

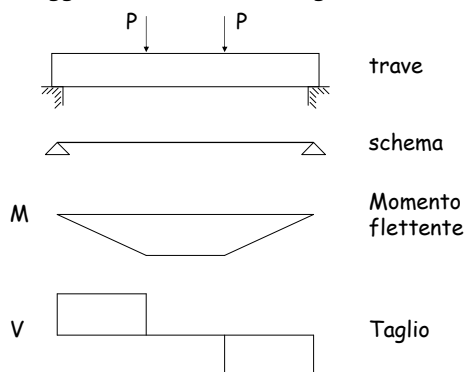
**Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.**

6 - Taglio e torsione

Spoletto  
26-28 novembre 2009  
Aurelio Ghersi

## Taglio

### Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



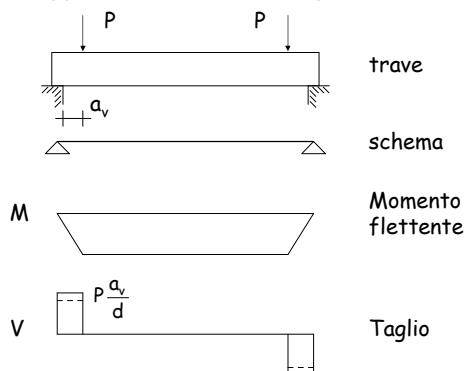
### Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza  $a_v \leq 2d$  dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto  $a_v / 2d$  [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]

### Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



### Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza  $a_v \leq 2d$  dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto  $a_v / 2d$  [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]
- In presenza di carichi distribuiti il taglio non deve essere verificato ad una distanza minore di  $d$  dalla faccia dell'appoggio [EC2, punto 6.2.1 (8)]

Diagram illustrating the structural analysis of a simply supported beam under a uniformly distributed load  $q$ .


The beam is shown with a uniformly distributed load  $q$  acting downwards. The distance between the supports is denoted by  $d$ .

The diagram includes the following components:

- trave**: The beam structure.
- schema**: The schematic representation of the beam with pin and roller supports.
- Momento flettente**: The bending moment diagram, showing a parabolic shape.
- Taglio**: The shear force diagram, showing a linear variation from  $V_{Ed}$  to zero.

isostatische

isostatische



ma questa tensione di trazione è incompatibile con l'ipotesi fatta per il materiale

Taglio:  
resistenza di una trave  
in assenza di armatura a taglio

## Verifica - tensioni ammissibili

Non è necessaria armatura a taglio se  $\tau < \tau_{c0}$

Vuol dire che:

- Non si accetta trazione dovuta alla flessione
- Si accettano modeste trazioni dovute al taglio

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria armatura a taglio è

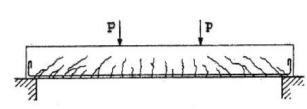
$$V_{c0} = 0.9 \tau_{c0} b d$$

Nota: si devono comunque disporre armature minime a taglio, tranne che nei solai

## Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

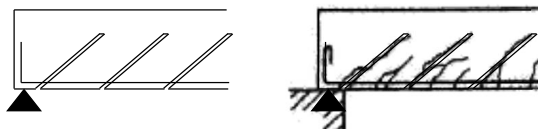
Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio



## Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio

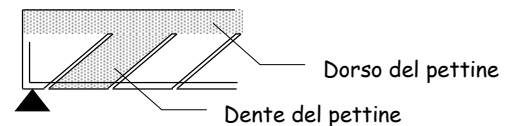


## Verifica - stato limite ultimo

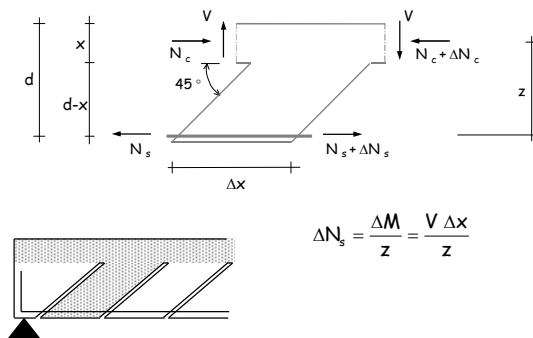
Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio

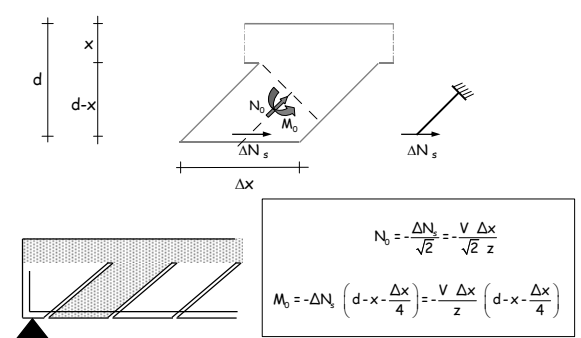
### Modello a pettine



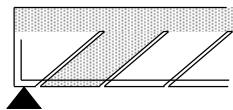
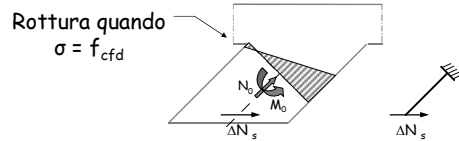
## Resistenza del dente



## Resistenza del dente



## Resistenza del dente

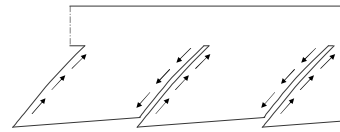


Resistenza del dente:

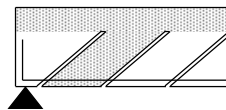
$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} b d$$

Nota:  $0.25 f_{ctd}$  è ora sostituito da un altro termine, equivalente, funzione di  $f_{ck}$

## Altri contributi alla resistenza del dente



Ingranamento degli inerti

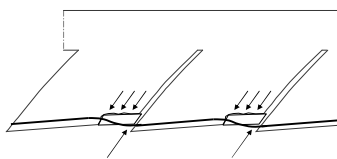


Resistenza del dente:

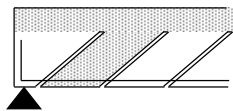
$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k b d$$

il coefficiente  $k$  è funzione dell'altezza utile  $d$  della sezione

## Altri contributi alla resistenza del dente



Effetto spinotto

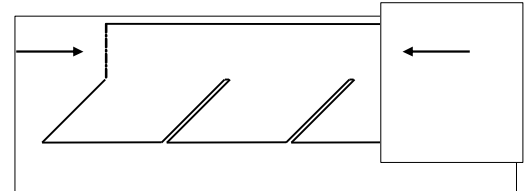


Resistenza del dente:

$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k f(\rho_l) b d$$

l'effetto spinotto dipende dalla percentuale  $\rho_l$  di armatura longitudinale

## Altri contributi alla resistenza del dente



La presenza di compressione riduce la lunghezza del dente e quindi le sollecitazioni, aumentando la resistenza a taglio

## Resistenza in assenza di armature (NTC08, punto 4.1.2.1.3.1)

$$V_{Rd} = \left[ 0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15 \sigma_{cp} \right] b d$$

$$\geq v_{min} = 0.035 \sqrt{k^3 f_{ck}} \quad \text{quando } \rho_l \text{ è molto piccolo}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0.02 f_{cd} \quad \text{positiva se compressione}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \quad d \text{ in mm}$$

$$\rho_l = \frac{A_s}{b d} \leq 0.02$$

## Resistenza in assenza di armature Esempio: solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$h = 24 \text{ cm} \\ d = 22 \text{ cm}$$

$$A_s = 2\phi 10 \text{ a travetto} \\ 3.14 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{220}} = 1.953$$

$$\rho_l = \frac{3.14}{20 \times 24} = 0.00654$$

$$\frac{\sqrt[3]{100 \times 0.00654 \times 25}}{1.5} = 1.692$$

$$0.18 \times 1.953 \times 1.692 = 0.595 > 0.035 \times \sqrt{1.953^3 \times 25} = 0.478$$

$$V_{Rd} = \left[ 0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15 \sigma_{cp} \right] b d$$

$$V_{Rd} = 0.595 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 26.18 \text{ kN}$$

### Confronto con tensioni ammissibili solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm} \quad h = 24 \text{ cm} \quad A_s = 2 \varnothing 10 \text{ a travetto} \\ d = 22 \text{ cm} \quad 3.1 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria armatura a taglio è

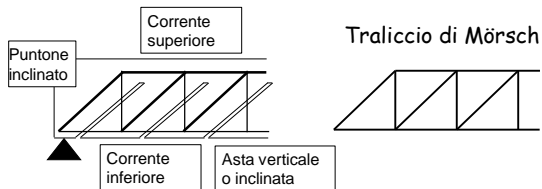
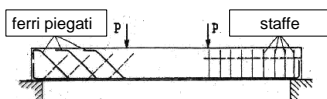
$$V_{c0} = 0.9 \tau_{c0} b d = \\ = 0.9 \times 0.60 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 23.76 \text{ kN}$$

La resistenza allo SLU è 26.18 kN, di poco maggiore, ma il carico (e quindi il taglio sollecitante), è circa 1.4 volte maggiore

Taglio:  
resistenza di una trave  
con armatura a taglio

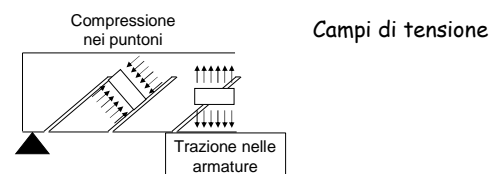
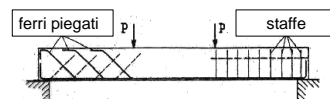
### Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:



### Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:



### Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto  $\tau \leq \tau_{c1}$

Quindi:  $V_{c1} = 0.9 \tau_{c1} b d$

La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Mörsch - schema isostatico

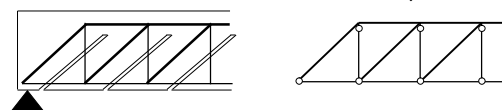
Per staffe:  $V_{st} = \frac{A_{st}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s$

### Verifica - stato limite ultimo

Sia la resistenza del calcestruzzo che quella dell'armatura vengono valutate col modello di traliccio

Attenzione: occorre tener conto del fatto che il traliccio è iperstatico

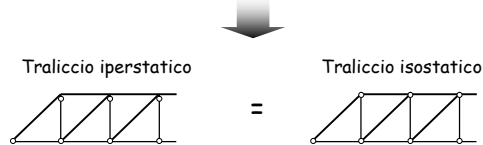
Traliccio iperstatico



## Verifica - stato limite ultimo

In campo lineare, l'iperstaticità del traliccio è irrilevante

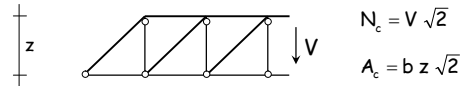
Rigidezza estensionale  $\gg$  Rigidezza flessionale



## Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza del calcestruzzo:



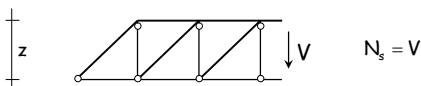
Ponendo  $\sigma_c = f'_{cd}$  si ottiene  $V_{Rd} = \frac{1}{2} f'_{cd} b z$

Notare:  $f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$   $f_{cd} = v_1 f_{cd}$   $v_1 = 0.5$

## Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase elastica

Resistenza dell'armatura:



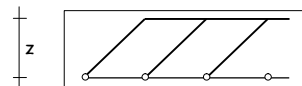
Ponendo  $\sigma_s = f_{yd}$  si ottiene  $V_{Rd} = \frac{A_{st}}{s} f_{yd} z$

## Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "normale"

Se si rompe prima il calcestruzzo: fine



$$V_{Rd2} = \frac{1}{2} v f_{cd} b z$$

Se si snerva l'armatura  
scompare l'armatura a taglio

rimane ancora il "pettine"  
con la sua resistenza

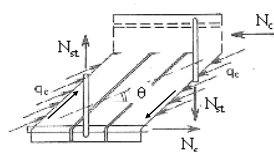
$$V_{Rd3} = V_{wd} + V_{cd} \quad \text{con} \quad V_{cd} = V_{Rd1}$$

questo modello non è più considerato dalle NTC08

## Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "di traliccio a inclinazione variabile"



Quando si snerva l'armatura  
scompare l'armatura a taglio  
ma per l'ingranamento degli  
inerti la direzione di  
compressione si inclina

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} f'_{cd} b z$$

$$V_{Rsd} = \frac{A_{st}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

## Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z \quad z = 0.9 d$$

$$f'_{cd} = 0.5 f_{cd}$$

$$\alpha_c = 1$$

in assenza di compressione

$$\alpha_c = 1 + \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}$$

per  $0 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.25$

$$\alpha_c = 1.25$$

per  $0.25 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.5$

$$\alpha_c = 2.5 \left( 1 - \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \right)$$

per  $0.5 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 1$

### Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta \quad z = 0.9 d$$

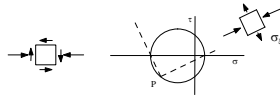
sia per  $V_{Rcd}$  che per  $V_{Rsd}$

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

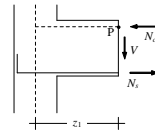
in presenza di compressione

$$\cot \theta_1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$\cot \theta_1 = \frac{\tau}{\sigma_t}$$

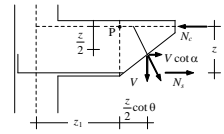


### Traslazione del diagramma del momento (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)



approccio tradizionale:

$$N_s = \frac{M(z_1)}{z}$$



equilibrio (con taglio inclinato):

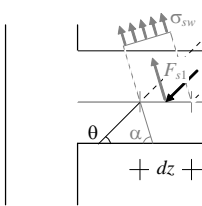
$$N_s = \frac{M(z_2)}{z} > \frac{M(z_1)}{z}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{z}{2} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

occorre aumentare l'armatura longitudinale

### Modello di campi di tensione

$$F_{s1} = \frac{A_{sw}}{s} dz \sigma_{sw}$$

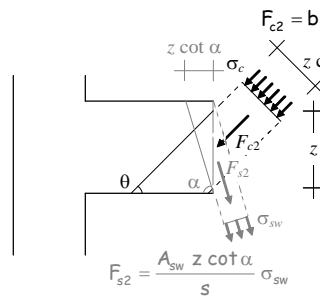


$$F_{c1} = b dz \sin \theta \sigma_c$$

Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$b \sin^2 \theta \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha \sigma_{sw}$$

### Modello di campi di tensione



Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$V = b z \sin \theta \cos \theta \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos \alpha \sigma_s$$

### Modello di campi di tensione

Dalle due relazioni

$$b \sin^2 \theta \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha \sigma_{sw}$$

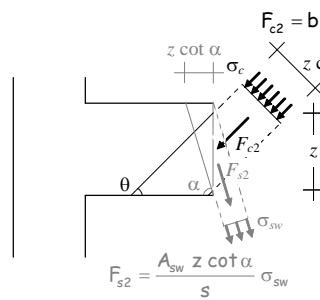
$$V = b z \sin \theta \cos \theta \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos \alpha \sigma_s$$

si ricavano le stesse espressioni viste in precedenza

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$V_{Rcd} = \frac{f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

### Modello di campi di tensione



Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale rimane una componente orizzontale (da bilanciare)

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

### Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra  $N_c$  ed  $N_s$
- Si ottiene così l'incremento di armatura tesa (traslazione del diagramma del momento)

Scuola napoletana:

- L'intera componente è assegnata ad un'apposita armatura, detta "di parete"
- Si ottiene così, in aggiunta alle staffe ( $\cot \alpha = 0$ ), l'armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V \cot \theta}{f_{yd}}$$

### Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Suggerimento:

- Posso ritenere, in accordo con la scuola milanese, che una parte (metà) della forza di trazione vada a scaricare  $N_c$  e quindi che occorra portare solo l'altra metà
- Questa metà è assegnata all'armatura "di parete"

$$A_{sl} = \frac{V \cot \theta}{2 f_{yd}}$$

- Se  $A_{sl}$  mi sembra eccessiva e ne metto di meno devo incrementare l'armatura inferiore (analogamente a traslazione diagramma momenti)

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 = 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 439.7 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 303.2 \text{ kN}$$

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rsd} = 108.1 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rsd} = 270.1 \text{ kN}$$

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della sezione è il minore tra  $V_{Rcd}$  e  $V_{Rsd}$  calcolati con  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

In questo caso è sempre  $V_{Rcd} > V_{Rsd}$

$$\text{Per } \cot \theta = 2.5 \text{ si ha } V_{Rsd} = 270.1 \text{ kN}$$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - tensioni ammissibili

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{cl} = 0.9 \tau_{cl} b d = 0.9 \times 1.83 \times 30 \times 46 \times 10^{-1} = 227.3 \text{ kN}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{st} = \frac{A_{st}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s = 6.7 \times 0.9 \times 46 \times 255 \times 10^{-3} = 70.7 \text{ kN}$$



### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - confronto TA-SLU

b = 30 cm      h = 50 cm      staffe Ø8/15 (6.7 cm<sup>2</sup>/m)  
d = 46 cm

La resistenza dell'armatura è

- 70.7 kN      per TA
- 270.1 kN      per SLU

Anche tenendo conto della differenza di carico,  
la resistenza è oltre 2.5 volte maggiore

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm      h = 50 cm      staffe Ø8/10 (10 cm<sup>2</sup>/m)  
d = 46 cm

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f_{cd}' b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f_{cd}' = 0.5 \times 14.17 = 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 439.7 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 303.2 \text{ kN}$$

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm      h = 50 cm      staffe Ø8/10 (10 cm<sup>2</sup>/m)  
d = 46 cm

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rsd} = 162.0 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rsd} = 405.0 \text{ kN}$$

### Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

b = 30 cm      h = 50 cm      staffe Ø8/10 (10 cm<sup>2</sup>/m)  
d = 46 cm

La resistenza della sezione è il minore tra  $V_{Rcd}$  e  $V_{Rsd}$

	$\cot \theta = 1$	1.5	2	2.5
$V_{Rcd}$	439.7	405.9	351.8	303.2
$V_{Rsd}$	162.0	243.0	324.0	405.0

Per  $\cot \theta = 2.1$  si ha  $V_{Rcd} = V_{Rsd} = 340.2 \text{ kN}$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

### Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:  $\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$

Occorre definire  $\cot \theta$

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per  $\cot \theta$

Ponendo  $V_{Rcd} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f_{cd}' b z = V_{Ed}$

si ottiene  $\cot \theta = \frac{\alpha_c f_{cd}' b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left( \frac{\alpha_c f_{cd}' b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} \leq 2.5$

### Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:  $\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$

Occorre definire  $\cot \theta$

2. Utilizzare il valore di  $\cot \theta$  così determinato, oppure un valore minore

Al crescere di  $\cot \theta$  si riducono le staffe necessarie, ma cresce l'armatura di parete (o longitudinale)

Consiglio di non superare  $\cot \theta = 2$

3. Calcolo l'armatura di parete o verifico l'armatura longitudinale

### Progetto dell'armatura trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad V_{Ed} = 150 \text{ kN}$$

$$c = 4 \text{ cm} \quad d = 46 \text{ cm}$$

#### 1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left( \frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 5.69$$

#### 2. Posso usare $\cot \theta = 2.5$ , ma io preferisco $\cot \theta = 2$

$$\text{Ottengo } \frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 4.62 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Userò  $\varnothing 8/20$

#### 3. Armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{f_{yd}} = 7.67 \text{ cm}^2$$

### Progetto dell'armatura trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad V_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

$$c = 4 \text{ cm} \quad d = 46 \text{ cm}$$

#### 1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left( \frac{\alpha_c f_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 1.555$$

#### 2. Userò $\cot \theta = 1.555$

$$\text{Ottengo } \frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 15.88 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Dovrei usare  $\varnothing 8/6$  (forse eccessivi)

#### 3. Armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{f_{yd}} = 15.9 \text{ cm}^2$$

### Minimi di armature nelle travi (NTC08, punto 4.1.6.1.1)

Area minima longitudinale:

$$A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.0013 b d$$

Area minima delle staffe:

$$A_{st} = 1.5 b \text{ mm}^2 / \text{m} \quad \text{può essere condizionante, in particolare per travi a spessore}$$

Inoltre: 3 staffe a metro, passo non superiore a  $0.8 d$

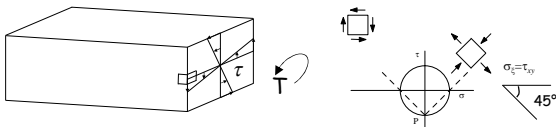
Ulteriori indicazioni (EC2):

$$\rho_w = \frac{A_{st}}{s b} \geq \rho_{w,min} = \frac{0.08 \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

versioni precedenti davano passi molto ridotti

### Torsione

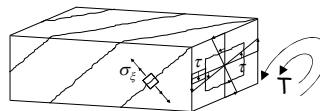
### Comportamento di una trave 1 - calcestruzzo resistente a trazione



Per bassi livelli di sollecitazioni, la torsione è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo.

Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

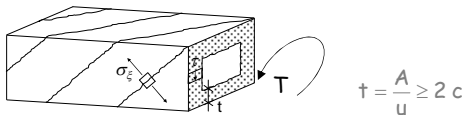
### Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione



Aumentando il momento torcente ...

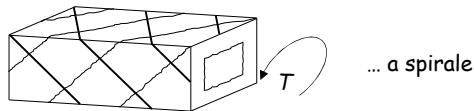
... il calcestruzzo si fessura

## Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione

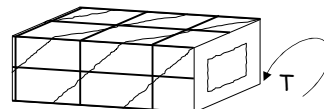


La parte interna della sezione non dà contributo ...  
... si considera una sezione cava

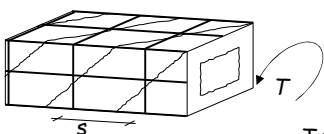
## Armatura a torsione



... con staffe e  
ferri longitudinali

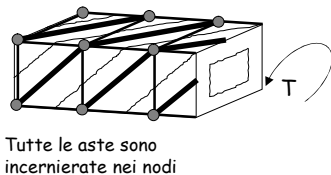


## Modello di calcolo

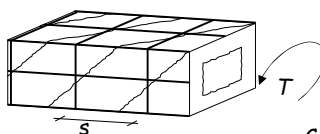


Traliccio di Rausch

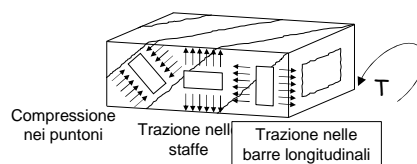
Barre longitudinali =  
correnti tesi  
Staffe = montanti tesi  
Calcestruzzo =  
diagonali compresse



## Modello di calcolo



Campi di tensione

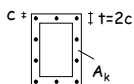


## Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata  
convenzionalmente col confronto  $\tau \leq \tau_{c1}$

Quindi:

$$T_{c1} = 2 A_k \tau_{c1}$$



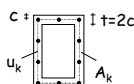
La resistenza dell'armatura viene valutata col  
traliccio di Rausch

Per le staffe:

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s$$

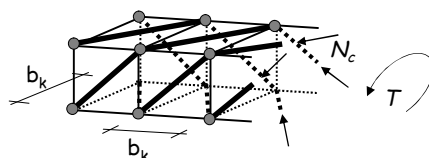
Per i ferri longitudinali:

$$T_{s,lon} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s$$



## Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$A_c = \frac{t b_k}{\sqrt{2}}$$

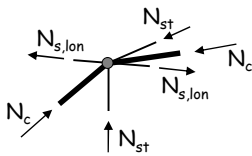
con  $t = 2c$

Ponendo  $\sigma_c = f'_{cd}$  si ottiene  $T_{Rcd} = f'_{cd} t A_k$

$$f'_{cd} = 0.5 f_{cd}$$

### Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza dell'armatura:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$N_{st} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

$$N_{s,lon} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

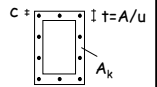
Ponendo  $\sigma_{st} = f_{yd}$  si ottiene  $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$

Ponendo  $\sigma_{s,lon} = f_{yd}$  si ottiene  $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$

### Resistenza a torsione - SLU con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo

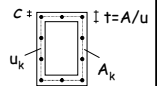
$$T_{Rcd} = A_k + f'_{cd}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe:  $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$

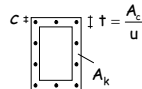
Ferri longitudinali:  $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$



### Resistenza a torsione - SLU con puntoni ad inclinazione variabile (NTC08, 4.1.2.1.4)

Resistenza del calcestruzzo

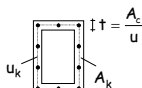
$$T_{Rcd} = 2 A_k + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe:  $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$

Ferri longitudinali:  $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$



Per effetto dell'ingranamento degli inerti i puntoni di calcestruzzo si inclinano ( $0.4 \leq \cot \theta \leq 2.5$ )

### Resistenza a torsione trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$   $h = 50 \text{ cm}$   $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$   
 $c = 4 \text{ cm}$   $d = 46 \text{ cm}$   $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

$t = \frac{30 \times 50}{2(30 + 50)} = 9.38 \text{ cm}$   $A_k = (30 - 9.38) \times (50 - 9.38) = 838 \text{ cm}^2$   
 $f'_{cd} = 7.08 \text{ MPa}$

La resistenza della trave a torsione è

$$T_{Rcd} = 2 A_k + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rcd} = 55.7 \text{ kN m}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rcd} = 38.4 \text{ kN m}$

### Resistenza a torsione trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$   $h = 50 \text{ cm}$   $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$   
 $c = 4 \text{ cm}$   $d = 46 \text{ cm}$   $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza dell'armatura è

Staffe:  $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$

$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rsd} = 21.8 \text{ kN m}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rsd} = 54.5 \text{ kN m}$

Ferri longitudinali:  $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$

$u_k = 122.5 \text{ cm}$   $\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rld} = 65.9 \text{ kN m}$

$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rld} = 26.3 \text{ kN m}$

### Resistenza a torsione trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$   $h = 50 \text{ cm}$   $A_{s,lon} = 8\text{Ø}14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$   
 $c = 4 \text{ cm}$   $d = 46 \text{ cm}$   $\text{staffe } \text{Ø}8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza della sezione è il minore tra  $T_{Rcd}$   $T_{Rsd}$   $T_{Rld}$

	$\cot \theta = 1$	1.5	2	2.5
$T_{Rcd}$	55.7	51.4	44.6	38.4
$T_{Rsd}$	21.8	32.7	43.6	54.5
$T_{Rld}$	65.9	43.9	32.9	26.3

Si ha  $T_{Rsd} = T_{Rld}$  per  $\cot \theta = \sqrt{\frac{A_{s,lon}/u_k}{A_{st}/s}} = 1.736$

Per tale valore  $T_{Rsd} = T_{Rld} = 37.8 \text{ kNm}$   
 $T_{Rcd} = 48.2 \text{ kNm}$

### Resistenza a torsione trave emergente - tensioni ammissibili

b = 30 cm      h = 50 cm       $A_{s,lon} = 8\varnothing 14$  (12.3 cm<sup>2</sup>)  
c = 4 cm      d = 46 cm      staffe  $\varnothing 8/15$  (3.33 cm<sup>2</sup>/m)

La resistenza della trave a torsione è       $t = 2c = 8$  cm

$$T_{cl} = 2 A_k t \tau_{cl} =$$

$$= 2 \times (22 \times 42) \times 8 \times 1.83 \times 10^{-3} = 27.1 \text{ kNm}$$

La resistenza dell'armatura è

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s =$$

$$= 2 \times (22 \times 42) \times 3.4 \times 255 \times 10^{-5} = 16 \text{ kNm}$$

$$T_{s,lon} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s$$

$$= 2 \times (22 \times 42) \times 0.096 \times 255 \times 10^{-3} = 45 \text{ kNm}$$

### Resistenza a torsione trave emergente - confronto SLU-TA

Tensioni ammissibili:

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s = 16 \text{ kNm}$$

Stato limite ultimo ( $\cot \theta = 1.736$ ):

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta = 37.8 \text{ kNm}$$

Anche se i carichi allo SLU sono circa 1.4 volte maggiori, la resistenza è notevolmente maggiore (nell'esempio circa 1.7 volte)

### Dimensionamento della sezione allo stato limite ultimo

1. Scegliere un valore per  $\cot \theta$  ed ipotizzare un valore per  $t$  (almeno pari a 2 c)

2. Invertendo l'espressione di  $T_{Rcd}$  calcolare  $A_k$

$$A_k = \frac{T_{Ed}}{2 t f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}}$$

3. Definire una sezione  $b \times h$  che garantisca  $A_k$  e calcolare  $t$

$$t = \frac{A}{u} \geq 2c$$

4. Ricalcolare  $A_k$  e controllare che vada bene

$$A_k = (b - t)(h - t)$$

### Dimensionamento della sezione esempio

Dati:  $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

1. Assumo  $\cot \theta = 2$  e  $t = 10$  cm

$$2. A_k = \frac{T_{Ed}}{2 t f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{26 \times 10^3}{2 \times 10 \times 7.08 \times \frac{2}{1 + 2^2}} = 459 \text{ cm}^2$$

3. Potrei usare una sezione  $30 \times 40$  che (per  $t = 10$  cm) ha  $A_k = 600 \text{ cm}^2$   
Preferisco  $30 \times 50$        $t = \frac{1500}{160} = 9.38 \text{ cm}$

$$4. A_k = (30 - 9.38)(50 - 9.38) = 838 \text{ cm}^2$$

va bene

### Progetto di staffe e barre longitudinali allo stato limite ultimo

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per  $\cot \theta$

Ponendo       $T_{Rcd} = 2 A_k t f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = T_{Ed}$

si ottiene       $\cot \theta = \frac{A_k t f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left( \frac{A_k t f'_{cd}}{T_{Ed}} \right)^2 - 1} \leq 2.5$

2. Utilizzare il valore di  $\cot \theta$  così determinato, oppure un valore minore, per calcolare staffe e barre longitudinali

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} \cot \theta} \quad A_{s,lon} = \frac{T_{Ed} u_k \cot \theta}{2 A_k f_{yd}}$$

3. Distribuire le barre longitudinali in proporzione ai lati

### Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati:  $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione  $30 \times 50$

$$1. \cot \theta = \frac{A_k t f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left( \frac{A_k t f'_{cd}}{T_{Ed}} \right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{838 \times 9.38 \times 7.08}{26 \times 10^3} + \sqrt{(2.14)^2 - 1} = 4.03$$

2. Si può usare anche  $\cot \theta = 2.5$ ; scelgo  $\cot \theta = 2$

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{26 \times 10^3}{2 \times 838 \times 391.3 \times 2} = 1.98 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \varnothing 8/25$$

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 122.5 \times 2}{2 \times 838 \times 391.3} \times 10^3 = 9.71 \text{ cm}^2$$

### Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati:  $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione  $30 \times 50$

Se però si decide di usare  $\varnothing 8/20 = 2.5 \text{ cm}^2/\text{m}$   
questo corrisponde a

$$\cot \theta = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} A_{st} / s} = 1.586$$

L'armatura longitudinale necessaria è

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 122.5 \times 1.586}{2 \times 838 \times 391.3} \times 10^3 = 7.70 \text{ cm}^2$$

### Torsione e taglio

Calcestruzzo:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rcd}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rcd}} \leq 1$$

Staffe:

- si progettano separatamente, per la torsione e per il taglio e si sommano.
- l'angolo  $\theta$  deve essere uguale per la torsione e per il taglio.