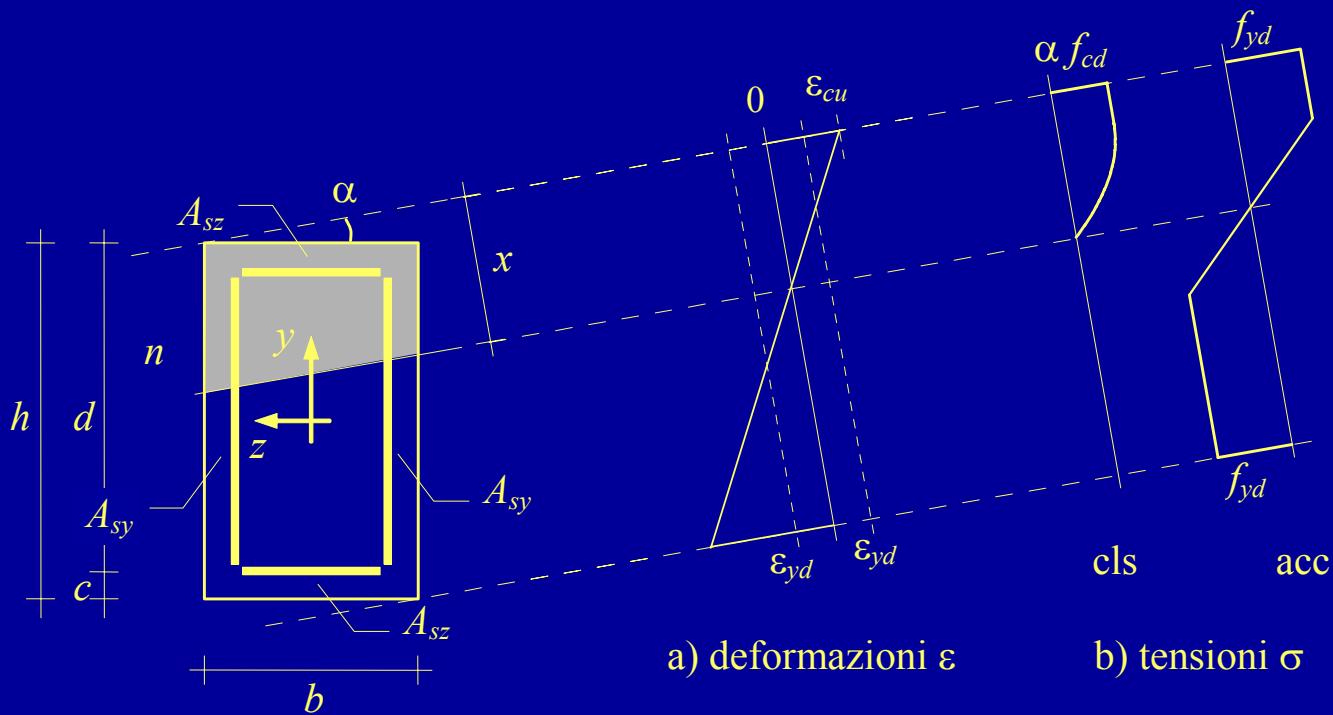
$$A_s = \frac{92.3}{0.9 \times 0.66 \times 373.9} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

Domini M-N
per flessione composta deviata

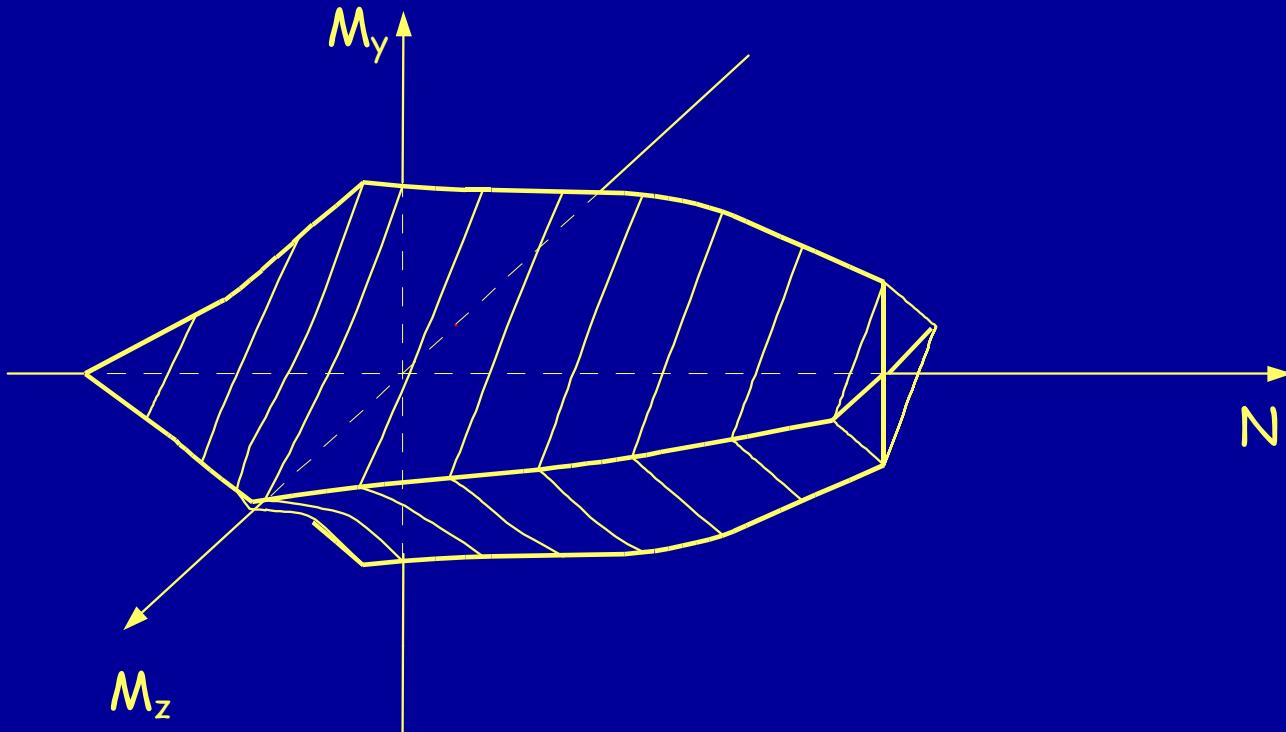
Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y - M_z - N

- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro

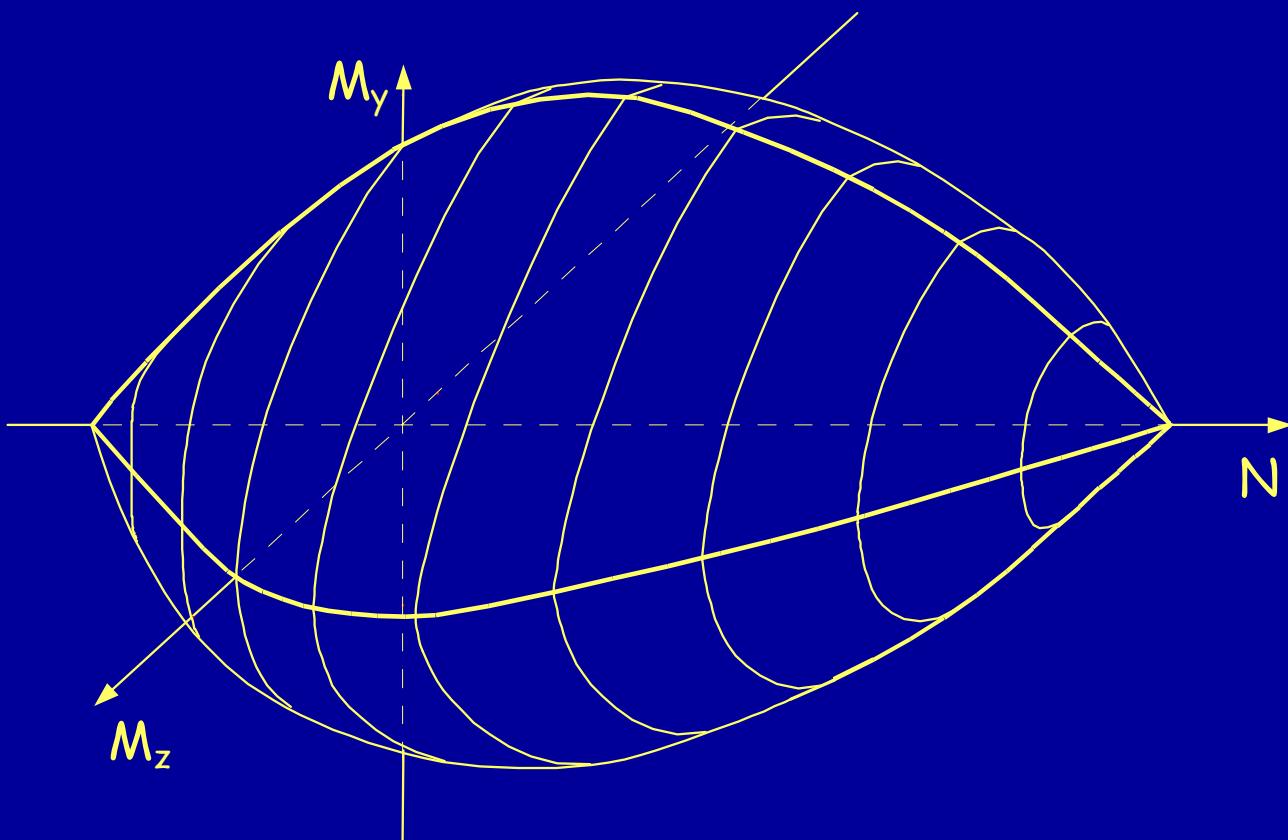


Dominio alle TA

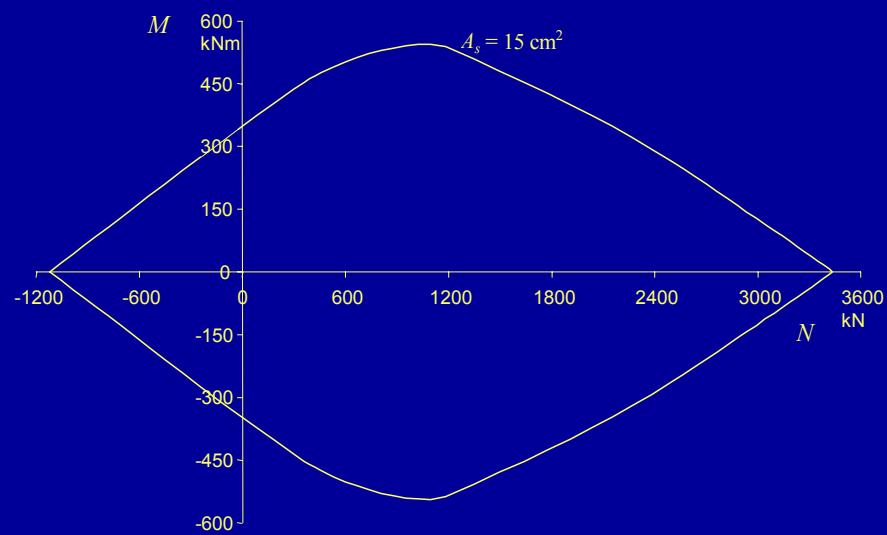
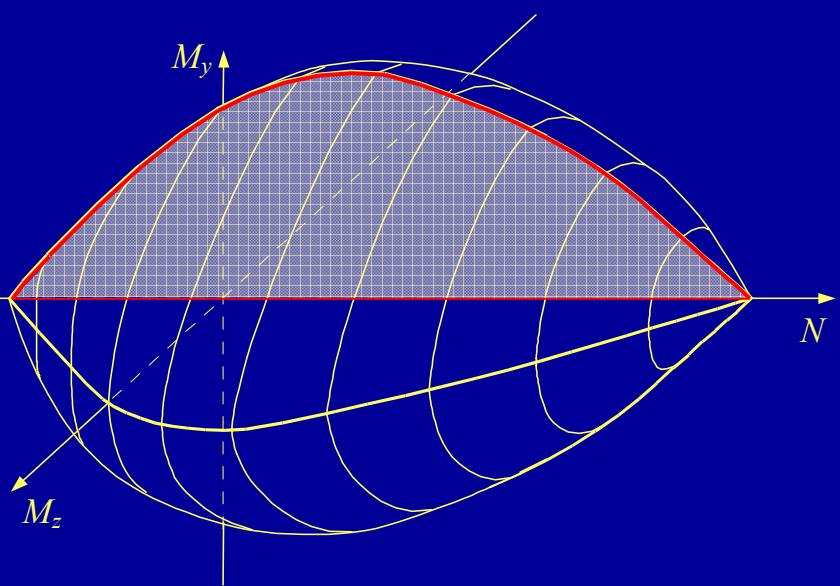


Notare la sezione trasversale:
la presenza contemporanea di
 M_y e M_z è molto penalizzante

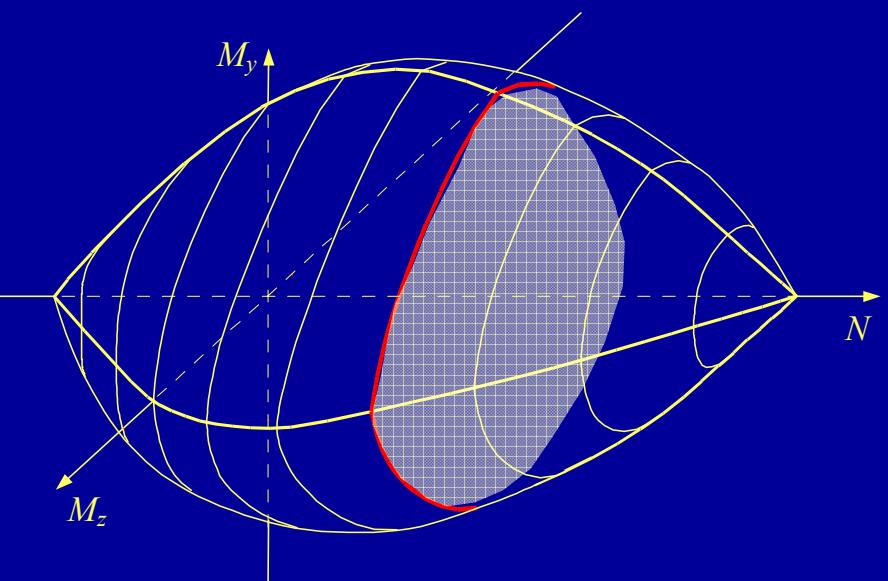
Dominio allo SLU



Dominio allo SLU

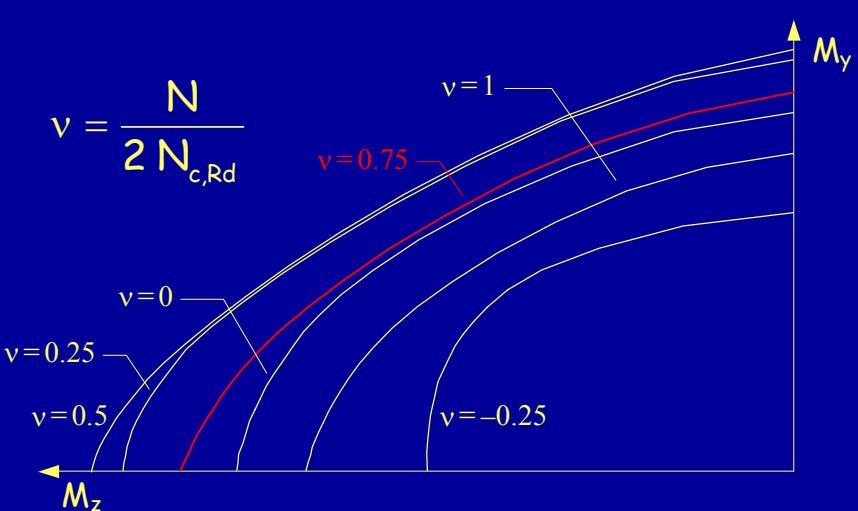


Dominio allo SLU



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}}\right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}}\right)^q = 1$$

*Consiglio:
usare $p = q = 1.5$*

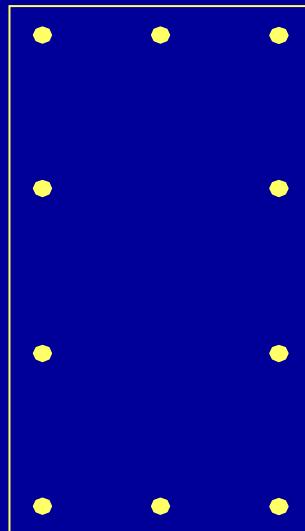


Considerazioni

Nel calcolare il momento resistente $M_{Rd,y}$ si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa

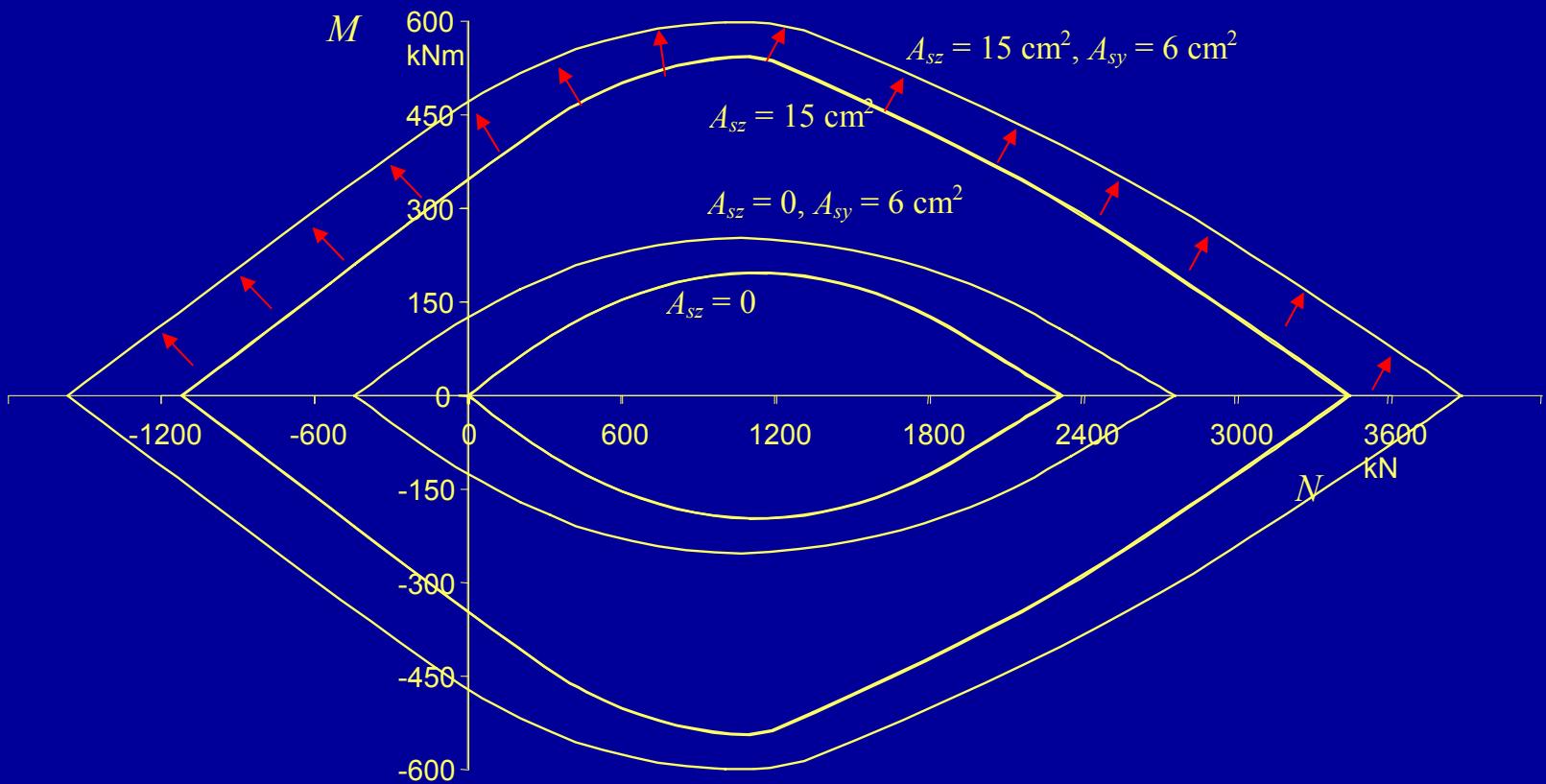
$A_{s,y}$



$A_{s,z}$

Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



Considerazioni

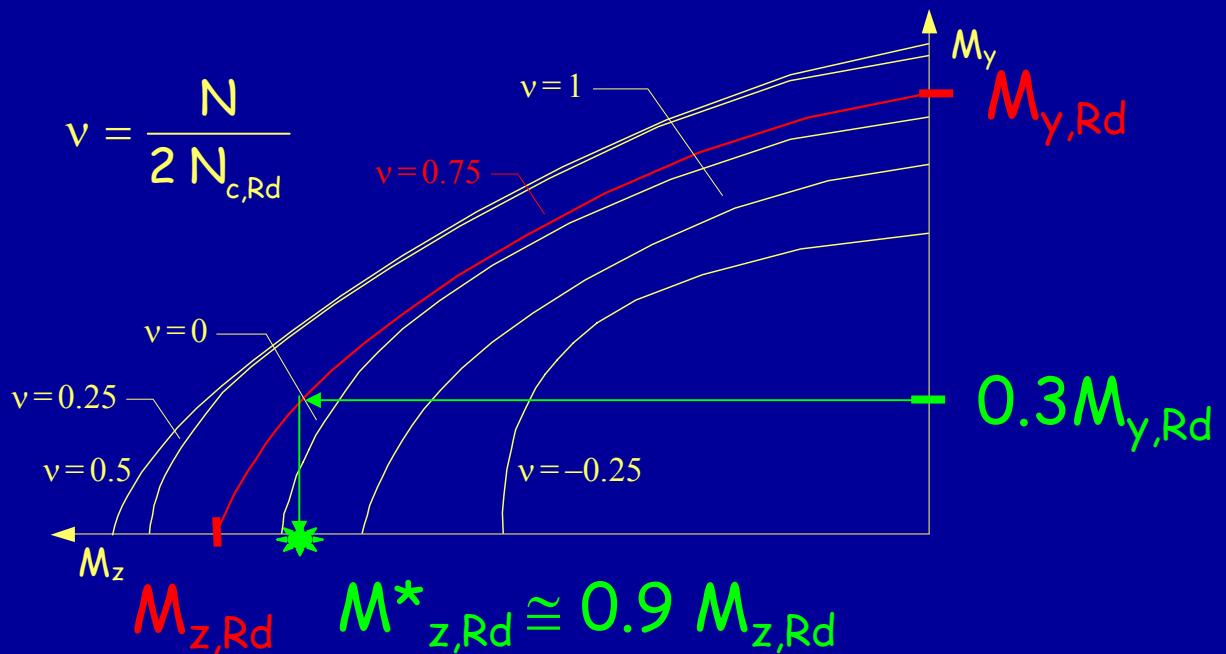
Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^m \right]$$

con $m = 1 + \left(\frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)$

Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni, e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata

FINE

Bibliografia:

A. Ghersi, L. Blandini

"Progetto di elementi strutturali in cemento armato"

A. Ghersi, M. Muratore

Verifica e progetto allo stato limite ultimo di pilastri in c.a. a sezione rettangolare: un metodo semplificato

Per questa presentazione:

coordinamento

realizzazione

A. Ghersi

A. Ghersi,
M. Muratore,
E. Marino

ultimo aggiornamento

10/05/2004