

Corso di formazione e aggiornamento professionale

Analisi e adeguamento sismico  
di edifici in c.a. ed in muratura

Valutazione della sicurezza, verifica sismica  
e interventi su edifici esistenti in c.a.

4 - Rottura "duttile". Controllo in termini di deformazioni

Messina

13 aprile 2012

Aurelio Ghersi

## Analisi lineare con forze non ridotte e analisi statica non lineare

- La prima è un'approssimazione della seconda (ed ha limiti di applicabilità)
- L'una e l'altra consentono di valutare il comportamento della struttura al crescere dell'azione sismica ed a valutare quando si raggiungono i limiti corrispondenti allo SL di interesse
- Se la struttura ha collasso fragile per accelerazioni non elevate, il suo comportamento può (deve?) essere valutato con analisi lineare

		Modello Lineare		Modello Non Lineare	
		Domanda	Capacità	Domanda	Capacità
Tipo di elemento o meccanismo (e/m)	Duttile / Fragile	Accettazione del Modello Lineare (ML) (per il controllo dei valori di $p_1 = D_1/C_1$ )	Dall'analisi. Usare i valori medi nel modello.	Dall'analisi. Usare i valori medi nel modello.	In termini di deformazione. Usare i valori medi divisi per il FC.
		Dall'analisi. Usare i valori medi dei moduli nel modello.	In termini di resistenza. Usare i valori medi.		
		Verifiche (se il ML è accettato)			
	Duttile	Dall'analisi.	In termini di deformazione. Usare i valori medi divisi per il FC.		
		Verifiche (se il ML è accettato)			
	Fragile	Se $p_1 \leq 1$ , dall'analisi.	In termini di resistenza. Usare i valori medi divisi per il FC e per il coefficiente parziale.		In termini di resistenza. Usare i valori medi divisi per il FC e per il coefficiente parziale.
		Se $p_1 > 1$ , dall'equilibrio con la resistenza degli e/m duttili. Usare i valori medi moltiplicati per FC.			

## Controllo in termini di deformazioni

Cosa significa ?

- Durante il terremoto la struttura va in campo plastico
  - Le caratteristiche di sollecitazioni non possono crescere oltre un certo limite
  - Si hanno deformazioni plastiche; la rottura avviene per superamento della deformazione plastica (rotazione delle cerniere plastiche)
- Occorre prevedere e controllare l'entità delle deformazioni plastiche

## Controllo in termini di deformazioni problemi di base

Problemi concettuali:

- Scelta di modelli per il legame costitutivo del materiale
- Definizione dell'ampiezza della cerniera plastica
- Valutazione corretta del comportamento in 3D (interazione  $N-M_x-M_y$  e relative curvature)

## Controllo in termini di deformazioni problemi di base

Problemi operativi:

- Solo l'analisi dinamica non lineare fornisce le rotazioni plastiche per un dato sisma; ma:
  - quali e quanti accelerogrammi usare ?
- Una analisi statica non lineare fornisce rotazioni plastiche; ma queste:
  - corrispondono a quelle ottenute dall'analisi dinamica ?
  - e a quale valore di  $a_g$  corrispondono ?
- Una analisi lineare (modale) non fornisce rotazioni plastiche; come fare a prevederle ?

### Controllo in termini di deformazioni considerazioni

- Le travi hanno molto spesso una buona duttilità, anche se non progettate espressamente per questo

Problemi per:

- Strutture irregolari (campate molto corte, schemi con forti rotazioni planimetriche) perché portano alla plasticizzazione precoce di qualche elemento
- Sezioni sottodimensionate con armatura tesa molto forte e armatura compressa quasi inesistente
- Sezioni non ben armate per carichi verticali
- Difetti di esecuzione e deterioramento nel tempo

Se non si verificano queste condizioni le travi potrebbero non dare problemi di duttilità

### Controllo in termini di deformazioni considerazioni

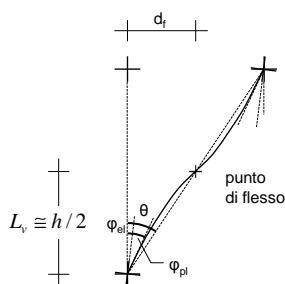
- I pilastri possono essere più o meno resistenti a flessione e duttili, in funzione dell'armatura disposta e del valore dello sforzo normale

Problemi particolari per:

- Strutture irregolari (pilastri molto corte, schemi con forti rotazioni planimetriche) perché portano alla plasticizzazione precoce di qualche elemento
- Pilastri con tensione media molto elevata
- Pilastri con armatura longitudinale molto bassa
- Difetti di esecuzione e deterioramento nel tempo

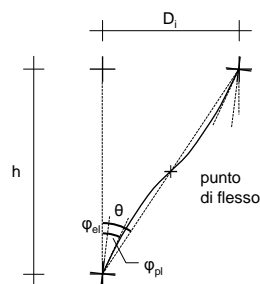
È opportuno concentrarsi soprattutto sui pilastri nella verifica di duttilità

### Deformazioni dei pilastri



$\phi_{el}$  rotazione elastica del nodo  
 $\phi_{pl}$  rotazione della cerniera plastica  
 $\theta$  rotazione rispetto alla corda  
 $\theta = \frac{d_f}{L_v} \cong \frac{d_f}{h/2}$

### Deformazioni dei pilastri



Se la situazione è uguale in testa e al piede

$$\theta = \frac{D_i}{h}$$

$$D_i = \theta h$$

$\theta$  rotazione rispetto alla corda

$$\theta = \frac{d_f}{L_v} \cong \frac{d_f}{h/2}$$

### Rotazione alla corda

- Valore limite della rotazione alla corda a collasso (CO, ovvero SLC):  
Può essere calcolato partendo dalla rotazione della cerniera plastica

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \left( \theta_y + (\phi_u - \phi_y) L_{pl} \left( 1 - \frac{0,5L_{pl}}{L_v} \right) \right)$$

Non è molto agevole utilizzarla, per la complessità nel determinare la rotazione ultima della cerniera plastica

### Rotazione alla corda

- Valore limite della rotazione alla corda a collasso (CO, ovvero SLC)

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,01; \omega)}{\max(0,01; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 \rho_d})$$

- Moltiplicare per 0.85 negli elementi non dotati di adeguati dettagli antisismici
- Moltiplicare per 0.75 in presenza di barre lisce o ancoraggi non sufficienti

- Valore limite per DS (SLV):  
moltiplicare per 0.75

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$\gamma_{el} = 1.5$  per gli elementi primari

$$\frac{1}{\gamma_{el}} = 0.6667$$

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$$f_c = \frac{f_{cm}}{FC} = \frac{28}{1,2} = 23.33 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{N}{A_c f_c} = \frac{400 \times 10^3}{900 \times 10^2 \times 23.33} = 0.1905$$

$$0.3^v = 0.7951$$

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b h f_c} \quad \omega' = \frac{A'_s f_y}{b h f_c} \quad \text{per pilastri } \omega = \omega'$$

$$\left[ \frac{\max(0,01, \omega')}{\max(0,01, \omega)} f_c \right]^{0,225} = 23.33^{0,225} = 2.0314$$

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$L_v = 160 \text{ cm}$  luce di taglio = distanza dal punto di flesso  
 $h = 30 \text{ cm}$

$$\left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} = \left( \frac{160}{30} \right)^{0,35} = 1.7966$$

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

Contributo delle staffe: per staffatura modesta viene circa 1  
Più precisamente, in questo caso, 1.0057 - lo trascuro

Contributo di ferri piegati - non ce ne sono

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

Quindi, per DS (SLV):

$$\theta_{u(bs)} = 0.75 \times 0.85 \times 0.6667 \times 0.0160 \times 0.7951 \times 2.0314 \times 1.7966 = 0.0197$$

## Spostamento relativo limite di interpiano

- Se le rotazioni alla corda in testa e al piede del pilastro sono uguali e se si trascura la rotazione dei nodi si ha:

$$u_{rel} = \theta_{u,DS} \times 2 L_v = \theta_{u,DS} \times h_p$$

Nell'esempio:

$$u_{rel} = 0.0197 \times 3200 = 63.1 \text{ mm}$$

Nota: forse si poteva considerare, cautelativamente, l'altezza netta (2700 mm); questo in particolare se il programma di calcolo considera tratti rigidi agli estremi delle aste

## Spostamento relativo limite di interpiano

- Lo spostamento limite dipende dallo sforzo normale, che varia per effetto del sisma

pilastro piano	Nq	b	h	sps u per Nq			
				sg 0.1	sg 0.2	sg 0.3	sg 0.4
1 6	66.1	30	30	76.46	75.96	75.26	74.67
1 5	163.7	30	30	72.30	70.18	68.12	64.18
1 4	261.3	30	30	68.37	64.29	60.45	53.45
1 3	358.9	30	30	64.66	58.57	53.07	43.57
1 2	456.5	30	30	61.13	53.25	46.39	36.21
1 1	556.4	40	30	62.52	54.87	48.15	42.26

Considerando il sisma nel verso peggiore si ha sempre una riduzione di spostamento limite

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

pilastro piano	Nq	b	h	sps u per Nq			
				sg 0.1	sg 0.2	sg 0.3	sg 0.4
1 6	66.1	30	30	76.46	75.96	75.26	74.67
1 5	163.7	30	30	72.30	70.18	68.12	64.18
1 4	261.3	30	30	68.37	64.29	60.45	53.45
1 3	358.9	30	30	64.66	58.57	53.07	43.57
1 2	456.5	30	30	61.13	53.25	46.39	36.21
1 1	556.4	40	30	62.52	54.87	48.15	42.26
2 6	108.0	30	30	74.65	74.42	74.19	73.96
2 5	244.0	30	30	69.05	68.75	68.46	67.88
2 4	380.0	30	30	63.87	63.43	62.99	62.11
2 3	518.2	30	40	57.47	57.14	56.62	56.18
2 2	658.7	30	50	52.95	52.64	52.33	51.71
2 1	801.4	30	60	49.52	49.91	48.30	47.71
3 6	108.0	30	30	74.65	74.43	74.21	74.00
3 5	244.0	30	30	69.05	68.75	68.45	68.16
3 4	380.0	30	30	63.87	63.37	62.88	62.40
3 3	518.2	30	40	57.47	56.89	56.31	55.74
3 2	658.7	30	50	52.95	52.39	51.83	51.28
3 1	801.4	30	60	49.52	49.00	48.48	47.97

Lo spostamento limite del piano è quello del pilastro che ha un limite più basso

	sps u min			
	sg 0.1	sg 0.2	sg 0.3	sg 0.4
6	73.12	72.78	72.45	72.11
5	67.30	66.26	64.97	63.02
4	61.99	60.02	56.40	53.00
3	56.00	53.09	48.89	44.20
2	51.72	48.05	43.60	39.56
1	48.45	44.42	39.84	35.74

## Analisi lineare Ordinanza 3431 e Circolare 2/2/09

## Analisi lineare

- Si ipotizza che gli spostamenti reali per un qualsiasi  $a_g$  siano uguali a quelli forniti dall'analisi lineare
- Si giudica la struttura confrontando gli spostamenti di calcolo con quelli limite

## Analisi lineare

Nota:

- La previsione dello spostamento in testa con l'analisi lineare è abbastanza accettabile
- Quello che può cambiare molto, e non è colto dall'analisi lineare, è la variazione della deformata al progredire della plasticizzazione:  
se si forma un meccanismo di piano lo spostamento si concentra tutto a quel piano, con valori molto maggiori di quelli previsti dall'analisi lineare

Per questo motivo occorre verificare l'applicabilità dell'analisi lineare

## Applicabilità dell'analisi lineare (1)

- Calcolare per tutte le sezioni il momento resistente (con valori medi di  $f_c$  e  $f_y$  - non divisi per il fattore di confidenza né per il coefficiente parziale di sicurezza)  
 $C$  = capacità
- Per un assegnato  $a_g$  calcolare il momento sollecitante  
 $D$  = domanda
- Calcolare il rapporto  $\rho = D / C$

## Applicabilità dell'analisi lineare (2)

- Esaminare tutte le sezioni in cui  $\rho > 2$ ; tra queste:
  - Trovare il minimo  $\rho_{\min}$
  - Trovare il massimo  $\rho_{\max}$
  - Calcolare il rapporto  $\rho_{\max} / \rho_{\min}$
- L'analisi è applicabile se  $\rho_{\max} / \rho_{\min} \leq 2.5$

Si può trovare il valore massimo di  $a_g$  per il quale l'analisi è applicabile

## Applicabilità dell'analisi lineare

basso						min	2.001
X						max	2.001
ag						rapp	1.535
0.150							
pilastro	piano	M(sisma)	M(res)	M(ag)	$\rho$		
1	6	359.68	30.15	53.95	1.79		
1	5	617.84	41.27	93.68	2.25		
1	4	813.76	51.13	122.06	2.39		
1	3	739.76	59.72	110.95	1.86		
1	2	701.32	73.02	105.20	1.44		
1	1	610.92	97.52	91.64	0.94		
							elastico
2	6	522.36	35.08	78.35	2.23		
2	5	862.80	49.48	129.42	2.52		
2	4	1053.92	61.40	158.09	2.57		
2	3	1705.36	113.17	255.80	2.26		
2	2	2065.80	169.60	309.87	1.83		
2	1	2890.52	236.96	433.58	1.83		
3	6	527.16	35.08	79.07	2.25		
3	5	866.32	49.48	129.95	2.53		
3	4	1062.32	61.40	159.35	2.60		
3	3	1786.56	113.17	267.96	2.37		
3	2	2262.52	169.60	339.38	2.00		
3	1	2886.04	236.96	447.91	1.89		

non						min	2.003
accettabile						max	2.548
X						rapp	
ag							
0.250							
pilastro	piano	M(sisma)	M(res)	M(ag)	$\rho$		
1	6	359.68	30.15	69.52	2.98		
1	5	617.84	41.27	154.46	3.74		
1	4	813.76	51.13	203.44	3.98		
1	3	739.76	59.72	164.94	3.10		
1	2	701.32	73.02	175.33	2.40		
1	1	610.92	97.52	152.73	1.57		
2	6	522.36	35.08	130.59	3.72		
2	5	862.80	49.48	215.70	4.36		
2	4	1053.92	61.40	263.48	4.29		
2	3	1705.36	113.17	426.34	3.77		
2	2	2065.80	169.60	516.45	3.05		
2	1	2890.52	236.96	722.63	3.05		
3	6	527.16	35.08	131.79	3.76		
3	5	866.32	49.48	216.58	4.38		
3	4	1062.32	61.40	265.68	4.33		
3	3	1786.56	113.17	446.64	3.95		
3	2	2262.52	169.60	555.63	3.34		
3	1	2886.04	236.96	746.51	3.15		

## Applicabilità dell'analisi lineare

						min	2.034
						max	5.006
						rapp	2.473
X						ag	0.245
pilastro	piano	M(sisma)	M(res)	M(ag)	$\rho$		
1	6	359.68	30.15	87.94	2.92		
1	5	617.84	41.27	151.06	3.66		
1	4	813.76	51.13	198.96	3.89		
1	3	739.76	59.72	160.87	3.03		
1	2	701.32	73.02	171.47	2.35		
1	1	610.92	97.52	145.37	1.53		
2	6	522.36	35.08	127.72	3.64		
2	5	862.80	49.48	210.95	4.26		
2	4	1053.92	61.40	257.68	4.20		
2	3	1705.36	113.17	416.96	3.68		
2	2	2065.80	169.60	505.09	2.98		
2	1	2890.52	236.96	706.73	2.98		
3	6	527.16	35.08	128.89	3.67		
3	5	866.32	49.48	211.82	4.28		
3	4	1062.32	61.40	269.74	4.23		
3	3	1786.56	113.17	436.81	3.86		
3	2	2262.52	169.60	553.19	3.26		
3	1	2886.04	236.96	730.09	3.08		

						min	2.603
						max	5.539
						rapp	2.126
Y						ag	0.211
pilastro	piano	M(sisma)	M(res)	M(ag)	$\rho$		
17	6	627.40	20.26	132.46	4.69		
17	5	842.12	37.95	177.77	4.70		
17	4	1016.96	46.56	214.68	4.61		
17	3	1084.44	54.38	228.93	4.21		
17	2	1106.48	61.29	233.58	3.81		
17	1	894.12	73.29	146.53	2.00		
9	6	879.76	33.63	186.72	5.54		
9	5	1235.64	47.88	280.04	5.45		
9	4	1516.80	59.87	320.20	5.35		
9	3	1499.84	75.44	316.62	4.20		
9	2	2479.64	123.94	523.45	4.22		
9	1	2631.96	162.96	587.74	3.27		
1	6	631.00	30.15	133.20	4.42		
1	5	861.72	41.27	181.91	4.41		
1	4	1046.00	51.13	220.81	4.32		
1	3	1135.32	59.72	239.67	4.01		
1	2	1037.20	73.02	218.95	3.00		
1	1	1537.20	117.07	324.50	2.77		

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

direzione x		per $a_g = 1.0$		spostamento relativo limite per rotazione corda						accelerazione sopportabile					
traverso	spostamento assoluto (mm)	spostamento relativo (mm)		per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.408	per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.408
6	477.126	56.664		73.12	72.78	72.45	72.11	71.78	71.91	1.290	1.284	1.279	1.273	1.267	1.269
5	430.420	94.344		67.33	66.26	64.97	63.02	61.13	61.86	0.714	0.702	0.689	0.668	0.648	0.656
4	347.128	118.368		61.99	60.02	56.40	53.00	49.80	51.03	0.524	0.507	0.476	0.448	0.421	0.431
3	236.832	101.952		56.00	53.09	48.89	44.20	39.95	41.56	0.549	0.521	0.480	0.434	0.392	0.405
2	135.448	67.560		51.72	48.09	43.60	39.65	35.21	37.16	0.591	0.540	0.495	0.452	0.402	0.424
1	47.996	47.996		48.45	44.42	39.84	35.74	32.05	33.45	1.009	0.925	0.830	0.745	0.668	0.697

La rotazione limite si raggiunge per  $a_g = 0.408$  g

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione y

direzione y		spostamento relativo limite per rotazione corda								accelerazione sopportabile							
traverso	spostamento assoluto (mm)	spostamento relativo (mm)		per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.265	per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.265		
6	747.984	96.368		73.12	72.32	71.53	70.75	69.98	71.39	0.760	0.751	0.743	0.735	0.727	0.742		
5	674.448	139.364		67.33	64.92	62.59	60.35	58.19	62.17	0.483	0.466	0.449	0.433	0.418	0.446		
4	567.780	168.900		61.99	57.88	54.05	50.47	47.12	53.36	0.367	0.343	0.320	0.299	0.279	0.316		
3	403.108	175.460		56.00	51.61	47.57	43.84	39.10	46.85	0.319	0.294	0.271	0.250	0.223	0.267		
2	232.224	155.212		51.72	47.17	42.51	38.85	34.24	41.18	0.333	0.304	0.274	0.251	0.196	0.265		
1	77.416	77.416		48.45	43.97	39.90	34.24	29.16	39.01	0.626	0.588	0.515	0.442	0.377	0.604		

La rotazione limite si raggiunge per  $a_g = 0.265$  g

## Conclusioni

per analisi lineare (con  $p$ )

- L'analisi mostra che il moltiplicatore di collasso potrebbe arrivare a
$$a_g = 0.265 \text{ g}$$
raggiunto per sisma in direzione  $y$   
L'analisi è però applicabile in tale direzione fino a un valore
$$a_g = 0.211 \text{ g}$$
che deve quindi ritenersi il limite

## Analisi non lineare (pushover)

Ordinanza 3431 e Circolare 2/2/09

### Pushover

- C'è chi l'ha definita "storia di una tentazione"



### Pushover

- C'è chi l'ha definita "storia di una tentazione"

- C'è chi dice che è "il grande dramma di suspense dell'anno"



### Pushover



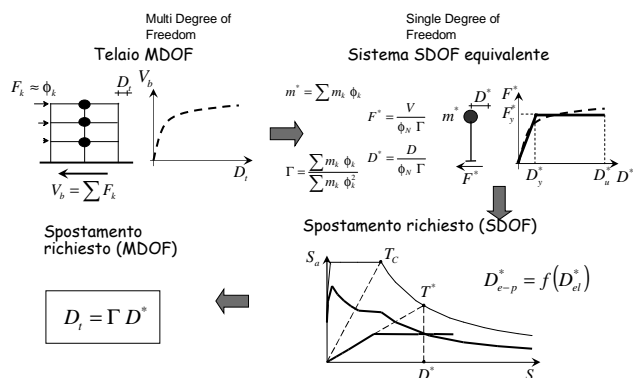
In realtà queste definizioni si riferiscono ad un'altra pushover

... ma forse vanno bene anche per il nostro caso

## Analisi statica non lineare

- Si valuta il comportamento non lineare della struttura per forze statiche crescenti
- Si ipotizza che gli spostamenti così ottenuti siano uguali a quelli reali (calcolabili con l'analisi dinamica non lineare)
- È necessario individuare quale sia il valore di  $a_g$  che corrisponde ad un assegnato punto della pushover
- Si giudica la struttura confrontando gli spostamenti di calcolo con quelli limite

## Analisi statica non lineare determinazione dello spostamento "richiesto"



## Proposta alternativa

È veramente necessario passare al sistema SDOF?

Proposta:

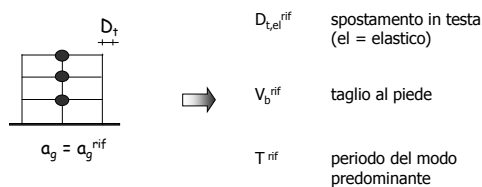
determinare lo spostamento richiesto (elasto-plastico) direttamente dallo spostamento (elastico) fornito dall'analisi modale con spettro di risposta del sistema MDOF

- corretto per tener conto della differenza  $D_{e-p} - D_{el}$
- corretto per tener conto della pendenza iniziale della bilineare

Le stesse correzioni fatte nello SDOF

## Analisi statica non lineare 1 - analisi modale

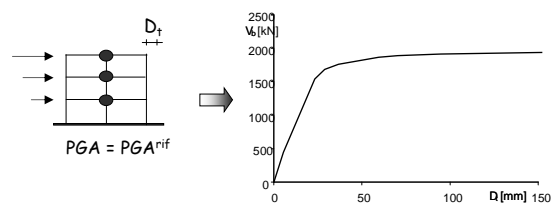
- Analisi modale con spettro di risposta (elastica)



Nota: poiché il modello è elastico lineare, gli spostamenti variano linearmente con PGA

## Analisi statica non lineare 2 - analisi incrementale (pushover)

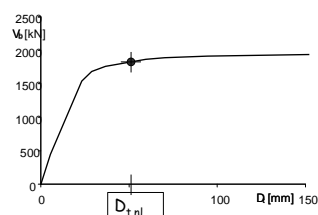
- Applicazione di forze crescenti ad uno schema con possibilità di plasticizzazione



Nota: deve essere fatta due volte, con due distribuzioni di forze

## Analisi statica non lineare relazione $D_t - a_g$

Quale accelerazione  $a_g$  corrisponde ad un punto qualsiasi della curva?



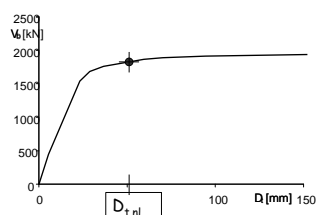
$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,el}}{D_{t,el}^{rif}}$$

Idea base: uguaglianza di spostamenti

$$D_{t,el} = D_{t,nl}$$

## Analisi statica non lineare relazione $D_t - a_g$

Quale accelerazione  $a_g$  corrisponde ad un punto qualsiasi della curva?



Ma in realtà questo non è esatto

Occorre effettuare due correzioni

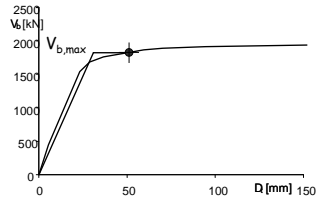
Idea base: uguaglianza di spostamenti

$$D_{t,el} = D_{t,nl}$$

### Analisi statica non lineare 3 - bilinearizzazione

Per ciascun punto della curva:

- Trasformazione della curva in una bilatera



Prima possibilità  
(Eurocodice, NTC08)

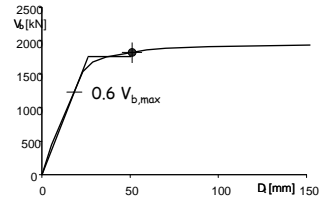
Uguaglianza del  
valore massimo

Criterio generale: area sottesa uguale

### Analisi statica non lineare 3 - bilinearizzazione

Per ciascun punto della curva:

- Trasformazione della curva in una bilatera



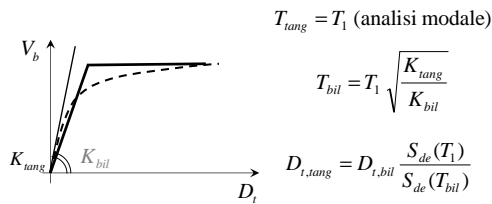
Seconda possibilità  
(Fajfar)

Il tratto lineare  
interseca la curva  
al 60% di  $V_{b,max}$

Criterio generale: area sottesa uguale

### Analisi statica non lineare 4 - correzione per variazione rigidezza

- La bilinearizzazione comporta una variazione di rigidezza e quindi di periodo



$$T_{tang} = T_1 \text{ (analisi modale)}$$

$$T_{bil} = T_1 \sqrt{\frac{K_{tang}}{K_{bil}}}$$

$$D_{t,tang} = D_{t,bil} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})}$$

- Gli spostamenti si modificano in funzione della variazione di periodo

$$S_{de}(T) = \text{spostamento spettrale}$$

### Spostamento richiesto

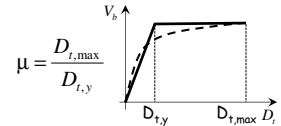
#### 5 - correzione per spostamento elasto-plastico

- Lo spostamento di una struttura che va in campo plastico può essere uguale oppure maggiore di quello di una struttura che rimane in campo elastico
- Si assume:

$$D_{t,el} = D_{t,e-p} \quad T \geq T_c$$

$$D_{t,el} = D_{t,e-p} \frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right] \quad T < T_c$$

Nota: la duttilità  $\mu$  è ricavata dalla bilineare



### Passaggi matematici (per mio ricordo)

- Dall'articolo di Bosco, Gherzi, Marino, "On the evaluation of seismic response of structures by nonlinear static methods"

$$R_\mu = \mu \quad \text{when } T^* \geq T_c \quad (8a)$$

$$R_\mu = (\mu - 1) \frac{T^*}{T_c} + 1 \quad \text{when } T^* < T_c \quad (8b)$$

$$a_g = \bar{a}_g \frac{D}{D_{el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_c)} \quad \text{if } T_c \geq T_c \text{ or } R_\mu \leq 1 \quad (20a)$$

$$a_g = \bar{a}_g \frac{D}{D_{el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_c)} \frac{R_\mu}{1 + (R_\mu - 1) T_c / T_c} \quad \text{if } T_c < T_c \text{ and } R_\mu > 1 \quad (20b)$$

$$\frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right]$$

### Spostamento richiesto

#### 6 - determinazione di $a_g$

- Riunendo le indicazioni precedenti

$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,nl}}{D_{t,el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})} \quad T \geq T_c$$

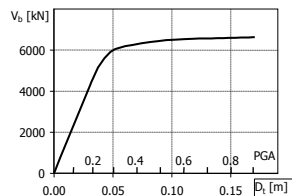
$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,nl}}{D_{t,el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})} \frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right] \quad T < T_c$$



## Relazione spostamenti - PGA

- Con le relazioni precedenti, si può far corrispondere ad ogni spostamento un valore di PGA.

Si può quindi usare una doppia scala di riferimento per le ascisse



## Applicazione alla struttura in esame telai in direzione x

- Analisi lineare e pushover

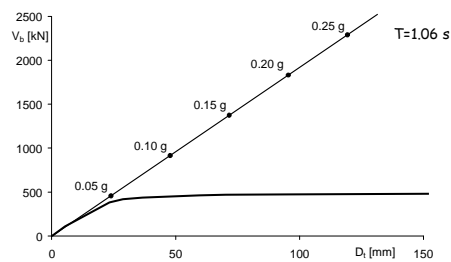
analisi modale		
ag	Dt [mm]	Vb [kN]
0.25	119.28	2291.83
T	1.064	s

$$K_{tang} = \frac{2291.83}{119.28} = 19.21 \text{ kN/mm}$$

pushover		
passo	Dt [mm]	Vb [kN]
0	0.00	0.00
1	5.36	111.43
2	23.22	363.86
3	28.73	419.53
4	36.53	438.76
5	69.42	464.63
6	70.19	470.50
7	94.52	475.79
8	152.17	482.80
9	166.20	483.79
10	229.01	483.79
11	296.02	483.79
12	364.16	483.79
13	424.16	483.79
14	484.16	483.79
15	544.16	483.79
16	599.55	483.79

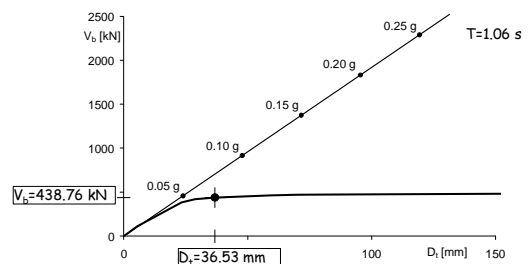
## Applicazione alla struttura in esame telai in direzione x

- Analisi lineare e pushover

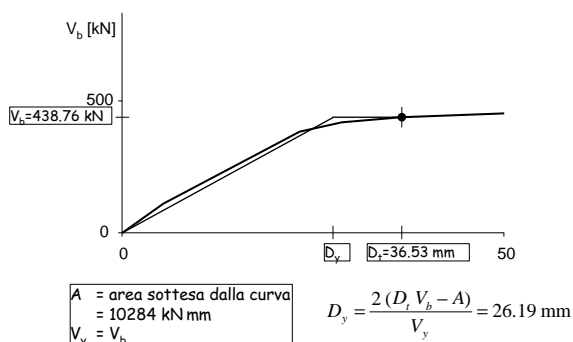


## Applicazione alla struttura in esame telai in direzione x

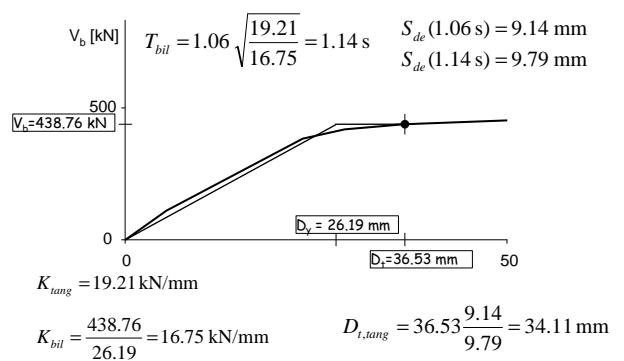
- Determinazione dell'accelerazione corrispondente ad un punto della curva



## Bilinearizzazione secondo indicazioni Eurocodice e NTC08



## Correzione 1 rigidezza della tangente e della bilineare



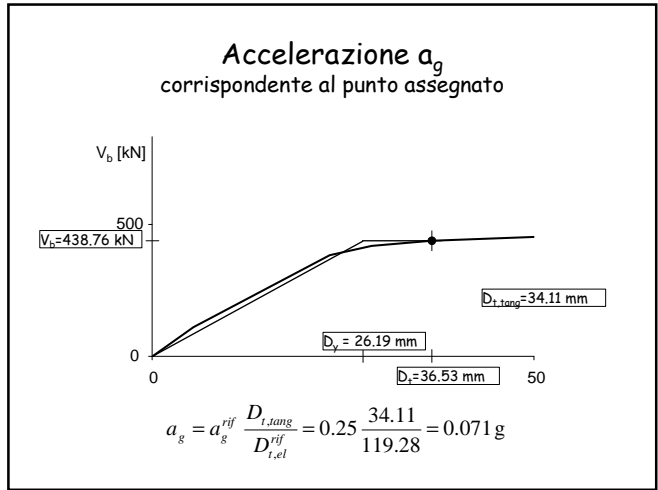
## Correzione 2

spostamento elastico ed elastoplastico

The graph plots Load  $V_b$  [kN] on the vertical axis against Displacement  $D$  [mm] on the horizontal axis. The vertical axis has a major tick at 500 and a label  $V_b = 438.76 \text{ kN}$  corresponding to the yield point. The horizontal axis has major ticks at 0, 26.19, 36.53, and 50. The curve starts at the origin (0,0), rises linearly to a yield point at  $D_y = 26.19 \text{ mm}$  and  $V_b = 438.76 \text{ kN}$ . Beyond this point, the curve follows a slightly curved path, reaching a point marked with a black dot at  $D_{t, \text{tang}} = 34.11 \text{ mm}$ . A tangent line is drawn from the origin to this point. The final displacement shown on the curve is  $D_t = 36.53 \text{ mm}$ .

$T > T_c$

La correzione  
non è necessaria



## Applicazione alla struttura in esame

### telai in direzione x

- Accelerazione per tutti i punti della curva

analisi modale											
ag	Dt [mm]	Vb [kN]	Kai								
0,25	119,28	2291 [k]	19,21								
T			1,064	s	ag(T)		0,319	g			
D(T)					9,14						
pushover											
passo	Dt [mm]	Vb [kN]	Area	Vy	Dy	Kbail	T	Dep(T)	Dt,el	ag	
0	0,00	0,00	0	0,00	0,00	9,14	1,064	9,14	1,000	0,000	
1	5,36	1111,43	299	1111	5,36	20,77	1,064	9,14	1,000	5,36	0,011
2	23,22	383,86	2741	383,86	21,84	17,57	1,113	9,56	1,046	22,21	0,047
3	36,23	419,62	6936	419,63	24,41	17,10	1,126	9,62	1,062	37,16	0,067
4	36,53	436,76	10264	436,76	26,19	16,75	1,140	9,79	1,071	34,11	0,071
5	59,42	484,83	26920	484,83	30,06	15,45	1,167	10,20	1,115	55,26	0,112
6	70,19	470,50	25669	470,50	31,32	15,02	1,203	10,34	1,131	62,07	0,130
7	94,62	475,79	31170	475,79	32,80	14,61	1,226	10,50	1,151	82,13	0,172
8	152,17	482,80	64801	482,80	35,91	13,45	1,272	10,93	1,195	127,30	0,267
9	166,20	483,79	71562	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	136,08	0,289
10	229,01	483,79	101967	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	180,26	0,399
11	296,82	483,79	134773	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	246,59	0,517
12	364,16	483,79	167348	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	302,53	0,634
13	424,16	483,79	196376	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	352,37	0,739
14	484,16	483,79	226403	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	402,21	0,843
15	544,16	483,79	254430	483,79	36,48	13,26	1,281	11,01	1,204	452,05	0,947
16	599,65	0,00	281231	483,79	36,49	13,26	1,281	11,01	1,204	498,06	1,044

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione x

- Analisi lineare e pushover con corrispondenza tra punti e  $a_g$

The graph plots base shear  $V_b$  [kN] on the y-axis (0 to 2500) against displacement  $D_s$  [mm] on the x-axis (0 to 150). Two curves are shown: a linear elastic curve (top) and a pushover curve (bottom). The linear curve is labeled with acceleration values (0.05 g, 0.10 g, 0.15 g, 0.20 g, 0.25 g) corresponding to points on the line. The pushover curve starts at the origin, rises to a peak of approximately 500 kN at 25 mm displacement, and then remains constant at that level for larger displacements. The pushover curve is also labeled with acceleration values (0.05 g, 0.10 g, 0.15 g, 0.20 g, 0.25 g) corresponding to points on the curve.

Displacement $D_s$ [mm]	Base Shear $V_b$ [kN] (Linear)	Base Shear $V_b$ [kN] (Pushover)
0	0	0
25	500	500
50	1000	500
75	1500	500
100	2000	500
125	2500	500

# Applicazione alla struttura in esame telai in direzione y

- Analisi lineare e pushover  
con corrispondenza tra punti e  $a_g$

The graph plots base shear  $V_b$  [kN] on the y-axis (0 to 2000) against displacement  $D_t$  [mm] on the x-axis (0 to 300). Two curves are shown: a linear elastic curve for  $0.05g$  and a non-linear pushover curve for  $0.25g$ . The  $0.05g$  curve is a straight line passing through points (25, 250), (50, 500), (75, 750), (100, 1000), (125, 1250), (150, 1500), (175, 1750), and (200, 2000). The  $0.25g$  curve starts at the origin and follows a non-linear path, passing through points (25, 100), (50, 200), (75, 300), (100, 350), (125, 400), (150, 450), (175, 480), (200, 500), (250, 520), and (300, 550).

$D_t$ [mm]	$V_b$ [kN] ( $0.05g$ )	$V_b$ [kN] ( $0.25g$ )
0	0	0
25	250	100
50	500	200
75	750	300
100	1000	350
125	1250	400
150	1500	450
175	1750	480
200	2000	500
250	-	520
300	-	550

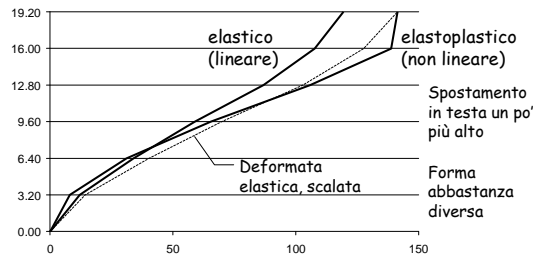
Direzione X

travi plasticizzate

The diagram illustrates the global collapse mechanism of a three-bay, three-story frame structure under a horizontal load X. It consists of three sequential frames showing the progression of plastic hinges. In the first frame, plastic hinges are located at the base of each column and at the mid-height of each beam. In the second frame, additional hinges appear at the top of the columns and at the quarter points of the beams. In the third frame, the mechanism is fully developed, with hinges at the base, top, and midpoints of all members. Arrows indicate the direction of the load X and the resulting lateral displacement of the structure.

Il meccanismo di collasso è sostanzialmente globale

### Deformata per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.x con comportamento elastico e plastico



### Verifica per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.x

Per ciascun interpiano:

- Calcolare la rotazione alla corda  $\theta_u$  e gli spostamenti limite corrispondenti
  - $\theta_u$  dipende anche dallo sforzo normale, che varia in maniera non lineare ed è diverso da quello fornito dall'analisi lineare (ma in genere il  $\Delta N$  da sisma è minore con analisi non lineare)
- Determinare lo spostamento limite minimo
- Confrontarlo con il valore fornito dal calcolo

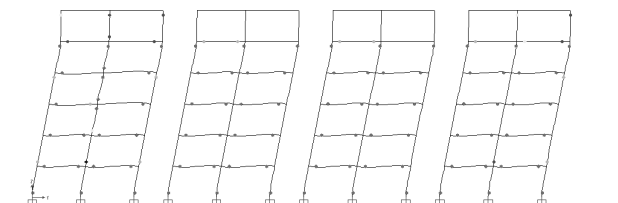
### Verifica per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.x

spostamenti relativi		spostamenti disponibili		
ag =	0.25	ag =	0.25	
piano	Dr	piano	Dr	rapporto
6	2.67	6	72.28	27.100
5	32.95	5	63.99	1.942
4	40.35	4	54.67	1.365
3	34.35	3	46.49	1.363
2	23.06	2	41.53	1.801
1	7.99	1	37.73	4.722
			min	1.363
				verifica ok

La verifica è soddisfatta

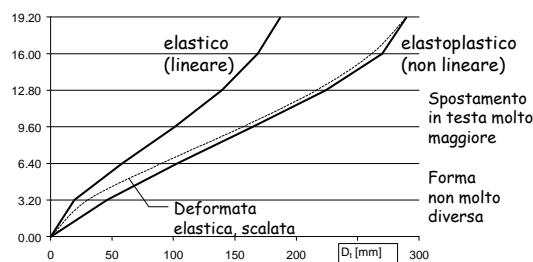
Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

### Direzione Y travi e travetti plasticizzati



Il meccanismo di collasso è sostanzialmente globale

### Deformata per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.y con comportamento elastico e plastico



### Verifica per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.y

spostamenti relativi		spostamenti disponibili		
ag =	0.25	ag =	0.25	
piano	Dr	piano	Dr	rapporto
6	19.65	6	71.14	3.621
5	45.85	5	61.46	1.340
4	59.97	4	52.23	0.871
3	61.30	3	45.66	0.745
2	57.17	2	39.04	0.683
1	45.68	1	37.10	0.812
			min	0.683
				verifica no

La verifica non è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

Verifica per  $a_g=0.20\text{ g}$  - dir.y

spostamenti relativi		spostamenti disponibili			
ag = piano	0.20 Dr	ag = piano	0.20 Dr		
6	18.37	6	71.53		rapporto
5	34.48	5	62.59		1.815
4	46.59	4	54.05		1.160
3	49.12	3	47.57		0.968
2	46.78	2	42.51		0.909
1	36.35	1	39.90		1.098
				min	0.909
					verifica no

La verifica non è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

Verifica per  $a_g=0.184$  g - dir.y

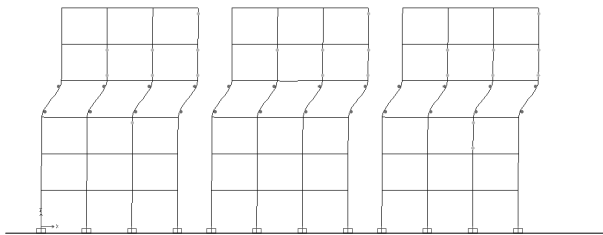
spostamenti relativi		spostamenti disponibili			
ag = piano	0.18 Dr	ag = piano	0.18 Dr		
6	17.96	6	71.66		rapporto
5	30.84	5	62.96		2.041
4	42.31	4	54.65		1.291
3	45.23	3	48.19		1.066
2	43.45	2	43.65		1.005
1	33.37	1	40.53		1.215
				min	1.005
					verifica ok

La verifica è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

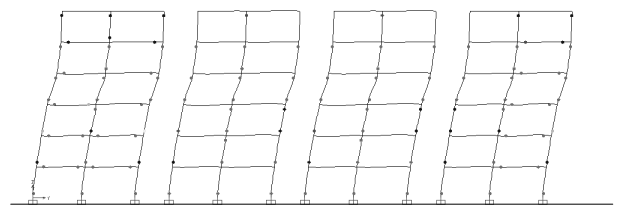
Direzione X  
travi infinitamente resistenti

E se il modello cambia ?



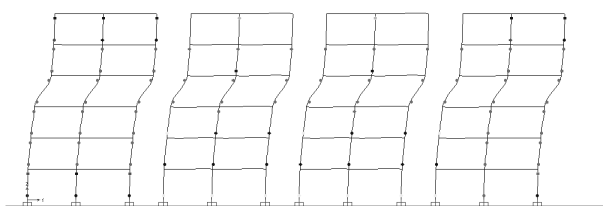
## Meccanismo di piano

Direzione Y  
travi plasticizzate, travetti no



### Minime variazioni

Direzione Y  
travi e travetti infinitamente resistenti



### Meccanismo di piano