

Corso di aggiornamento
Progettazione strutturale e
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

Progetto di elementi strutturali in c.a.

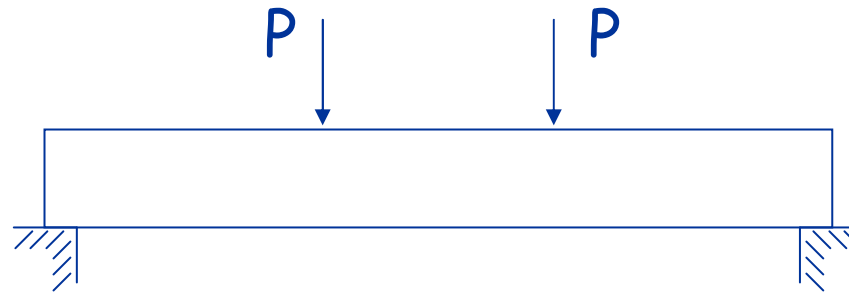
6 - Taglio e torsione

Spoleto
30 settembre - 2 ottobre 2010

Aurelio Gheresi

Taglio

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



trave



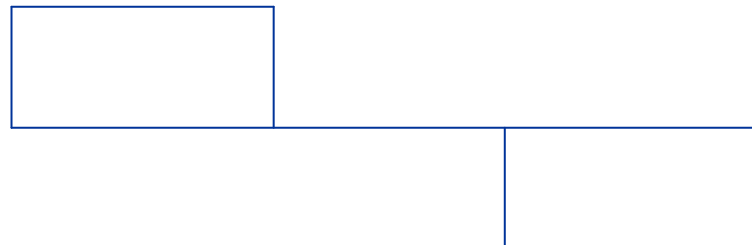
schema

M



Momento
flettente

V



Taglio

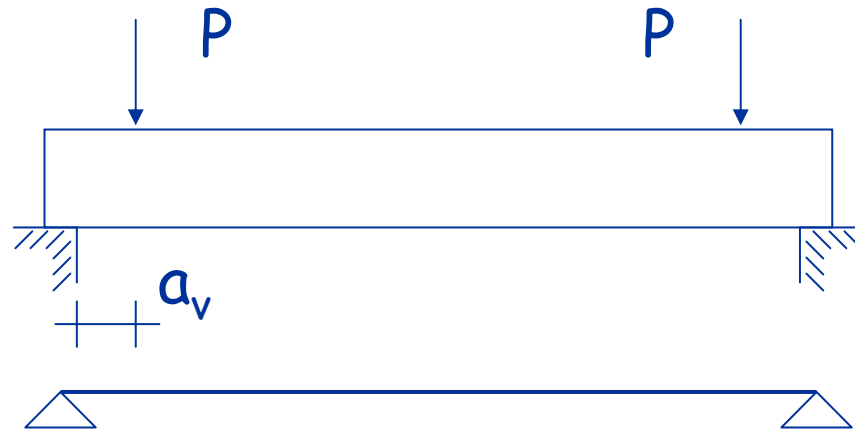
Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2 d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2 d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]

Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



trave

schema

M



Momento
flettente

V



Taglio

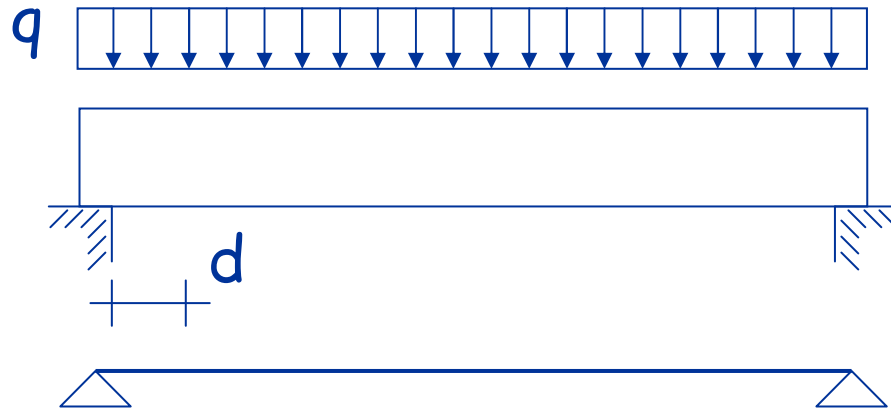
Meccanismi di resistenza a taglio

- Il modello di trave vale solo quando si è lontani da azioni concentrate (e quindi dagli appoggi)
- In prossimità degli appoggi si ha un trasferimento diretto delle forze, con un "comportamento ad arco"

Indicazioni di normativa:

- L'effetto di carichi applicati ad una distanza $a_v \leq 2d$ dall'appoggio può essere ridotto nel rapporto $a_v / 2d$ [NTC08, punto 4.1.2.1.3.3]
- In presenza di carichi distribuiti il taglio non deve essere verificato ad una distanza minore di d dalla faccia dell'appoggio [EC2, punto 6.2.1 (8)]

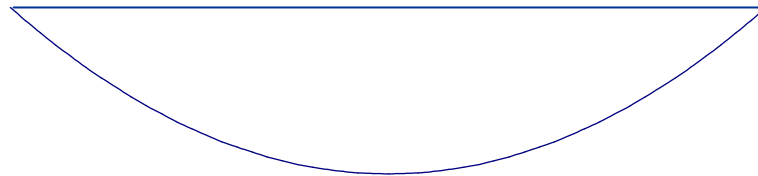
Comportamento di una trave soggetta a flessione e taglio



trave

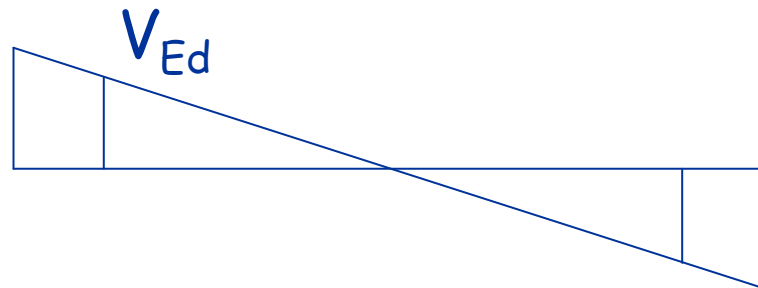
schema

M



Momento
flettente

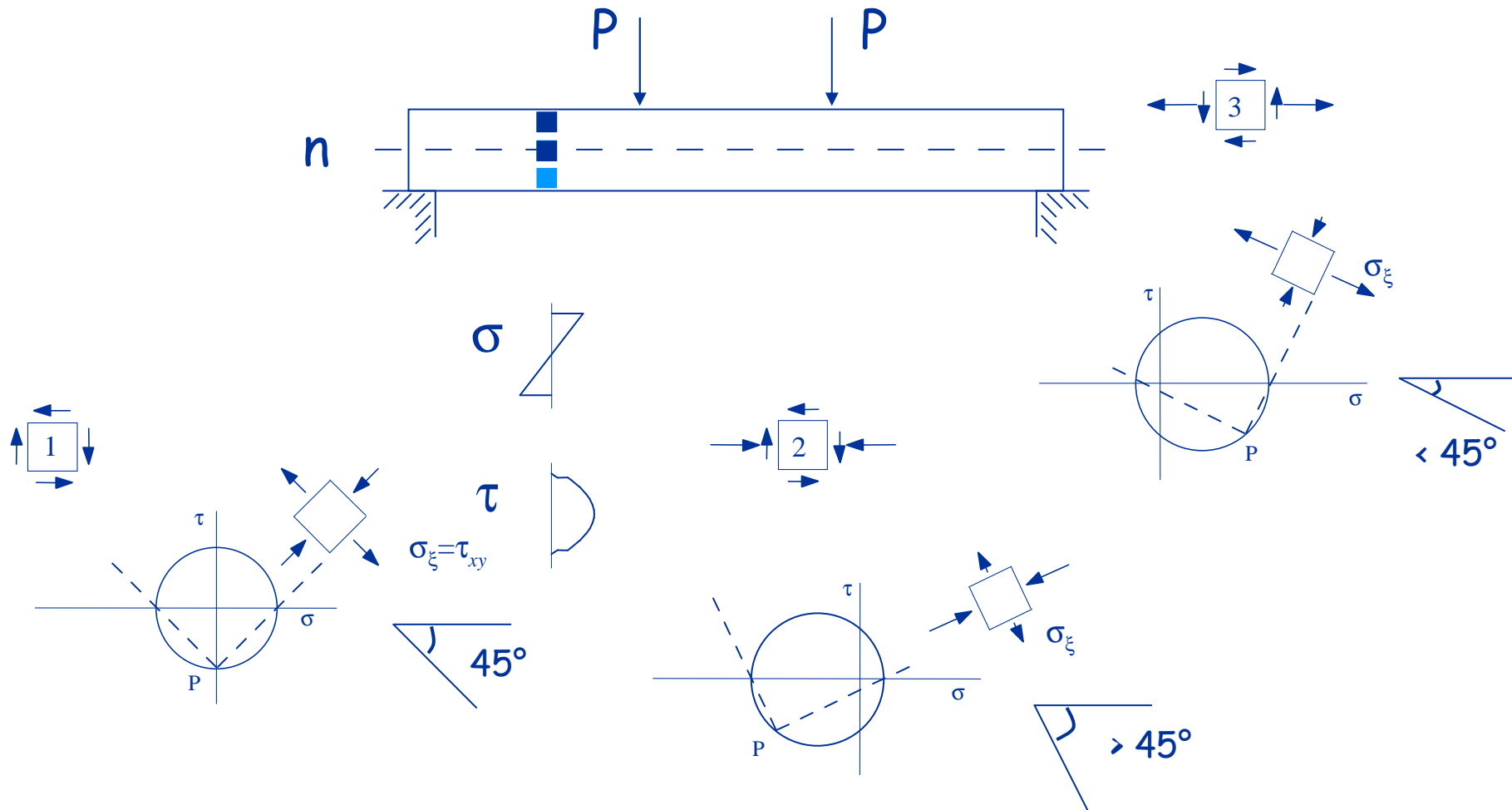
V



Taglio

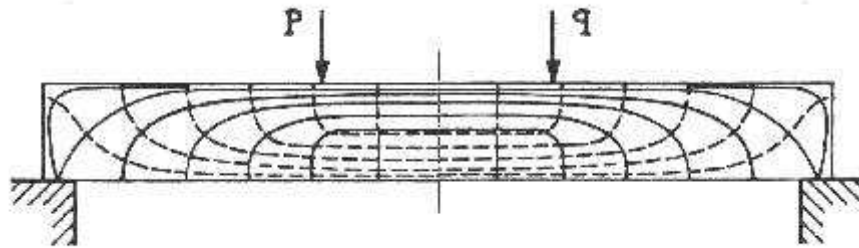
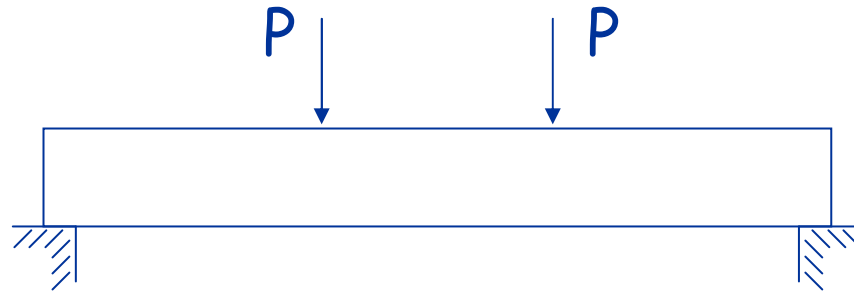
Comportamento di una trave

1 - calcestruzzo resistente a trazione



Comportamento di una trave

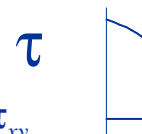
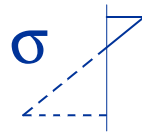
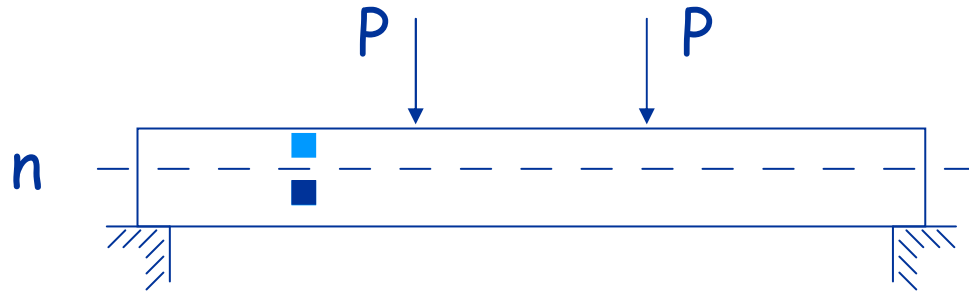
1 - calcestruzzo resistente a trazione



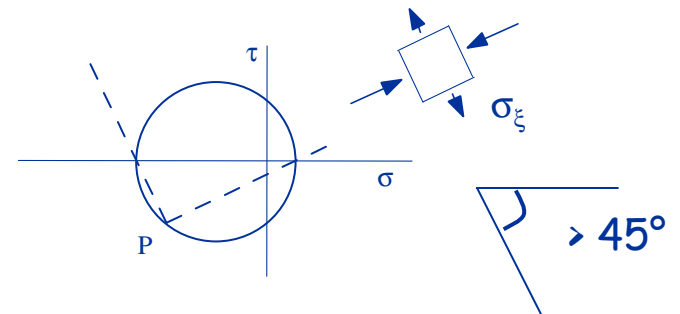
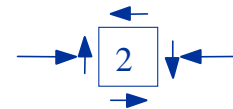
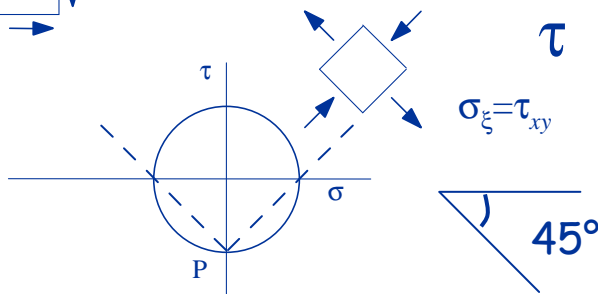
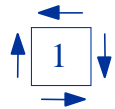
isostatiche

Comportamento di una trave

2 - calcestruzzo non resistente a trazione

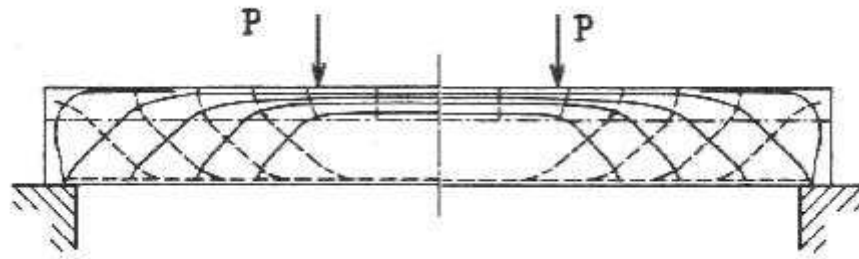
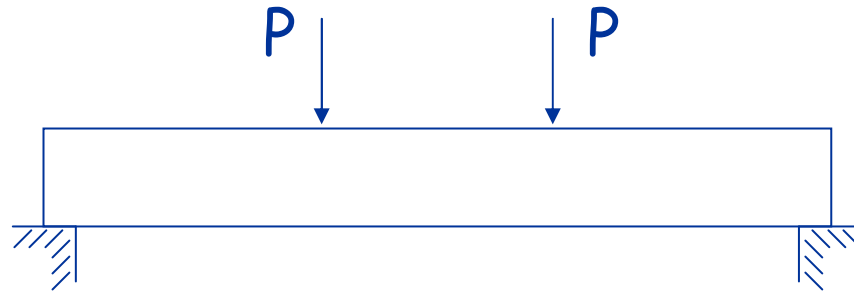


$$\tau_{\max} = \frac{V}{0.9 b d}$$

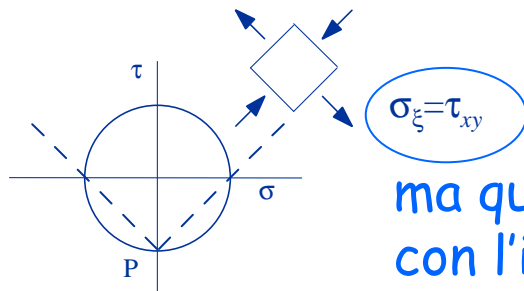


Comportamento di una trave

2 - calcestruzzo non resistente a trazione



isostatiche



ma questa tensione di trazione è incompatibile
con l'ipotesi fatta per il materiale

Taglio:
resistenza di una trave
in assenza di armatura a taglio

Verifica - tensioni ammissibili

Non è necessaria armatura a taglio se $\tau < \tau_{c0}$

Vuol dire che:

- Non si accetta trazione dovuta alla flessione
- Si accettano modeste trazioni dovute al taglio

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria armatura a taglio è

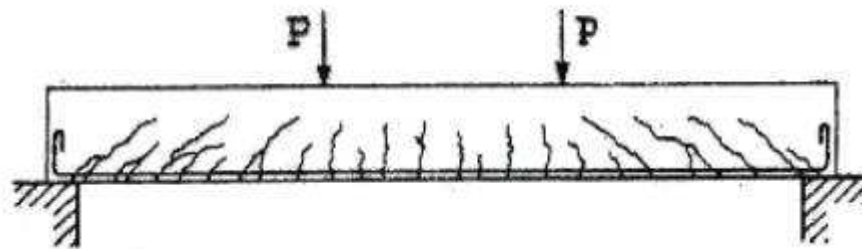
$$V_{c0} = 0.9 \tau_{c0} b d$$

Nota: si devono comunque disporre armature minime a taglio, tranne che nei solai

Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza in assenza di armature a taglio

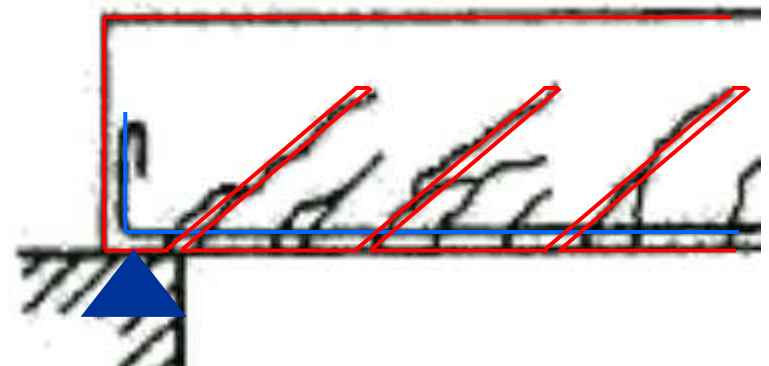
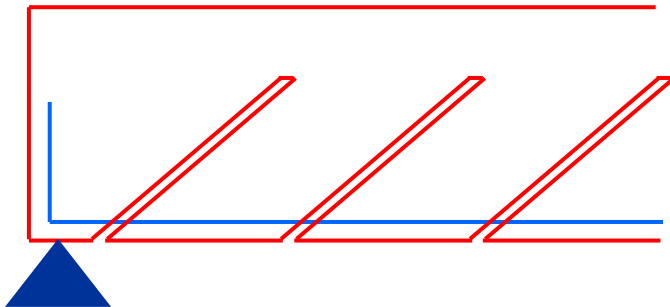
Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio in una trave priva di armature a taglio



Verifica - stato limite ultimo

Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio

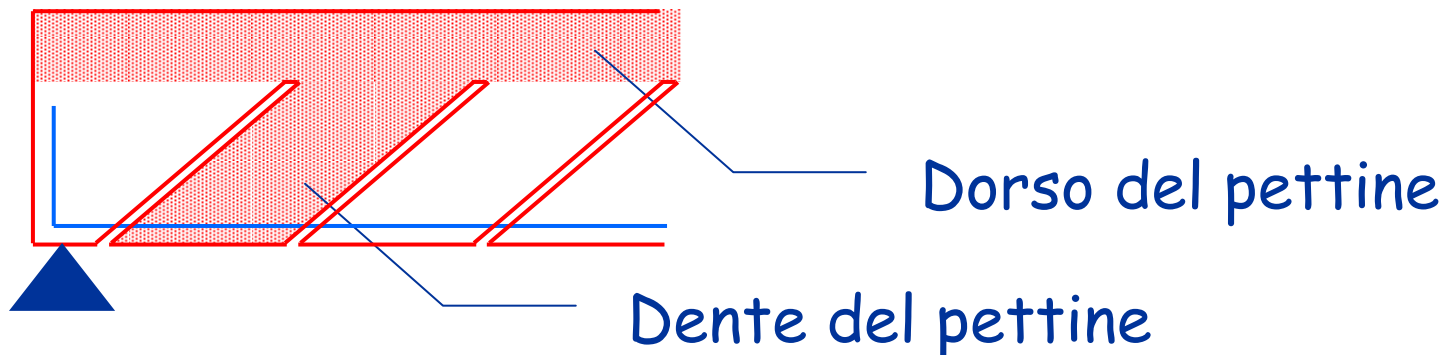


Verifica - stato limite ultimo

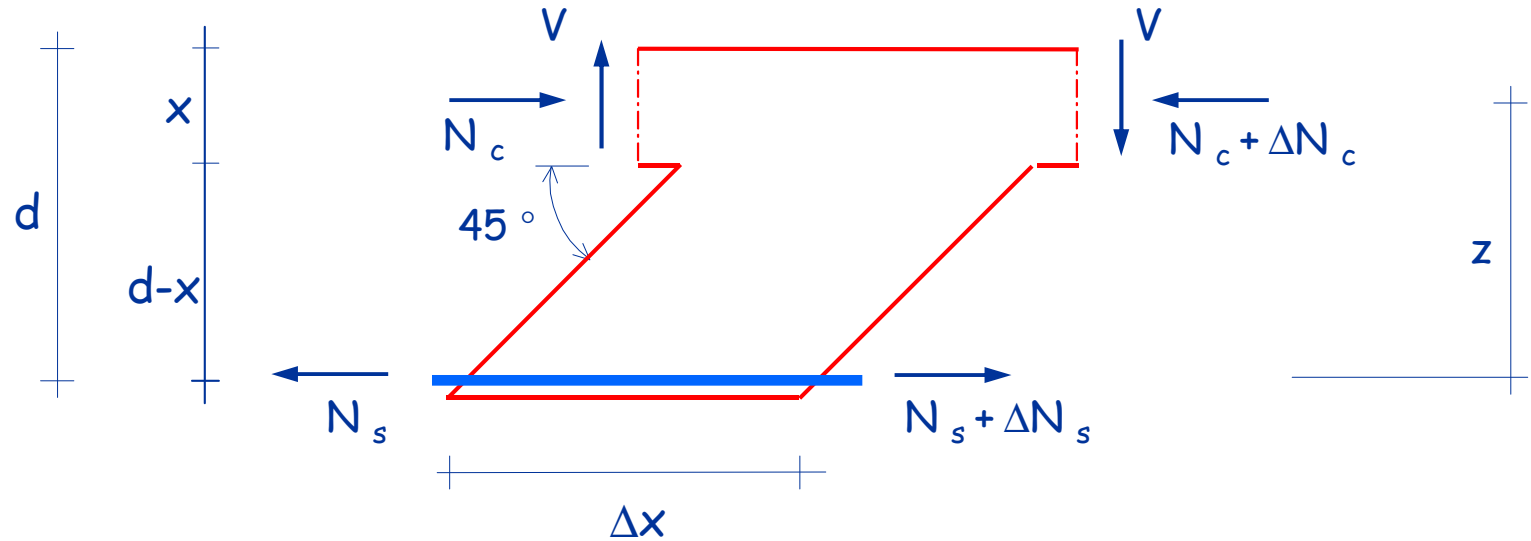
Viene proposto un modello per calcolare la resistenza
in assenza di armature a taglio

Si parte dall'esame delle lesioni provocate dal taglio
in una trave priva di armature a taglio

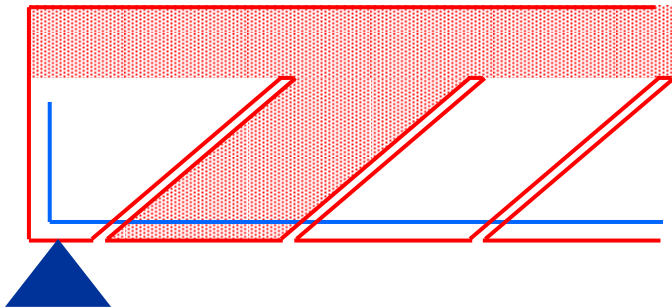
Modello a pettine



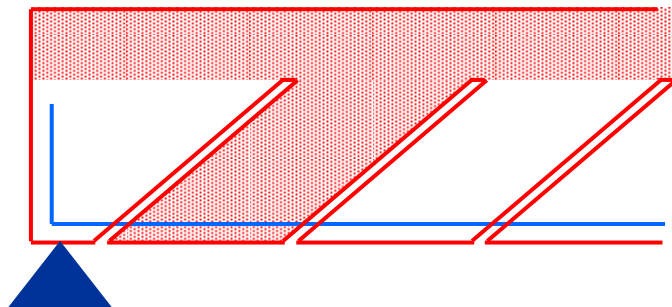
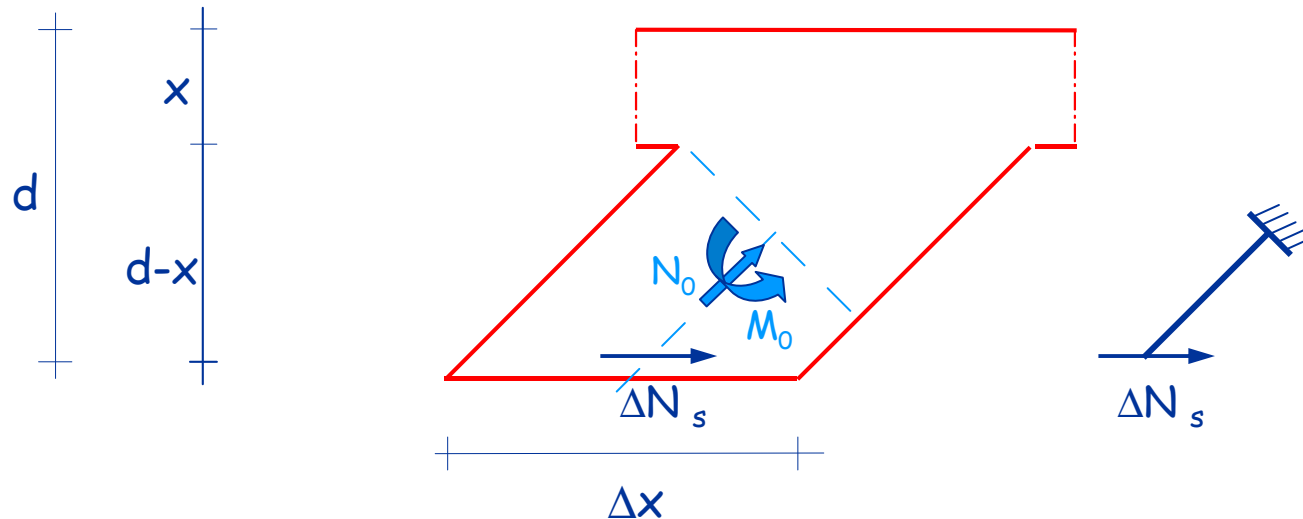
Resistenza del dente



$$\Delta N_s = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V \Delta x}{z}$$



Resistenza del dente

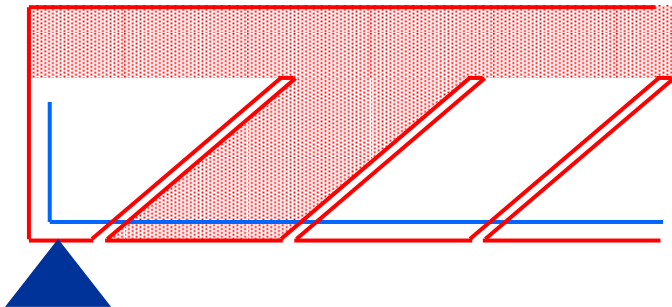
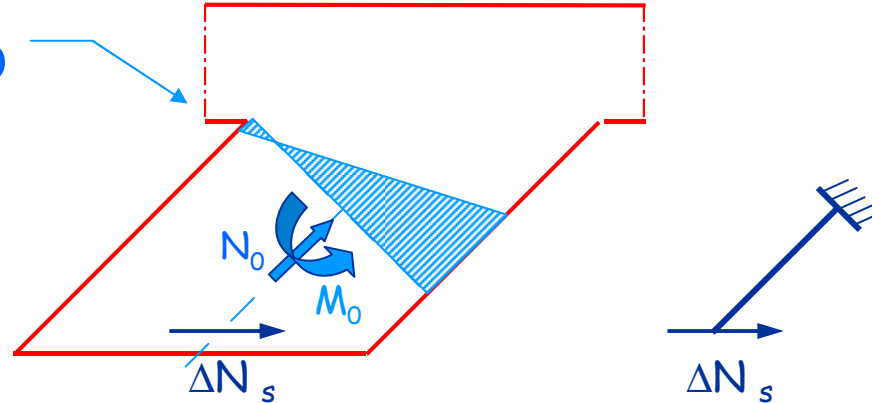


$$N_0 = -\frac{\Delta N_s}{\sqrt{2}} = -\frac{V}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{z}$$

$$M_0 = -\Delta N_s \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right) = -\frac{V}{z} \frac{\Delta x}{\sqrt{2}} \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right)$$

Resistenza del dente

Rottura quando
 $\sigma = f_{ctd}$

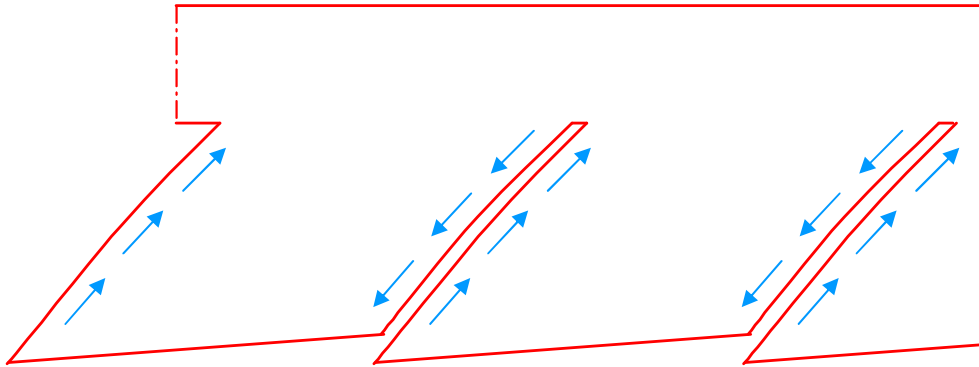


Resistenza del dente:

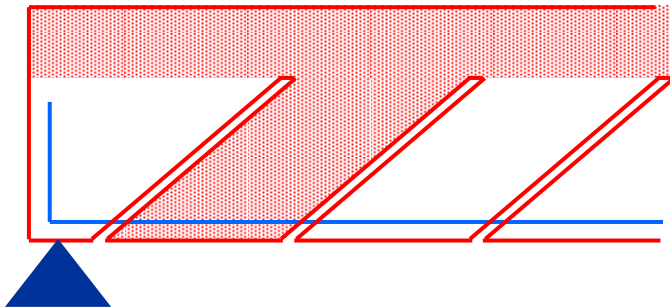
$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} b d$$

Nota: $0.25 f_{ctd}$ è ora sostituito da un altro termine, equivalente, funzione di f_{ck}

Altri contributi alla resistenza del dente



Ingranamento degli inerti

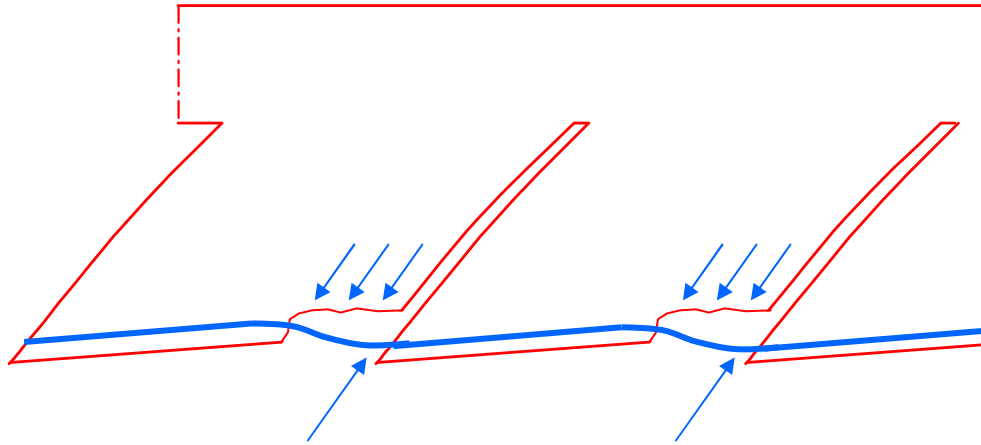


Resistenza del dente:

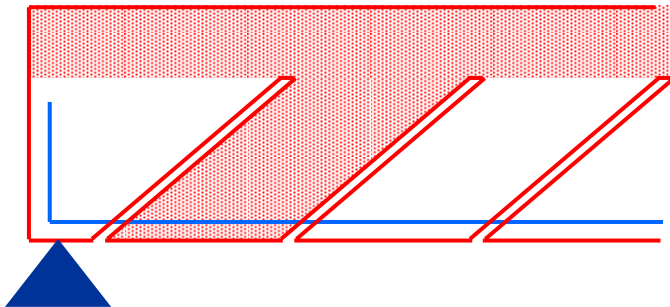
$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k b d$$

il coefficiente k è funzione
dell'altezza utile d della
sezione

Altri contributi alla resistenza del dente



Effetto spinotto

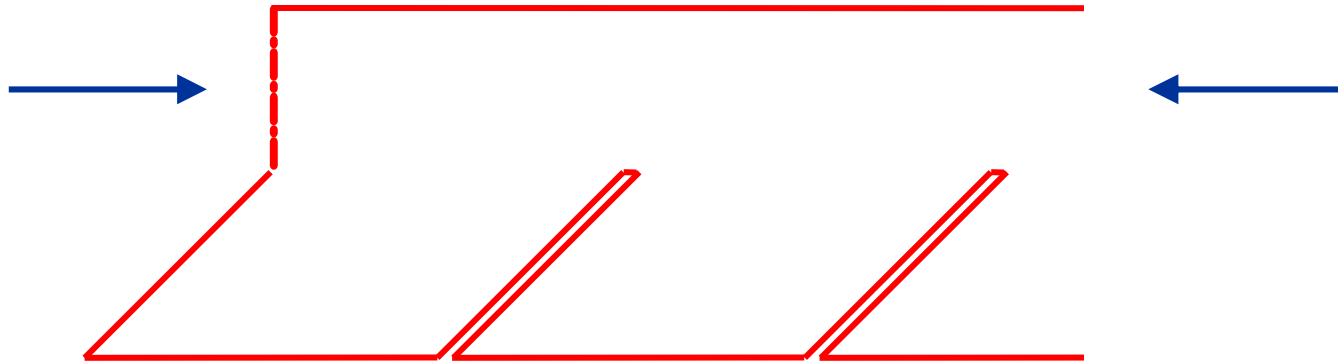


Resistenza del dente:

$$V_{Rd} = 0.25 f_{ctd} k f(\rho_l) b d$$

l'effetto spinotto dipende
dalla percentuale ρ_l di
armatura longitudinale

Altri contributi alla resistenza del dente



La presenza di compressione riduce la lunghezza del dente e quindi le sollecitazioni, aumentando la resistenza a taglio

Resistenza in assenza di armature (NTC08, punto 4.1.2.1.3.1)

$$V_{Rd,c} = \left[0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c} + 0.15 \sigma_{cp} \right] b d$$

NTC08 usa V_{Rd}

EC2 usa $V_{Rd,c}$
(che preferisco)

$$\geq v_{\min} = 0.035 \sqrt{k^3 f_{ck}}$$

quando ρ_l è molto piccolo

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0.02 f_{cd}$$

positiva se compressione

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2$$

d in mm

$$\rho_l = \frac{A_s}{b d} \leq 0.02$$

Resistenza in assenza di armature

Esempio: solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$h = 24 \text{ cm}$$

$$A_s = 2\varnothing 10 \text{ a travetto}$$

$$d = 22 \text{ cm}$$

$$3.14 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{220}} = 1.953$$

$$\rho_l = \frac{3.14}{20 \times 24} = 0.00654$$

$$\frac{\sqrt[3]{100 \times 0.00654 \times 25}}{1.5} = 1.692$$

$$0.18 \times 1.953 \times 1.692 = 0.595 > 0.035 \times \sqrt{1.953^3 \times 25} = 0.478$$

$$V_{Rd,c} = \left[\underbrace{0.18 k \frac{\sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}}}{\gamma_c}}_{\geq 0.035 \sqrt{k^3 f_{ck}}} + \cancel{0.15 \sigma_{cp}} \right] b d$$

$$V_{Rd,c} = 0.595 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 26.18 \text{ kN}$$

Confronto con tensioni ammissibili solaio (due travetti a metro)

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$h = 24 \text{ cm}$$

$$d = 22 \text{ cm}$$

$$A_s = 2\varnothing 10 \text{ a travetto} \\ 3.1 \text{ cm}^2 \text{ a metro}$$

Il taglio al di sotto del quale non è necessaria
armatura a taglio è

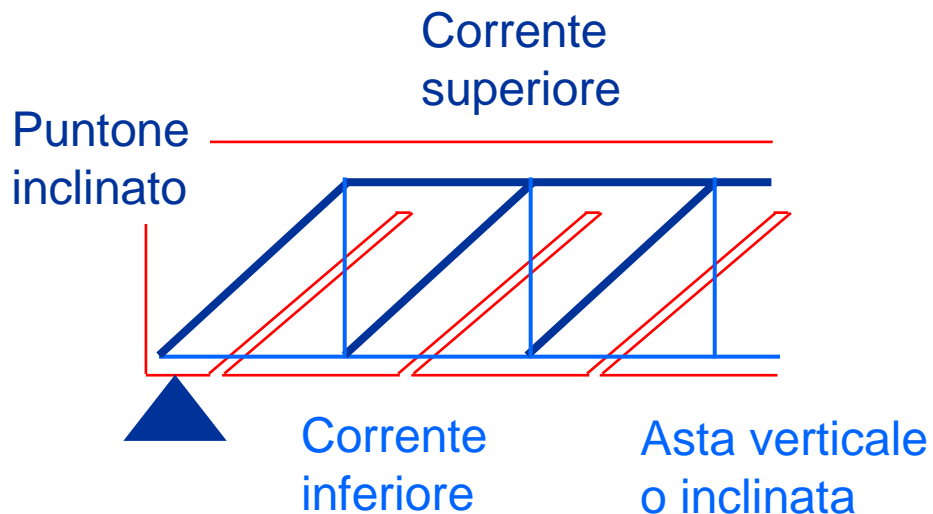
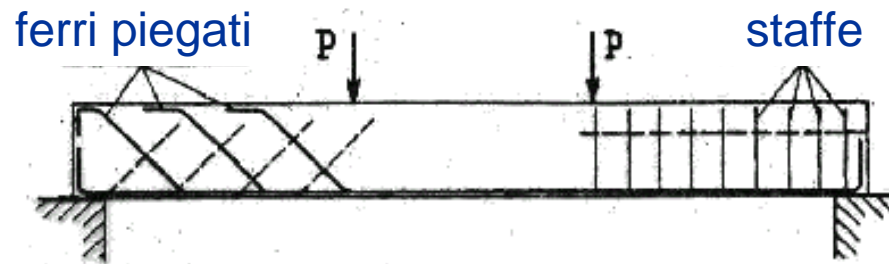
$$V_{c0} = 0.9 \tau_{c0} b d = \\ = 0.9 \times 0.60 \times 20 \times 22 \times 10^{-1} = 23.76 \text{ kN}$$

La resistenza allo SLU è 26.18 kN, di poco maggiore,
ma il carico (e quindi il taglio sollecitante), è circa 1.4
volte maggiore

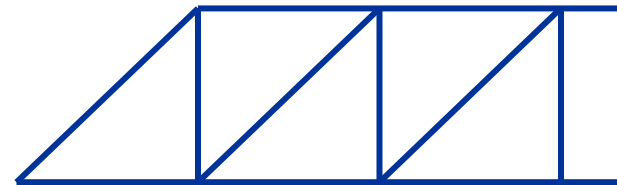
Taglio:
resistenza di una trave
con armatura a taglio

Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:

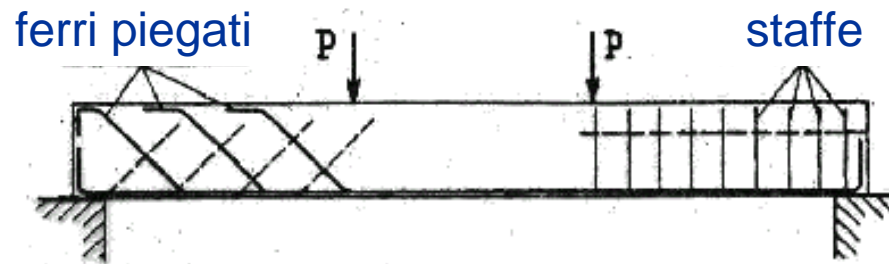


Traliccio di Mörsch

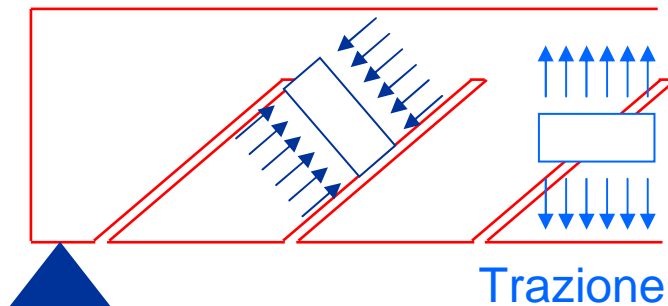


Trave con armatura a taglio: modelli di calcolo

Possibili armature:

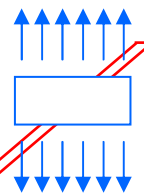


Compressione
nei puntoni



Campi di tensione

Trazione nelle
armature



Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{c1}$

Quindi:
$$V_{c1} = 0.9 \tau_{c1} b d$$

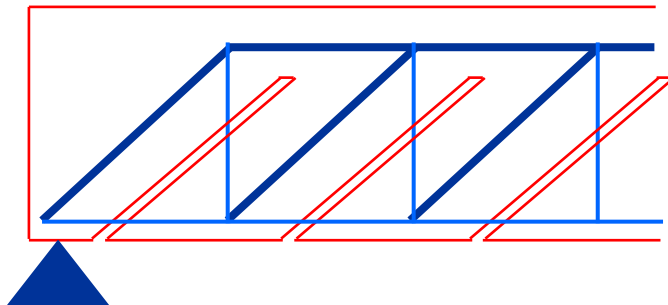
La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Mörsch - schema isostatico

Per staffe:
$$V_{st} = \frac{A_{st}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s$$

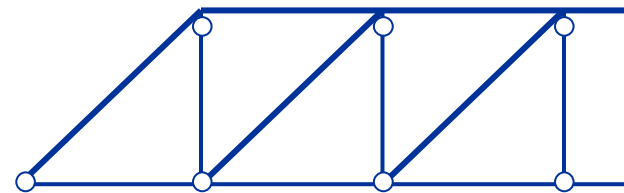
Verifica - stato limite ultimo

Sia la resistenza del calcestruzzo che quella dell'armatura vengono valutate col modello di traliccio

Attenzione: occorre tener conto del fatto che il traliccio è iperstatico



Traliccio iperstatico



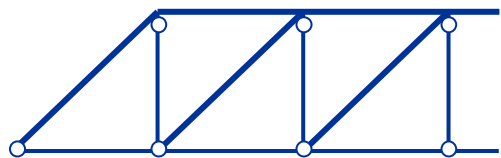
Verifica - stato limite ultimo

In campo lineare, l'iperstaticità del traliccio è irrilevante

Rigidezza estensionale \gg Rigidezza flessionale

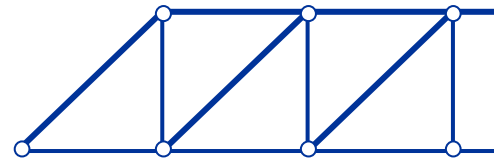


Traliccio iperstatico



=

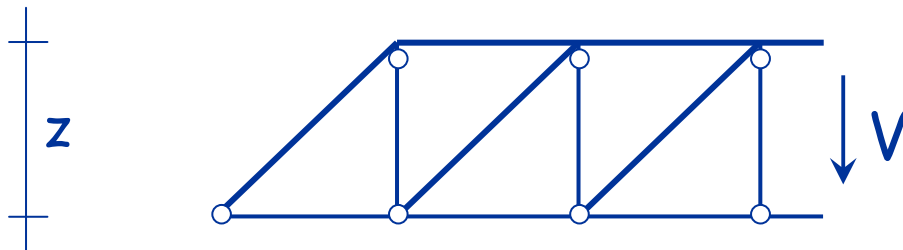
Traliccio isostatico



Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase *elastica*

Resistenza del calcestruzzo:



$$N_c = V \sqrt{2}$$

$$A_c = b z \sqrt{2}$$

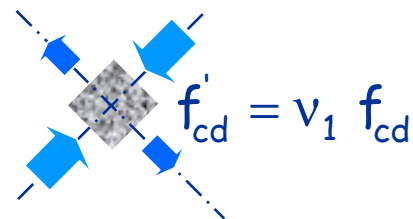
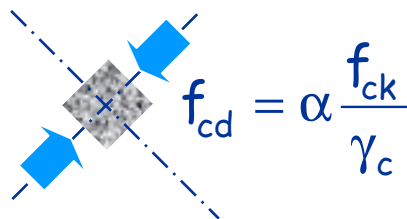
Ponendo

$$\sigma_c = f'_{cd}$$

si ottiene

$$V_{Rd,max} = \frac{1}{2} f'_{cd} b z$$

Notare:

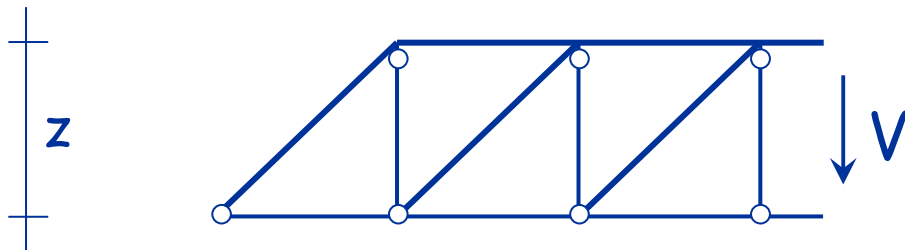


$$v_1 = 0.5$$

Verifica - stato limite ultimo

Quindi, in una prima fase *elastica*

Resistenza dell'armatura:



$$N_s = V$$

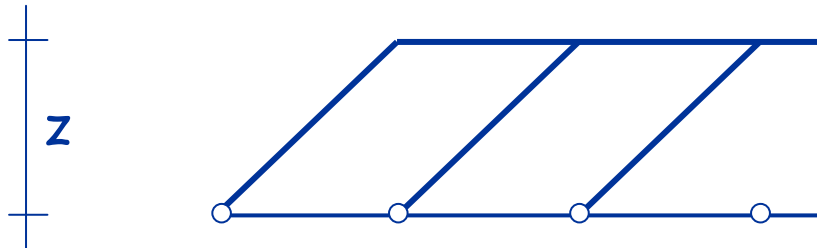
Ponendo $\sigma_s = f_{yd}$ si ottiene

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{st}}{s} f_{yd} z$$

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "normale"



Se si rompe prima il calcestruzzo: fine

$$V_{Rd2} = \frac{1}{2} v f_{cd} b z$$

Se si snerva l'armatura
scompare l'armatura a taglio

$$V_{Rd3} = V_{wd} + V_{cd}$$

rimane ancora il "pettine"
con la sua resistenza

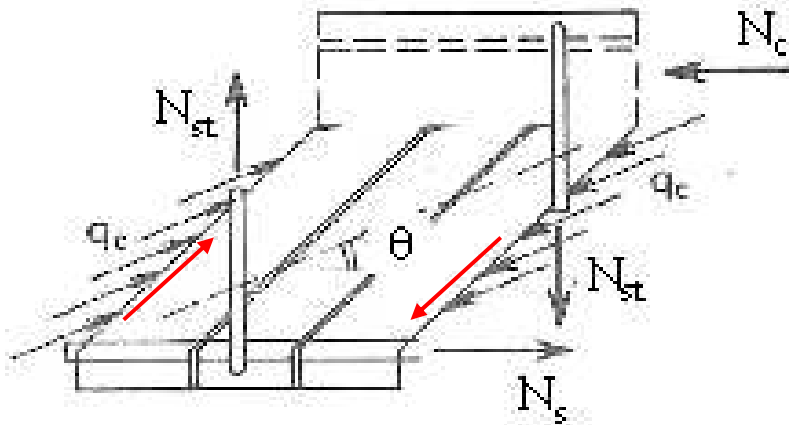
$$\text{con } V_{cd} = V_{Rd1}$$

questo modello non è più considerato dalle NTC08

Verifica - stato limite ultimo

Superata la fase elastica, si hanno due modelli

Modello "di traliccio a inclinazione variabile"



Quando si snerva l'armatura
scompare l'armatura a taglio

ma per l'ingranamento degli
inerti la direzione di
compressione si inclina

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$V_{Rd,max} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} f'_{cd} b z$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{st}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

NTC08 usa V_{Rcd}

EC2 usa $V_{Rd,max}$
(che preferisco)

$$V_{Rd,max} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z \quad z = 0.9 d$$

$$f'_{cd} = 0.5 f_{cd}$$

$$\alpha_c = 1$$

in assenza di compressione

$$\alpha_c = 1 + \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}$$

per $0 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.25$

$$\alpha_c = 1.25$$

per $0.25 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 0.5$

$$\alpha_c = 2.5 \left(1 - \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \right)$$

per $0.5 \leq \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \leq 1$

Resistenza in presenza di staffe (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$z = 0.9 d$$

NTC08 usa V_{Rsd}

EC2 usa $V_{Rd,s}$
(che preferisco)

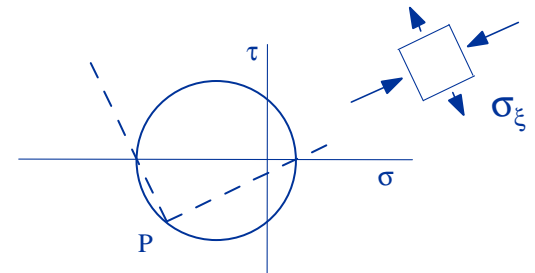
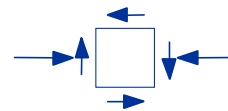
sia per $V_{Rd,max}$ che per $V_{Rd,s}$

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

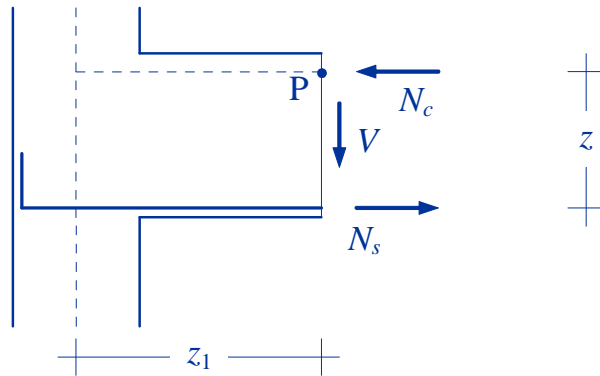
in presenza di compressione

$$\cot \theta_1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

$$\cot \theta_1 = \frac{\tau}{\sigma_t}$$

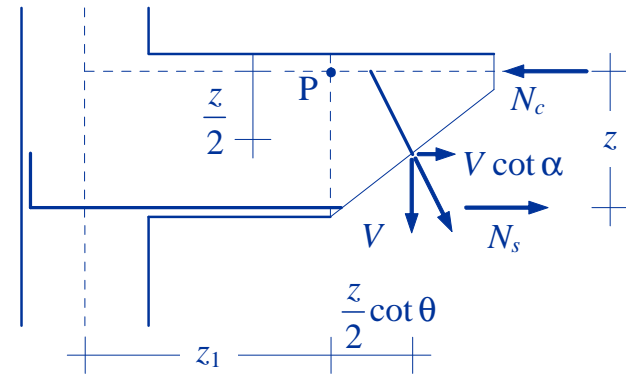


Traslazione del diagramma del momento (NTC08, punto 4.1.2.1.3.2)



approccio tradizionale:

$$N_s = \frac{M(z_1)}{z}$$



equilibrio (con taglio inclinato):

$$N_s = \frac{M(z_2)}{z} > \frac{M(z_1)}{z}$$

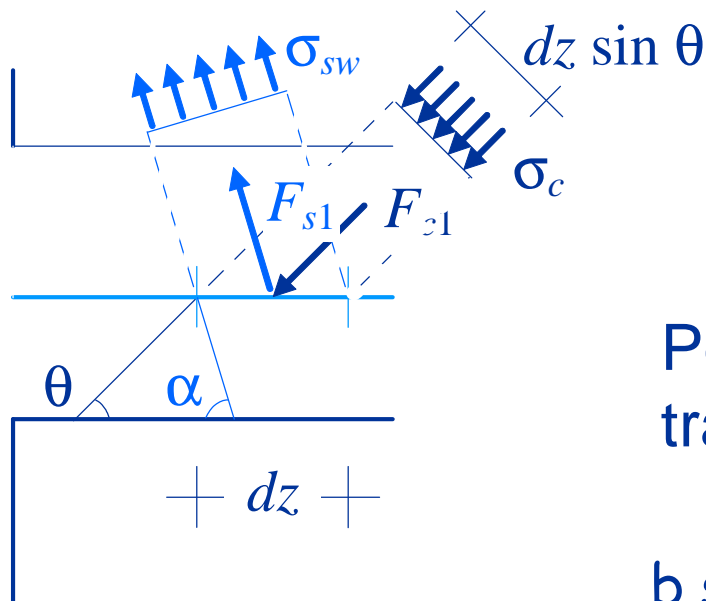
$$z_2 = z_1 + \frac{z}{2}(\cot \theta - \cot \alpha)$$

occorre aumentare l'armatura longitudinale

Modello di campi di tensione

$$F_{s1} = \frac{A_{sw}}{s} dz \sigma_{sw}$$

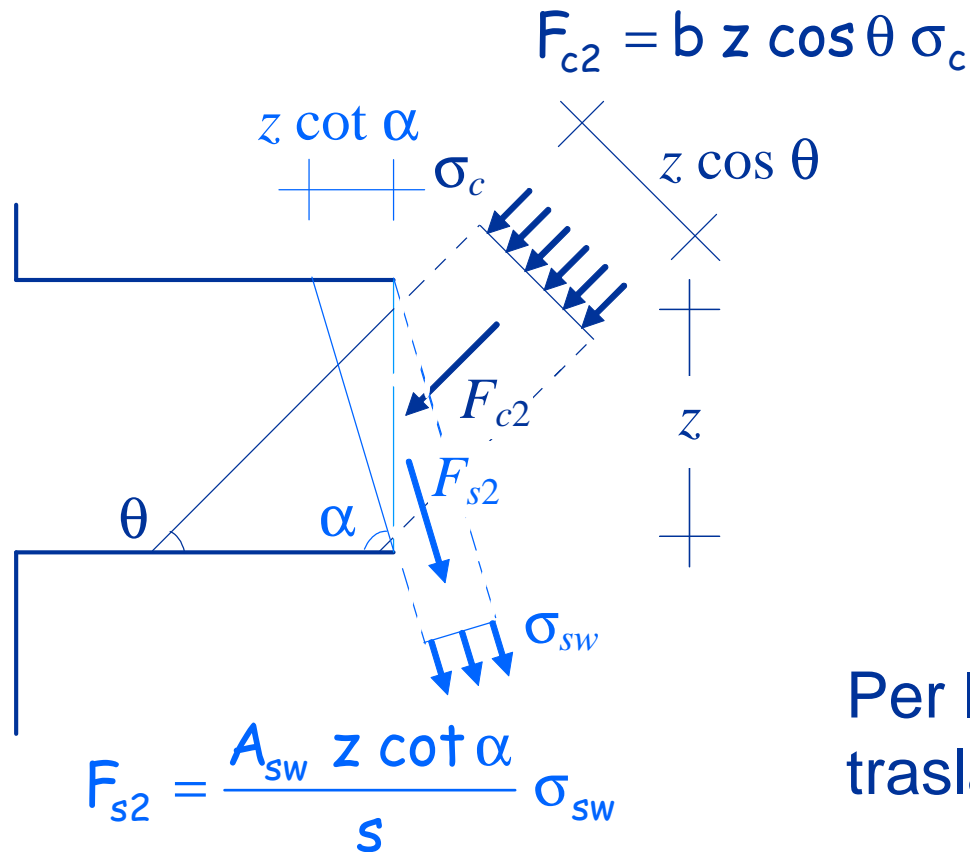
$$F_{c1} = b dz \sin \theta \sigma_c$$



Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$b \sin^2 \theta \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha \sigma_{sw}$$

Modello di campi di tensione



Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$V = b z \sin \theta \cos \theta \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos \alpha \sigma_s$$

Modello di campi di tensione

Dalle due relazioni

$$b \sin^2 \theta \sigma_c = \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha \sigma_{sw}$$

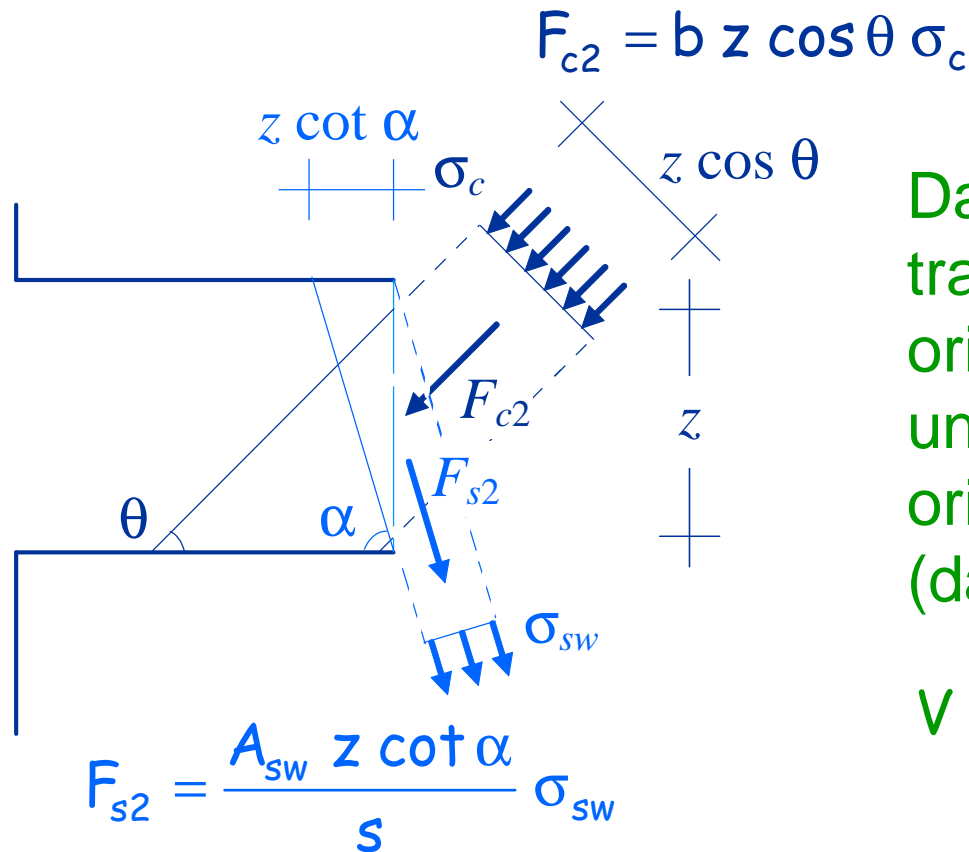
$$V = b z \sin \theta \cos \theta \sigma_c + \frac{A_{sw}}{s} z \cos \alpha \sigma_s$$

si ricavano le stesse espressioni viste in precedenza

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$V_{Rcd} = \frac{f'_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

Modello di campi di tensione



Dall'equilibrio alla
traslazione
orizzontale rimane
una componente
orizzontale
(da bilanciare)

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Scuola milanese:

- La componente è ripartita tra N_c ed N_s
- Si ottiene così l'incremento di armatura tesa (traslazione del diagramma del momento)

Scuola napoletana:

- L'intera componente è assegnata ad un'apposita armatura, detta "di parete"
- Si ottiene così, in aggiunta alle staffe ($\cot \alpha = 0$), l'armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V \cot \theta}{f_{yd}}$$

Componente orizzontale da equilibrare

$$V (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Suggerimento:

- Posso ritenere, in accordo con la scuola milanese, che una parte (metà) della forza di trazione vada a scaricare N_c e quindi che occorra portare solo l'altra metà
- Questa metà è assegnata all'armatura "di parete"

$$A_{sl} = \frac{V \cot \theta}{2 f_{yd}}$$

- Se A_{sl} mi sembra eccessiva e ne metto di meno devo incrementare l'armatura inferiore (analogamente a traslazione diagramma momenti)

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m})$$
$$d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rd,max} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 =$$
$$= 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 439.7 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 303.2 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/15$ ($6.7 \text{ cm}^2/\text{m}$)
 $d = 46 \text{ cm}$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 108.1 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 270.1 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/15$ ($6.7 \text{ cm}^2/\text{m}$)
 $d = 46 \text{ cm}$

La resistenza della sezione è il minore tra $V_{Rd,max}$ e $V_{Rd,s}$ calcolati con $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

In questo caso è sempre $V_{Rd,max} > V_{Rd,s}$

Per $\cot \theta = 2.5$ si ha $V_{Rd,s} = 270.1 \text{ kN}$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - tensioni ammissibili

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/15 (6.7 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{c1} = 0.9 \tau_{c1} b d = \\ = 0.9 \times 1.83 \times 30 \times 46 \times 10^{-1} = 227.3 \text{ kN}$$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{st} = \frac{A_{st}}{s} 0.9 d \bar{\sigma}_s = \\ = 6.7 \times 0.9 \times 46 \times 255 \times 10^{-3} = 70.7 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente - confronto TA-SLU

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/15$ ($6.7 \text{ cm}^2/\text{m}$)
 $d = 46 \text{ cm}$

La resistenza dell'armatura è

- 70.7 kN per TA
- 270.1 kN per SLU

Anche tenendo conto della differenza di carico,
la resistenza è oltre 2.5 volte maggiore

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$$b = 30 \text{ cm} \quad h = 50 \text{ cm} \quad \text{staffe } \varnothing 8/10 \text{ (10 cm}^2\text{/m)}$$
$$d = 46 \text{ cm}$$

La resistenza della trave a taglio è

$$V_{Rd,max} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z$$

$$\alpha_c = 1$$

$$f'_{cd} = 0.5 \times 14.17 =$$
$$= 7.08 \text{ MPa}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow V_{Rcd} = 439.7 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow V_{Rcd} = 303.2 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/10$ ($10 \text{ cm}^2/\text{m}$)
 $d = 46 \text{ cm}$

La resistenza dell'armatura è

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} z \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 162.0 \text{ kN}$$

$$\cot \theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad V_{Rsd} = 405.0 \text{ kN}$$

Verifica in presenza di armatura a taglio trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/10$ ($10 \text{ cm}^2/\text{m}$)
 $d = 46 \text{ cm}$

La resistenza della sezione è il minore tra $V_{Rd,max}$ e $V_{Rd,s}$

	$\cot\theta = 1$	1.5	2	2.5
V_{Rcd}	439.7	405.9	351.8	303.2
V_{Rsd}	162.0	243.0	324.0	405.0

Per $\cot\theta = 2.1$ si ha $V_{Rd,max} = V_{Rd,s} = 340.2 \text{ kN}$

Nota: verificare anche l'armatura longitudinale

Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:
$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$$

Occorre definire $\cot \theta$

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per $\cot \theta$

Ponendo
$$V_{Rd,max} = \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \alpha_c f'_{cd} b z = V_{Ed}$$

si ottiene
$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} \leq 2.5$$

Progetto dell'armatura allo stato limite ultimo

Staffe:
$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta}$$

Occorre definire $\cot \theta$

2. Utilizzare il valore di $\cot \theta$ così determinato, oppure un valore minore

Al crescere di $\cot \theta$ si riducono le staffe necessarie, ma cresce l'armatura di parete (o longitudinale)

Consiglio di non superare $\cot \theta = 2$

3. Calcolo l'armatura di parete o verifico l'armatura longitudinale

Progetto dell'armatura trave emergente

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$V_{Ed} = 150 \text{ kN}$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

$$d = 46 \text{ cm}$$

1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 5.69$$

2. Posso usare $\cot \theta = 2.5$, ma io preferisco $\cot \theta = 2$

Ottengo
$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 4.62 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Userò $\varnothing 8/20$

3. Armatura di parete
$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{f_{yd}} = 7.67 \text{ cm}^2$$

Progetto dell'armatura trave emergente

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$V_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

$$d = 46 \text{ cm}$$

1. Calcolo

$$\cot \theta = \frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_c f'_{cd} b z}{2 V_{Ed}} \right)^2 - 1} = 1.555$$

2. Userò $\cot \theta = 1.555$

Ottengo
$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{V_{Ed}}{0.9 d f_{yd} \cot \theta} = 15.88 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Dovrei usare $\varnothing 8/6$ (forse eccessivi)

3. Armatura di parete

$$A_{sl} = \frac{V_{Ed} \cot \theta}{f_{yd}} = 15.9 \text{ cm}^2$$

Minimi di armature nelle travi

(NTC08, punto 4.1.6.1.1)

Area minima longitudinale:

$$A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.0013 b d$$

Area minima delle staffe:

$$A_{st} = 1.5 b \quad \text{mm}^2 / \text{m} \quad \text{pu\`o essere condizionante, in particolare per travi a spessore}$$

Inoltre: 3 staffe a metro, passo non superiore a 0.8 d

Ulteriori indicazioni (EC2):

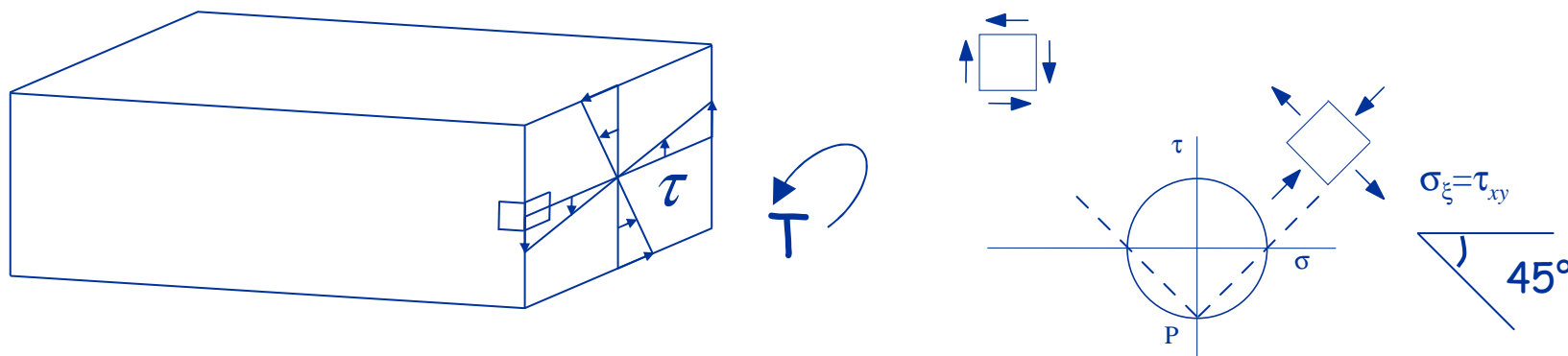
$$\rho_w = \frac{A_{st}}{s b} \geq \rho_{w,min} = \frac{0.08 \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

versioni precedenti davano passi molto ridotti

Torsione

Comportamento di una trave

1 - calcestruzzo resistente a trazione

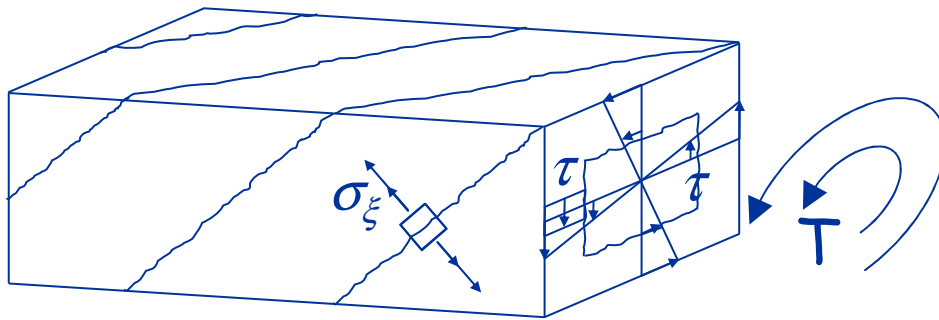


Per bassi livelli di sollecitazioni, la torsione è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo.

Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

Comportamento di una trave

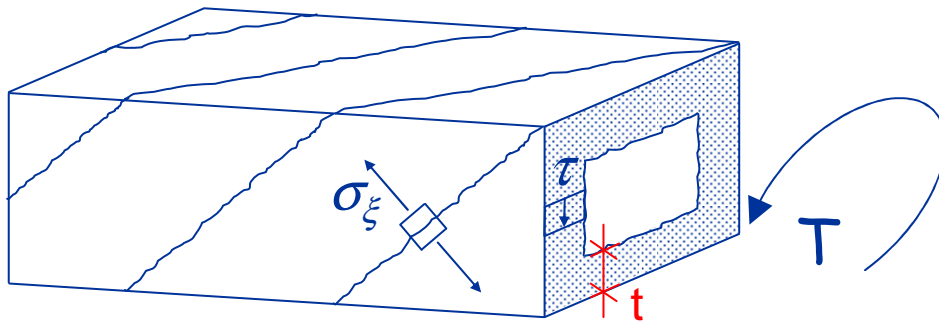
2 - calcestruzzo non resistente a trazione



Aumentando il momento torcente ...

... il calcestruzzo si fessura

Comportamento di una trave 2 - calcestruzzo non resistente a trazione

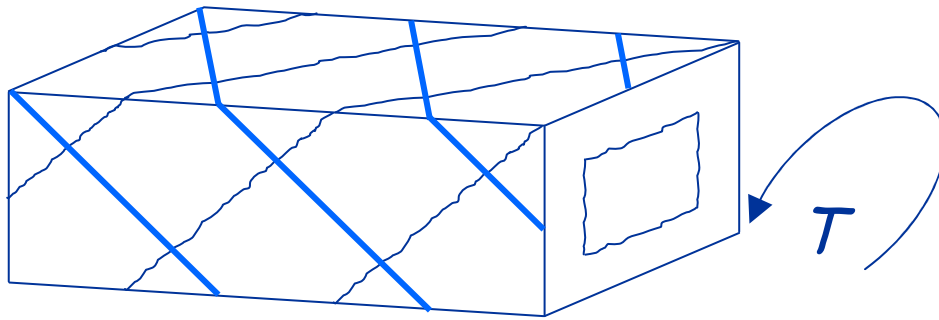


$$t = \frac{A}{u} \geq 2c$$

La parte interna della sezione non dà contributo ...

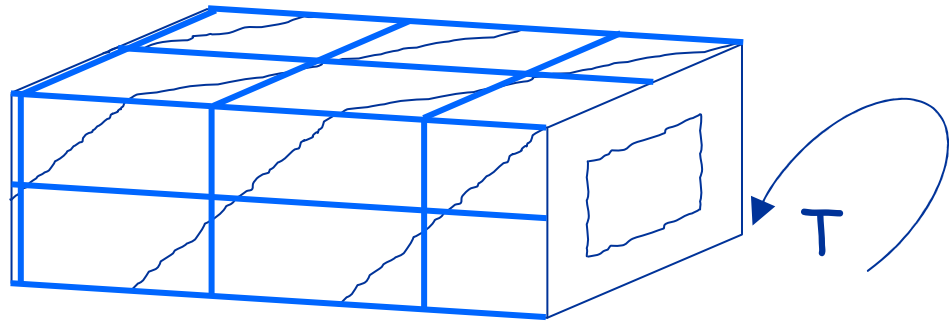
... si considera una sezione cava

Armatura a torsione

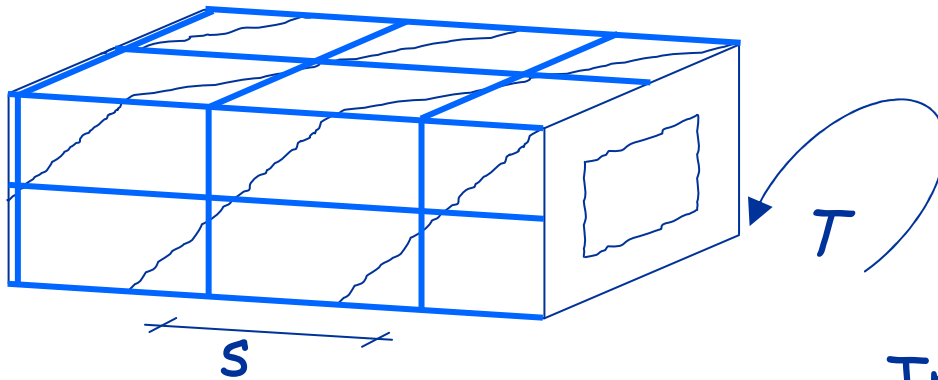


... a spirale

... con staffe e
ferri longitudinali



Modello di calcolo

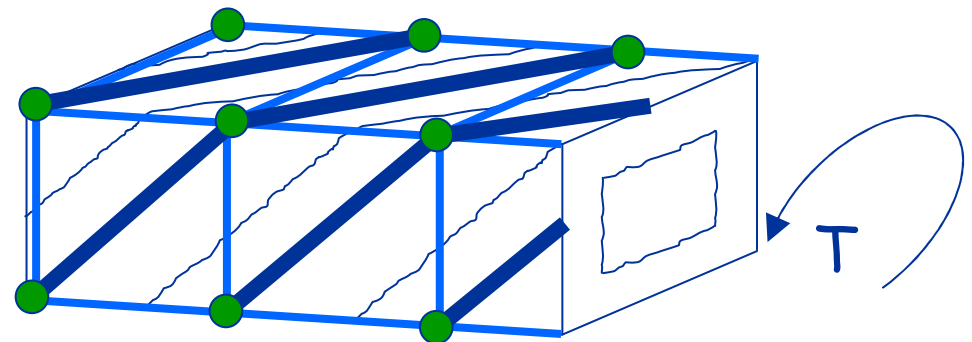


Traliccio di Rausch

Barre longitudinali =
correnti tesi

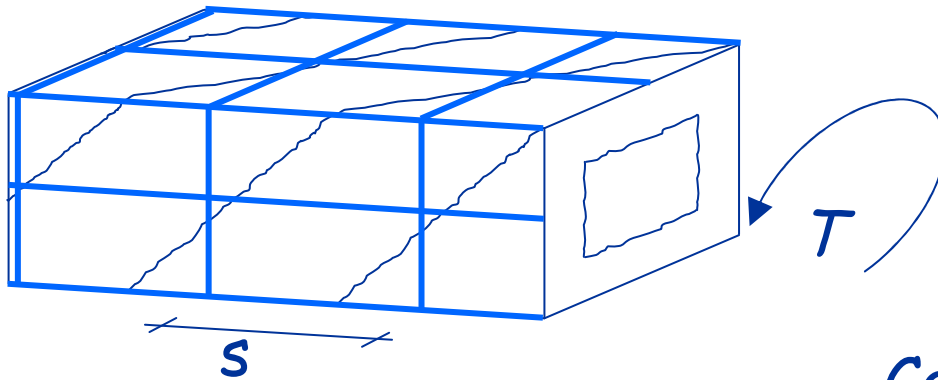
Staffe = montanti tesi

Calcestruzzo =
diagonali compresse

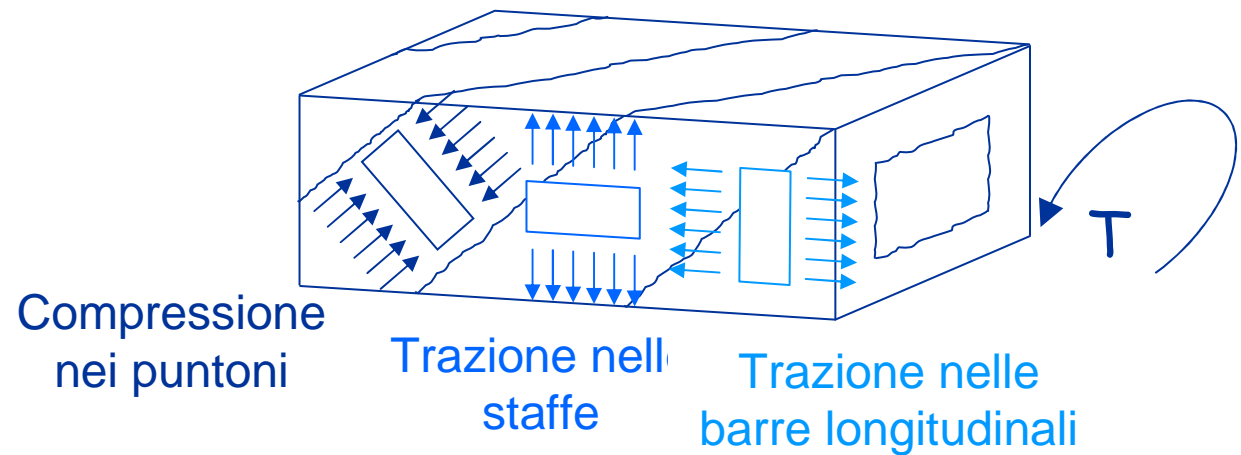


Tutte le aste sono
incernierate nei nodi

Modello di calcolo



Campi di tensione

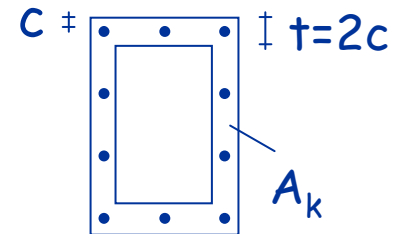


Verifica - tensioni ammissibili

La resistenza del calcestruzzo viene valutata convenzionalmente col confronto $\tau \leq \tau_{c1}$

Quindi:

$$T_{c1} = 2 A_k \tau_{c1}$$



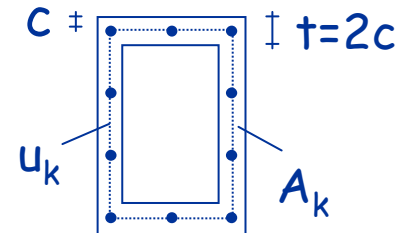
La resistenza dell'armatura viene valutata col traliccio di Rausch

Per le staffe:

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s$$

Per i ferri longitudinali:

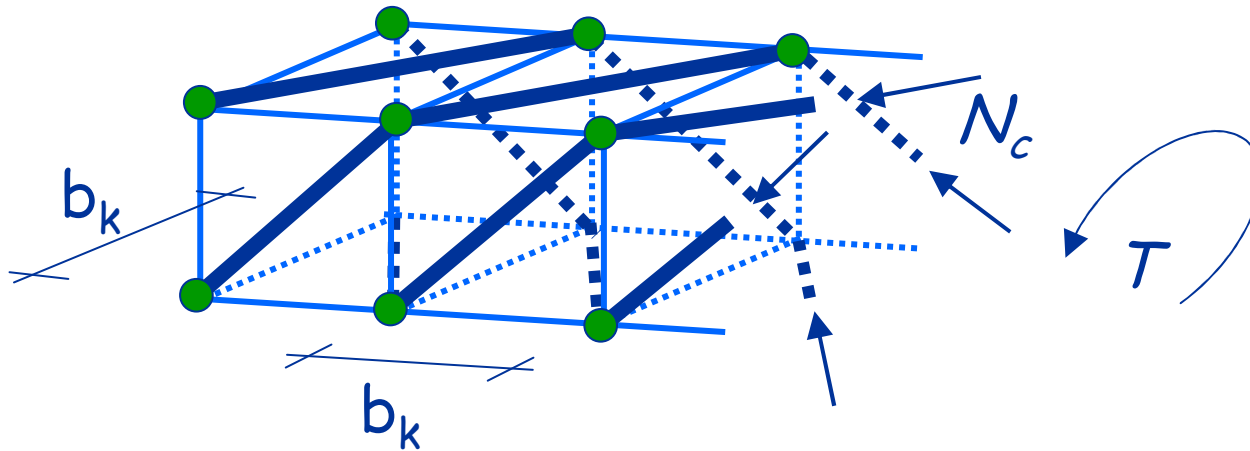
$$T_{s,lon} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s$$



Resistenza a torsione - SLU

con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$A_c = \frac{t b_k}{\sqrt{2}}$$

con $t = 2 c$

Ponendo $\sigma_c = f'_{cd}$ si ottiene

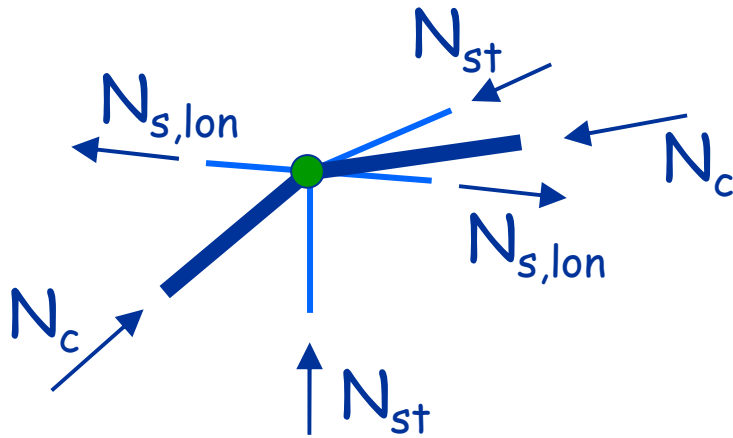
$$T_{Rcd} = f'_{cd} t A_k$$

$$f'_{cd} = 0.5 f_{cd}$$

Resistenza a torsione - SLU

con puntoni inclinati a 45°

Resistenza dell'armatura:



$$N_c = \frac{T}{\sqrt{2} b_k}$$

$$N_{st} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

$$N_{s,lon} = \frac{N_c}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $\sigma_{st} = f_{yd}$ si ottiene

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$$

Ponendo $\sigma_{s,lon} = f_{yd}$ si ottiene

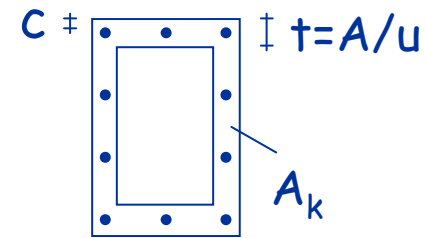
$$T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$$

Resistenza a torsione - SLU

con puntoni inclinati a 45°

Resistenza del calcestruzzo

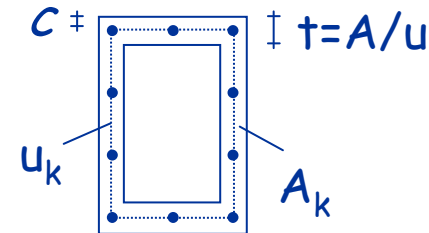
$$T_{Rcd} = A_k t f'_{cd}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe:

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd}$$



Ferri longitudinali:

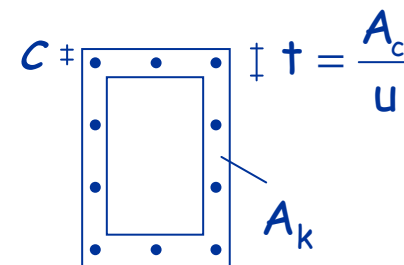
$$T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd}$$

Resistenza a torsione - SLU

con puntoni ad inclinazione variabile (NTC08, 4.1.2.1.4)

Resistenza del calcestruzzo

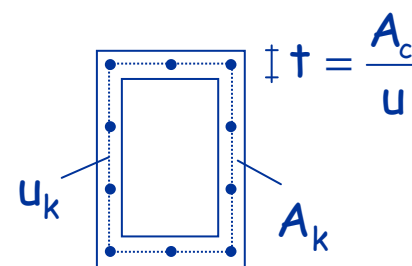
$$T_{Rcd} = 2 A_k + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$



Resistenza dell'armatura

Staffe: $T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$

Ferri longitudinali: $T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$



Per effetto dell'ingranamento degli inerti i puntoni di calcestruzzo si inclinano ($0.4 \leq \cot \theta \leq 2.5$)

Resistenza a torsione trave emergente

$$\begin{array}{lll} b = 30 \text{ cm} & h = 50 \text{ cm} & A_{s,lon} = 8\varnothing 14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)} \\ c = 4 \text{ cm} & d = 46 \text{ cm} & \text{staffe } \varnothing 8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)} \end{array}$$

$$t = \frac{30 \times 50}{2(30 + 50)} = 9.38 \text{ cm} \quad A_k = (30 - 9.38) \times (50 - 9.38) = 838 \text{ cm}^2$$

$$f'_{cd} = 7.08 \text{ MPa}$$

La resistenza della trave a torsione è

$$T_{Rcd} = 2 A_k + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$\cot \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{Rcd} = 55.7 \text{ kN m}$$

$$\cot \theta = 2.5 \quad \Rightarrow \quad T_{Rcd} = 38.4 \text{ kN m}$$

Resistenza a torsione trave emergente

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$A_{s,lon} = 8\varnothing 14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

$$d = 46 \text{ cm}$$

$$\text{staffe } \varnothing 8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$$

La resistenza dell'armatura è

Staffe:
$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot \theta$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rsd} = 21.8 \text{ kN m}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rsd} = 54.5 \text{ kN m}$$

Ferri longitudinali:
$$T_{Rld} = 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} f_{yd} \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\cot \theta = 1 \Rightarrow T_{Rld} = 65.9 \text{ kN m}$$

$$u_k = 122.5 \text{ cm}$$

$$\cot \theta = 2.5 \Rightarrow T_{Rld} = 26.3 \text{ kN m}$$

Resistenza a torsione

trave emergente

$b = 30 \text{ cm}$ $h = 50 \text{ cm}$ $A_{s,lon} = 8\varnothing 14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)}$
 $c = 4 \text{ cm}$ $d = 46 \text{ cm}$ staffe $\varnothing 8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)}$

La resistenza della sezione è il minore tra T_{Rcd} T_{Rsd} T_{Rld}

	$\cot\theta = 1$	1.5	2	2.5
T_{Rcd}	55.7	51.4	44.6	38.4
T_{Rsd}	21.8	32.7	43.6	54.5
T_{Rld}	65.9	43.9	32.9	26.3

Si ha $T_{Rsd} = T_{Rld}$ per $\cot\theta = \sqrt{\frac{A_{s,lon} / u_k}{A_{st} / s}} = 1.736$

Per tale valore

$$\begin{aligned}
 T_{Rsd} &= T_{Rld} = 37.8 \text{ kNm} \\
 T_{Rcd} &= 48.2 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Resistenza a torsione

trave emergente - tensioni ammissibili

$$\begin{array}{lll} b = 30 \text{ cm} & h = 50 \text{ cm} & A_{s,lon} = 8\varnothing 14 \text{ (12.3 cm}^2\text{)} \\ c = 4 \text{ cm} & d = 46 \text{ cm} & \text{staffe } \varnothing 8/15 \text{ (3.33 cm}^2\text{/m)} \end{array}$$

La resistenza della trave a torsione è $t = 2 c = 8 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} T_{c1} &= 2 A_k t \tau_{c1} = \\ &= 2 \times (22 \times 42) \times 8 \times 1.83 \times 10^{-3} = 27.1 \text{ kNm} \end{aligned}$$

La resistenza dell'armatura è

$$\begin{aligned} T_{st} &= 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s = \\ &= 2 \times (22 \times 42) \times 3.4 \times 255 \times 10^{-5} = 16 \text{ kN m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{s,lon} &= 2 A_k \frac{A_{s,lon}}{u_k} \bar{\sigma}_s \\ &= 2 \times (22 \times 42) \times 0.096 \times 255 \times 10^{-3} = 45 \text{ kN m} \end{aligned}$$

Resistenza a torsione

trave emergente - confronto SLU-TA

Tensioni ammissibili:

$$T_{st} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} \bar{\sigma}_s = 16 \text{ kN m}$$

Stato limite ultimo ($\cot\theta = 1.736$):

$$T_{Rsd} = 2 A_k \frac{A_{st}}{s} f_{yd} \cot\theta = 37.8 \text{ kNm}$$

Anche se i carichi allo SLU sono circa 1.4 volte maggiori, la resistenza è notevolmente maggiore (nell'esempio circa 1.7 volte)

Dimensionamento della sezione allo stato limite ultimo

1. Scegliere un valore per $\cot \theta$ ed ipotizzare un valore per t (almeno pari a $2c$)

2. Invertendo l'espressione di T_{Rcd} calcolare A_k

$$A_k = \frac{T_{Ed}}{2 + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}}$$

3. Definire una sezione $b \times h$ che garantisca A_k e calcolare t

$$t = \frac{A}{u} \geq 2c$$

4. Ricalcolare A_k e controllare che vada bene

$$A_k = (b - t)(h - t)$$

Dimensionamento della sezione esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

1. Assumo $\cot \theta = 2$ e $t = 10 \text{ cm}$

$$2. \quad A_k = \frac{T_{Ed}}{2 + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{26 \times 10^3}{2 \times 10 \times 7.08 \times \frac{2}{1 + 2^2}} = 459 \text{ cm}^2$$

3. Potrei usare una sezione 30×40 che (per $t=10 \text{ cm}$)

ha $A_k = 600 \text{ cm}^2$

Preferisco 30×50

$$t = \frac{1500}{160} = 9.38 \text{ cm}$$

$$4. \quad A_k = (30 - 9.38)(50 - 9.38) = 838 \text{ cm}^2$$

va bene

Progetto di staffe e barre longitudinali allo stato limite ultimo

1. Verificare la resistenza del calcestruzzo e individuare il massimo valore possibile per $\cot \theta$

Ponendo
$$T_{Rcd} = 2 A_k + f'_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = T_{Ed}$$

si ottiene
$$\cot \theta = \frac{A_k + f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k + f'_{cd}}{T_{Ed}} \right)^2 - 1} \leq 2.5$$

2. Utilizzare il valore di $\cot \theta$ così determinato, oppure un valore minore, per calcolare staffe e barre longitudinali

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} \cot \theta} \qquad A_{s,lon} = \frac{T_{Ed} u_k \cot \theta}{2 A_k f_{yd}}$$

3. Distribuire le barre longitudinali in proporzione ai lati

Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione 30×50

$$\begin{aligned} 1. \quad \cot \theta &= \frac{A_k + f'_{cd}}{T_{Ed}} + \sqrt{\left(\frac{A_k + f'_{cd}}{T_{Ed}} \right)^2 - 1} = \\ &= \frac{838 \times 9.38 \times 7.08}{26 \times 10^3} + \sqrt{(2.14)^2 - 1} = 4.03 \end{aligned}$$

2. Si può usare anche $\cot \theta = 2.5$; scelgo $\cot \theta = 2$

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{26 \times 10^5}{2 \times 838 \times 391.3 \times 2} = 1.98 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \text{Ø8/25}$$

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 122.5 \times 2}{2 \times 838 \times 391.3} \times 10^3 = 9.71 \text{ cm}^2$$

Progetto di staffe e barre longitudinali esempio

Dati: $T_{Ed} = 26 \text{ kNm}$

Si è scelta una sezione 30×50

Se però si decide di usare $\varnothing 8/20 = 2.5 \text{ cm}^2/\text{m}$
questo corrisponde a

$$\cot \theta = \frac{T_{Ed}}{2 A_k f_{yd} A_{st} / s} = 1.586$$

L'armatura longitudinale necessaria è

$$A_{s,lon} = \frac{26 \times 122.5 \times 1.586}{2 \times 838 \times 391.3} \times 10^3 = 7.70 \text{ cm}^2$$

Torsione e taglio

Calcestruzzo:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rcd}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rcd}} \leq 1$$

Staffe:

- si progettano separatamente, per la torsione e per il taglio e si sommano.
- l'angolo θ deve essere uguale per la torsione e per il taglio.