

Incontri tematici
Norme Tecniche sulle Costruzioni

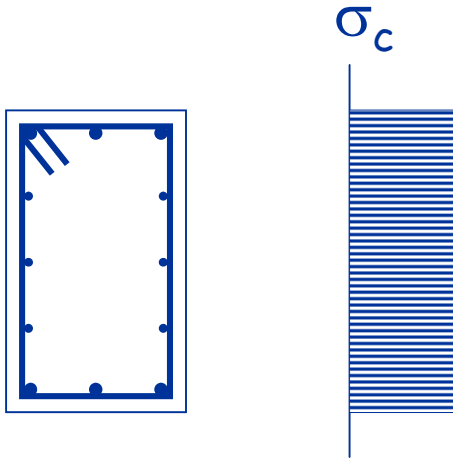
Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

2 - Sforzo normale; momento flettente

Messina
7-8 maggio 2010
Aurelio Ghersi

Sforzo normale

Verifica - tensioni ammissibili



$$\sigma_s = n \sigma_c \quad n = 15$$

~~$$\sigma_c \leq \bar{\sigma}_c$$~~

$$\sigma_c \leq 0.7 \bar{\sigma}_c$$

altrimenti la sezione
non può portare alcun
momento flettente

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c (A_c + n A_s)$$

Verifica - stato limite ultimo

Quando il legame tensioni-deformazioni non è lineare non è più possibile applicare le formule della Scienza delle costruzioni ma occorre rifarsi direttamente alle condizioni di equilibrio tra tensioni e deformazioni

$$N = \int \sigma \, dA$$

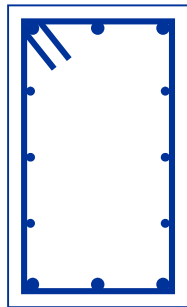
~~$$M_y = \int \sigma \, z \, dA$$~~

~~$$M_z = - \int \sigma \, y \, dA$$~~

Trazione

Compressione

Verifica - stato limite ultimo



$$\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} = 2 \times 10^{-3}$$

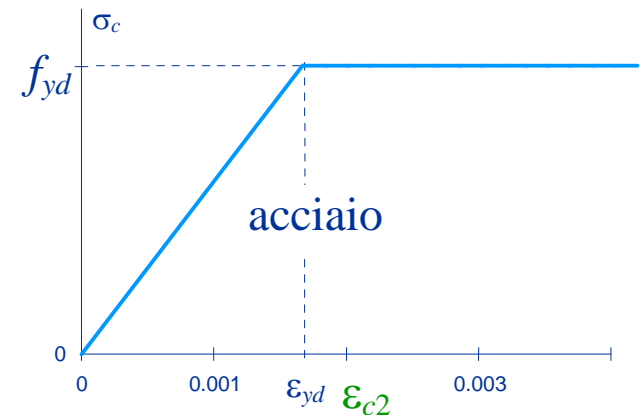
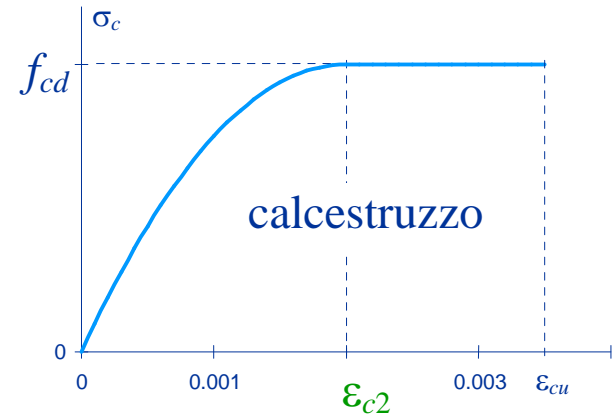
$$\sigma_c = f_{cd}$$

$$\sigma_s = f_{yd}$$

$$N_{Rd} = f_{cd} A_c + f_{yd} A_s$$

la sezione non può
portare alcun
momento flettente

$$N_{Rd} = \frac{f_{cd} A_c + f_{yd} A_s}{1.2}$$



(consigliata)

Verifica - stato limite ultimo

Nota:

“Nel caso di pilastri soggetti a compressione assiale si deve comunque assumere una componente flettente dello sforzo $M_{Ed} = e N_{Ed}$ con eccentricità e pari almeno a $0,05h \geq 20\text{mm}$ (con h altezza della sezione)”

Se non si vuole verificare la sezione a pressoflessione, occorre che la resistenza a sforzo normale centrato sia superiore almeno del 15-20% rispetto a N_{Ed}

Il numero 1.2 indicato nella diapositiva precedente tiene conto di questo

Verifica - confronto

TA

$$N_{\max} = \underbrace{0.7 \bar{\sigma}_c}_{6.8} A_c + \underbrace{n 0.7 \bar{\sigma}_c}_{89} A_s$$

Rapporto un po'
maggiore di quello
dei carichi

$$\frac{11.8}{6.8} \cong 1.7$$

$$\frac{326}{89} \cong 3.7$$

Rapporto
molto
maggiore

SLU

$$N_{Rd} = \frac{\overbrace{11.8}^{f_{cd}} \underbrace{A_c}_{1.2}}{1.2} + \frac{\overbrace{326}^{f_{yd}} \underbrace{A_s}_{1.2}}{1.2}$$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

Verifica - confronto

TA

$$N_{\max} = \underbrace{0.7 \bar{\sigma}_c}_{6.8} A_c + \underbrace{n 0.7 \bar{\sigma}_c}_{89} A_s$$

Allo stato limite ultimo,
l'acciaio compresso conta molto di più

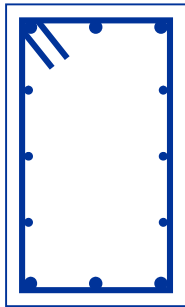
SLU

$$N_{Rd} = \underbrace{\frac{f_{cd} A_c}{1.2}}_{11.8} + \underbrace{\frac{f_{yd} A_s}{1.2}}_{326}$$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

Progetto - tensioni ammissibili



La norma impone $\rho = \frac{A_s}{A_c} \geq 0.008$

$$n = 15$$

$$N_{\max} = 0.7 \bar{\sigma}_c A_c (1 + n \rho)$$

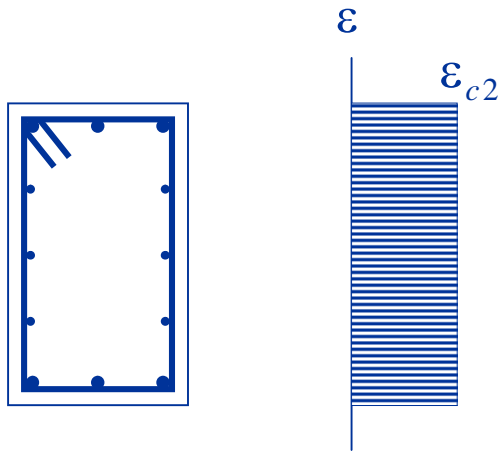
Si determina la sezione
di calcestruzzo

$$A_c \geq \frac{N}{0.784 \bar{\sigma}_c}$$

e poi l'armatura

$$A_s \geq 0.008 A_c$$

Progetto - stato limite ultimo



La norma impone che
l'armatura porti almeno il 10%
dello sforzo normale

meglio
di più

$$N_{Rd} = \overset{N_{Ed}}{f_{cd} A_c} + \overset{0.2 N_{Ed}}{f_{yd} A_s} \geq 1.2 N_{Ed}$$

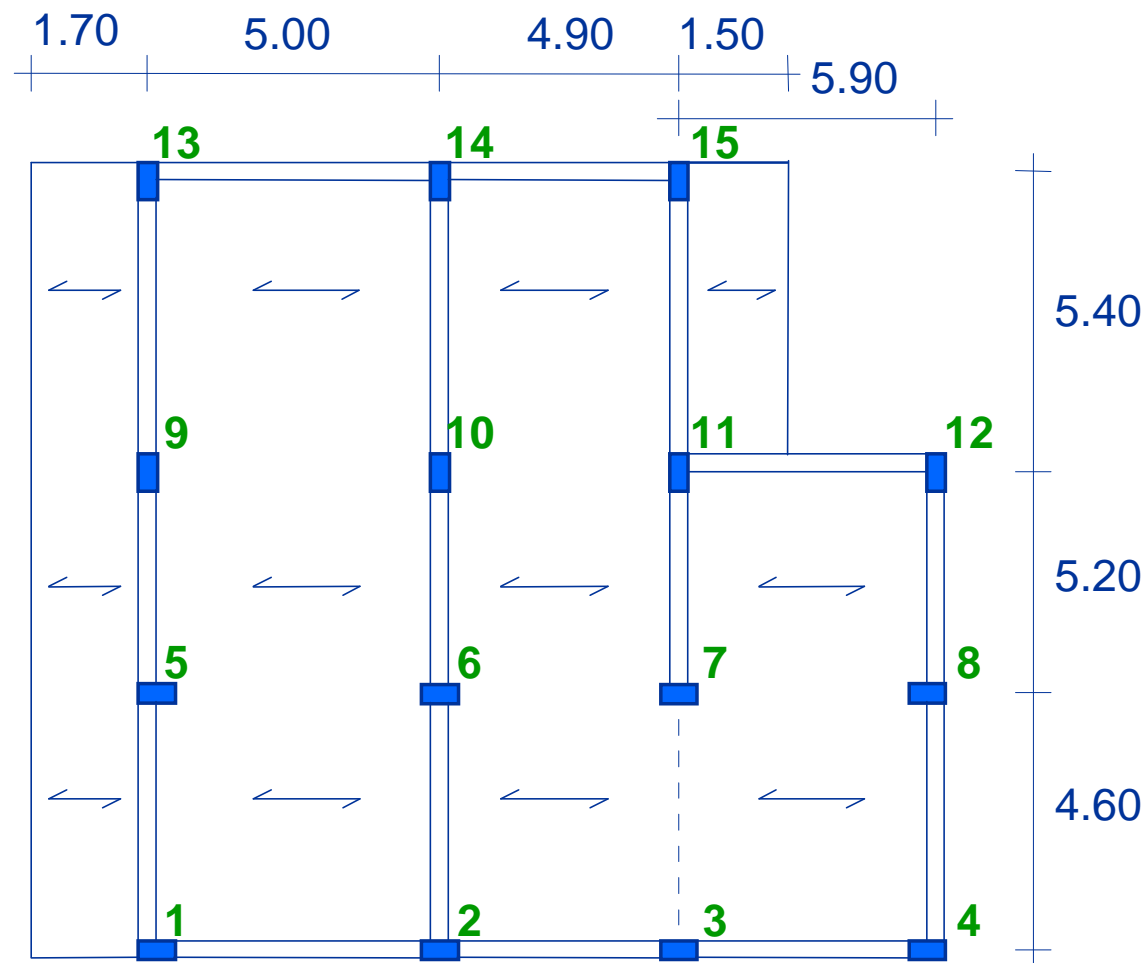
Si determina la sezione
di calcestruzzo

$$A_c \geq \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

e l'armatura

$$A_s \geq \frac{0.2 N_{Ed}}{f_{yd}}$$

Esempio - edificio a 6 impalcati



Materiali utilizzati

Calcestruzzo

$$C25/30 \quad f_{ck} = 25 \text{ MPa} \quad f_{cm} = 33 \text{ MPa}$$

$$E_c = 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} = 31500 \text{ MPa}$$

$$f_{ctk} = 0.7 \times 0.30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 1.80 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = 14.17 \text{ MPa}$$

Acciaio

B450C

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = 391.3 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{391.3}{200000} = 1.96 \times 10^{-3}$$

Esempio

carichi unitari - solaio per abitazione

Peso proprio (valore caratteristico):

soletta	$0.04 \times 1 \times 1 \text{ m}^3 \times 25 \text{ kN/m}^3$	=	1.00 kN/m^2	
travetti	$3 \times (0.08 \times 0.20) \times 1 \text{ m}^3 \times 25 \text{ kN/m}^3$	=	1.20 kN/m^2	
laterizi	$8 \times 0.082 \text{ kN}$	=	$\frac{0.66 \text{ kN/m}^2}{}$	
TOTALE		=	2.86 kN/m^2	G_1

Sovraccarichi permanenti (valore caratteristico):

massetto	$0.03 \times 1 \times 1 \text{ m}^3 \times 18 \text{ kN/m}^3$	=	0.54 kN/m^2	} G_1 0.54 ?
pavimento in granito	$0.02 \times 1 \times 1 \text{ m}^3 \times 27 \text{ kN/m}^3$	=	0.54 kN/m^2	
intonaco	$0.02 \times 1 \times 1 \text{ m}^3 \times 20 \text{ kN/m}^3$	=	0.40 kN/m^2	
incidenza tramezzi		=	$\frac{1.20 \text{ kN/m}^2}{}$	
TOTALE		=	2.68 kN/m^2	G_2

quindi: $G_{1k} = 4.34 \text{ kN/m}^2$ $G_{2k} = 1.20 \text{ kN/m}^2$ $G_k = 5.54 \text{ kN/m}^2$

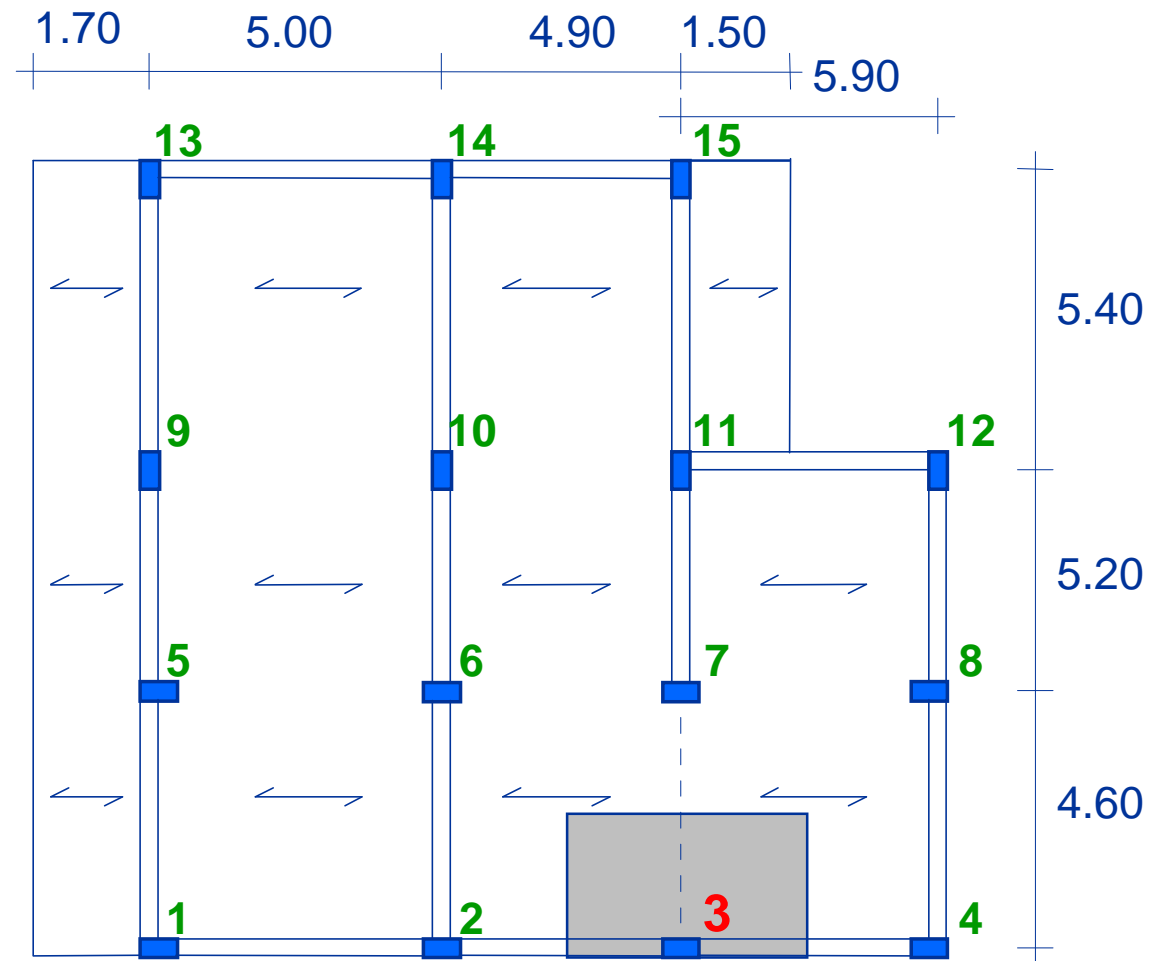
Carichi unitari

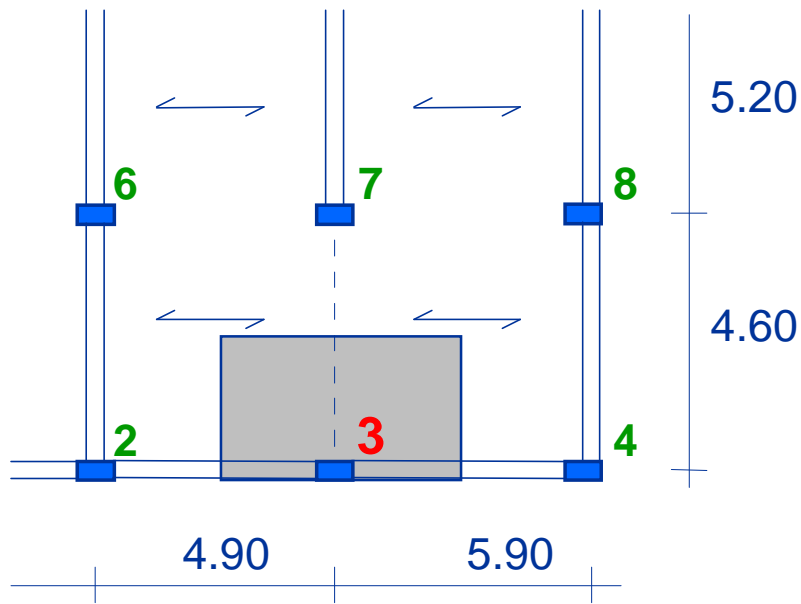
	per TA	per SLU
Solaio	$g_{1k} = 4.3 \text{ kN/m}^2$ $g_{2k} = 1.2 \text{ kN/m}^2$ $q_k = 2.0 \text{ kN/m}^2$	$g_{1d} = 1.3 \times 4.3 = 5.6 \text{ kN/m}^2$ $g_{2d} + q_d = 1.5 \times 3.2 = 4.8 \text{ kN/m}^2$
Balconi	$g_k = 3.9 \text{ kN/m}^2$ $q_k = 4.0 \text{ kN/m}^2$	$g_d = 1.3 \times 3.9 = 5.1 \text{ kN/m}^2$ $q_d = 1.5 \times 4.0 = 6.0 \text{ kN/m}^2$
Tamponature	$g_k = 7.2 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.3 \times 7.2 = 9.4 \text{ kN/m}$
Travi 30x60	$g_k = 3.7 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.3 \times 3.7 = 4.8 \text{ kN/m}$
70x24	$g_k = 2.4 \text{ kN/m}$	$g_d = 1.3 \times 2.4 = 3.1 \text{ kN/m}$

Riepilogo carichi (per pilastri)

	per TA	per SLU
Solaio (g+ 0.9 q)	7.1 kN/m ²	9.9 kN/m ²
Balconi (g+ 0.9 q)	7.5 kN/m ²	10.5 kN/m ²
Tamponature	7.2 kN/m	9.4 kN/m
Travi 30x60	3.7 kN/m	4.8 kN/m
70x24	2.4 kN/m	3.1 kN/m

Scarico al piano tipo pilastro 3





Scarico al piano tipo pilastro 3

7.1
per TA

carico

solaio $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} \times \frac{4.60}{2} = 13.78 \text{ m}^2 \times 9.9 = 136.4 \text{ kN}$

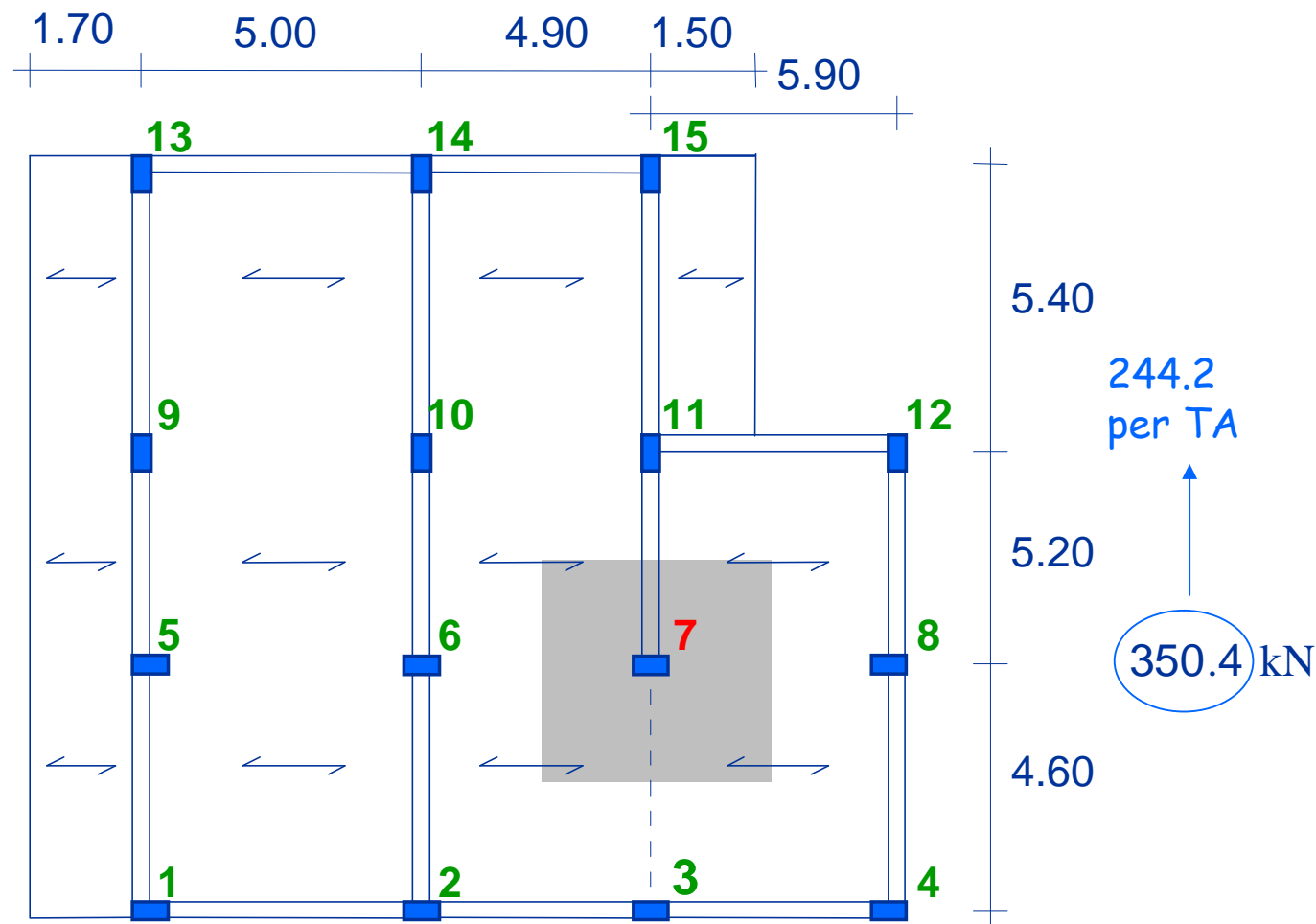
tompagno $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} = 6.0 \text{ m} \times 9.4 = 56.4 \text{ kN}$

trave em. $\frac{4.90 + 5.90 \times 1.2}{2} = 6.0 \text{ m} \times 4.8 = 28.8 \text{ kN}$

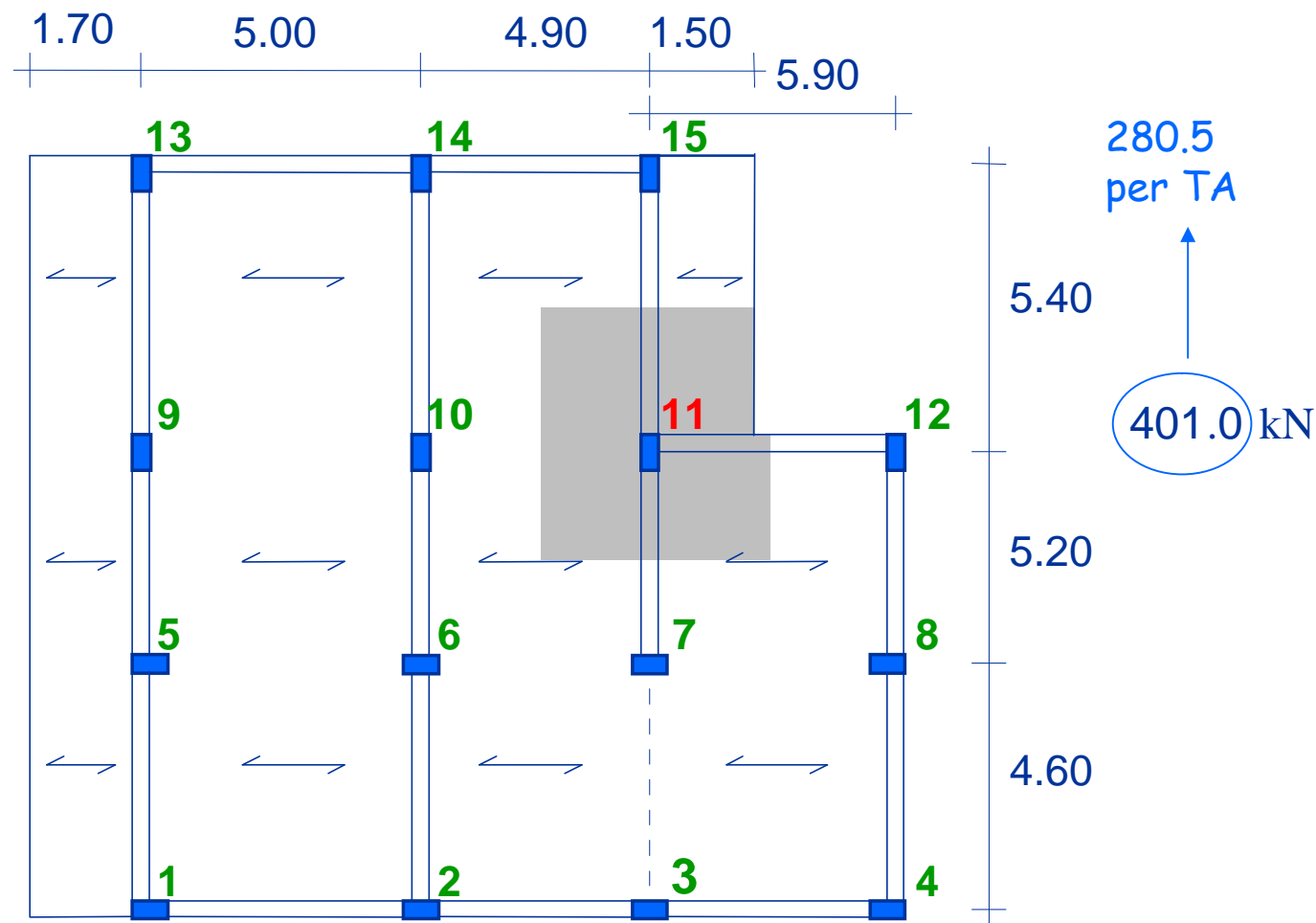
trave sp. $\frac{4.60}{2} = 2.3 \text{ m} \times 3.1 = 7.1 \text{ kN}$

168.8 per TA ← 228.7 kN

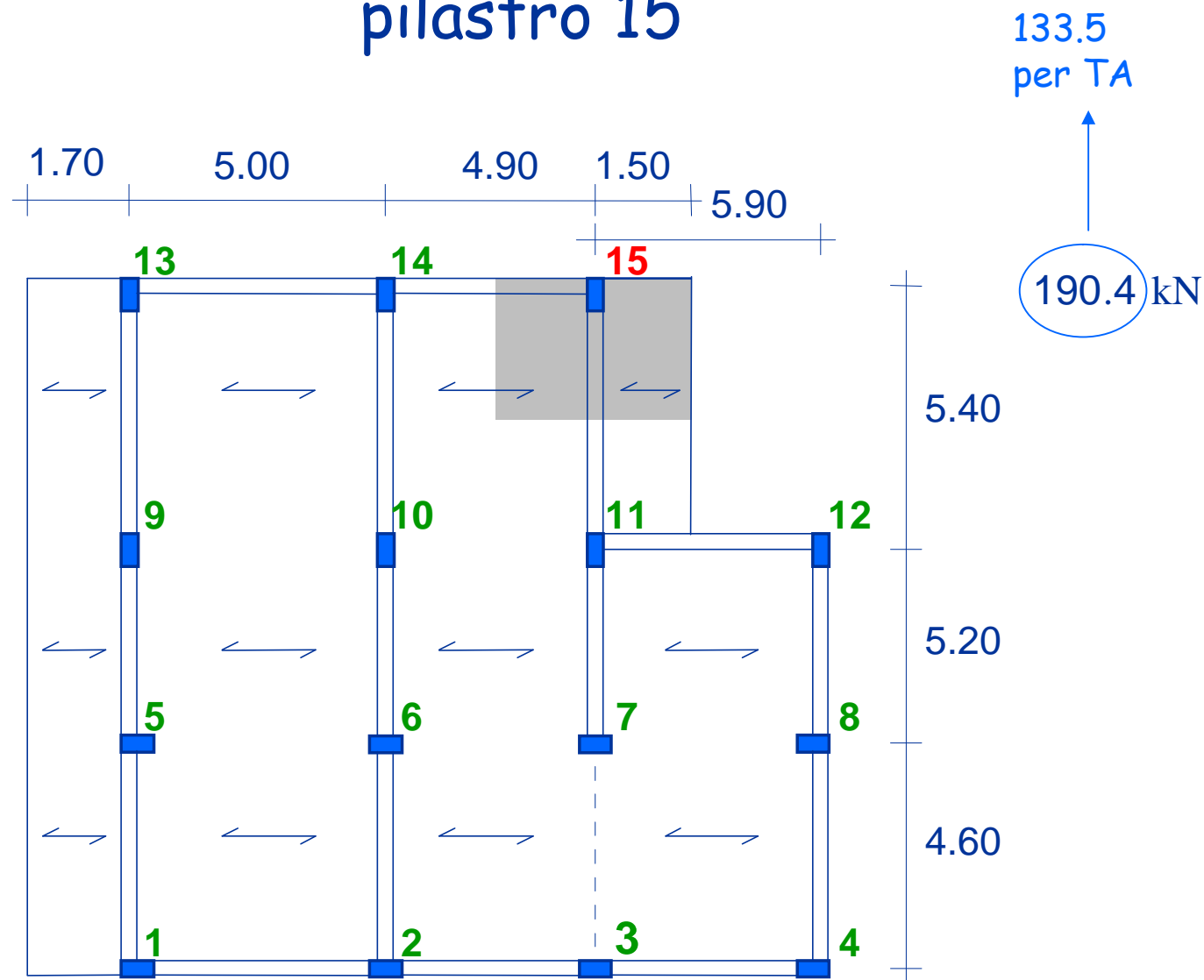
Scarico al piano tipo pilastro 7



Scarico al piano tipo pilastro 11



Scarico al piano tipo pilastro 15



Dimensionamento - pilastro 3

Scarico al piano	228.7 kN
Peso proprio medio	13.7 kN
	<hr/>
	242.4 kN

$$A_c = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

piano	N (kN)	A_c (cm ²)	sezione
6	242.4	171	30×30
5	484.8	342	30×30
4	727.2	513	30×30
3	696.6	684	30×30
2	1212.0	855	30×30
1	1454.4	1026	40×30

Con TA, alla base

1073.4

1404

50×30

Dimensionamento - pilastro 7

Scarico al piano	350.4 kN
Peso proprio medio	21.0 kN
	<hr/>
	371.4 kN

$$A_c = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

piano	N (kN)	A_c (cm ²)	sezione
6	371.4	262	30×30
5	742.8	524	30×30
4	1114.2	786	30×30
3	1485.6	1048	40×30
2	1857.0	1310	50×30
1	2228.4	1572	60×30

Con TA, alla base

1553.4

2032

70×30

Dimensionamento - pilastro 11

Scarico al piano	401.0 kN
Peso proprio medio	24.1 kN
	<hr/>
	425.1 kN

$$A_c = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

piano	N (kN)	A_c (cm ²)	sezione
6	425.1	300	30×30
5	850.2	600	30×30
4	1275.3	900	30×30
3	1700.4	1200	30×40
2	2125.2	1500	30×50
1	2550.6	1800	30×60

Con TA, alla base

1783.8

2334

40×60

Dimensionamento - pilastro 15

Scarico al piano	190.4 kN
Peso proprio medio	11.4 kN
	<hr/>
	201.8 kN

$$A_c = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

piano	N (kN)	A_c (cm ²)	sezione
6	201.8	142	30×30
5	403.6	285	30×30
4	605.4	427	30×30
3	807.2	570	30×30
2	1009.0	712	30×30
1	1210.8	855	30×30

Con TA, alla base

849.0

1111

30×40

Armature longitudinali dei pilastri (NTC08 punto 4.1.6.1.2)

Le barre d'armatura devono avere diametro non minore di 12 mm ed interasse non maggiore di 300 mm

La quantità minima di armatura longitudinale totale $A_{s,min}$ deve essere determinata con la seguente equazione:

dove:

$$A_{s,min} = \frac{0.10 N_{Ed}}{f_{yd}} \geq 0.003 A_c$$

scelto
0.20

f_{yd} è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura;

N_{Ed} è la forza di compressione assiale di calcolo;

A_c è l'area della sezione trasversale del calcestruzzo.

NOTA BENE:

in zona sismica le armature sono maggiori (min 1%)

Armatatura minima nei pilastri (NTC08 punto 4.1.6.1.2)

$$A_{s,min} = \frac{0.20 N_{Ed}}{f_{yd}}$$

$$A_{c,nec} = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}}$$

$$\frac{A_{s,min}}{A_{c,nec}} = \frac{0.20 N_{Ed} / f_{yd}}{N_{Ed} / f_{cd}} = \frac{0.20 f_{cd}}{f_{yd}}$$

Ad esempio

Acciaio Be50C: $f_{yd} = 391.3 \text{ N/mm}^2$

Calcestruzzo C25/30: $f_{cd} = 14.17 \text{ N/mm}^2$

$$\frac{A_{s,min}}{A_{c,nec}} = \frac{0.20 \times 14.17}{391.3} = 0.00724 \cong 0.7\%$$

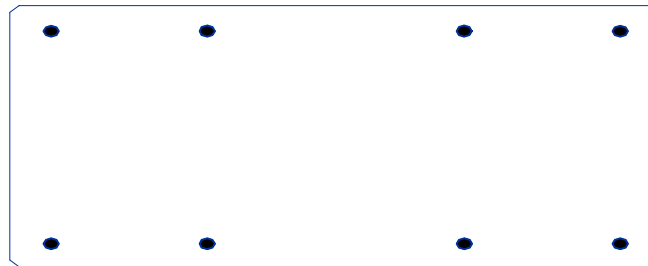
Armature del pilastro 11 al primo ordine

30x60



Armatura minima (su tutta la sezione):

$$A_{s,min} = \frac{0.20 \times 1800}{391.3} \times 10 = 9.2 \text{ cm}^2$$



$$A_{s,tot} = 8\varnothing 14 = 12.3 \text{ cm}^2 > A_{s,min}$$

Armature longitudinali dei pilastri (NTC08 punto 4.1.6.1.2)

Di regola, anche nelle sovrapposizioni, l'area dell'armatura non deve essere maggiore di $0,04A_c$.

Ulteriori indicazioni (EC2):

Le barre longitudinali devono, di regola, essere distribuite lungo il perimetro della sezione. Per pilastri aventi sezione trasversale poligonale, almeno una barra sarà disposta in ogni spigolo.

Per pilastri di sezione circolare, il numero minimo di barre è 6.

Armature trasversali dei pilastri (NTC08 punto 4.1.6.1.2)

Interasse delle staffe non maggiore di 12 volte il diametro delle barre impiegate per l'armatura longitudinale (e non superiori a 250 mm).

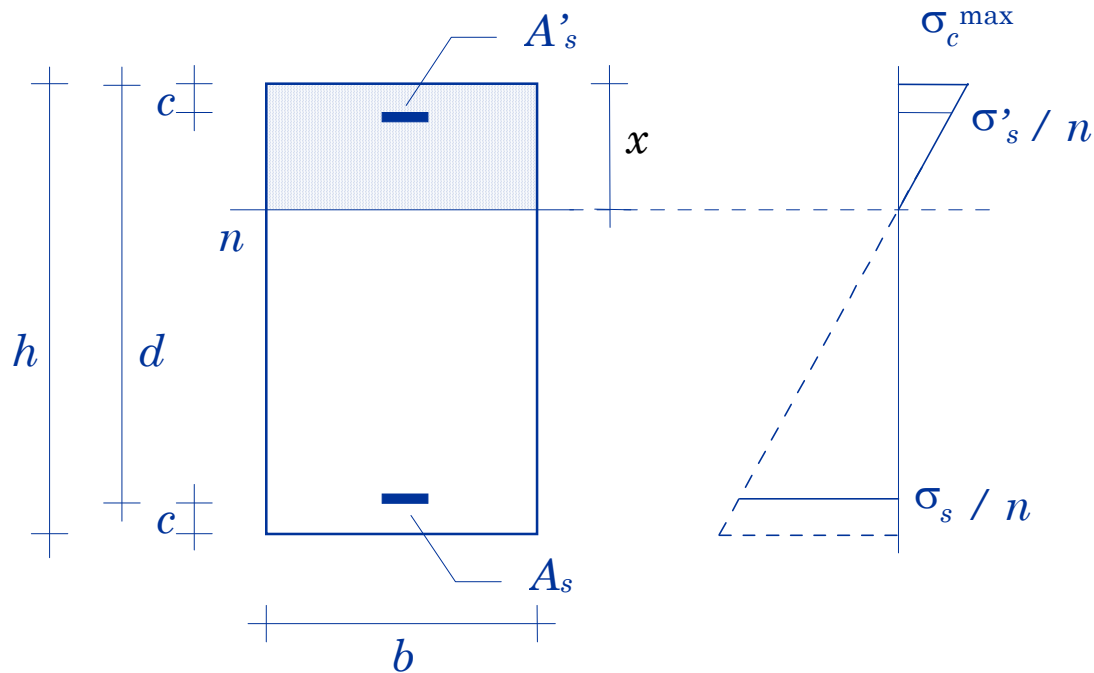
Diametro delle staffe non minore di 6 mm e di $\frac{1}{4}$ del diametro massimo delle barre longitudinali.

Ulteriori indicazioni (EC2):

Ridurre il passo delle staffe ($\times 0.6$) in sezioni poste al di sopra e al di sotto della trave, per un tratto pari alla massima dimensione della sezione del pilastro, nonché in zone di giunzione di armature per sovrapposizione.

Momento flettente:
verifica di sezioni inflesse

Verifica - tensioni ammissibili



Dati:

Geometria della sezione

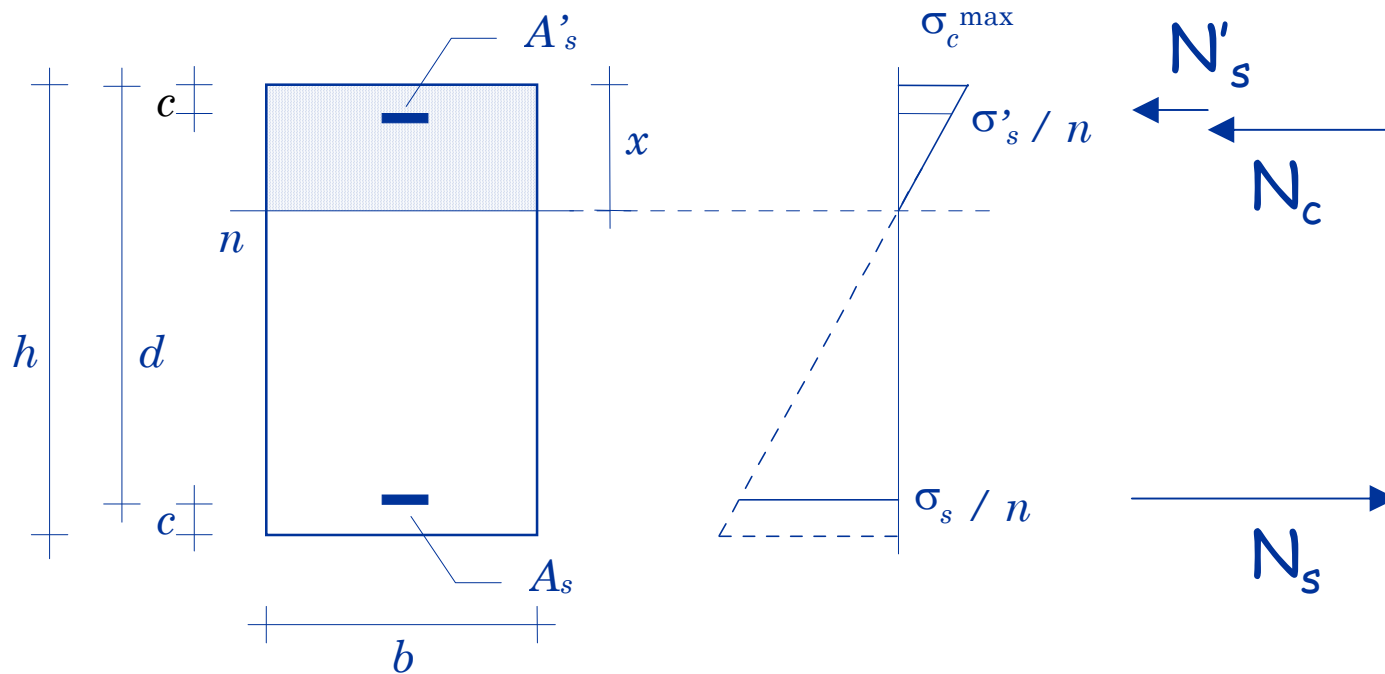
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

Verifica - tensioni ammissibili

Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

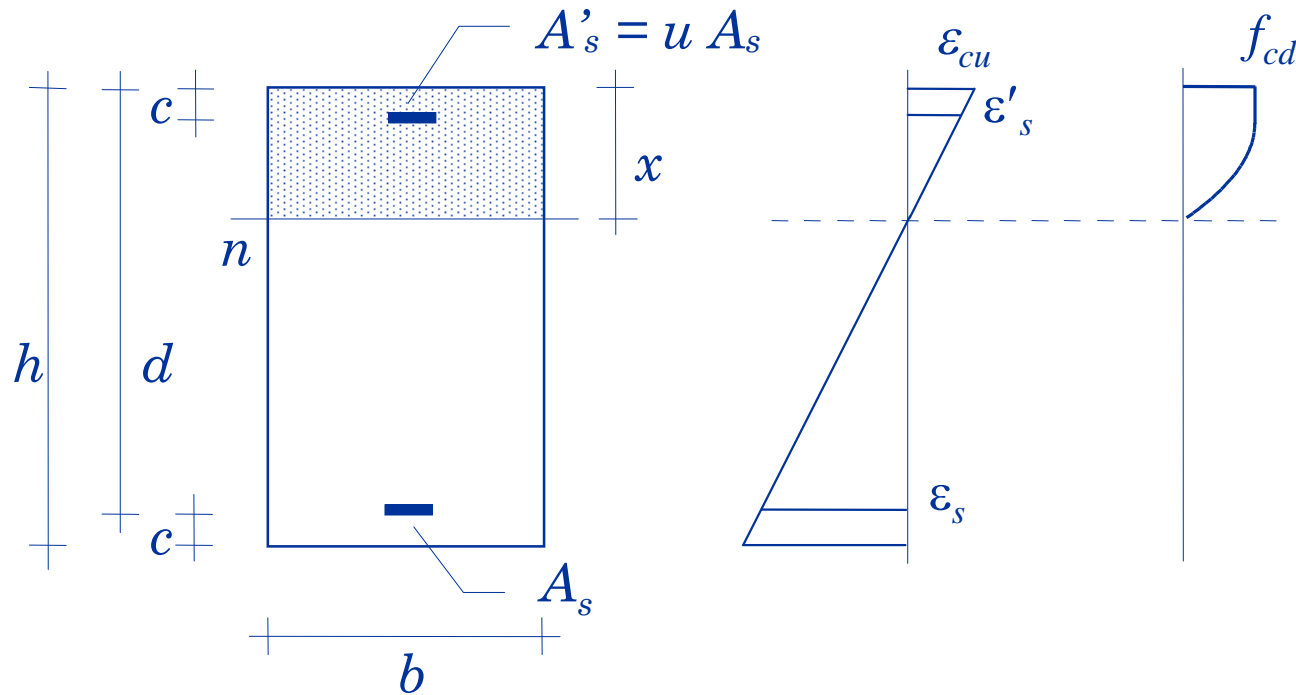
E poi:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

con:

$$I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Verifica - stato limite ultimo



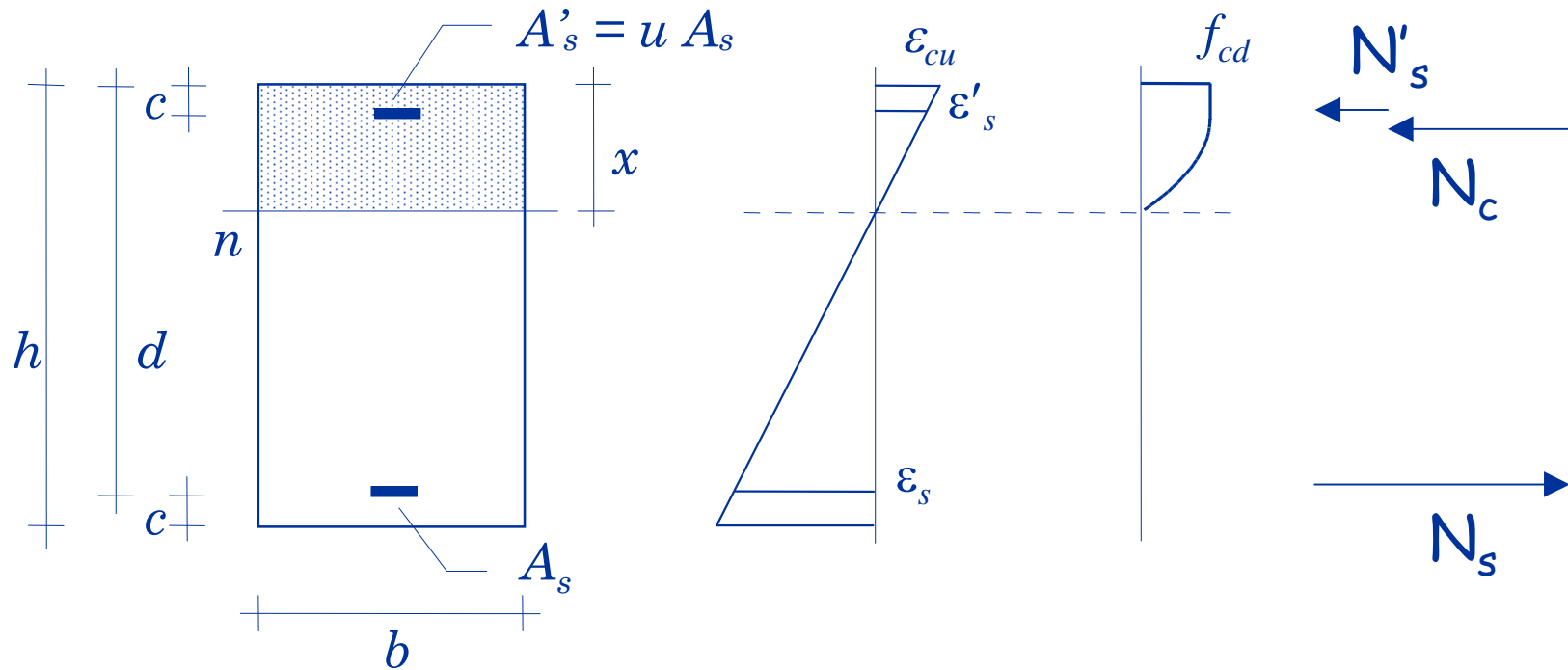
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo

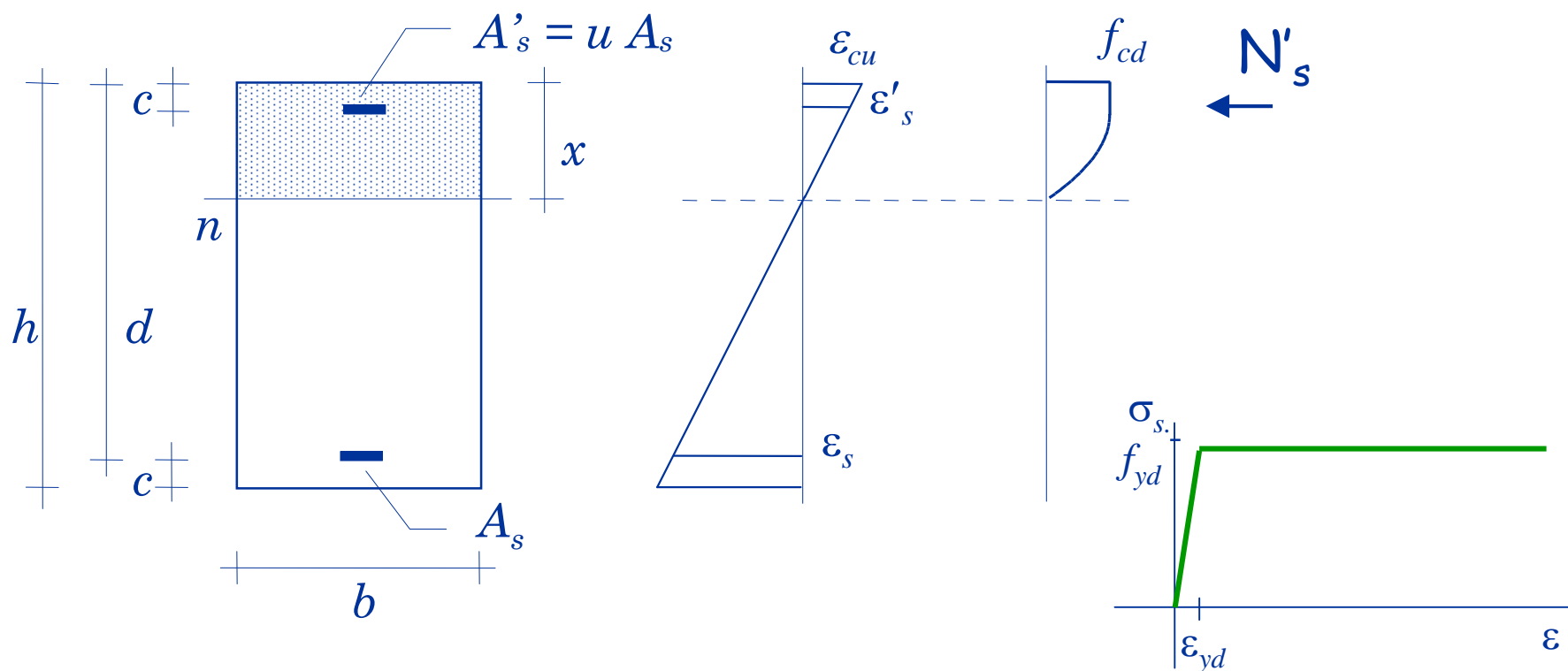


Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

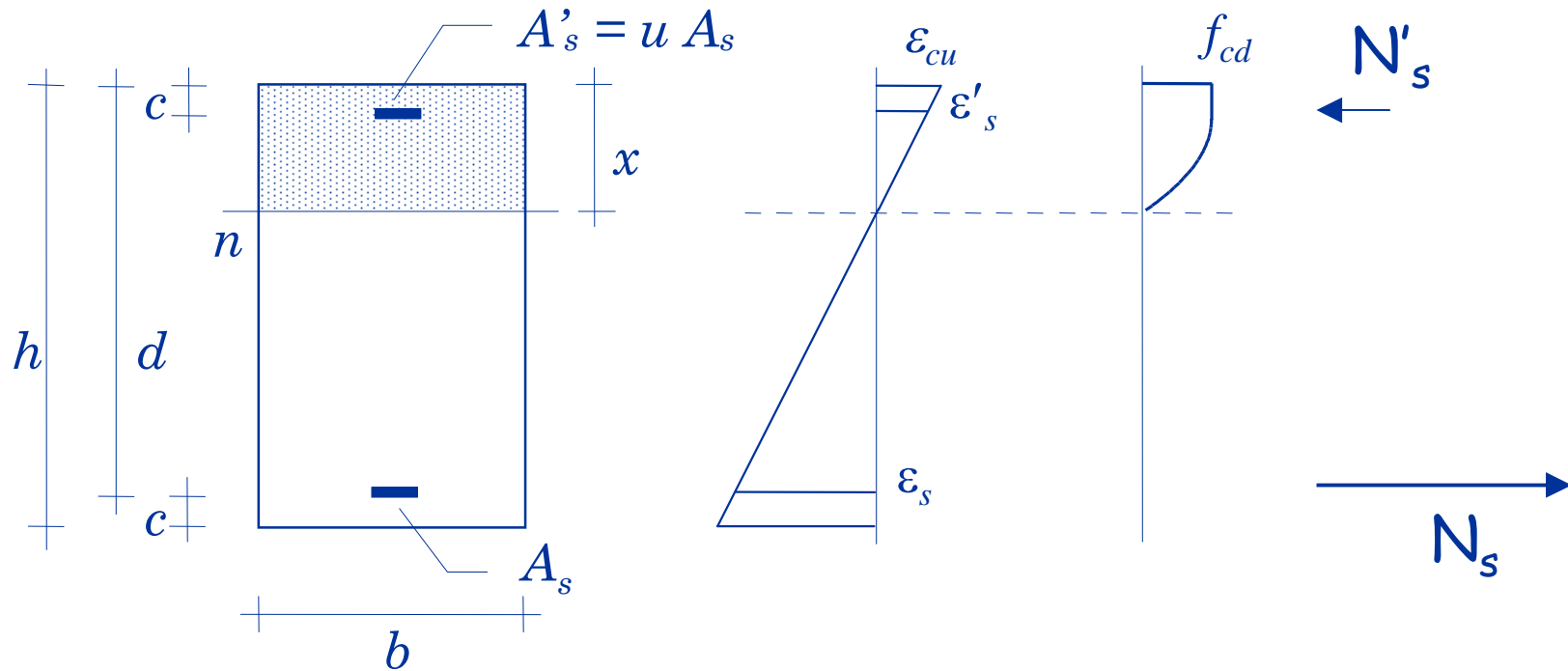


$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu2}$$

in molti casi $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$

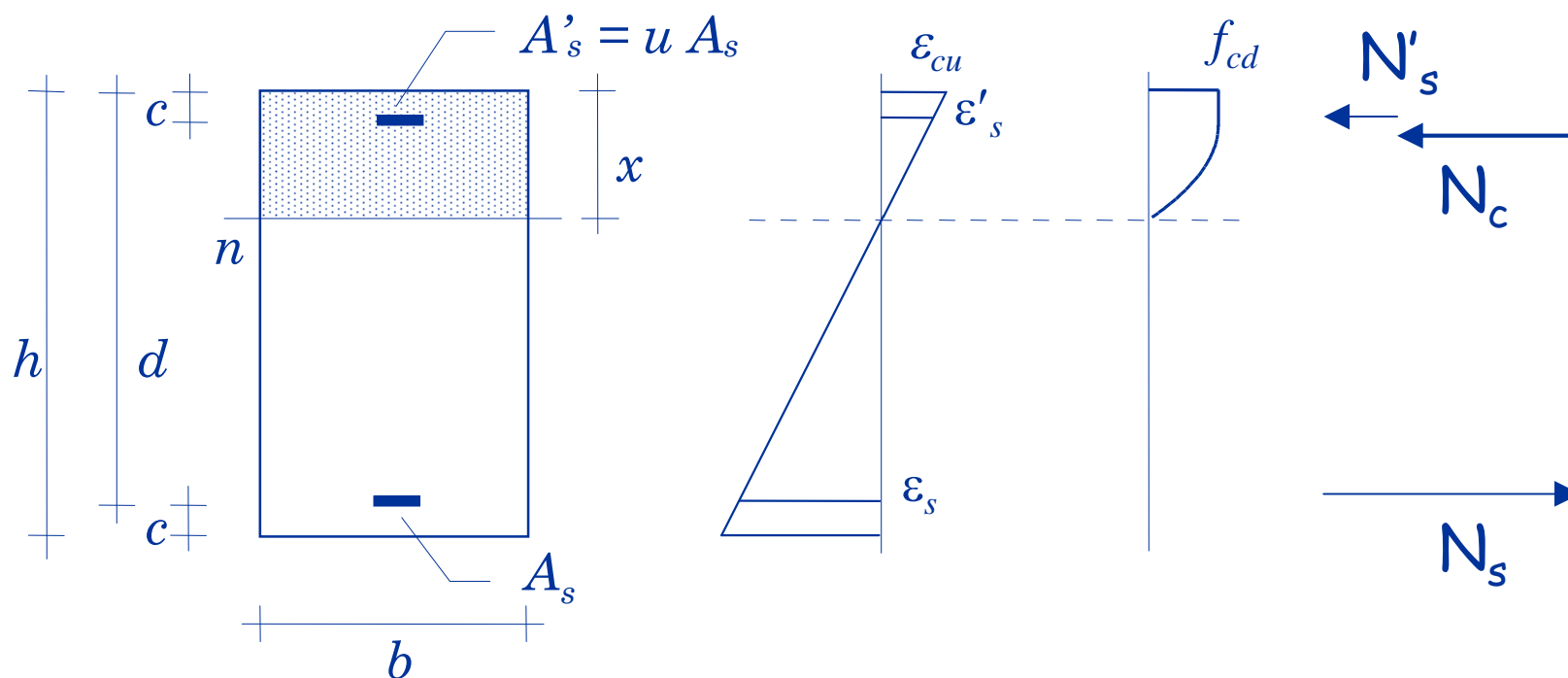
se $\epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta \ b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio è una equazione di primo
grado:

$$\beta b x f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado

$$\beta b x f_{cd} + A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

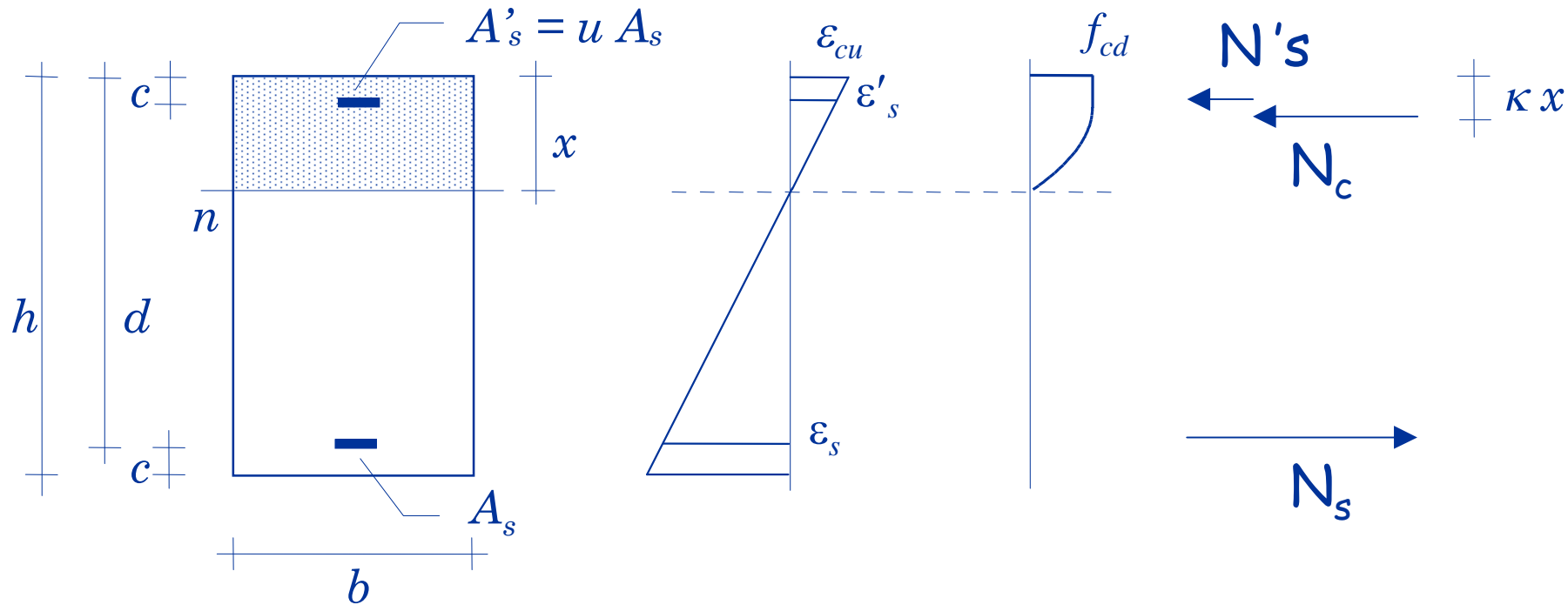
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio n. 1

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50

Calcestruzzo C25/30

Armature $A_s = 4\varnothing 20$
 $A'_s = 2\varnothing 14$

Acciaio B450C

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 1

individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.74 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{10.74 - 4}{10.74} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.19 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ la posizione trovata è esatta

Esempio n. 1

individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

Si ottiene la profondità minima dell'asse neutro affinché l'armatura compressa sia snervata:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.14 c$$

Per acciaio B450C

Nell'esempio si è ottenuto:

$$x = 10.74 \text{ cm} \geq 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

Esempio n. 1

calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 3.08 \times 391 \times 10^{-1} = 120.4 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 10.74) + 120.4 \times (0.416 \times 10.74 - 4)] \times 10^{-2}$$

$$M_{Rd} = 204.5 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Esempio n. 2

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50

Calcestruzzo C25/30

Armature $A_s = 4\varnothing 20$
 $A'_s = 3\varnothing 20$

Acciaio B450C

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 9.42) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 3.56 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 3.56 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 6.51 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = 283 \text{ MPa}$$

Esempio n. 2

calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 9.42 \times 283 \times 10^{-1} = 266.6 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 6.51) + 266.6 \times (0.416 \times 6.51 - 4)] \times 10^{-2}$$

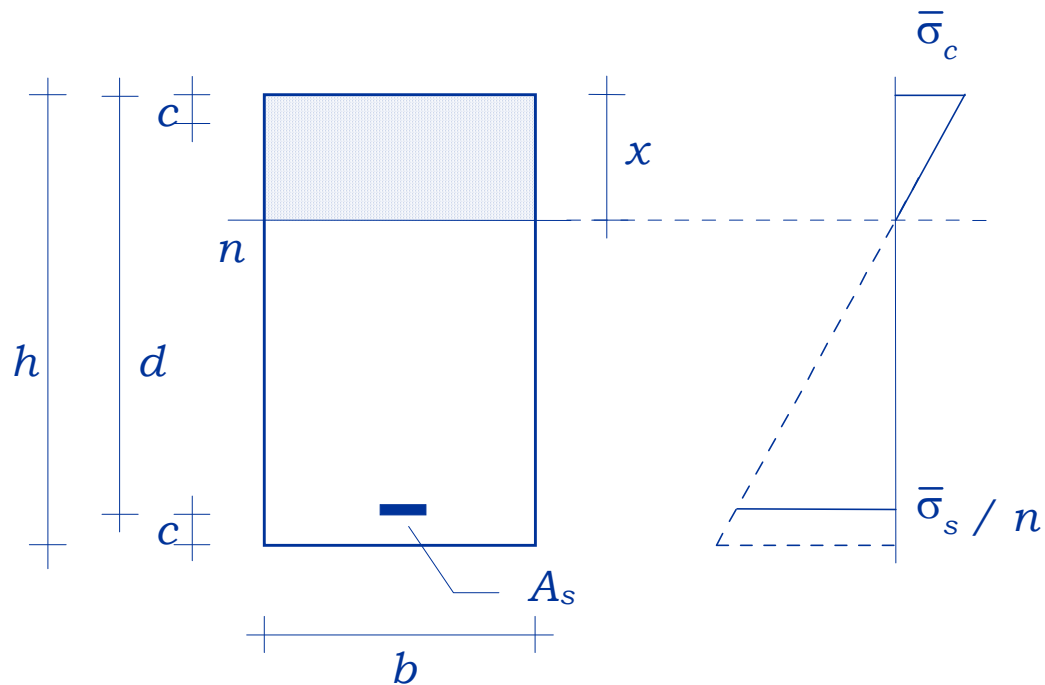
$$M_{Rd} = 209.2 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Momento flettente:
progetto di sezioni inflesse

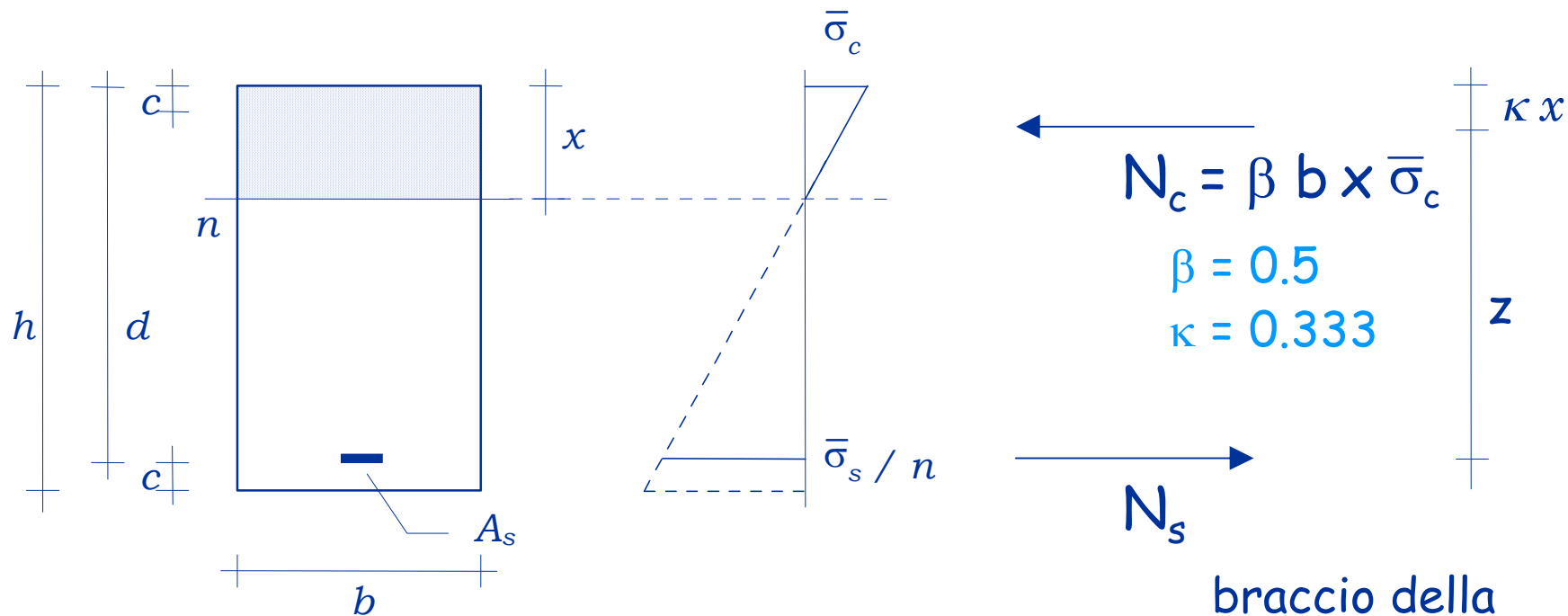
Progetto - tensioni ammissibili



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

Progetto - tensioni ammissibili

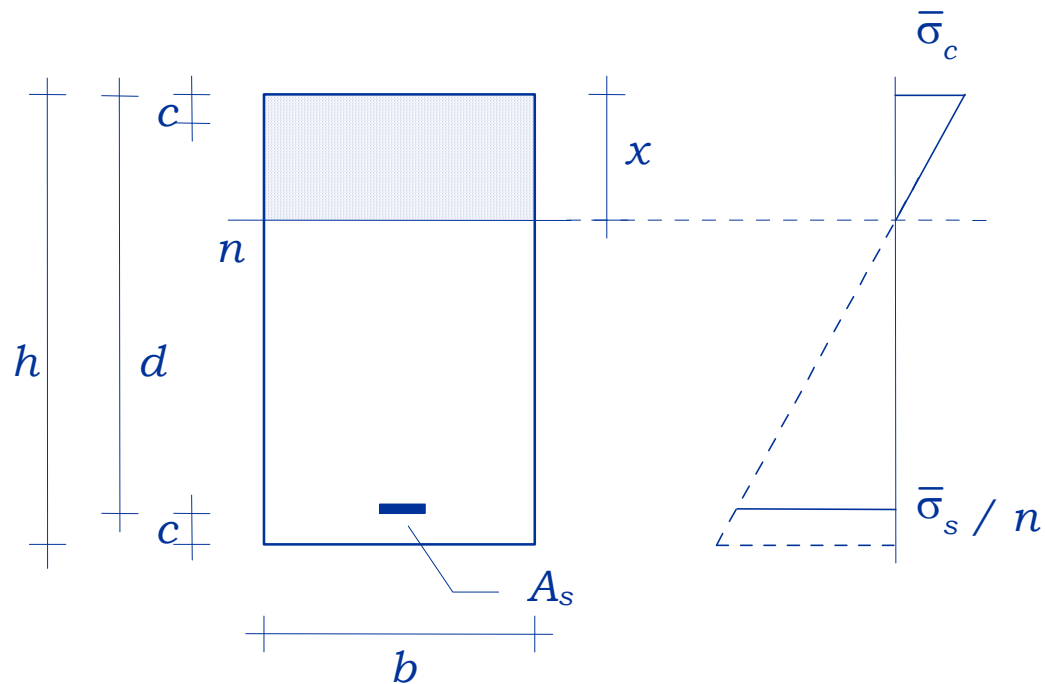


2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b d^2}{r^2}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:

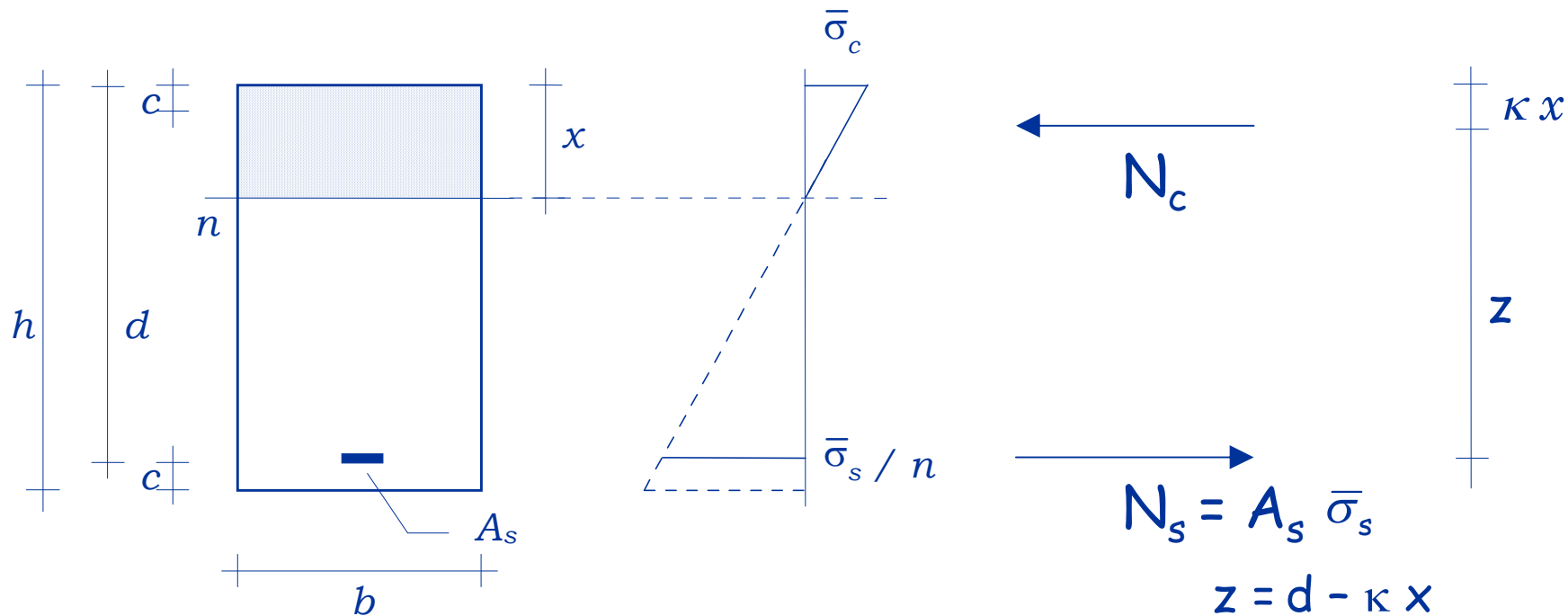
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



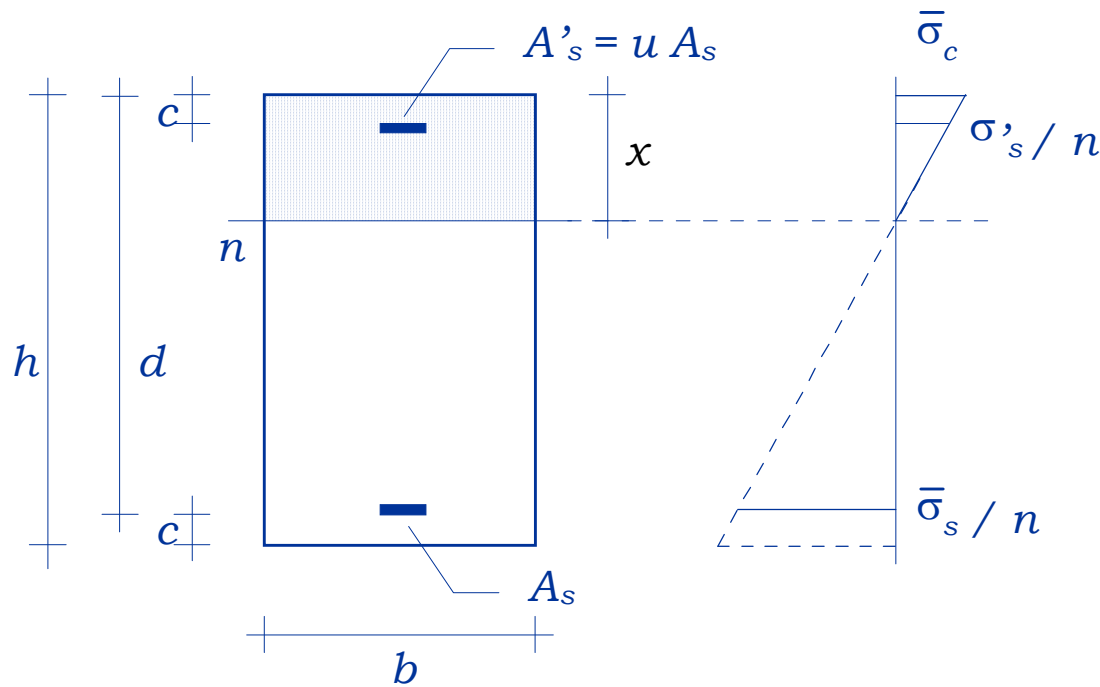
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$$M = N_s z$$

$$M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Progetto - tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x - c}{d - x}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Analogamente per sezione
a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

Progetto - stato limite ultimo

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

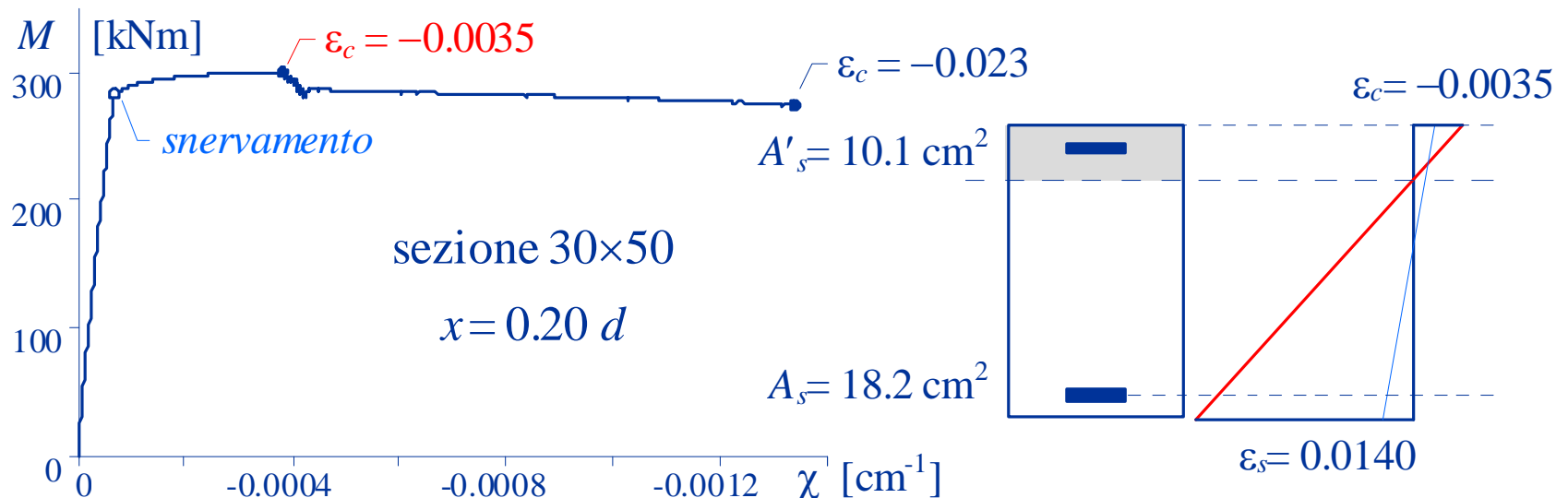
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.20 d$

$\chi_u = -0.00132$ $\mu \cong 20$

Ottima duttilità



Duttilità della sezione - esempio

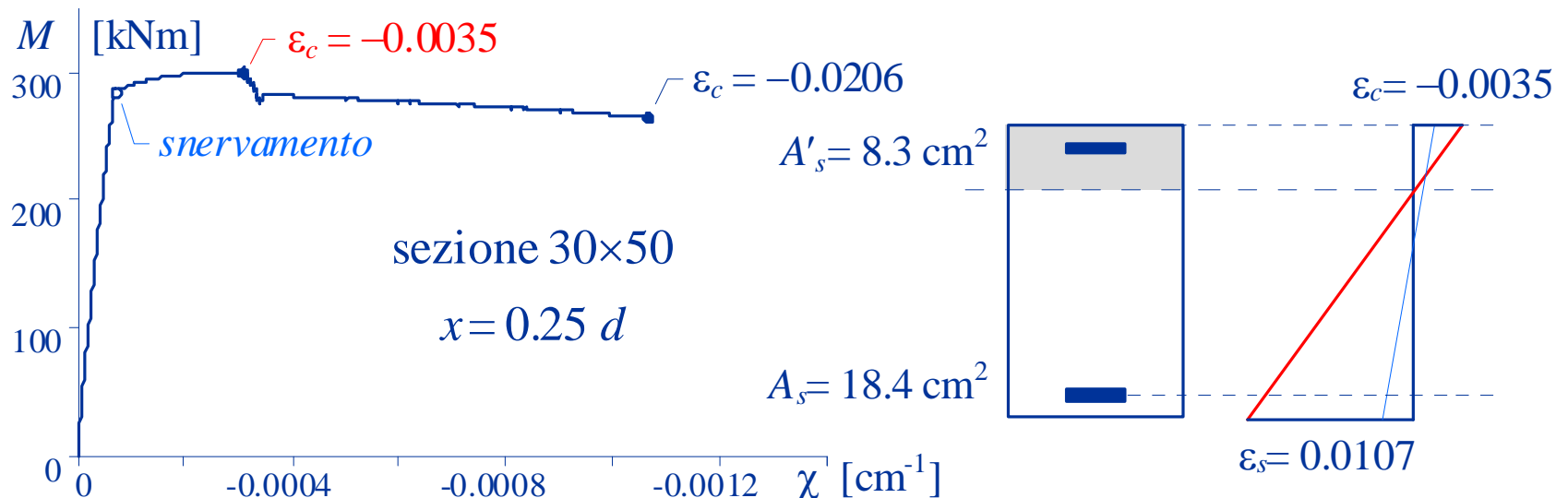
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.25 d$

$\chi_u = -0.00106$ $\mu \cong 16$

Buona duttilità



Duttilità della sezione - esempio

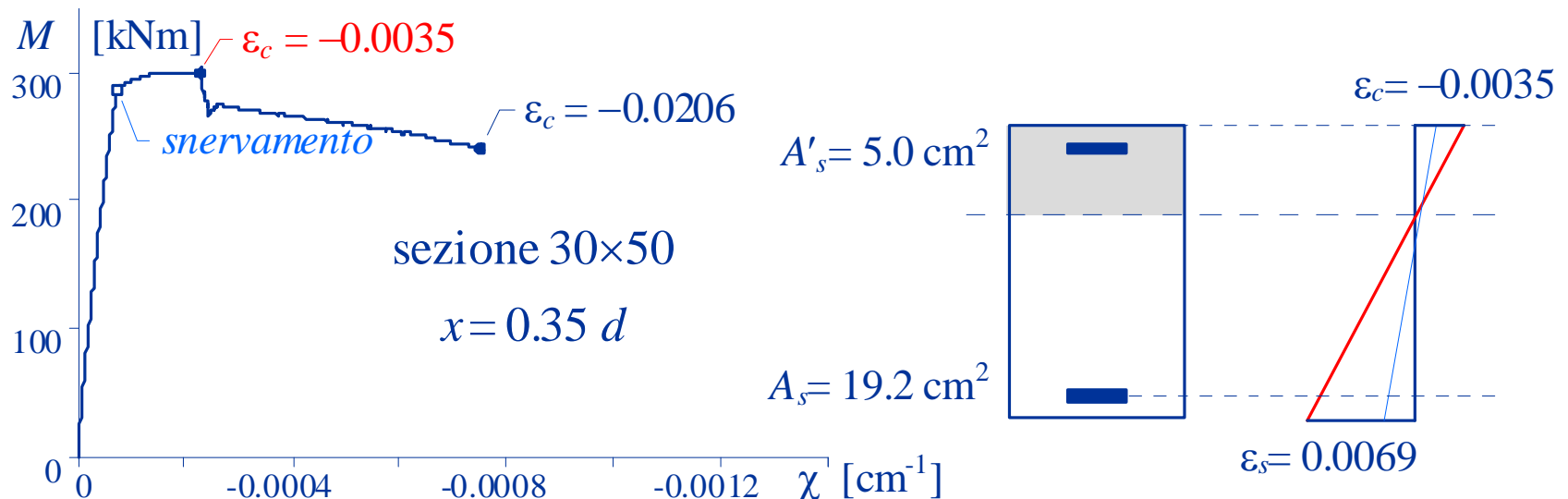
Sezione 30x50

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$x = 0.35 \text{ d}$

$$\chi_u = -0.00076 \quad \mu \cong 10$$

Discreta duttilità



Duttilità della sezione - esempio

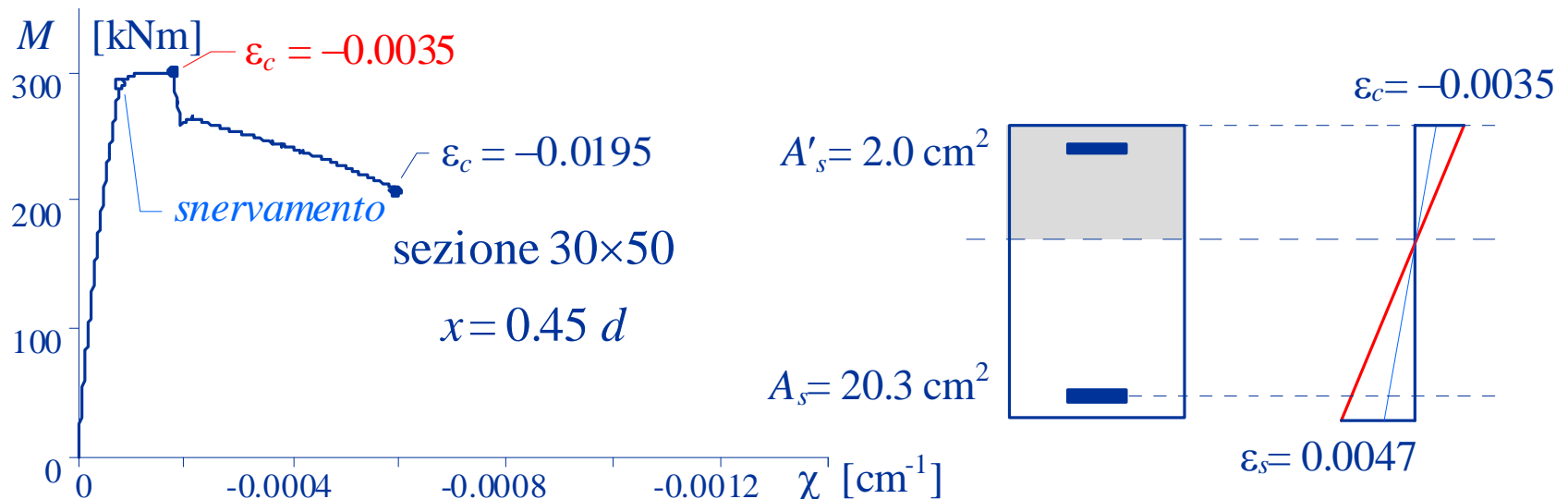
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.45 d$

$\chi_u = -0.00059$ $\mu \cong 7$

Bassa duttilità



Duttilità della sezione

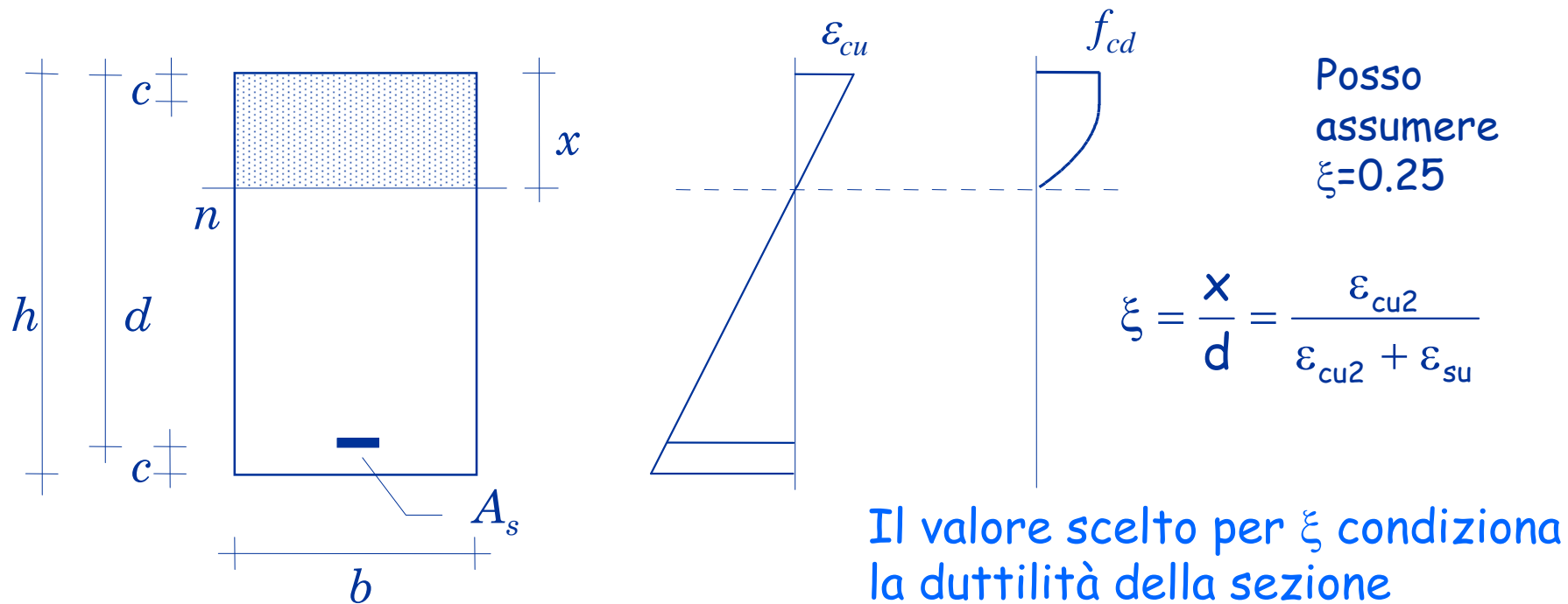
- La duttilità è maggiore se x/d è piccolo e se la deformazione ϵ_s dell'armatura tesa allo SLU è alta

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

- ad alta duttilità se $\epsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità se $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni in c.a. duttili le progetteremo sempre assumendo $\xi = x/d = 0.25$

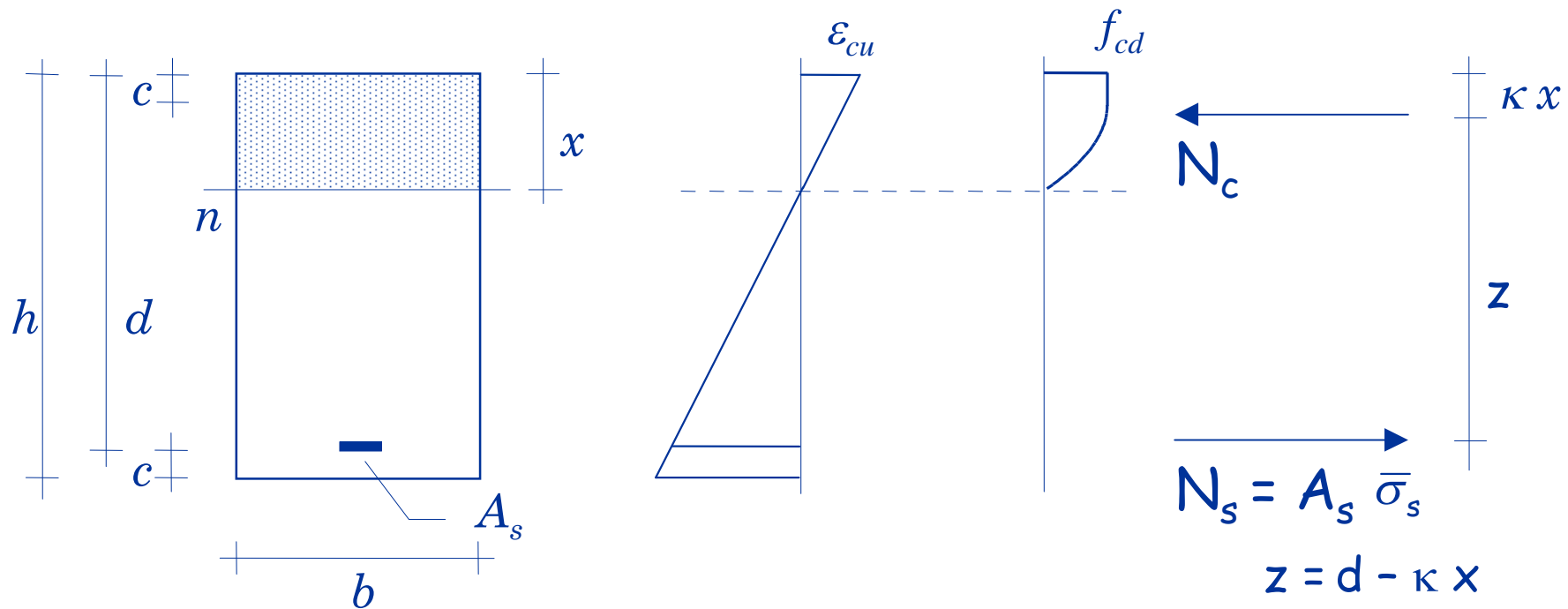
Progetto - stato limite ultimo



1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\xi=0.25$

Progetto - stato limite ultimo



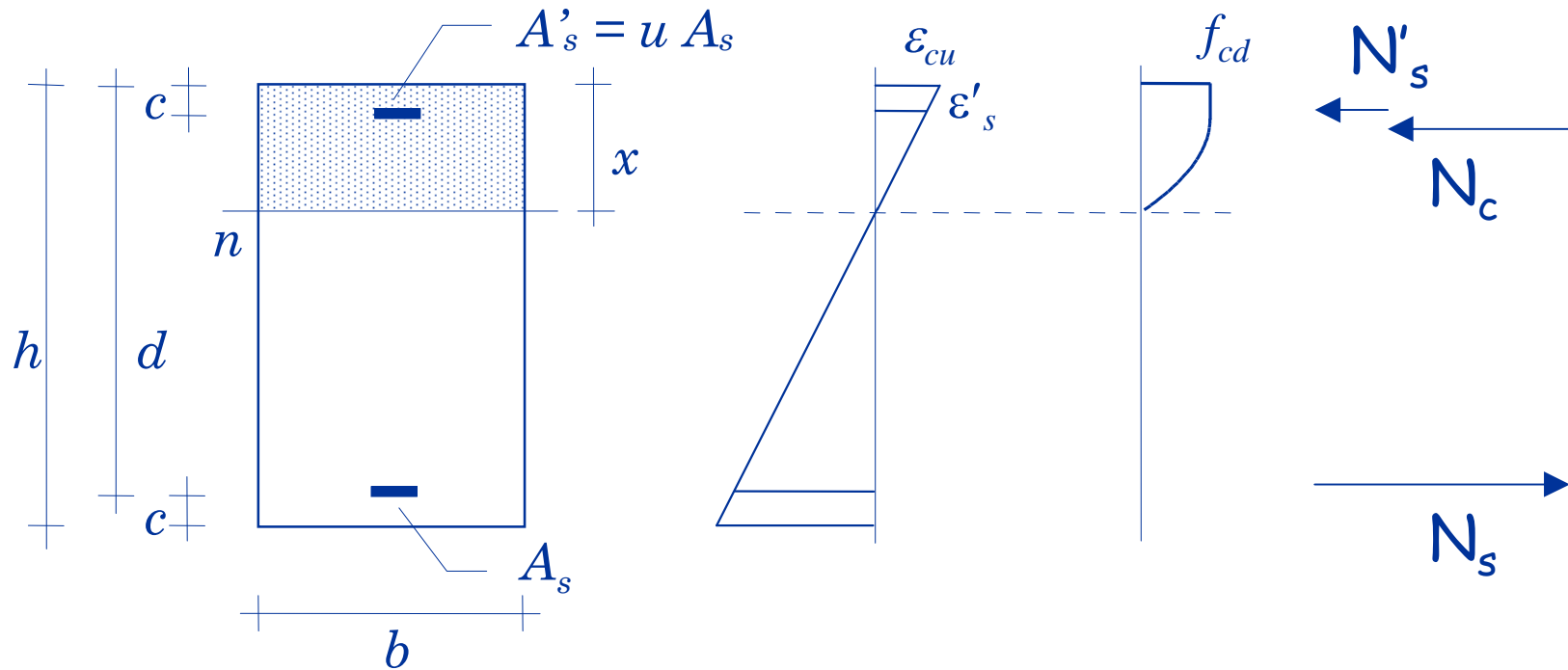
2 - Dall'equilibrio alla rotazione
rispetto all'armatura si ottiene

con:

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

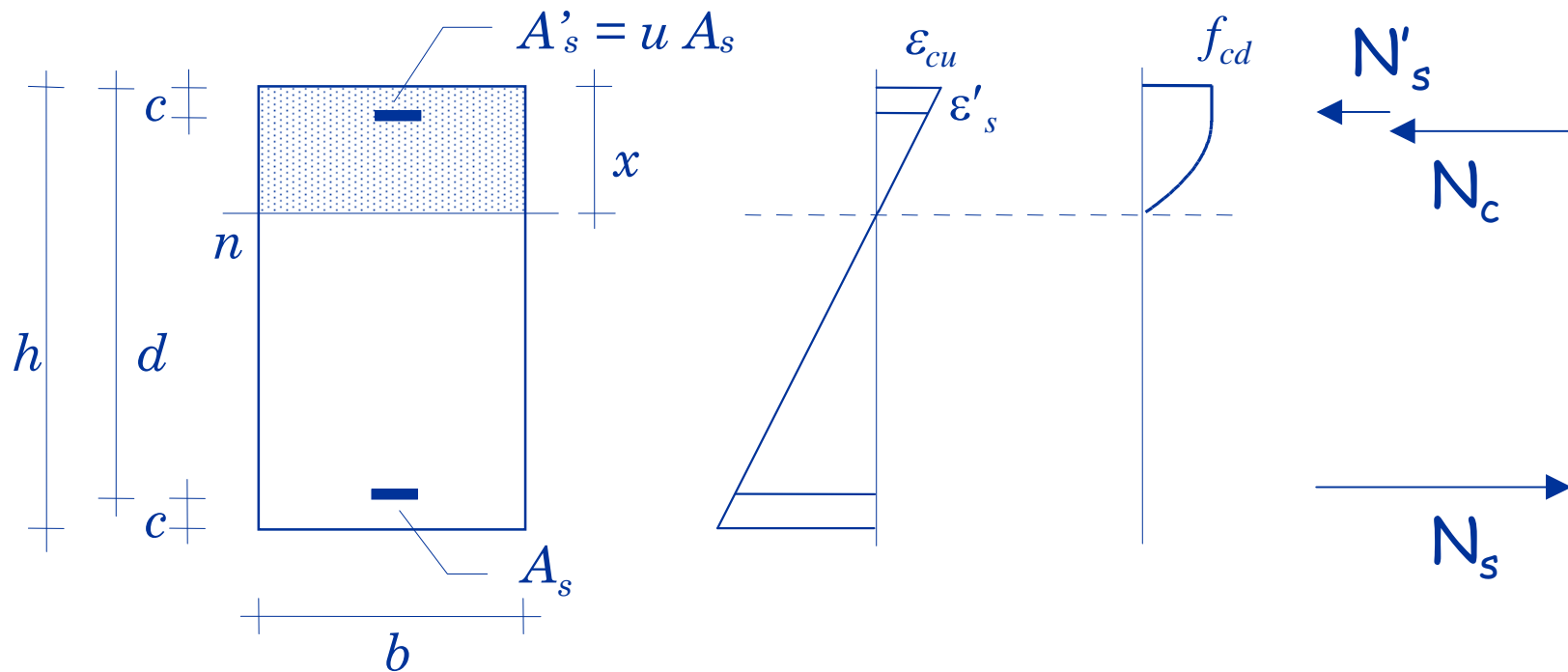
Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Quanto vale il coefficiente r ?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per C25/30 e B450C: $r = 0.0256$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30: $r = 0.0197$

Esempio n. 1

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0256 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.50 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.51 \times 255} = 9.41 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0197 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 391} = 9.88 \text{ cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.42$	$s' = 0.34$	$s' = 0.26$
0	0.0256		
0.25	0.0243	0.0246	0.0249
0.50	0.0229	0.0235	0.0242
0.75	0.0214	0.0223	0.0234
1.00	0.0198	0.0210	0.0226

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota: $\gamma = 0.10$ per travi emergenti
 $\gamma = 0.20$ per travi a spessore

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.2 \div 0.5$)

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando $u = A'_s/A_s$ è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq \frac{0.6}{f_{yk}} b d \geq 0.15 \% b d$$

0.13% per B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 3 \% b h$$

$$A'_s \leq 3 \% b h$$

Percentuale massima consigliata: 1 ÷ 1.5%

Limiti alle formule di progetto per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha:
$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}} \quad \begin{array}{l} = 0.0169 \\ \text{se } \rho=0.010 \\ = 0.0138 \\ \text{se } \rho=0.015 \end{array}$$

Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s

Suggerisco per r' un limite tra 0.014 e 0.017

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

era 0.50 m per $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

era 0.45 m per $u=0$

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.51 \times 266} = 9.41 \text{ cm}^2 \quad = 0.6\% b h$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm^2 per $u=0$

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.50 m per $u=0$
0.48 m per $u=0.25$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = \cancel{0.0139} \sqrt{\frac{160}{0.30}} = \cancel{0.31} \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

0.016 0.37

era 0.45 m per $u=0$
0.39 m per $u=0.25$

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 266} = 10.44 \text{ cm}^2$$

era 9.41 cm^2 per $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.016 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.37 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm^2 per $u=0$

Progetto allo stato limite ultimo - commento

Si ottengono sezioni trasversali:

- simili a quelle richieste dal metodo delle tensioni ammissibili se non si considera l'armatura compressa
- sensibilmente più basse quando si considera l'armatura compressa

L'armatura tesa:

- é simile a quella richiesta dal metodo delle tensioni ammissibili per sezioni a semplice armatura
- può divenire eccessivamente grande quando si riduce l'altezza della sezioni sfruttando l'effetto positivo dell'armatura compressa

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
 $r' = 0.018$ o 0.017

(corrisponde a $0 < \mu < 25\%$ per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori
un po' maggiori

$r' = 0.019$ (corrisponde a $0 < \mu < 25\%$ per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura
dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$ (ma non andare mai al di sotto di questi)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna potrebbe essere minore ($0.8 d$)