

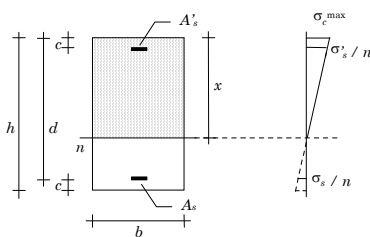
Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

5 - Flessione composta

Spoletto
26-28 novembre 2009
Aurelio Ghersi

**Verifica di sezioni
soggette a flessione composta**

Verifica - tensioni ammissibili



Dati:
Geometria della sezione
Armature
Coppia M-N

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili

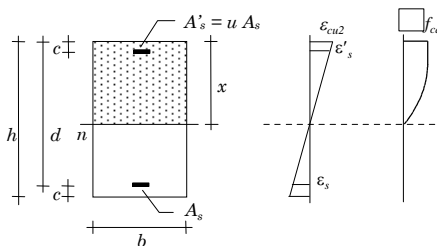
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se N è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se N è di compressione)

Imporre la condizione $I_n = e_n S_n$ se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo (equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

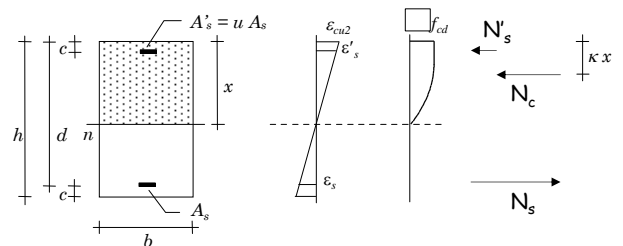
Verifica - stato limite ultimo



Dati:
Geometria della sezione
Armature
Coppia M_{Ed} - N_{Ed}

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Momento resistente M_{Rd}
corrispondente a N_{Ed}

Verifica - stato limite ultimo



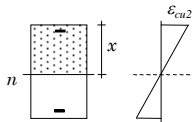
Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$
(equilibrio alla traslazione)

E poi calcolare M_{Rd} , con equilibrio alla rotazione

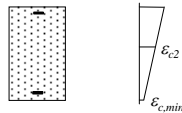
Verifica - stato limite ultimo

Con riferimento ai diagrammi di deformazioni, avendo posto un limite solo alla deformazione del calcestruzzo vi sono solo due possibilità:

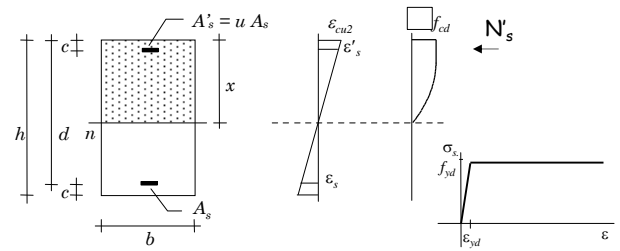
Sezione parzializzata



Sezione tutta compressa

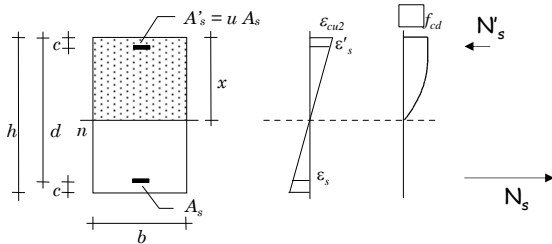


Risultante delle tensioni, armatura compressa (sezione parzializzata)



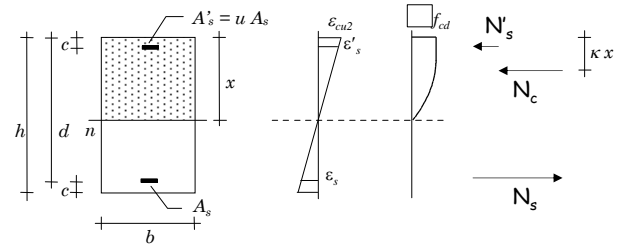
$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu2} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$$

Risultante delle tensioni, armatura tesa (sezione parzializzata)



$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \varepsilon_{cu2} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$$

Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione parzializzata)



$$N_c = \beta b x f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Verifica - stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

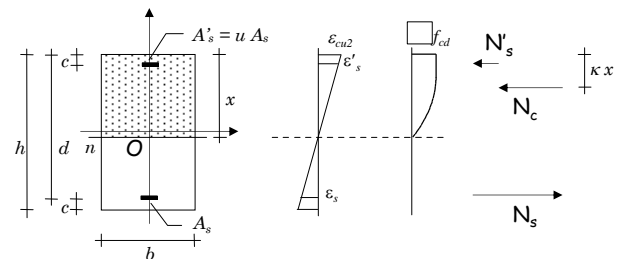
Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} \quad N_{Ed} \text{ positivo se trazione}$$

altrimenti si può risolvere per tentativi l'equazione:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

Momento resistente

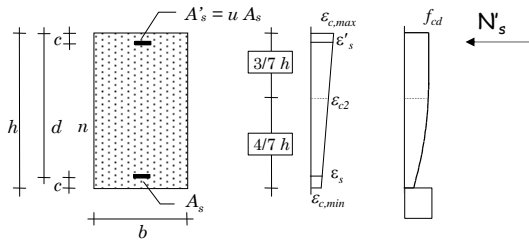


Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

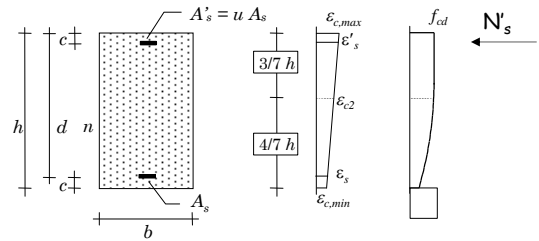
per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Risultante delle tensioni, armatura superiore (sezione tutta compressa)



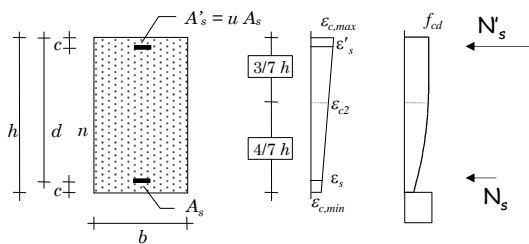
$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{c2} \left[\frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right] \quad \text{dove } \eta_{\min} = \frac{\varepsilon_{c,\min}}{\varepsilon_{c2}}$$

Risultante delle tensioni, armatura superiore (sezione tutta compressa)



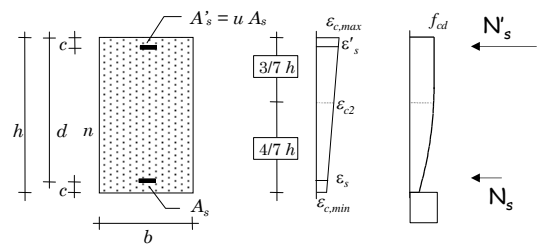
$$\begin{aligned} \text{noto } \varepsilon'_s &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{aligned}$$

Risultante delle tensioni, armatura inferiore (sezione tutta compressa)



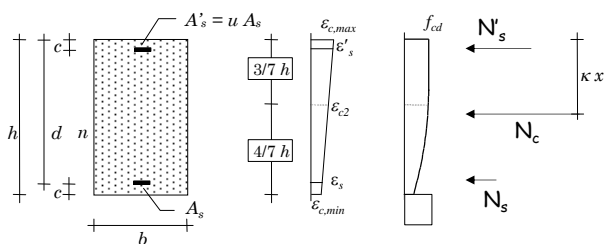
$$\varepsilon_s = \varepsilon_{c2} \left[\frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right] \quad \text{dove } \eta_{\min} = \frac{\varepsilon_{c,\min}}{\varepsilon_{c2}}$$

Risultante delle tensioni, armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\begin{aligned} \text{noto } \varepsilon_s &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s \end{aligned}$$

Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione tutta compressa)



$$N_c = \beta \cdot b \times f_{cd}$$

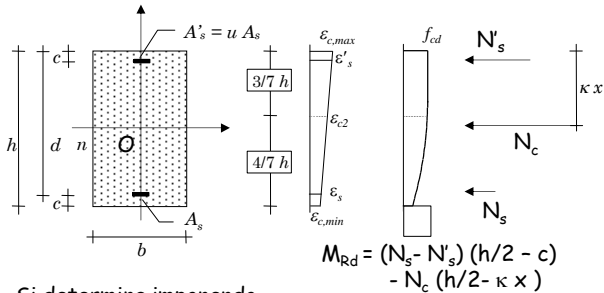
In questo caso β dipende da η_{\min}

$$\text{per sezione rettangolare: } \beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{\min})$$

Valori di β per sezione rettangolare

η_{\min}	β
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

Momento resistente



Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare:

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{min})^2}$$

Valori di β e κ per sezione rettangolare

η_{min}	β	κ
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

Esempio 1

sezione rettangolare tensoinflessa

sezione 30x60

$N_{Ed} = 200 \text{ kN}$

$A_{s, sup} = 6 \text{ cm}^2$

$M_{Ed} = 80 \text{ kNm}$

$A_{s, inf} = 10 \text{ cm}^2$



Poiché N è di trazione la sezione è parzializzata

Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = -1.26 \text{ cm}$$

ma questo valore non è accettabile (è negativo)

Procedendo per tentativi si trova $x = 4.40 \text{ cm}$

$N_c = -151.4 \text{ kN}$ $N'_s = -39.9 \text{ kN}$ $N_s = 391.3 \text{ kN}$

$M_{Rd} = 154.8 \text{ kNm}$ la sezione è verificata

Esempio 2

sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$N_{Ed} = -1000 \text{ kN}$

$A_{s, sup} = 6 \text{ cm}^2$

$M_{Ed} = 190 \text{ kNm}$

$A_{s, inf} = 10 \text{ cm}^2$



Poiché N è di compressione occorre controllare se la sezione è parzializzata

Se $x = 60 \text{ cm}$ si ha

$N_c = -2066 \text{ kN}$ $N'_s = -234.8 \text{ kN}$ $N_s = -49.0 \text{ kN}$

$N = -2349.8 \text{ kN}$

Poiché N_{Ed} è minore (in valore assoluto) di tale valore la sezione è parzializzata

Esempio 2

sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$N_{Ed} = -1000 \text{ kN}$

$A_{s, sup} = 6 \text{ cm}^2$

$M_{Ed} = 190 \text{ kNm}$

$A_{s, inf} = 10 \text{ cm}^2$



La sezione è parzializzata

Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = 33.59 \text{ cm}$$

Per tale valore le armature sono in effetti entrambe snervate

Si ha quindi $x = 33.59 \text{ cm}$

$N_c = -1156.5 \text{ kN}$ $N'_s = -234.8 \text{ kN}$ $N_s = 391.3 \text{ kN}$

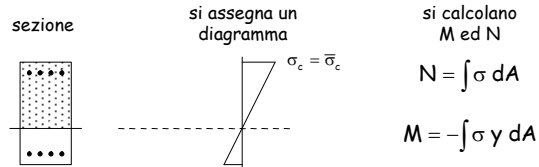
$M_{Rd} = 348.1 \text{ kNm}$ la sezione è verificata

Domini M-N
per flessione composta retta

Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

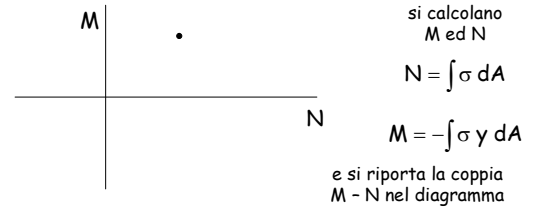
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

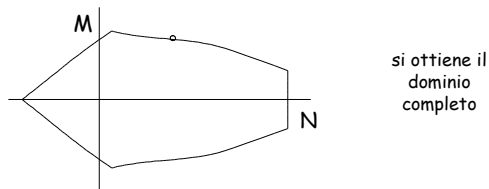
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

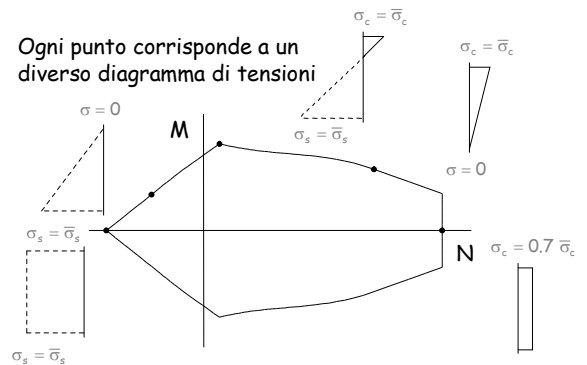
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui σ_{\max} è uguale a $\bar{\sigma}$

Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



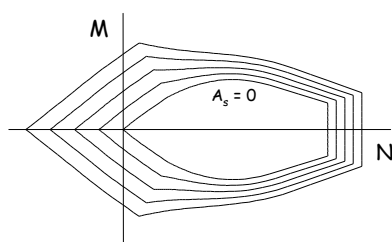
Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



Domini di resistenza - tensioni ammissibili

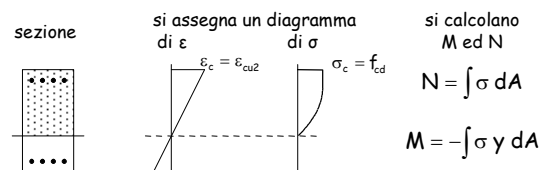
Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a ϵ_{\lim}

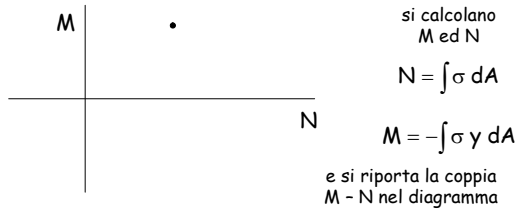
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a $\bar{\epsilon}_{cu}$

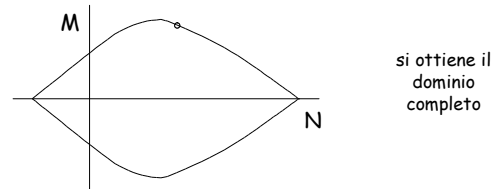
Per ricavare una coppia M-N del dominio



Domini di resistenza - stato limite ultimo

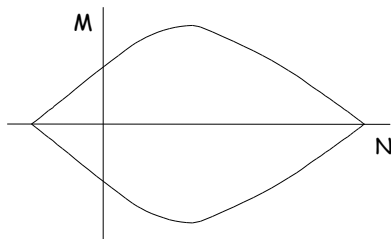
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ϵ_{\max} è uguale a $\bar{\epsilon}_{cu}$

Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...

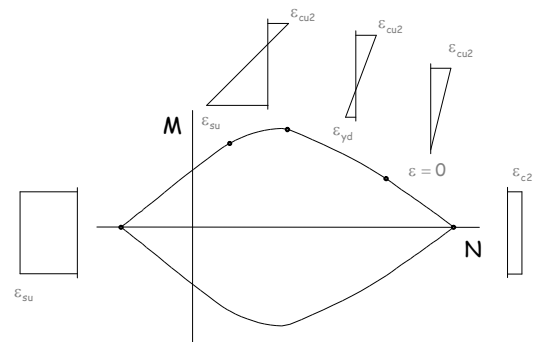


Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di deformazioni

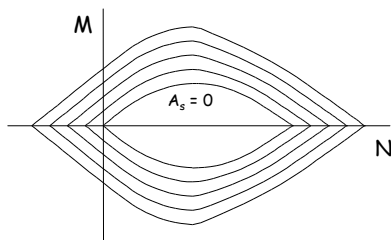


Domini di resistenza - stato limite ultimo



Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

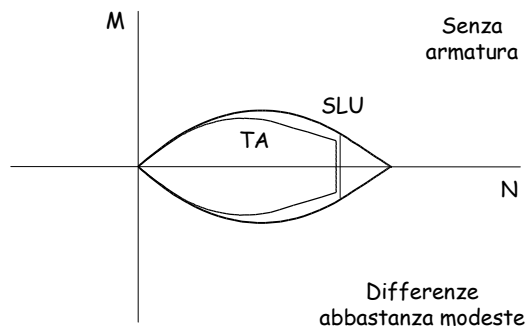


Domini: confronto tra TA e SLU

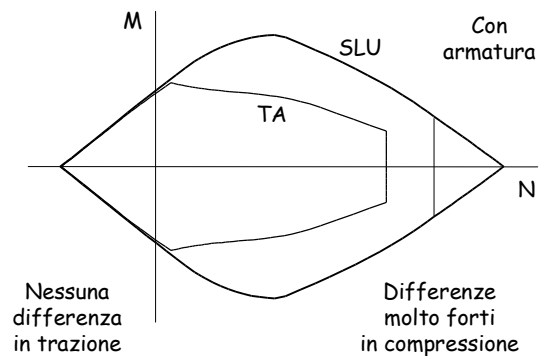
Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (circa 1.4 volte) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio x 1.4)

Domini: confronto tra TA e SLU



Domini: confronto tra TA e SLU

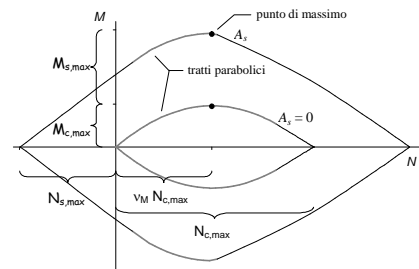


Progetto e verifica allo SLU con i domini M-N

sezioni rettangolari, $A_s = A'_s$

Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0 \quad x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \approx 0.60 h$$

Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$N = \frac{289}{584} b h f_{cd} \approx 0.48$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} + A_s f_{yd} (h - 2c) \approx 0.12$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0 \quad x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \approx 0.60 h$$

Per questo valore di x si ha

Dominio M-N allo SLU

Nel punto di massimo

$$N = v_M N_{c,max}$$

$$N_{c,max} = b h f_{cd}$$

$$v_M \cong 0.48$$

$$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$

$$N = \frac{289}{584} b h f_{cd} \cong 0.48$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} + A_s f_{yd} (h - 2c) \cong 0.12$$

Inoltre:
contributo
dell'armatura

$$M = M_{c,max} + M_{s,max}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd}$$

Infine:
massimo sforzo
normale di trazione

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$$

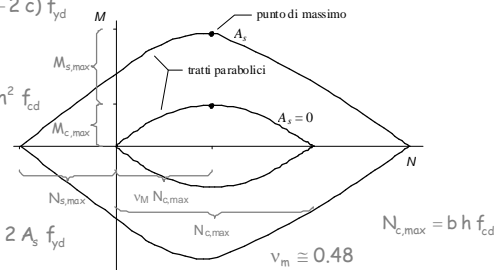
Dominio M-N allo SLU

$$M_{s,max} =$$

$$= A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$M_{c,max} =$$

$$\cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$



Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,max} = b h f_{cd}$	$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$	$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd}$

Formulazione analitica

Momento resistente M_{Rd} in funzione di N_{Rd} :

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$\text{con } m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$$

Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

$$\text{con } m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$$

Formule alternative

– per $N_{Ed} < 0$ (tensoflessione) $M_{Rd} = M_{s,max} \left(1 + \frac{N_{Ed}}{N_{s,max}} \right)$

– per $0 < N_{Ed} < 0.48 N_{c,Rd}$

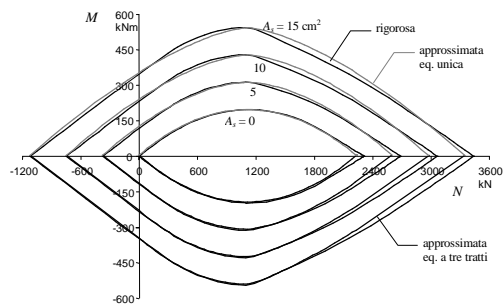
$$M_{Rd} = M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max}} \right)^2 \right] + M_{s,max}$$

– per $N_{Ed} > 0.48 N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left(\frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^n \right]$$

$$\text{con } n = 1 + \left(\frac{0.48 N_{c,max}}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^2$$

Confronto



Esempio - verifica a pressoflessione

Dati geometrici

Sezione 40x70

$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$

Materiale

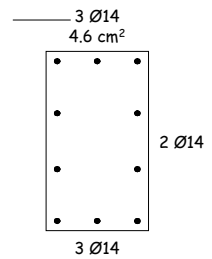
Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

Sollecitazioni

$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$



Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,max} = b h f_{cd} = 0.40 \times 0.70 \times 14.2 \times 10^3 = 3976 \text{ kN}$$

$$v_M N_{c,Rd} = 0.486 \times 3976 = 1932 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 14.2 \times 10^3$$

$$M_{c,max} = 338.4 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 391 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,max} = 361.2 \text{ kN}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 391 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,max} = 112.0 \text{ kNm}$$

Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} = 1 + \frac{1932}{1932 + 361.2} = 1.842$$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m$$

$$= (338.4 + 112.0) \left[1 - \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right]^{1.842}$$

$$= 408.5 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} < M_{Rd}$$

Sezione verificata

Esempio - verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.842$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{400}{338.4 + 112.0} + \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} =$$

$$= 0.888 + 0.093 = 0.981 \leq 1$$

Sezione verificata

Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{\text{Ed,red}} = M_{\text{Ed}} - M_{\text{c,max}} \left[1 - \left(\frac{N_{\text{Ed}} - v_M N_{\text{c,max}}}{v_M N_{\text{c,max}}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi $A_s = \frac{M_{Ed,red}}{z f_{yd}}$

z è il braccio della coppia interna costituita dalle armature $z = h - 2c \cong 0.9 d$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per $0 \leq N_{Ed} \leq v_M N_{c,max}$

Esempio - progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$$
$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed,red} = 400 - 338.4 \left[1 - \left(\frac{1300 - 1932}{1932} \right)^2 \right] = 97.8 \text{ kNm}$$

Armatura necessaria:

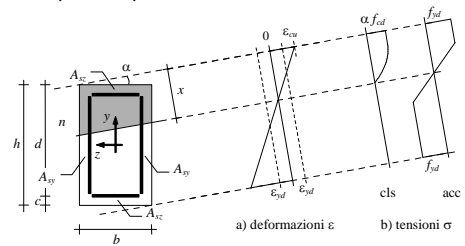
$$A_s = \frac{97.8}{0.9 \times 0.66 \times 391} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

Domini M-N
per flessione composta deviata

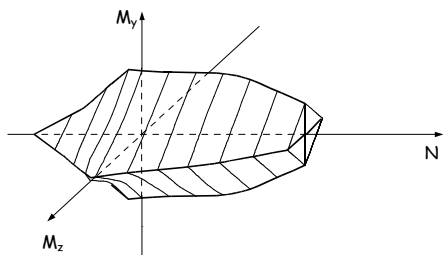
Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y - M_z - N

- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro

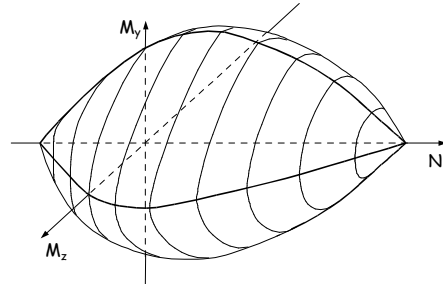


Dominio alle TA

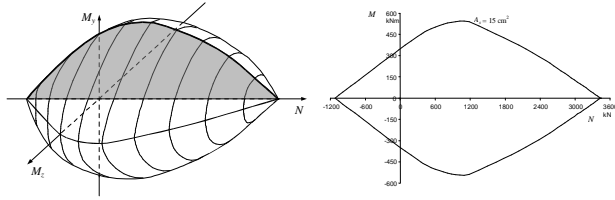


Notare la sezione trasversale:
la presenza contemporanea di M_y e M_z è molto penalizzante

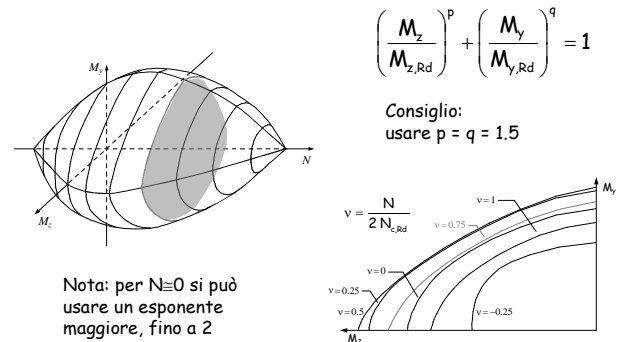
Dominio allo SLU



Dominio allo SLU



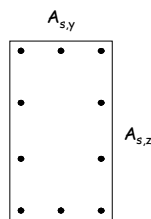
Dominio allo SLU



Considerazioni

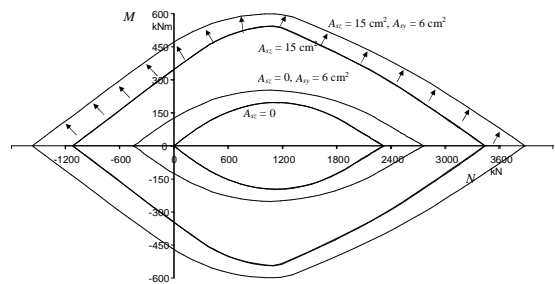
Nel calcolare il momento resistente $M_{Rd,y}$ si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{sz,max} + M_{sy,max}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)^m \right]$$

con $m = 1 + \left(\frac{v_M N_{c,max} + N_{sy,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)$

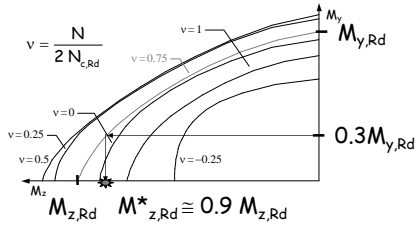
Valori base per dominio M-N includendo l'armatura "di parete"

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$v_M N_{c,max} = \frac{289}{594} b h f_{cd}$	$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$ $N_{s,max} = 2 (A_s + A_{s,p}) f_{yd}$
M	$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd}$	$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd}$ $M_{s,max} = (A_s + 0.4 A_{s,p}) (h - 2c) f_{yd}$

E' possibile usare le stesse formule modificando $N_{s,max}$ e $M_{s,max}$

Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni,
e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata