

Corso di aggiornamento
Progettazione strutturale sulla base
delle normative più recenti

Progetto e verifica di edifici antisismici in c.a.

Risposta elastica
Spettri di risposta elastica

Villa Redenta, Spoleto
6-8 novembre 2008

Aurelio Ghersi

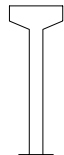
Comportamento dinamico elastico Schemi a un grado di libertà

Struttura a un grado di libertà

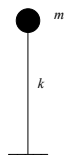
Serbatoio pensile



Foto



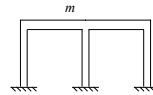
Disegno
schematico



Modello di
calcolo

Struttura a un grado di libertà

Telaio monopiano



Disegno
schematico



Modello di
calcolo

Oscillazioni libere

Esempio: altalena



Spostando il sedile
dell'altalena e poi
lasciandolo libero,
esso oscilla con un
periodo T
ben preciso

Oscillazioni libere

Esempio: altalena



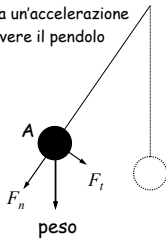
Spostando il sedile
dell'altalena e poi
lasciandolo libero,
esso oscilla con un
periodo T
ben preciso

Oscillazioni libere pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

F_n assorbita dall'asta del pendolo

F_t che provoca un'accelerazione
che fa muovere il pendolo

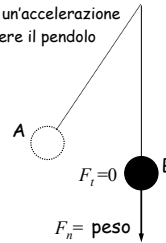


Oscillazioni libere pendolo (esempio: altalena)

A) Il peso è scomposto nelle forze

F_n assorbita dall'asta del pendolo

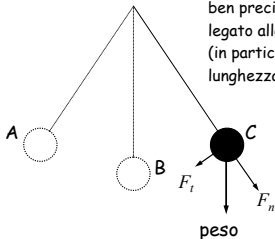
F_t che provoca un'accelerazione
che fa muovere il pendolo



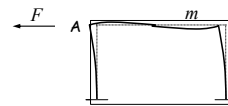
B) In questa posizione la
velocità è massima
(quando inizia a
risalire rallenta) ma
l'accelerazione è nulla
perché $F_t = 0$

Oscillazioni libere pendolo (esempio: altalena)

Il pendolo oscilla con
un periodo T
ben preciso,
legato alla geometria
(in particolare, alla
lunghezza dell'asta)



Oscillazioni libere telaio monopiano

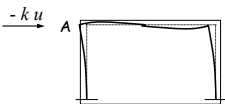


A) Per deformare il telaio in
questa posizione occorre
applicare una forza F ,
uguale ed opposta alla
forza elastica che tende a
riportare il telaio alla
posizione indeformata
(forza di richiamo
elastico).

Equilibrio statico

$$F = k u$$

Oscillazioni libere telaio monopiano

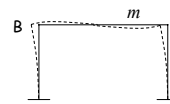


Quando si lascia libero il telaio, agisce
solo la forza di richiamo elastico, che
provoca un'accelerazione.

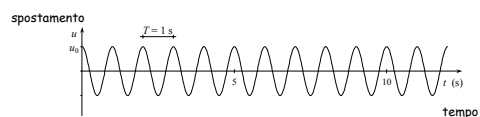
Equilibrio dinamico

$$-k u = m a \quad m \ddot{u} + k u = 0$$

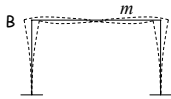
Oscillazioni libere telaio monopiano



B) Tornato nella posizione
indeformata, la velocità è
massima e l'accelerazione
nulla (come la forza di
richiamo elastico).

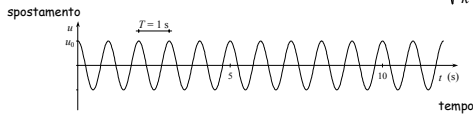


Oscillazioni libere telaio monopiano

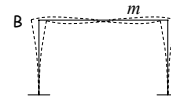


Il telaio oscilla con un periodo ben preciso, legato alla massa ed anche alla rigidezza del telaio

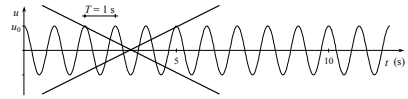
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



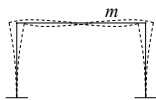
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)



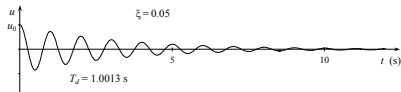
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



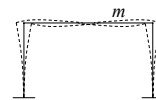
Equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

Lo smorzamento è legato alla variazione di spostamento (velocità)



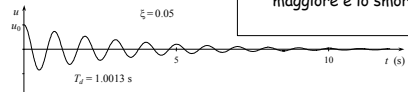
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



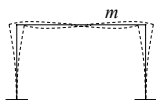
Equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



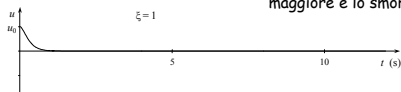
Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



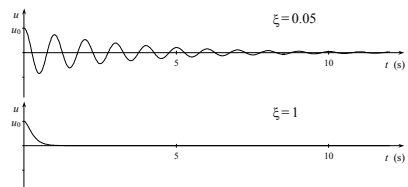
Equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



Oscillazioni libere con smorzamento telaio monopiano



Si indica col termine "smorzamento critico" quel valore per il quale il sistema raggiunge lo stato di quiete senza oscillare

Lo smorzamento viene di solito indicato come percentuale ξ dello smorzamento critico

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Smorzamento - negli edifici

Dipende da:

- Elementi non strutturali (tramezzi, rompagni) molto
- Non linearità del materiale di meno

Edifici in cemento armato, con tramezzi in muratura:

- Si può assumere un valore di smorzamento percentuale $\xi \approx 0.05$

Edifici in acciaio, con tramezzatura leggera:

- È consigliabile usare un valore minore di $\xi \approx 0.05$

Edifici isolati alla base, con isolatori in gomma:

- Si può usare un valore maggiore di $\xi \approx 0.05$

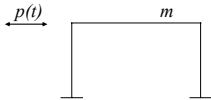
Oscillazioni forzate

Esempio: altalena



Dando (in maniera periodica) una piccola spinta al sedile dell'altalena, le oscillazioni si amplificano sempre di più

Oscillazioni forzate telaio monopiano

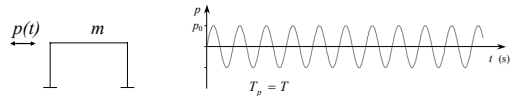


Equazione del moto:

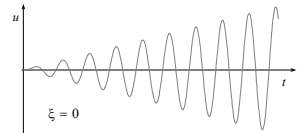
$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t)$$

Nell'equazione del moto compare un nuovo termine (l'azione forzante)

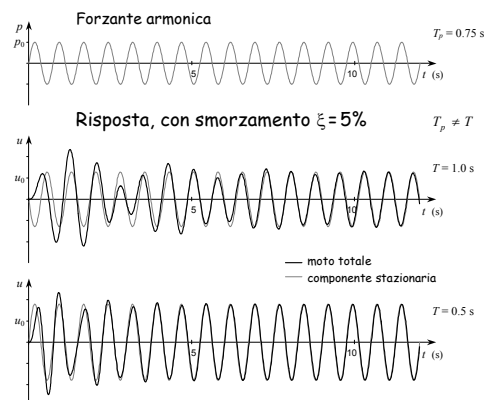
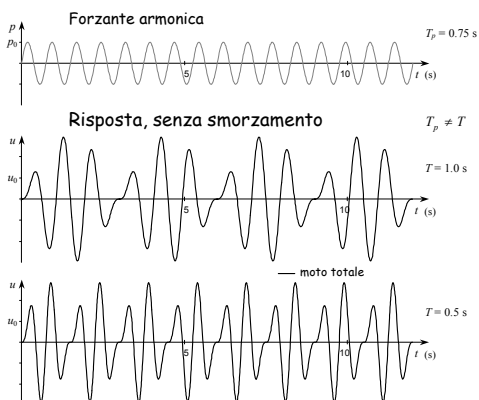
Oscillazioni forzate telaio monopiano

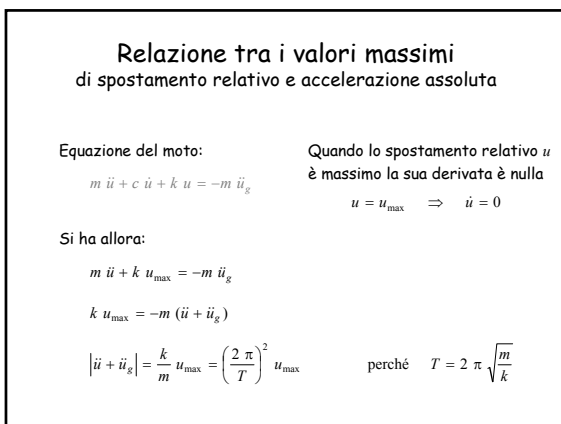
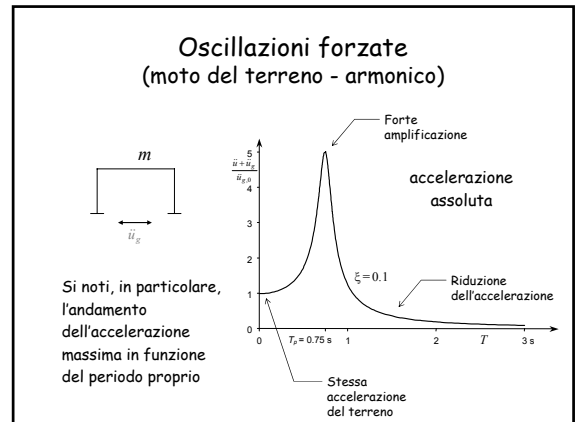
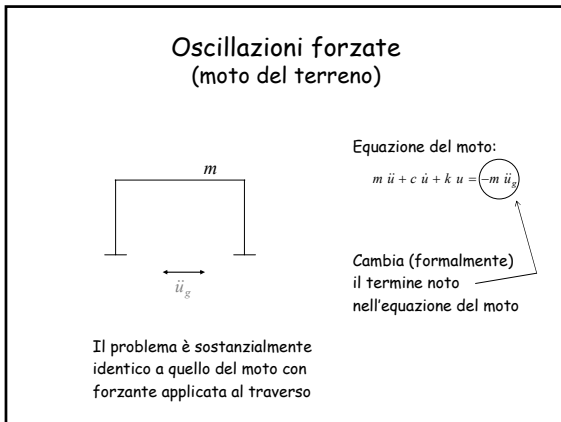
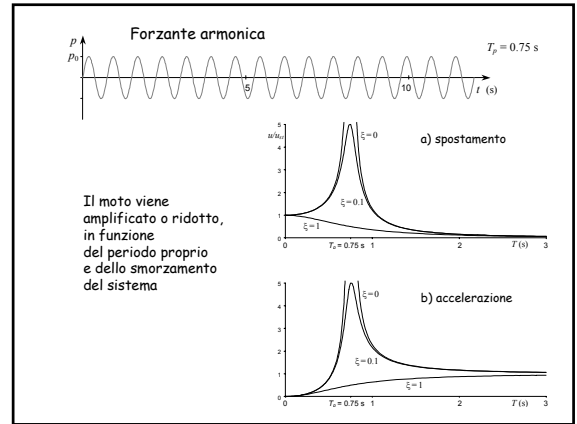
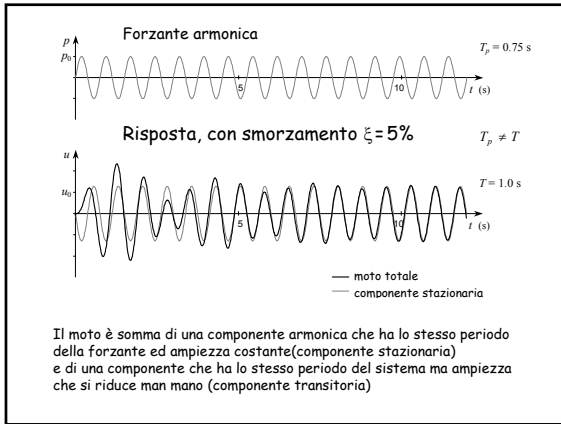


Se il periodo della forzante coincide con quello del sistema, in assenza di smorzamento il moto si amplifica sempre più

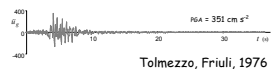
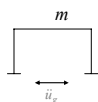


risonanza

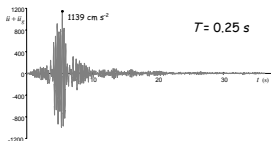




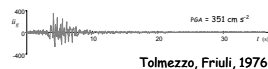
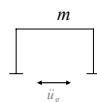
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)



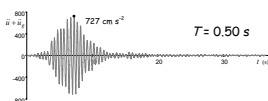
Concettualmente analogo
(ma più complesso numericamente)
è determinare la risposta ad un accelerogramma



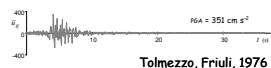
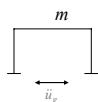
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)



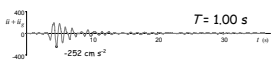
Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)

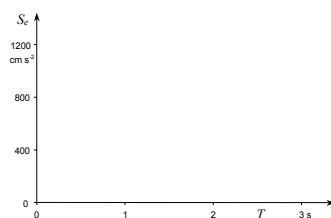


Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



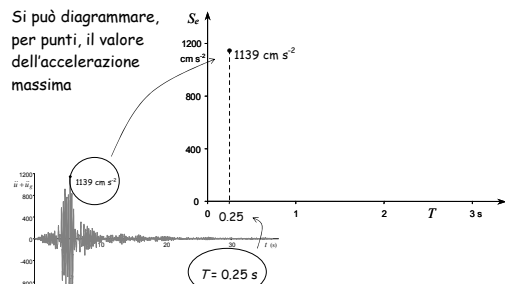
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



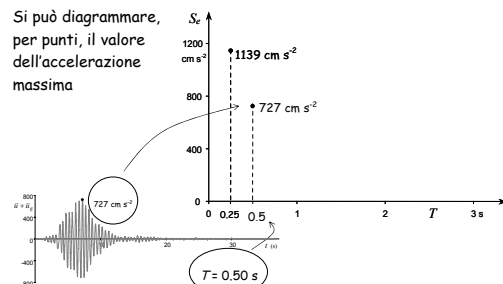
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



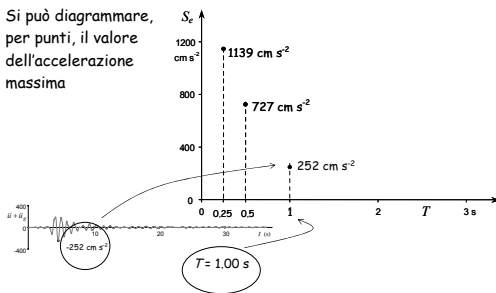
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



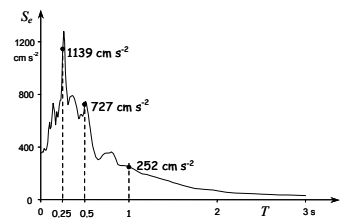
Oscillazioni forzate (moto del terreno - accelerogramma)

Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Oscillazioni forzate Spettro di risposta

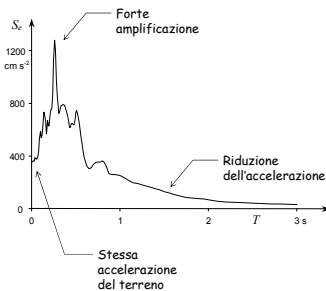
Si può diagrammare, per punti, il valore dell'accelerazione massima



Il diagramma ottenuto unendo i vari punti viene detto "spettro di risposta" (in termini di accelerazione)

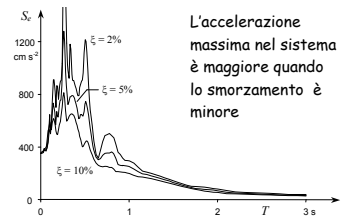
Oscillazioni forzate Spettro di risposta (accelerazione)

L'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio è analogo a quanto visto per moto del terreno armonico



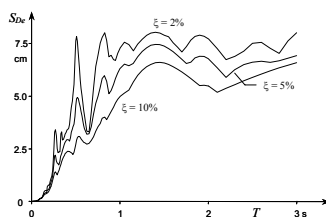
Oscillazioni forzate Spettro di risposta (accelerazione)

Al variare dello smorzamento si ottengono diverse curve



Oscillazioni forzate Spettro di risposta (spostamento)

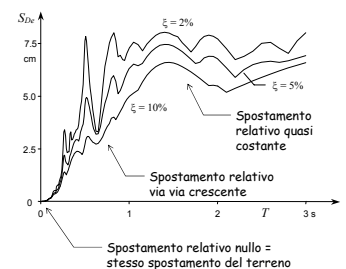
Allo stesso modo si può diagrammare lo spostamento relativo massimo in funzione del periodo



Il diagramma così ottenuto viene detto "spettro di risposta" (in termini di spostamento)

Oscillazioni forzate Spettro di risposta (spostamento)

Si noti l'andamento dello spostamento relativo massimo in funzione del periodo proprio

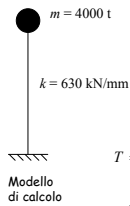


Lo spostamento massimo nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore

A cosa servono gli spettri?



Foto



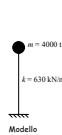
Conoscendo massa e rigidezza possiamo determinare il periodo proprio

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4000 \times 10^3}{630 \times 10^6}} = 0.5 \text{ s}$$

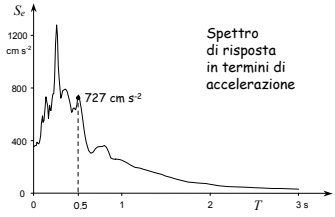
A cosa servono gli spettri?



Foto



$$T = 0.5 \text{ s}$$

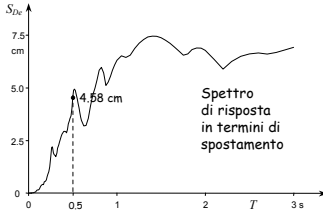
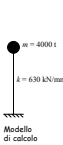


Noto il periodo proprio, possiamo leggere dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{\max} = 7.27 \text{ m/s}^2 = 0.74 \text{ g}$

A cosa servono gli spettri?



$$T = 0.5 \text{ s}$$

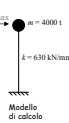


Noto il periodo proprio, possiamo leggere dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{\max} = 7.27 \text{ m/s}^2 = 0.74 \text{ g}$ o lo spostamento relativo massimo $u_{\max} = 4.58 \text{ cm}$

A cosa servono gli spettri?



$$T = 0.5 \text{ s}$$



Ma dall'accelerazione possiamo ricavare anche la massima forza d'inerzia

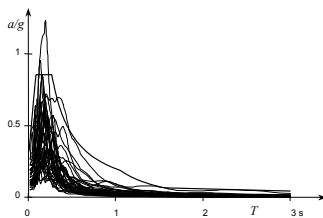
$$F_{\max} = m a_{\max} = 4000 \times 7.27 = 29000 \text{ kN}$$

e quindi le massime sollecitazioni nella struttura

Noto il periodo proprio, possiamo leggere dallo spettro l'accelerazione assoluta massima $a_{\max} = 7.27 \text{ m/s}^2 = 0.74 \text{ g}$ o lo spostamento relativo massimo $u_{\max} = 4.58 \text{ cm}$

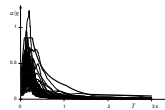
Spettri di risposta

L'analisi di oscillatori semplici può essere ripetuta per diversi accelerogrammi (con un assegnato smorzamento)

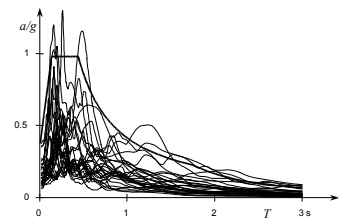


Si può quindi definire una curva che inviluppa tutti gli spettri di risposta, o che viene superata solo occasionalmente

Spettri di risposta

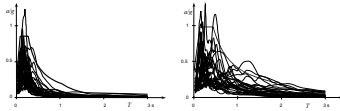


In zone differenti e su terreni differenti si otterranno risultati diversi



Si può quindi definire una curva che inviluppa tutti gli spettri di risposta, o che viene superata solo occasionalmente

Spettri di risposta

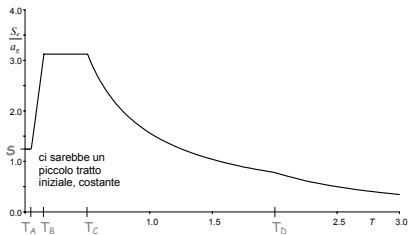


In zone differenti
e su terreni
differenti
si otterranno
risultati diversi

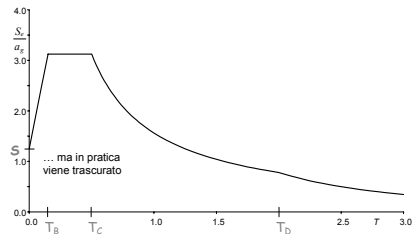
La normativa fornisce quindi spettri di
risposta differenziati in funzione delle
caratteristiche del suolo e della zona in
cui è ubicata la struttura

Spettri di risposta elastica NTC 08 (D.M. 14/1/2008)

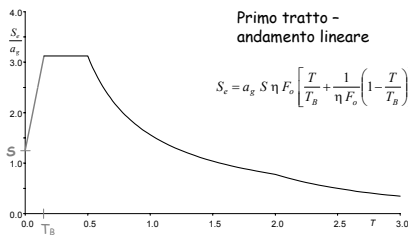
Forma generale degli spettri di risposta elastica



Forma generale degli spettri di risposta elastica



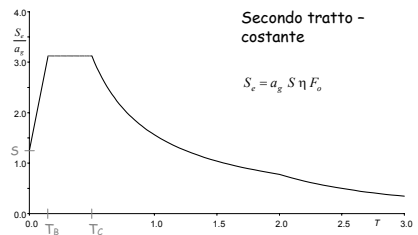
Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali



Amplificazione, legata
al tipo di terreno

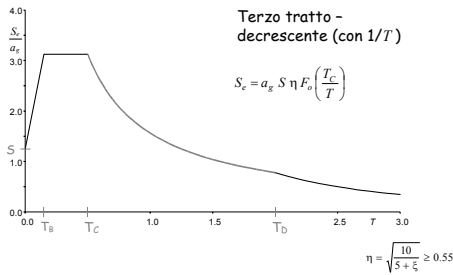
$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \zeta}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali

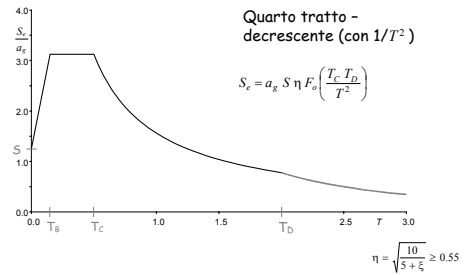


$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \zeta}} \geq 0.55$$

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali



Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali



Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali

Per definire uno spettro di risposta elastico
occorre indicare i parametri

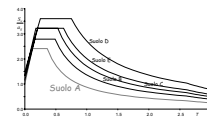
- a_g accelerazione del terreno (su roccia)
- S amplificazione dovuta al tipo di terreno
- T_B T_C T_D periodi che separano i diversi tratti
- ξ smorzamento della struttura

S T_B T_C T_D si ricavano a partire dai tre parametri

$$a_g F_o T_C^*$$

che dipendono dal periodo di ritorno T_r e dalle
caratteristiche del terreno

Classificazione dei suoli e spettri di risposta



Suolo A

Formazioni litoidi o suoli
omogenei molto rigidi

$$V_{S30} > 800 \text{ m/s}$$

$$S = 1 \quad T_B = 0.15 \text{ s} \quad T_C = 0.4 \text{ s} \quad T_D = 2.5 \text{ s}$$

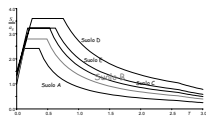
Valori orientativi per terremoti
con alto periodo di ritorno

$$V_{S30}$$

Velocità media di propagazione
delle onde di taglio nei 30 m
superiori del suolo

$$V_{S30} = \frac{30}{\sum \frac{h_i}{V_{Si}}}$$

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali, alto periodo di ritorno



Suolo B

Depositi di sabbie e ghiaie
molto addensate o argille
molto consistenti

$$360 \text{ m/s} < V_{S30} < 800 \text{ m/s}$$

Resistenza penetrometrica
 $N_{SPT} > 50$

Coesione non drenata
 $c_u > 250 \text{ kPa}$

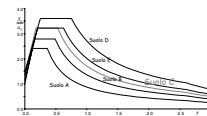
$$S = 1.20 \quad T_B = 0.15 \text{ s} \quad T_C = 0.5 \text{ s}$$

Valori orientativi per terremoti
con alto periodo di ritorno

$$V_{S30}$$

Velocità media di propagazione
delle onde di taglio nei 30 m
superiori del suolo

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali, alto periodo di ritorno



Suolo C

Depositi di sabbie e ghiaie
mediamente addensate o
argille di media consistenza

$$180 \text{ m/s} < V_{S30} < 360 \text{ m/s}$$

Resistenza penetrometrica
 $15 < N_{SPT} < 50$

Coesione non drenata
 $70 < c_u < 250 \text{ kPa}$

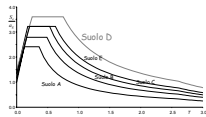
$$S = 1.30 \quad T_B = 0.15 \text{ s} \quad T_C = 0.5 \text{ s}$$

Valori orientativi per terremoti
con alto periodo di ritorno

$$V_{S30}$$

Velocità media di propagazione
delle onde di taglio nei 30 m
superiori del suolo

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali, alto periodo di ritorno



$S = 1.45$ $T_0 = 0.25$ s $T_C = 0.8$ s
Valori orientativi per terremoti
con alto periodo di ritorno

V_{S30}
Velocità media di propagazione
delle onde di taglio nei 30 m
superiori del suolo

Suolo D

Depositi di terreni granulari da
sciolti a poco addensati oppure
coesivi da poco a
mediamente consistenti

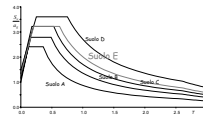
$V_{S30} < 180$ m/s

Resistenza penetrometrica

$N_{SPT} < 15$

Coesione non drenata
 $c_u < 70$ kPa

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali, alto periodo di ritorno



$S = 1.30$ $T_0 = 0.2$ s $T_C = 0.6$ s
Valori orientativi per terremoti
con alto periodo di ritorno

V_{S30}
Velocità media di propagazione
delle onde di taglio nei 30 m
superiori del suolo

Suolo E

Strati superficiali alluvionali,
di caratteristiche simili ai tipi
C e D e spessore tra 5 e 20 m,
su un substrato più rigido con
 $V_{S30} > 800$ m/s

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali, alto periodo di ritorno

Suolo S1

Depositi con strato di almeno
10 m di argille di bassa
consistenza ed elevato indice
di plasticità e contenuto di
acqua

$V_{S30} < 100$ m/s

Coesione non drenata
 $10 < c_u < 20$ kPa

Per questi tipi di terreno occorrono studi speciali

Suolo S2

Depositi di terreni soggetti a
liquefazione

Esempio

Dall'alto:

12 m - sabbie marnose

$N_{SPT} = 26$

6.1 m - argille grigio-brune

$N_{SPT} = 47$

1.9 m - marne sabbiose

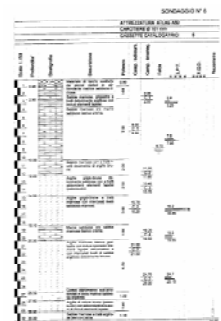
$N_{SPT} = 16$

6.5 m - argille marnose

$N_{SPT} = 18$

3.5 m - ciottoli, argille brune

$N_{SPT} = 40$



Esempio

Dall'alto:

12 m - sabbie marnose

$N_{SPT} = 26$

6.1 m - argille grigio-brune

$N_{SPT} = 47$

1.9 m - marne sabbiose

$N_{SPT} = 16$

6.5 m - argille marnose

$N_{SPT} = 18$

3.5 m - ciottoli, argille brune

$N_{SPT} = 40$

$$N_{SPT} = \frac{30}{\frac{12}{26} + \frac{6.1}{47} + \frac{1.9}{16} + \frac{6.5}{18} + \frac{3.5}{40}}$$

$N_{SPT} = 25.9$

Si può considerare
suolo di tipo C, perché
 $15 < N_{SPT} < 50$

NTC08, punto 3.2.2

Spettri di risposta NTC08 S - amplificazione dovuta al terreno

• Dipende da

S_S - Categoria di sottosuolo

S_T - Categoria topografica

$$S = S_S \times S_T$$

Categoria sottosuolo	S_S
A	1.00
B	$1.00 \leq 1.4 - 0.4 F_o \frac{a_g}{g} \leq 1.20$
C	$1.00 \leq 1.7 - 0.6 F_o \frac{a_g}{g} \leq 1.50$
D	$0.90 \leq 2.4 - 1.5 F_o \frac{a_g}{g} \leq 1.80$
E	$1.00 \leq 2.0 - 1.1 F_o \frac{a_g}{g} \leq 1.60$

Intervengono
anche F_o e a_g

Vedere foglio
Excel "Spettri"
per applicazioni

Spettri di risposta NTC08 S - amplificazione dovuta al terreno

- Dipende da

S_S - Categoria di sottosuolo

S_T - Categoria topografica

$$S = S_S \times S_T$$

Categoria	Caratteristiche della superficie topografica
T1	Superficie pianeggiante, pendii e rilievi isolati con inclinazione media $i \leq 15^\circ$
T2	Pendii con inclinazione media $i > 15^\circ$
T3	Rilievi con larghezza in cresta molto minore che alla base e inclinazione media $15^\circ \leq i \leq 30^\circ$
T4	Rilievi con larghezza in cresta molto minore che alla base e inclinazione media $i > 30^\circ$

Categoria topografica	Ubicazione dell'opera	S_T
T1	...	1.0
T2	In corrispondenza della sommità del pendio	1.2
T3	In corrispondenza della cresta del rilievo	1.2
T4	In corrispondenza della cresta del rilievo	1.4

Spettri di risposta NTC08

T_B, T_C, T_D - periodi

- T_C dipende dal suolo e da T_C^*

$$T_C = C_C \times T_C^*$$

Categoria sottosuolo	C_C
A	1.00
B	$1.10 (T_C^*)^{-0.20}$
C	$1.05 (T_C^*)^{-0.33}$
D	$1.25 (T_C^*)^{-0.50}$
E	$1.15 (T_C^*)^{-0.40}$

Vedere foglio Excel "Spettri" per applicazioni

Spettri di risposta NTC08

T_B, T_C, T_D - periodi

- T_C dipende dal suolo e da T_C^*

- T_B dipende da T_C

$$T_B = T_C / 3$$

- T_D dipende da a_g

$$T_D = 4.0 \times \frac{a_g}{g} + 1.6$$

Vedere foglio Excel "Spettri" per applicazioni

Spettri di risposta NTC 08

Esempio: località Spoleto

Vedere foglio Excel "Spettri" per applicazioni

Ad esempio, nel punto di Lat. 42.732 e Long. 12.673 sito nel comune di Spoleto (PG) si ha:

per $T_R = 475$ anni: $a_g = 0.1938$ g $F_o = 2.42$ $T_C^* = 0.32$ s

per $T_R = 50$ anni: $a_g = 0.0803$ g $F_o = 2.46$ $T_C^* = 0.28$ s

Tab. 7. Valori dei coefficienti che definiscono lo spettro di risposta elastico: accelerazioni orizzontali, terremoto con $T_R=475$ anni (SLV), Spoleto, D.M. 14/1/08

Categoria suolo	accelerazione orizzontale	S	F_o	T_B	T_C	T_D
A	0.194 g	1.00	2.42	0.107 s	0.320 s	2.375 s
B	0.194 g	1.20	2.42	0.147 s	0.442 s	2.375 s
C	0.194 g	1.42	2.42	0.163 s	0.489 s	2.375 s
D	0.194 g	1.70	2.42	0.236 s	0.707 s	2.375 s
E	0.194 g	1.48	2.42	0.193 s	0.580 s	2.375 s

Spettri di risposta NTC 08

Esempio: località Spoleto

Vedere foglio Excel "Spettri" per applicazioni

Ad esempio, nel punto di Lat. 42.732 e Long. 12.673 sito nel comune di Spoleto (PG) si ha:

per $T_R = 475$ anni: $a_g = 0.1938$ g $F_o = 2.42$ $T_C^* = 0.32$ s

per $T_R = 50$ anni: $a_g = 0.0803$ g $F_o = 2.46$ $T_C^* = 0.28$ s

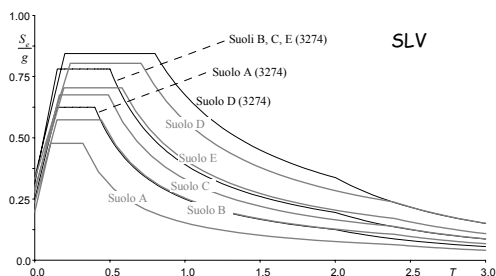
Tab. 8. Valori dei coefficienti che definiscono lo spettro di risposta elastico: accelerazioni orizzontali, terremoto con $T_R=50$ anni (SLD), Spoleto, D.M. 14/1/08

Categoria suolo	accelerazione orizzontale	S	F_o	T_B	T_C	T_D
A	0.080 g	1.00	2.46	0.093 s	0.280 s	1.921 s
B	0.080 g	1.20	2.46	0.132 s	0.397 s	1.921 s
C	0.080 g	1.50	2.46	0.149 s	0.447 s	1.921 s
D	0.080 g	1.80	2.46	0.220 s	0.661 s	1.921 s
E	0.080 g	1.60	2.46	0.179 s	0.536 s	1.921 s

Spettri di risposta NTC 08

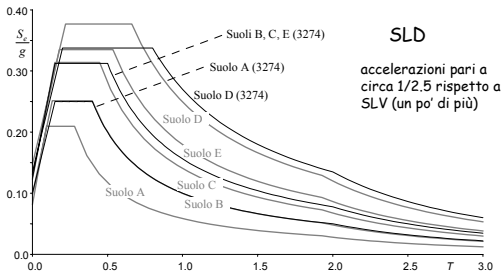
Esempio: località Spoleto

Vedere foglio Excel "Spettri" per applicazioni



Spettri di risposta NTC 08 Esempio: località Spoleto

Vedere foglio
Excel "Spettri"
per applicazioni



Spettri di risposta NTC08 accelerazioni verticali

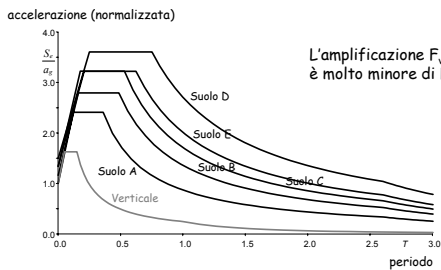
- Lo spettro ha la stessa forma, cambiano i parametri

Categoria di sottosuolo	S_s	T_B	T_C	T_D
A, B, C, D, E	1.0	0.05	0.15	1.00

$$F_v = 1,35 \cdot F_0 \cdot \left(\frac{a_g}{g} \right)^{0,5}$$

NTC08, punto 3.2.3.23.2

Spettri di risposta elastica di normativa accelerazioni orizzontali e verticali, alto periodo di ritorno



NTC08, punto 3.2.3.23.2

Comportamento dinamico elastico Schemi a più gradi di libertà

Possibili approcci per valutare la risposta elastica

Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta (istante per istante)

Analisi modale con spettro di risposta, per valutare la massima risposta

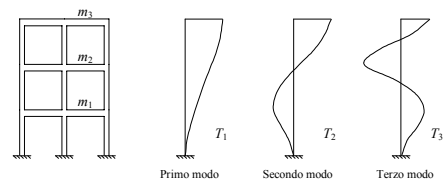
Analisi statica, per valutare in maniera approssimata la massima risposta

NTC08, punto 7.3

Modi di oscillazione libera

Telaio piano (con traversi inestensibili):

numero di modi di oscillazione libera = numero di piani

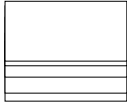


Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):
numero di modi di oscillazione libera = $3 \times$ numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):
numero di modi di oscillazione libera = $3 \times$ numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):
numero di modi di oscillazione libera = $3 \times$ numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):
numero di modi di oscillazione libera = $3 \times$ numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono accoppiati



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale
senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera è molto maggiore

Moto libero

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0$$

La soluzione, in caso di moto libero con deformata modale, è una funzione armonica

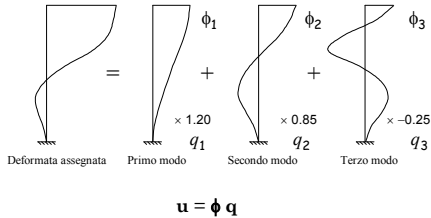
$$u_i(t) = \phi_{i,j} \cos(\omega_j t)$$

a condizione che sia $\det(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) = 0$

Da questa si ricavano le frequenze angolari ω_j e quindi i periodi T_j (autovalori) e le deformate ϕ (autovettori)

Equazione del moto

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



Equazione del moto libero

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$m \ddot{u} + k u = 0 \quad u = \phi q \quad \Rightarrow \quad M \ddot{q} + K q = 0$$

Nelle matrici M e K solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice

Equazione del moto libero con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad u = \phi q \quad \Rightarrow \quad M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = 0$$

In molti casi anche la matrice C è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate (sistemi classicamente smorzati)

Equazione del moto (risposta ad un accelerogramma)

L'equazione del moto $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m I \ddot{u}_g$

diventa $M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = -\phi^T m I \ddot{u}_g$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = (-\Gamma_j) \ddot{u}_g$$

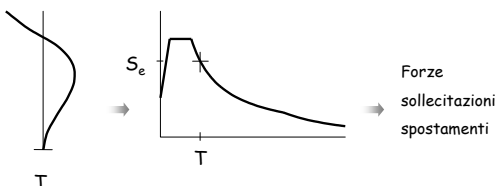
Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per Γ_j

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Coefficiente di partecipazione modale: indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante

Analisi modale con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .



Analisi modale con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi

La combinazione dei risultati può essere fatta come radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS) o come combinazione quadratica completa (CQC)

Contributo dei singoli modi

Il taglio alla base corrispondente al modo j è

$$V_{b,j} = M_j^* S_e(T_j)$$

dove

$S_e(T_j)$ è l'ordinata spettrale corrispondente al periodo T_j

M_j^* è detta massa partecipante

$$M_j^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \Gamma_j}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Considerando tutti i modi, la massa partecipante totale coincide con l'intera massa presente nella struttura

Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:

- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

Considerazioni

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma
- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo
- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

Considerazioni

Negli schemi spaziali è più probabile avere modi con periodi molto vicini tra loro:

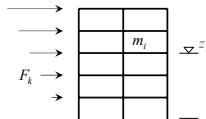
- in questo caso è opportuno usare la sovrapposizione quadratica completa (CQC)

Una buona impostazione progettuale deve mirare ad avere una struttura con impalcato rigido e con comportamento disaccoppiato (cioè minime rotazioni planimetriche)

Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k z_k \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i z_i} S_e(T_1)$$



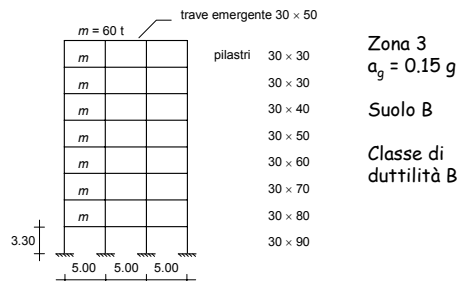
Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

$$T_1 = C_1 H^{3/4}$$

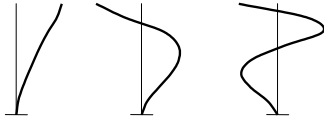
Le forze possono essere ridotte con $\lambda=0.85$ se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

Confronto analisi statica - modale

Edificio con travi emergenti



Periodi, accelerazioni spettrali,
masse partecipanti
Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.183 s	0.461 s	0.259 s
S_e	0.0484 g	0.1145 g	0.1145 g
M^*/M	70.1 %	13.7 %	5.1 %

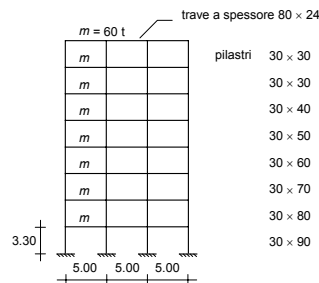
Forze statiche - modali [kN]
Edificio con travi emergenti

piano	modale			analisi
	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	40.0	-39.1	19.5	50.6
7	35.8	-14.4	-14.9	44.3
6	28.1	18.6	-22.8	38.0
5	21.7	31.3	-4.0	31.6
4	16.0	32.1	12.5	25.3
3	10.6	25.4	18.2	19.0
2	5.7	15.1	13.7	12.7
1	1.8	5.0	5.1	6.3

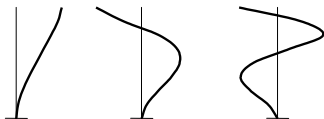
Tagli statici - modali [kN]
Edificio con travi emergenti

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	59.2	50.6	-14.5
7	92.9	94.9	2.2
6	111.1	132.9	19.6
5	127.6	164.5	28.9
4	144.8	189.9	31.1
3	161.7	208.8	29.2
2	173.7	221.5	27.5
1	178.1	227.8	27.9

Confronto analisi statica - modale
Edificio con travi a spessore



Periodi, accelerazioni spettrali,
masse partecipanti
Edificio con travi a spessore



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.738 s	0.604 s	0.328 s
S_e	0.0329 g	0.0947 g	0.1145 g
M^*/M	70.9 %	11.8 %	5.4 %

Forze statiche - modali [kN]
Edificio con travi a spessore

piano	modale			analisi
	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	26.3	-30.3	20.4	34.5
7	24.1	-12.2	-12.5	30.1
6	20.1	11.6	-24.2	25.8
5	15.9	23.6	-6.2	21.5
4	11.5	25.4	12.9	17.2
3	7.3	19.9	19.6	12.9
2	3.6	11.2	14.4	8.6
1	1.0	3.4	5.0	4.3

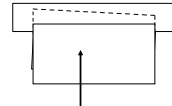
Tagli statici - modali [kN] Edificio con travi a spessore

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	45.0	34.5	-23.4
7	66.4	64.6	-2.7
6	78.7	90.4	15.0
5	89.6	112.0	25.0
4	100.0	129.2	29.2
3	112.3	142.1	26.5
2	121.9	150.7	23.6
1	125.3	155.0	23.7

Analisi statica o analisi modale?

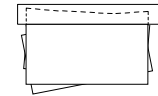
L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con forti rotazioni, non va bene

Analisi modale

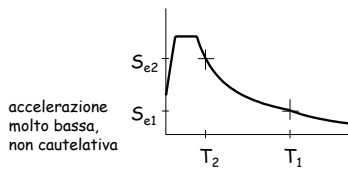


modo 1
modo 2
involuppo

Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto



Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile (o, meglio, corretta con la formula di Rayleigh)

L'uso del coefficiente riduttivo λ rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

Analisi statica o analisi modale?

La norma vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera $2.5 T_C$
- la struttura è irregolare in altezza

Commento:

Il riferimento all'irregolarità in altezza non sembra coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

Analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)