Stato limite d'instabilità

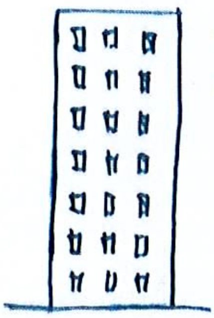
Daniele Ferretti

Dipartimento di Ingegneria Civile, dell'Ambiente, del Territorio e Architettura
Università degli Studi di Parma
Parco Area delle Scienze, 181/A 43100 Parma
Tel. 0521-905943 Fax 0521-905924
e-mail: daniele.ferretti@unipr.it

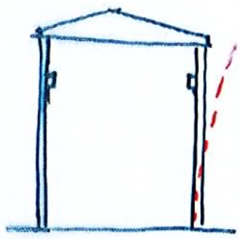
INSTABILITA' NEL C.A.

PILASTRO

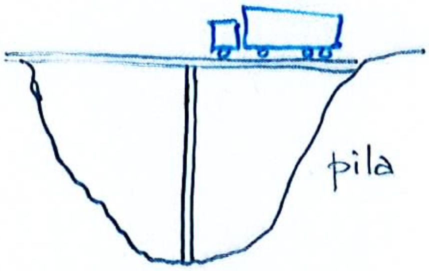
$\frac{h}{b} \approx 10$



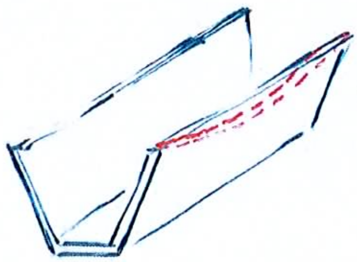
edificio alto



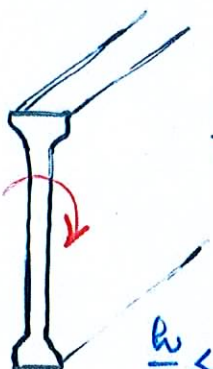
capannone



pila

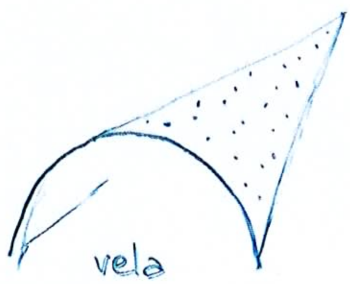


tegolo



instabilità flessotorsionale

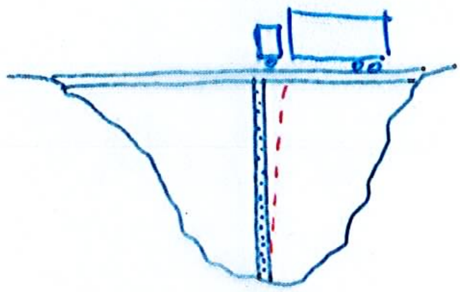
$\frac{h}{b} \leq 4$

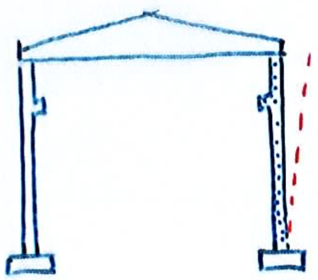


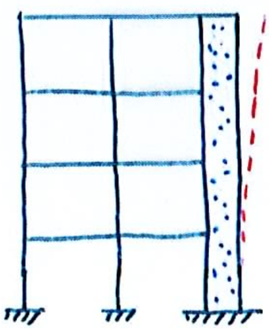
vela

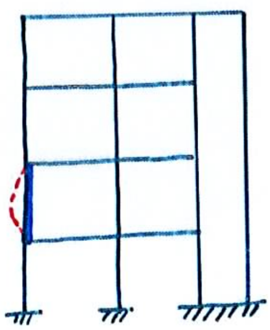
arco

COLONNE ISOLATE

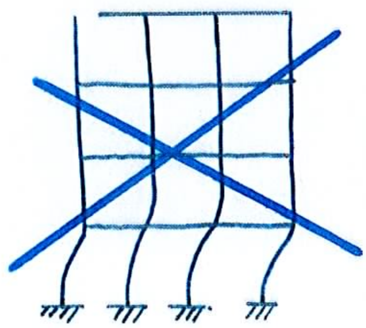








instabilita' locale
del telaio



instabilita'
globale

STABILITA' STRUTTURALE : SVILUPPO STORICO

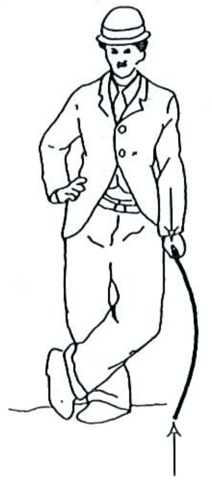
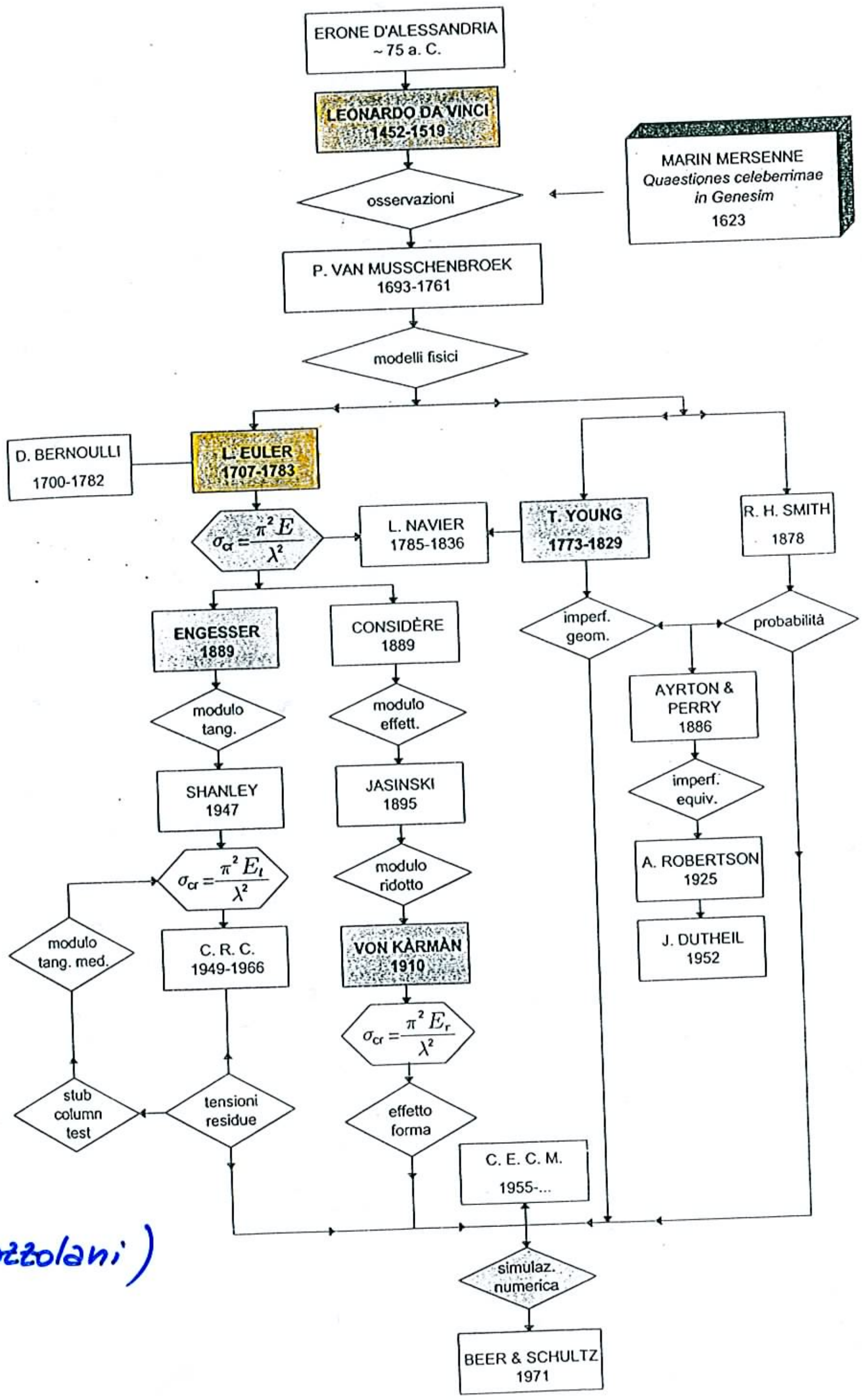
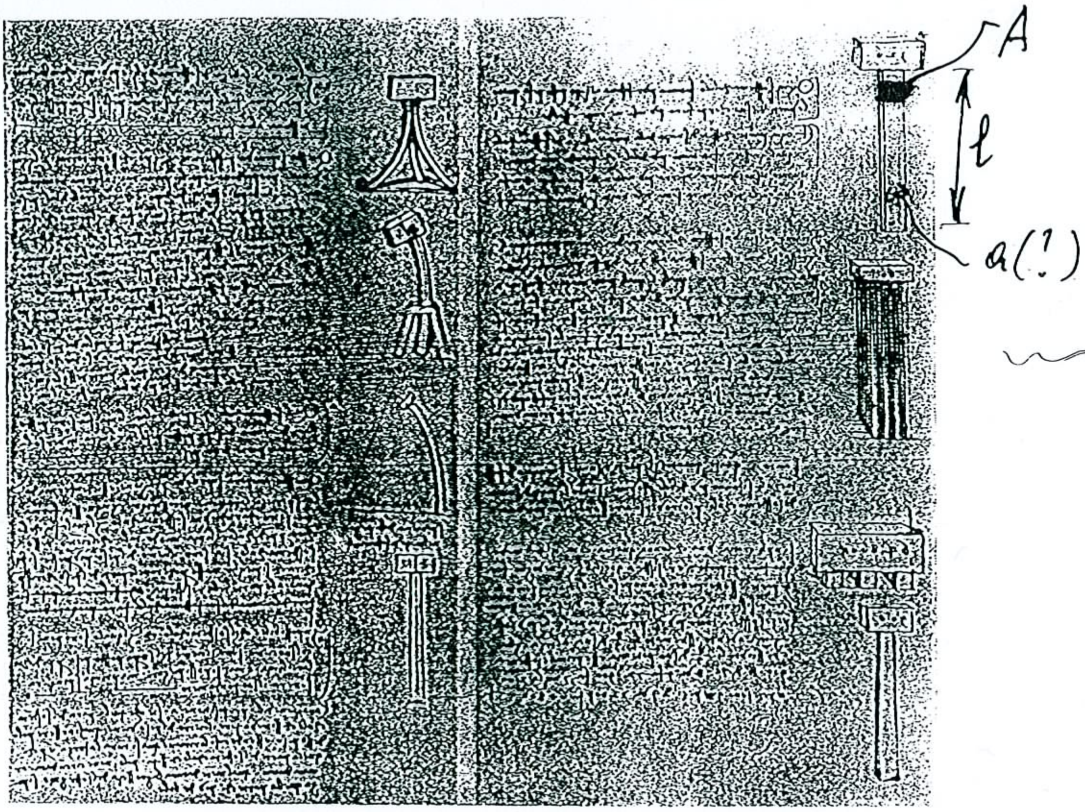


Figura 2.2 Un celebre e particolare esempio del fenomeno dell'instabilità (tratto da [3]). (Salvadori)



(Ballio, Mazzolani)

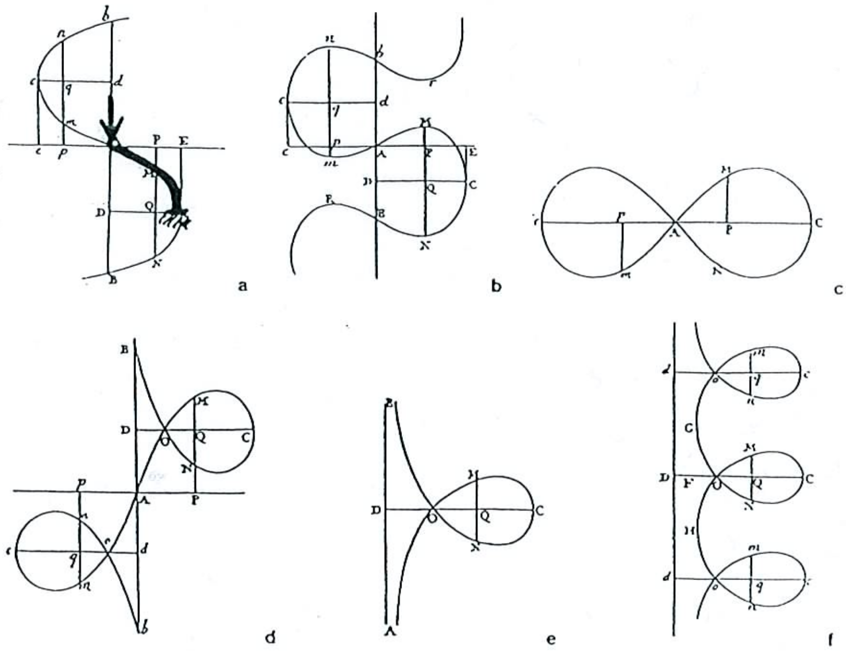
STABILITA' STRUTTURALE: ALCUNI STUDI



$\rightsquigarrow P_{cr} = AK\left(\frac{a}{l}\right)$

Leonardo da Vinci (1451-1519) - Codice Atlantico - Foglio 152 r.b.

M. Mersenne - "Quaestiones celeberrimae in Genesim" (1623)

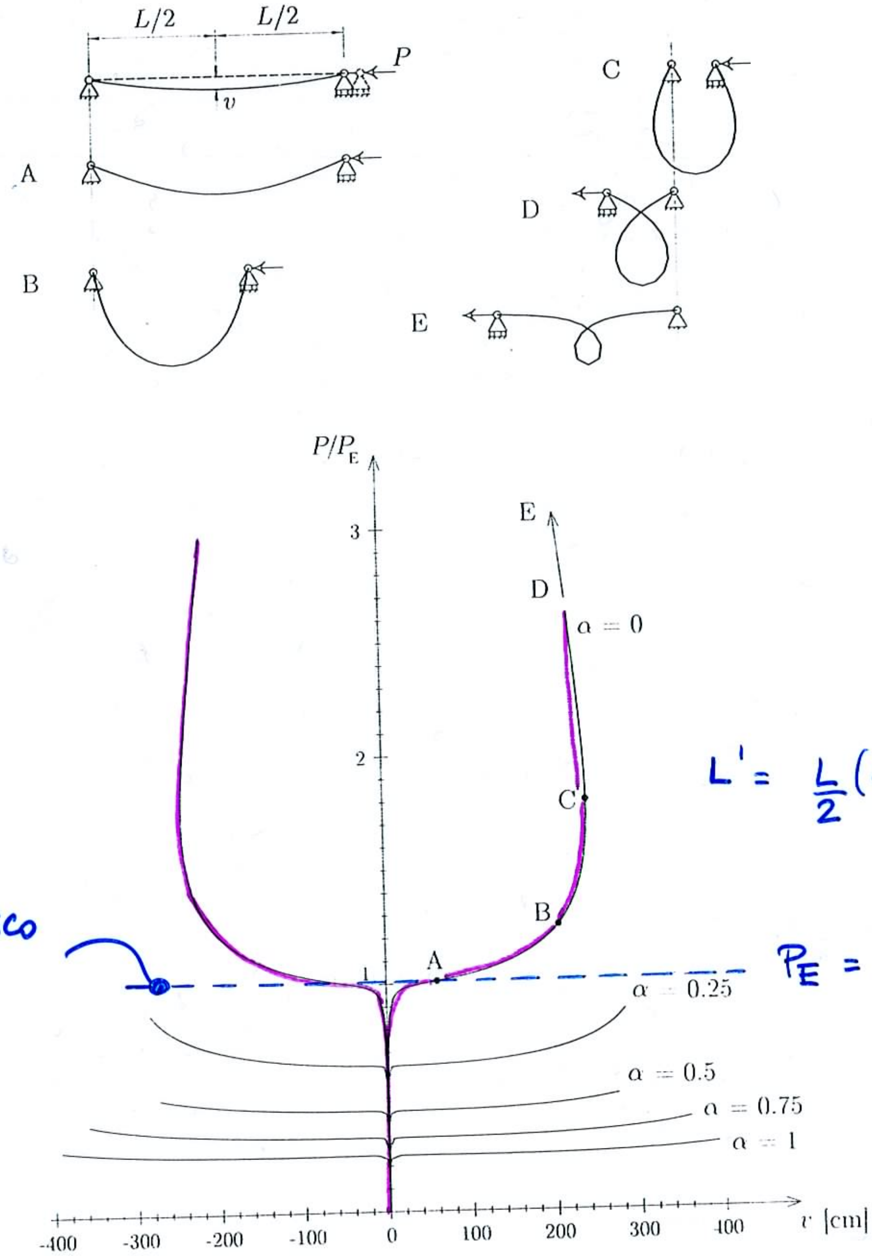


$\rightsquigarrow P_{cr} = AK\left(\frac{a}{l}\right)^2$

a = raggio giratore d'inerzia

Eulero (1707-1783) - Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes (1744)

Analisi agli elementi finiti



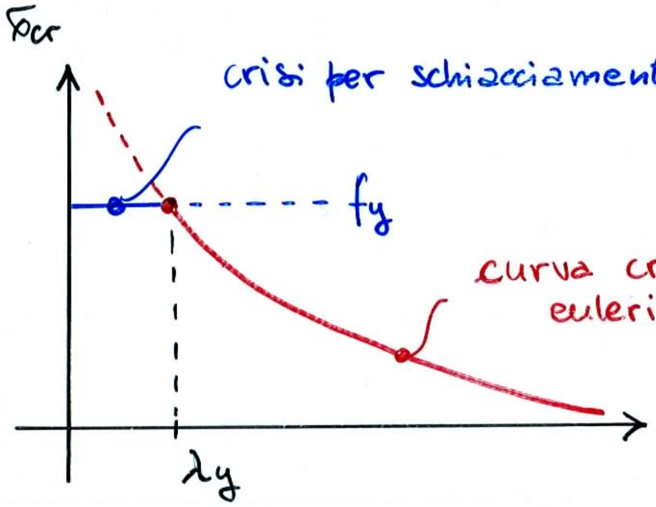
$L' = \frac{L}{2}(1+\alpha)$

carico critico euleriano

$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L'^2}$

Figura 6.5 I percorsi di equilibrio per diramazione stabile ed alcune conseguenti deformate strutturali, tutti ricavati attraverso l'elaborazione numerica eseguita.

IL CARICO CRITICO EULERIANO

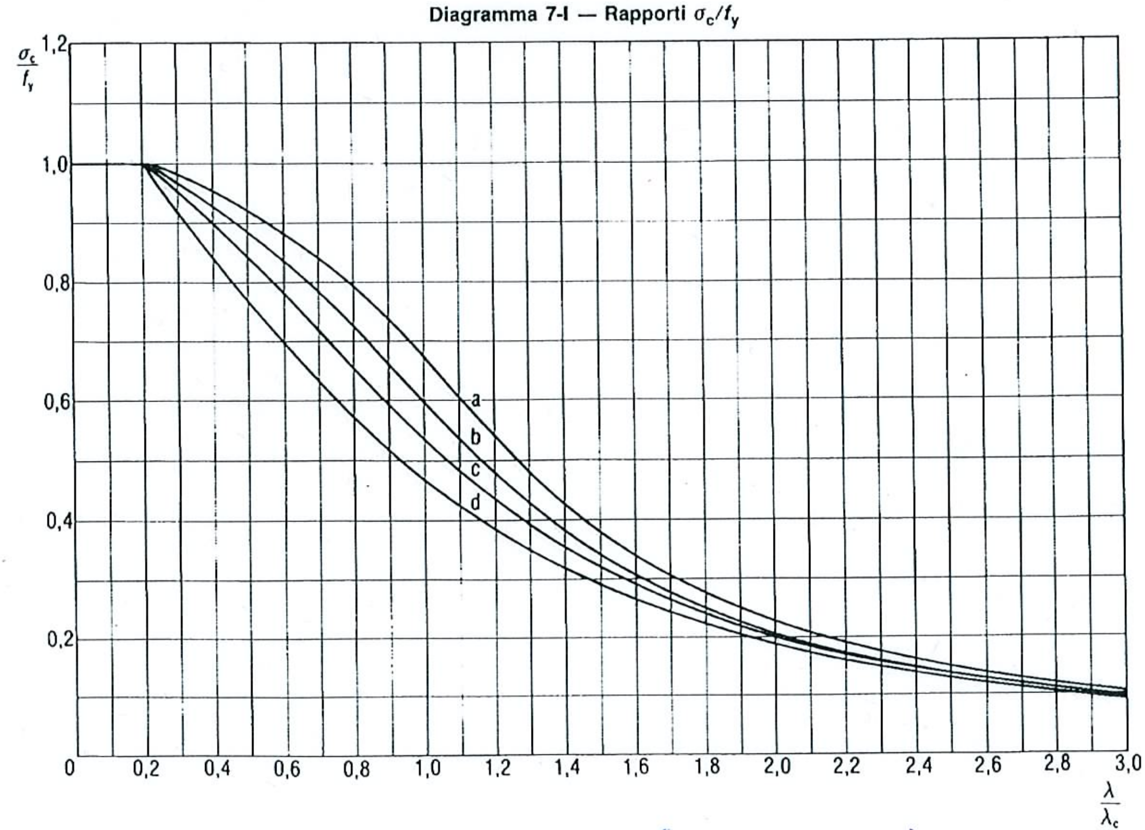


$\lambda = \frac{l_0}{\rho}$ SNELLEZZA

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2} \qquad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E (I/A)}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{(l_0/\rho)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

LA CURVA CRITICA EULERIANA NON DIPENDE DA IMPERFEZIONI (ES. ECCENTRICITA', CARICHI APPLICATI, COLONNA NON PERFETTAM. RETTILINEA)

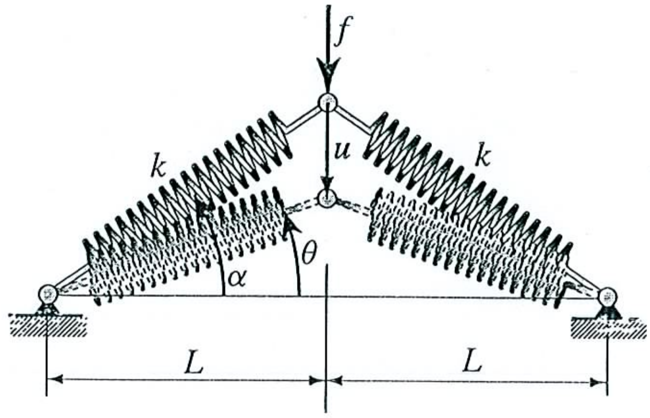
Diagramma 7-I — Rapporti σ_c/f_y



Sezioni in acciaio (CNR 10011)

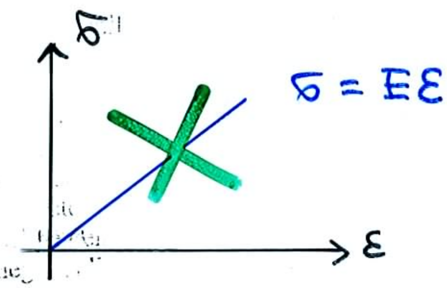
NON LINEARITA' GEOMETRICA E MECCANICA

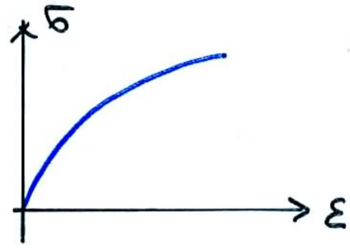
- NON LINEARITA' GEOMETRICA (APPROCCIO EULERIANO)



L'equilibrio deve essere scritto nella configurazione deformata incognita (= geometria deformata)

- NON LINEARITA' MECCANICA (ES. CEMENTO ARMATO)



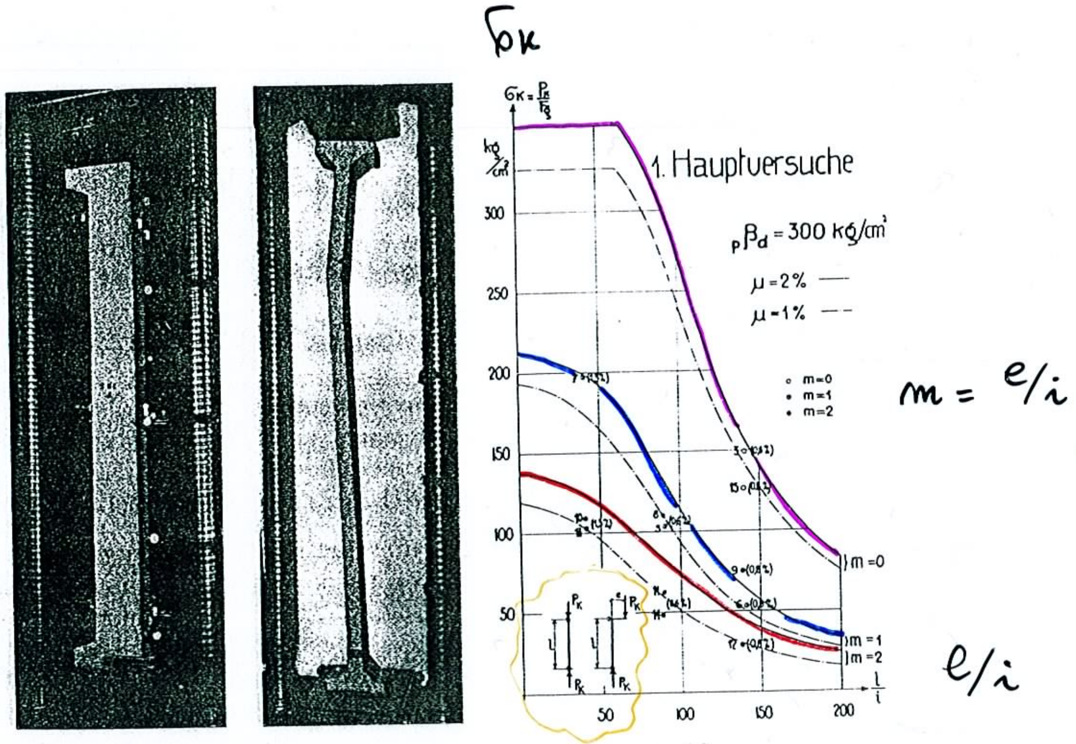


- fessurazione
- snervam. armature
- schiacciam. cls
- tension stiff.
- viscosita'

Il comportamento dei materiali non e' elastico lineare

INSTABILITA' DELLE COLONNE IN C.A.

Oskar Baumann "Die Knickung der Eisenbeton-Säulen"
(L'inflessione laterale delle colonne in c.a.) Zurigo 1935 PhD Thesis



a) b)

Figura 2.18 Le prove di Baumann ([28]): a) alcuni elementi indagati; b) relative curve critiche di instabilità.

Nelle colonne in c.a si ha contemporanea presenta di non linearità geometrica + meccanica (es. fessurea, snervamento armature)

⇓

LA CAPACITA' PORTANTE DELLA COLONNA DIPENDE ANCHE DALLE IMPERFEZIONI (es. eccentricità, geometria non perfett. rettilinea, ...)

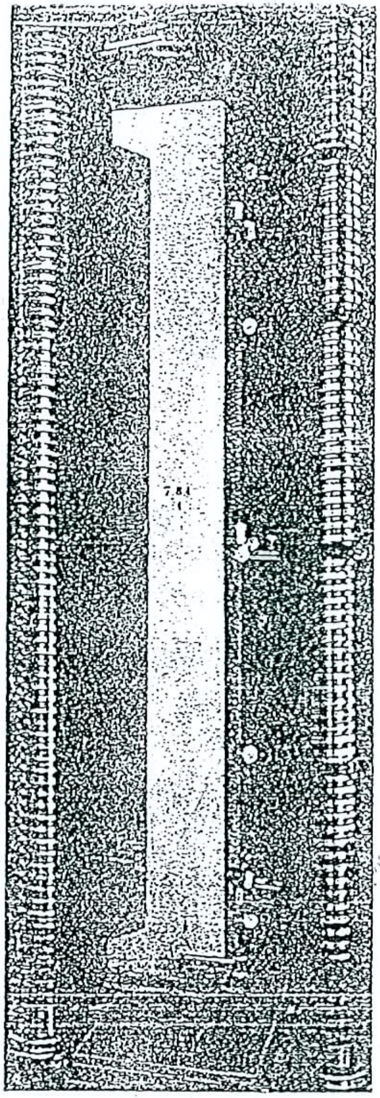


Fig. 37

1. Hauptserie

Säule Nr. 7

F = 25/25 cm; l = 2,70 m

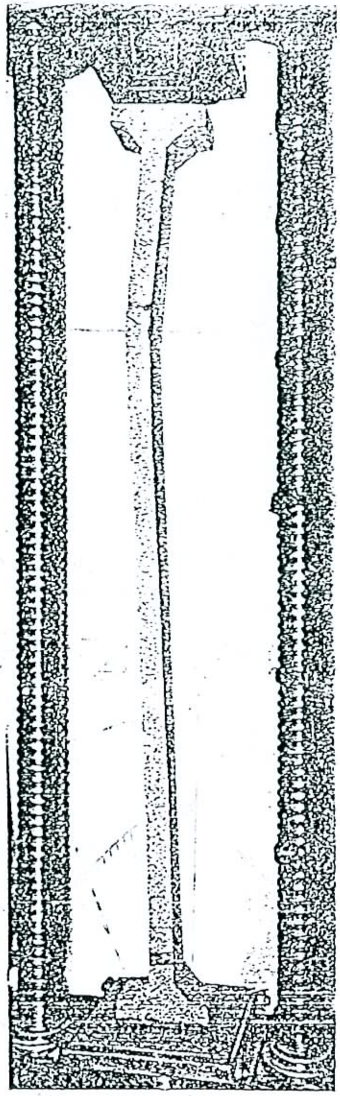


Fig. 38

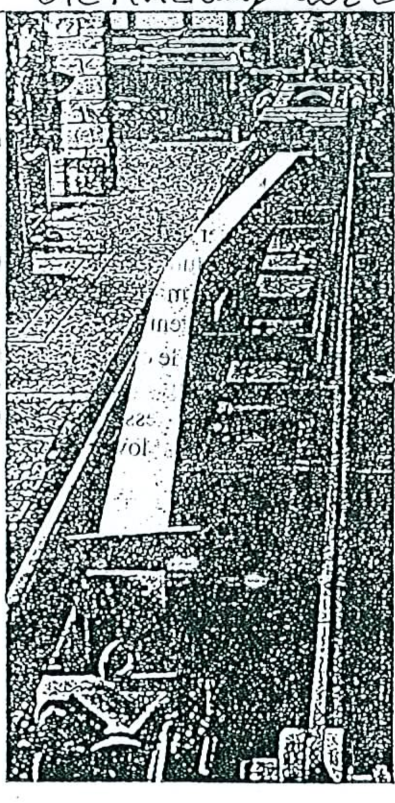
2. Hauptserie

Säule Nr. 27

F = 9/20 cm; l = 3,11 m

O. BAUMANN "Die Knickung der Eisenbeton-Säulen" Zürich 1935

Genossenschafts-Druckerei



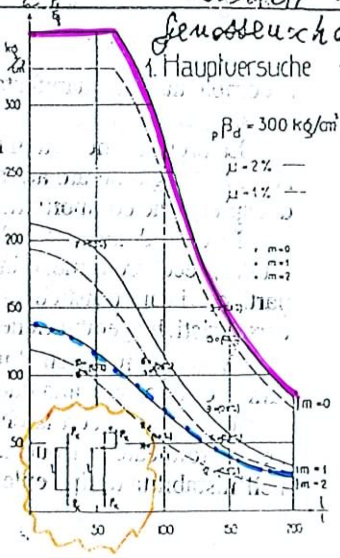


Fig. 39

Ausgeknickte Säule in der liegenden 100 t Presse

1. Hauptserie

Säule Nr. 12

F = 16/25 cm; l = 6,31 m

(nach Wegnahme der Aufhängungsvorrichtung)

C.O LONNA IN C.A. : METODO GENERALE

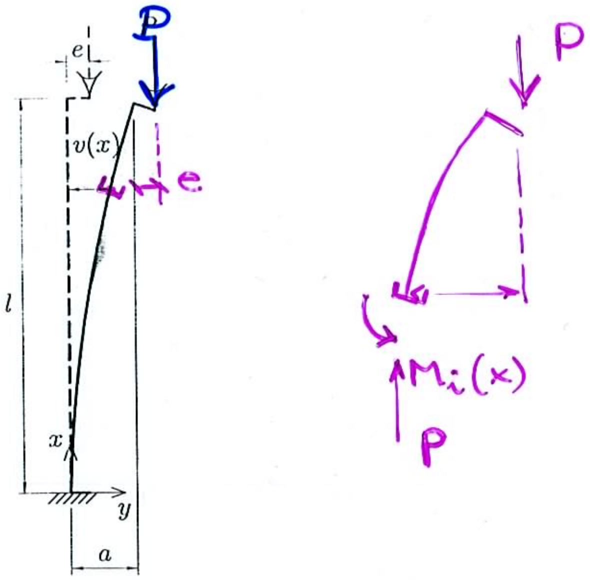


Figura 2.28 Determinazione dell'inflessione laterale di una colonna attraverso l'impiego del metodo cosiddetto "generale".

Ricerchiamo dunque, a titolo esemplificativo, l'equilibrio della colonna di Figura 2.28 (equilibrio già indagato, sotto diversa luce, in Figura 2.7), eguagliandone, in una generica sezione di ascissa x, il momento esterno M_e a quello interno M_i:

N.L. geometrica

$$M_e(x) = P\left(e + a - v(x)\right)$$

N.L. meccanica

$$M_i(x) = K_s\left(v''(x)\right)v''(x)\ , \tag{2.7}$$

essendo K_s la *rigidezza secante* della stessa generica sezione, funzione della curvatura (per "piccoli" spostamenti, come noto, può porsi $1/r \cong v''(x)$) che si manifesta in presenza dell'azione assiale $N = P$. Questa rigidezza secante può essere desunta, nella generica sezione, dal precedente legame $M-1/r-N$ (Figura 2.29).

Uguagliando le (2.7), si scrive l'equazione di equilibrio:

$$M_i(x) = M_e(x) \quad \Rightarrow \quad K_s\left(v''(x)\right)v''(x) + Pv(x) = P(e+a)\ , \tag{2.8}$$

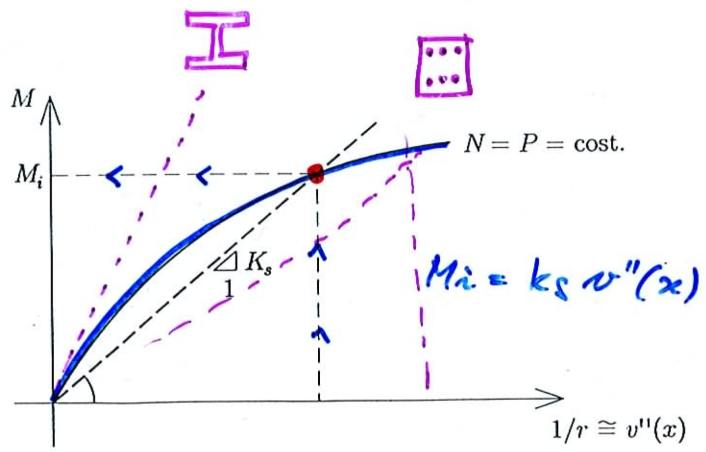


Figura 2.29 La rigidezza secante nel legame momento M – curvatura $1/r$ – azione assiale N per una sezione pressoinflessa di conglomerato armato.

COLONNA IN C.A. : METODI DI SOLUZIONE

Introducendo le condizioni al contorno, si ottiene il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} K_s\left(v''(x)\right)v''(x) + Pv(x) = P(e+a) & 0 \leqslant x \leqslant l \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Problema non lineare

Soluzione numerica

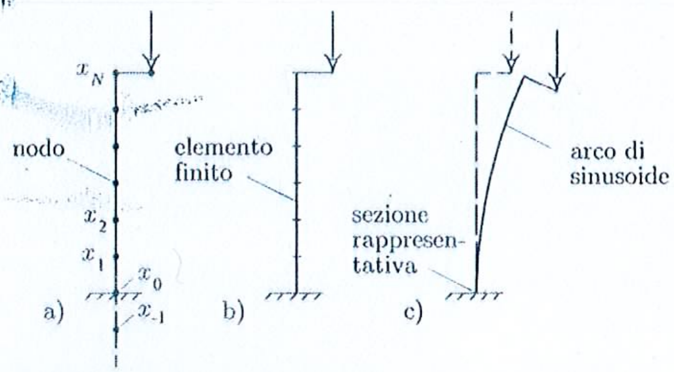
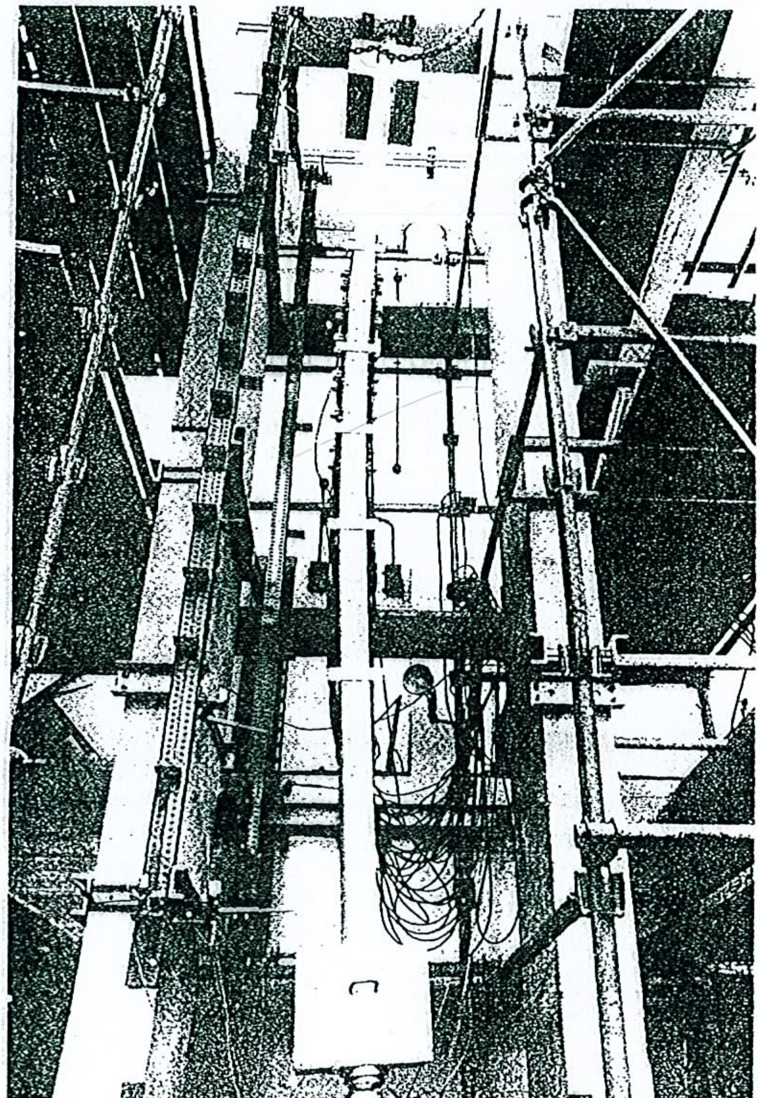


Figura 2.30 Analisi di una colonna isolata: a) metodo delle differenze finite; b) metodo degli elementi finiti; c) metodo approssimato della colonna modello.

Metodi di soluzione
- generale
  - elementi finiti
  - differenze finite
- semplificata (approssimata)
  - colonna modello
  - stato dell' equilibrio
  - domini M-N "modificati"
  - curvatura equivalente
  - rigidezza equivalente

COLONNA IN C.A. : ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



a)

L = 4,32 m

b)

Figura 6.38 Prove sperimentali [10]: l'instabilità di una colonna (a), incernierata alle sue estremità tramite i cuscinetti (b).

Cranston e Sturrok 1971

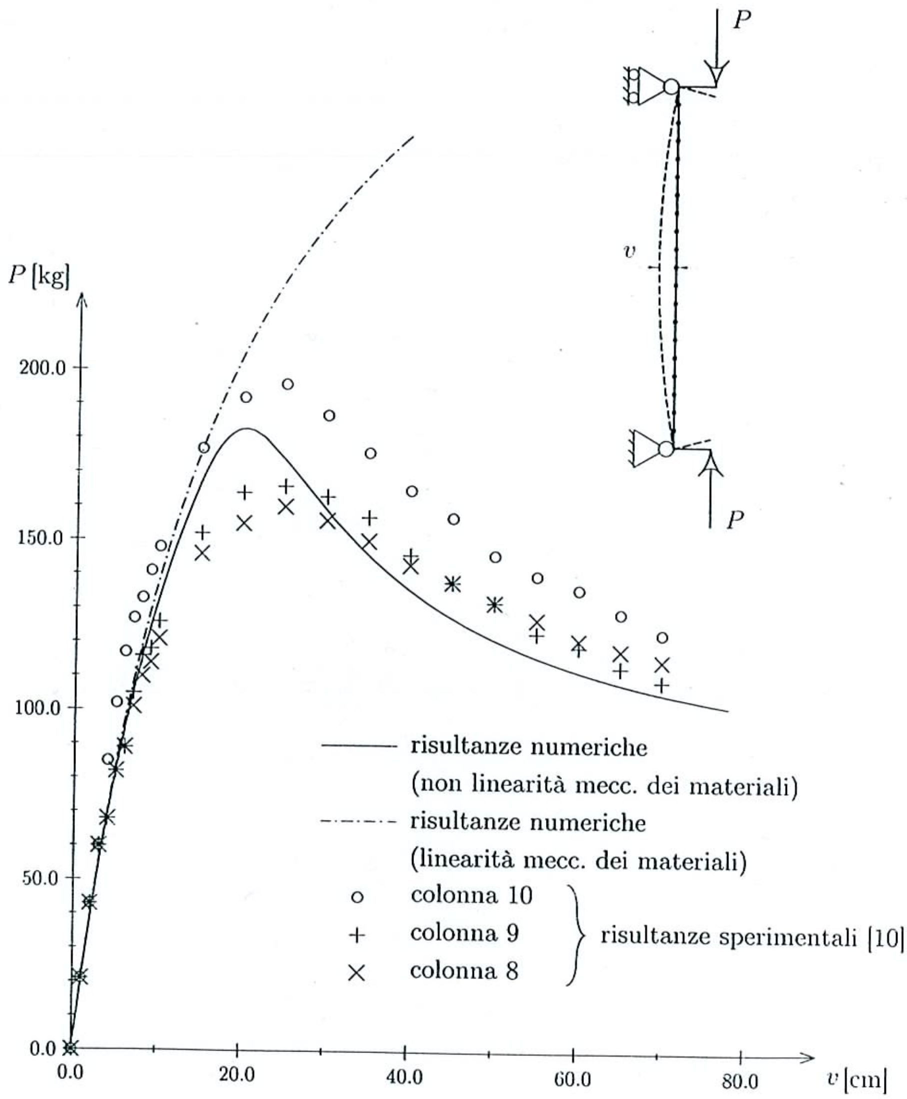


Figura 6.39 Confronto tra gli andamenti numerici e sperimentali del legame carico P – freccia v relativamente alle colonne 8, 9 e 10 dello studio [10].

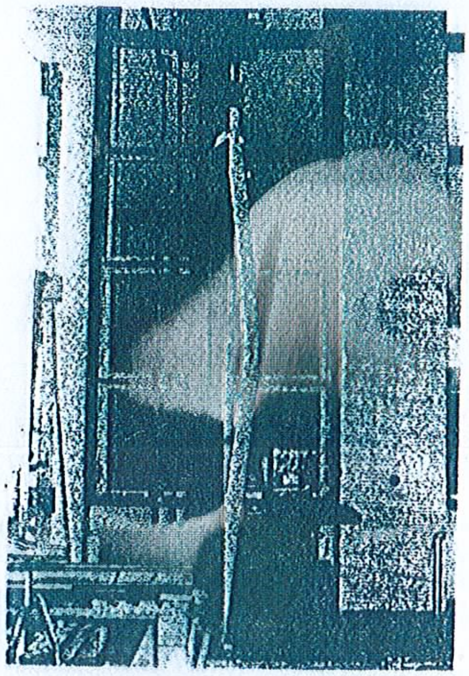


Figura 6.43 Il marcato sbandamento di una colonna indagata nel programma di prove sperimentali [11]. Gaede

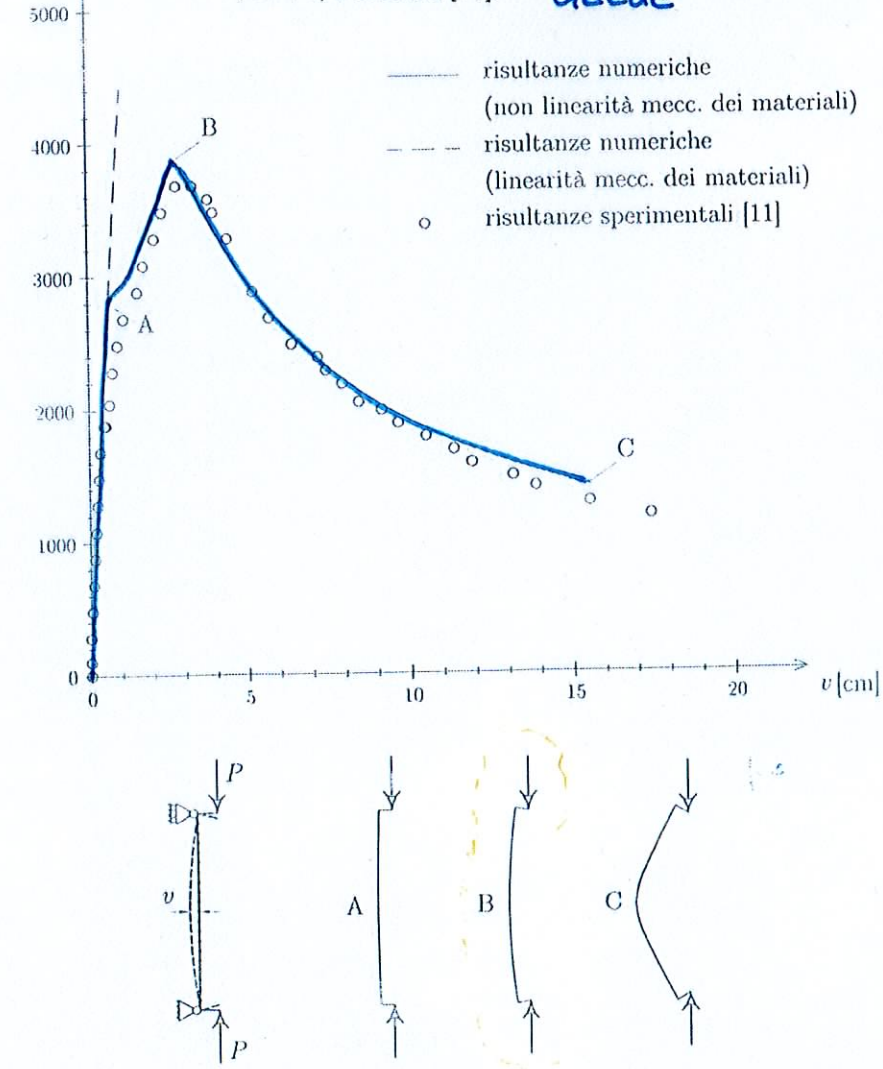


Figura 6.44 Confronto tra gli andamenti numerici e sperimentale del legame carico P – freccia v relativamente alla colonna II/4 dello studio [11].

INSTABILITA' NEL CA : EUROCODICE 2

PRINCIPIO

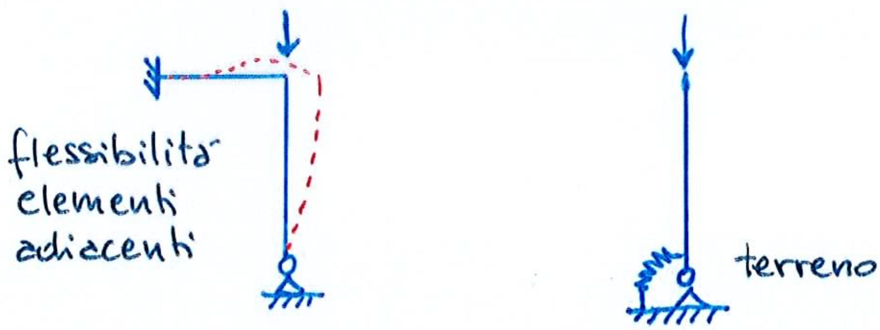
Generalità

(1)P La presente Sezione tratta gli elementi e le strutture il cui comportamento strutturale è significativamente influenzato da effetti del secondo ordine (per esempio pilastri, muri, pali, archi e gusci). Effetti globali del secondo ordine possono verificarsi in strutture con un sistema di controvento flessibile.

(2)P Se si tiene conto degli effetti del secondo ordine, vedere comma (6), l'equilibrio e la resistenza devono essere verificati nello stato deformato. Le deformazioni devono essere calcolate tenendo conto degli effetti della fessurazione, delle proprietà non lineari dei materiali e della viscosità.

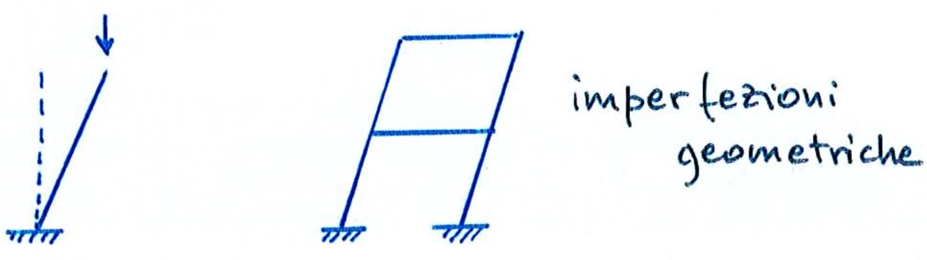
- fessurazione
- proprietà non lineari materiali
- viscosità

(3)P Ove rilevante, l'analisi deve includere l'effetto della flessibilità degli elementi adiacenti e delle fondazioni (interazione terreno-struttura).



(4)P Il comportamento strutturale deve essere studiato nella direzione nella quale possono prodursi le deformazioni e la flessione deviata deve essere tenuta in conto quando necessario.

(5)P Le incertezze nella geometria e nella posizione dei carichi assiali devono essere tenute in conto come effetti aggiuntivi del primo ordine basati su imperfezioni geometriche, vedere punto 5.2.



METODO GENERALE SECONDO EC2

5.8.6 **Metodo generale**

(1)P Il metodo generale è basato sull'analisi non lineare, comprendente la non linearità geometrica e cioè gli effetti del secondo ordine. Si applicano le regole per l'analisi non lineare date nel punto 5.7.

(2)P Devono essere utilizzate curve tensioni-deformazioni per calcestruzzo e acciaio idonee per l'analisi globale. L'effetto della viscosità deve essere tenuto in conto.

(3) Possono essere utilizzate le relazioni tensioni-deformazioni per calcestruzzo e acciaio date nel punto 3.1.5, l'espressione (3.14) e il punto 3.2.3 (figura 3.8). Con diagrammi tensioni-deformazioni basati sui valori di progetto, si ottiene direttamente dall'analisi il valore di progetto del carico ultimo. Quindi nell'espressione (3.14) e nel valore di k si sostituisce f_{cm} con la resistenza a compressione di progetto f_{cd} e si sostituisce E_{cm} con:

$$E_{cd} = E_{cm} / \gamma_{cE} \tag{5.20}$$

Nota Il valore di γ_{cE} da adottare in uno Stato può essere reperito nella sua appendice nazionale. Il valore raccomandato è 1,2.

(4) In assenza di modelli più raffinati, la viscosità può essere tenuta in conto moltiplicando tutti i valori della deformazione nel diagramma tensioni-deformazioni secondo il punto 5.8.6 (3) per un fattore $(1 + \varphi_{ef})$, dove φ_{ef} è il coefficiente efficace di viscosità secondo il punto 5.8.4.

(5) L'effetto favorevole del "tension stiffening" può essere tenuto in conto.

Nota Questo effetto è favorevole e per semplicità può essere sempre trascurato.

(6) Generalmente le condizioni di equilibrio e congruenza delle deformazioni vengono soddisfatte in un certo numero di sezioni trasversali. Un'alternativa semplificata consiste nel considerare soltanto la sezione critica o le sezioni critiche, assumendo una variazione appropriata della curvatura tra di esse, per esempio simile a quella del momento del primo ordine o comunque semplificata in modo adeguato.

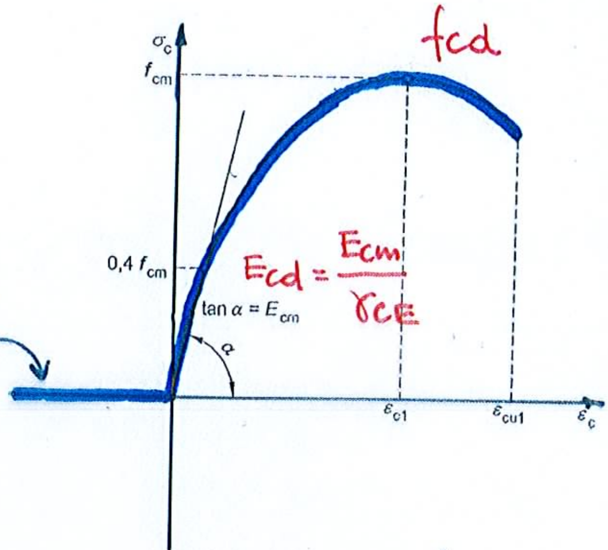
L'instabilità è uno stato limite ultimo

Valori di design per i materiali

METODO GENERALE : LEGGI COSTITUTIVE

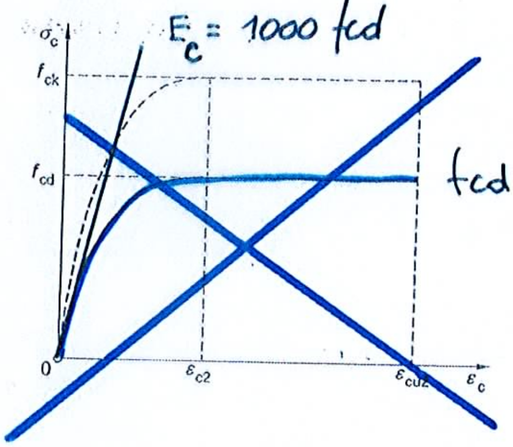
- Sargin

no resist. trazione

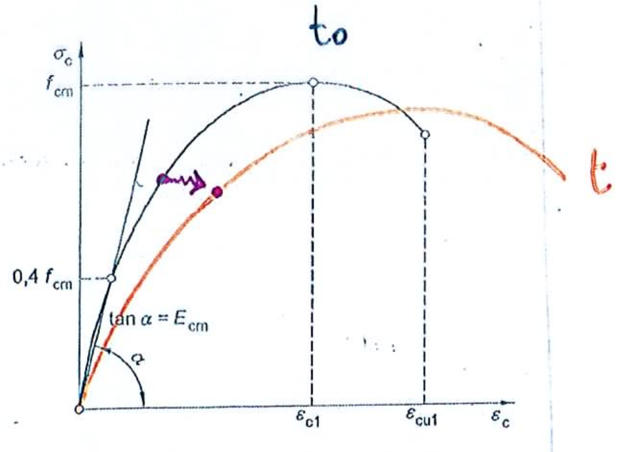


$\gamma_{CE} = 1.2$

- Parabola- rettangolo



non consente di definire correttamente E_c



EFFETTO DELLA VISCOSITA'

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)\,(1 + \varphi_{eff})$$

φ_{eff} = coeff. di viscosità efficace.

METODO GENERALE : ESEMPIO

(Guida all' uso dell' Eurocodice 2 - AICAP)

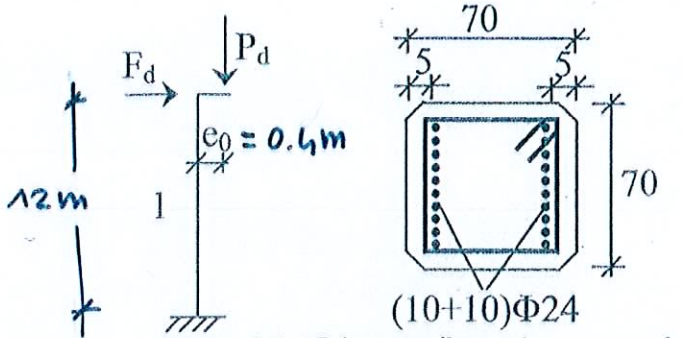


Figura 5.6. Colonna snella e sezione trasversale

Dati

$l = 12000$ mm
$e_0 = 400$ mm
$f_{ck} = 40$ MPa
$f_{yk} = 450$ MPa
$\varepsilon_{uk} = 75‰$
$\varphi_{ef} = 2.5$
$P_d = 1$ MN
$F_d = 40$ kN
$E_{cm} = 35$ GPa

Materiali

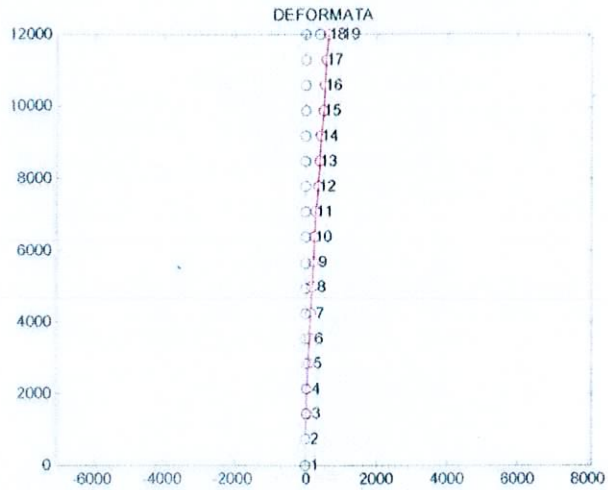
$$f_{cd} = 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \cdot \frac{40}{1.5} = 22.67 \text{ MPa}$$

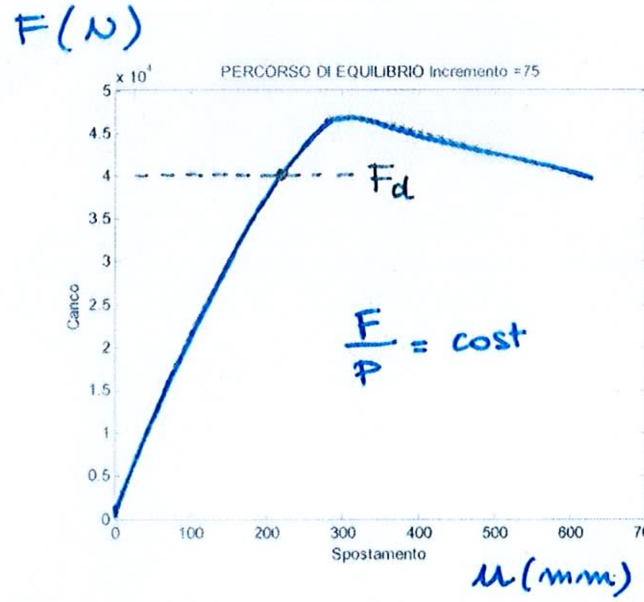
$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{CE}} = \frac{35 \text{ GPa}}{1.2} = 29.167 \text{ GPa}$$

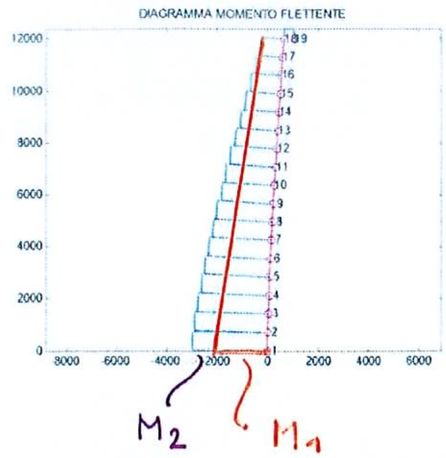
$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_S} = \frac{450}{1.15} = 391 \text{ MPa}$$

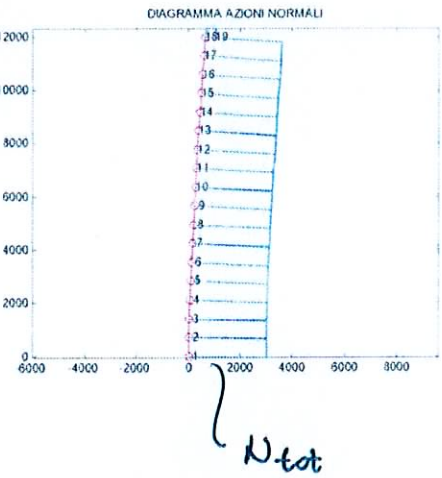
ESEMPIO: METODO GENERALE

(Ferretti, Iori, Morini - La stabilità delle strutture)
Programma fornito nel CD allegato



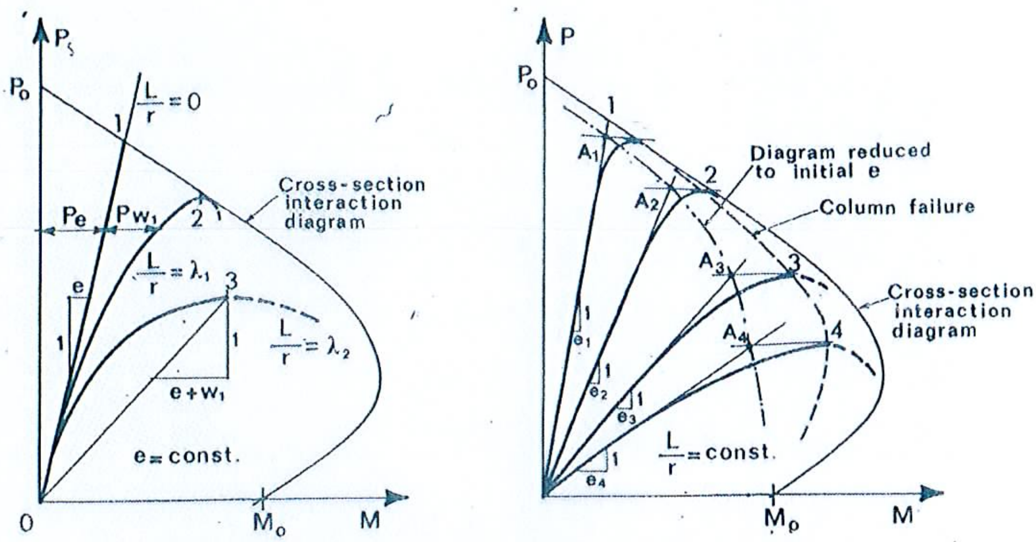






$$M_{tot} = M_1 + M_2$$

DOMINIO COLONNA SNELLA



(Bažant, Cedolin)

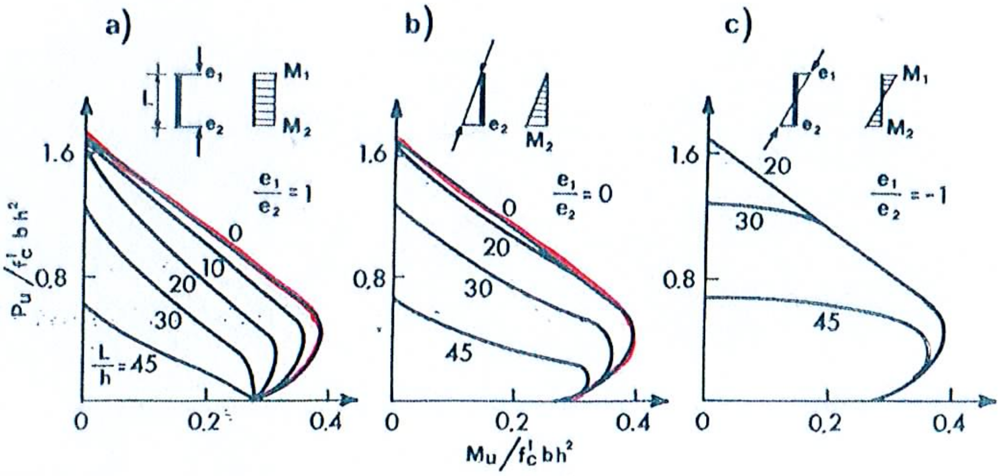
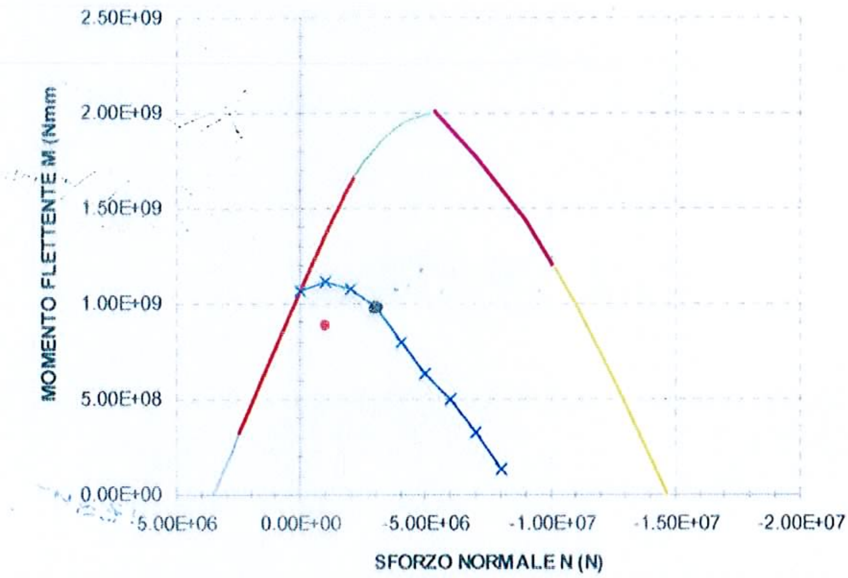


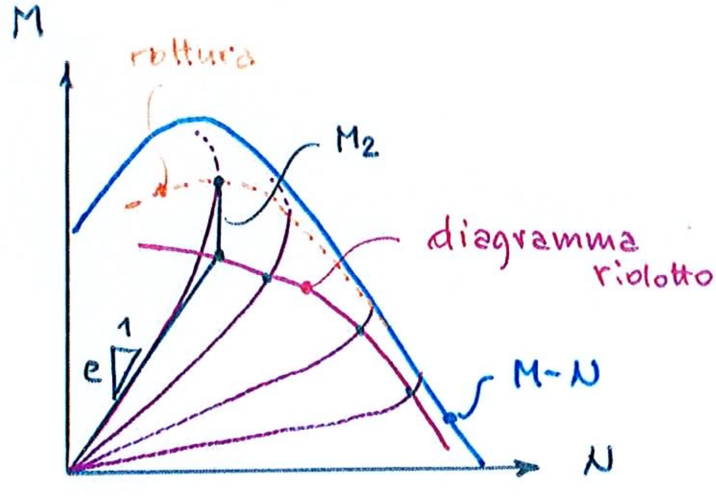
Figure 8.29 Reduced interaction diagrams. (*Adapted from MacGregor, Breen, and Pfrang, 1970.*)

ESEMPIO : DOMINIO COLONNA SNELLA

Dominio resistente colonna snella (USA)

Diagramma di interazione ridotto (ITA)





La rottura non avviene sul dominio M-N

METODO DELLA COLONNA MODELLO: IPOTESI

- la deformata si approssima con cosinusoide
- la curvatura non cambia segno
- la sezione é costante
- la sezione più sollecitata é quelle di base

Consideriamo un'asta incastrata alla base, libera in sommità ed inflessa con curvature di ugual segno (Figura 3.6). Il metodo della colonna modello assegna a priori, in modo approssimato, la deformata dell'asta secondo la relazione:

?

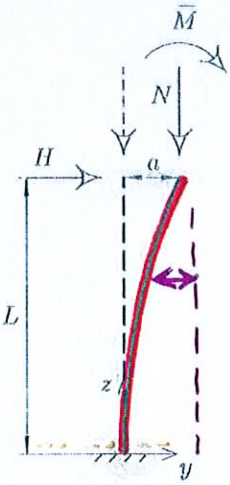
$$y(z) = a\left(1 - \cos\frac{\pi z}{2L}\right) \quad , \tag{3.2}$$

cosicché il valore dello spostamento orizzontale a di sommità può essere espresso in funzione della curvatura alla base della colonna, ovvero:

$$(1/r)_{z=0} \cong y''_{z=0} = \frac{\pi^2 a}{4L^2} \quad . \tag{3.3}$$

Il cosiddetto momento di secondo ordine dovuto all'inflessione dell'asta, nella sezione più sollecitata d'incastro dove si esegue la verifica, risulta pertanto:

$$a = \frac{4L^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{r}\right)_{z=0}$$



$$M_I = \bar{M} + H \cdot L$$

$$M_{II} = N \cdot a = N \underbrace{\frac{4L^2}{\pi^2}}_{\text{pendenta retta}} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_{z=0}$$

Figura 3.6 Lo schema statico della cosiddetta "colonna modello".

$$M_{II} = Na = N\frac{4L^2}{\pi^2}(1/r)_{z=0} \tag{3.4}$$

ed il momento totale M, sempre nella stessa sezione, vale:

$$M = M_I + M_{II} \quad , \tag{3.5}$$

$$\boxed{M_i = M_e}$$ Condizione di equilibrio

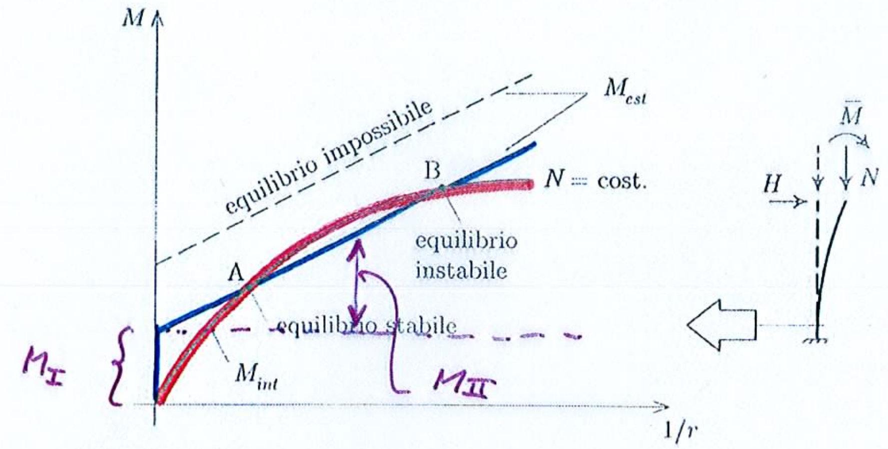
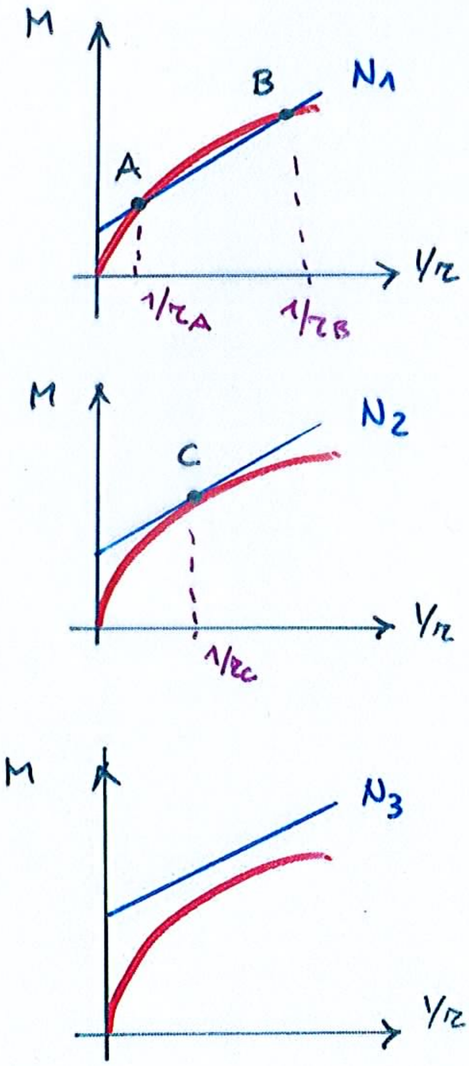


Figura 3.7 La messa a confronto dei valori del momento interno (linea curva) e del momento esterno (linee rette) nella sezione d'incastro della colonna.



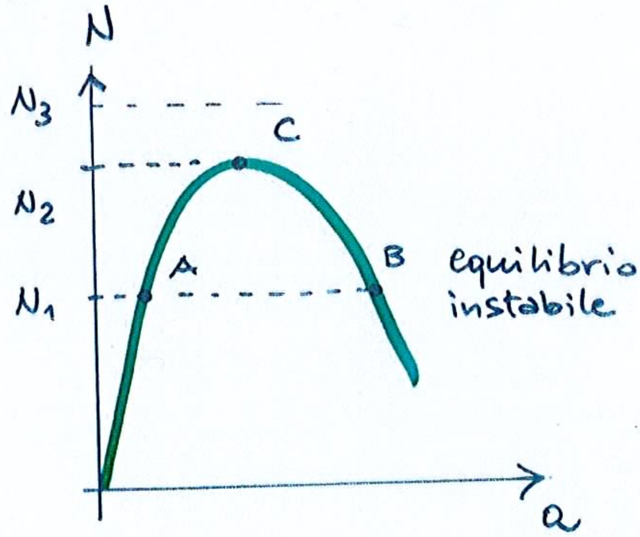
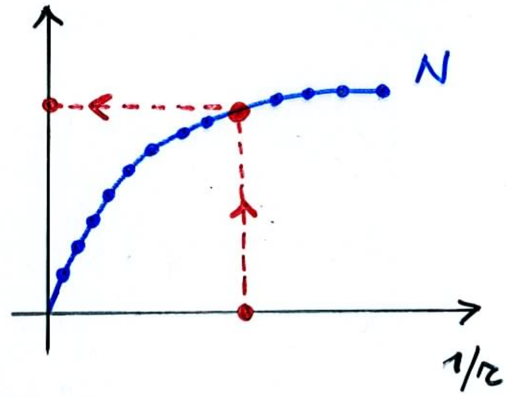


DIAGRAMMA MOMENTO - CURVATURA - N

Il diagramma $M - 1/r - N$ viene tracciato per punti per un dato N



- **CONGRUENZA**

- Sezioni piane
- $1/r$ assegnato
- ε_m incognito....

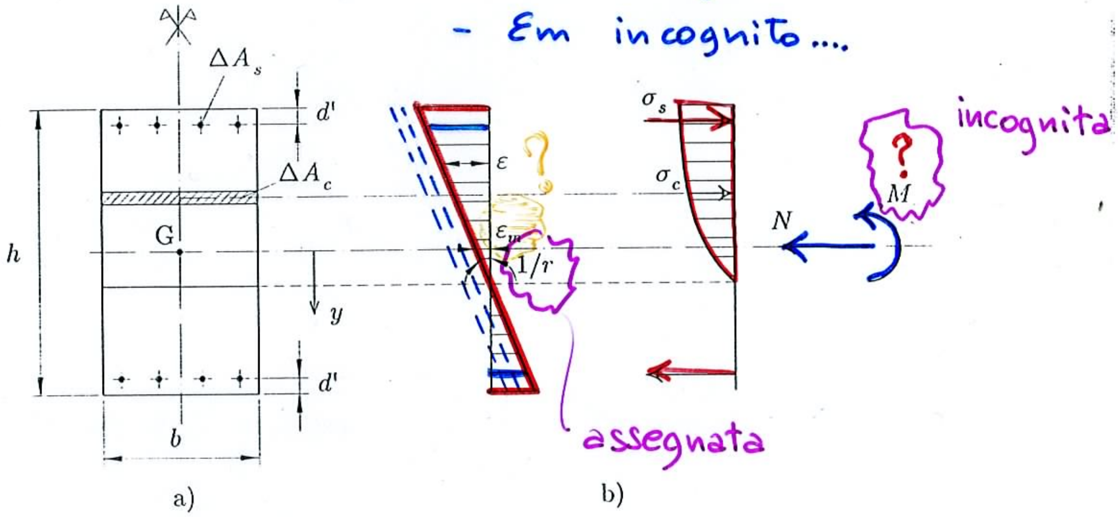


Figura 3.1 La sezione esaminata: a) sue caratteristiche geometriche; b) stati deformativo e tensionale ad essa relativi.

- **LEGGI COSTITUTIVE**

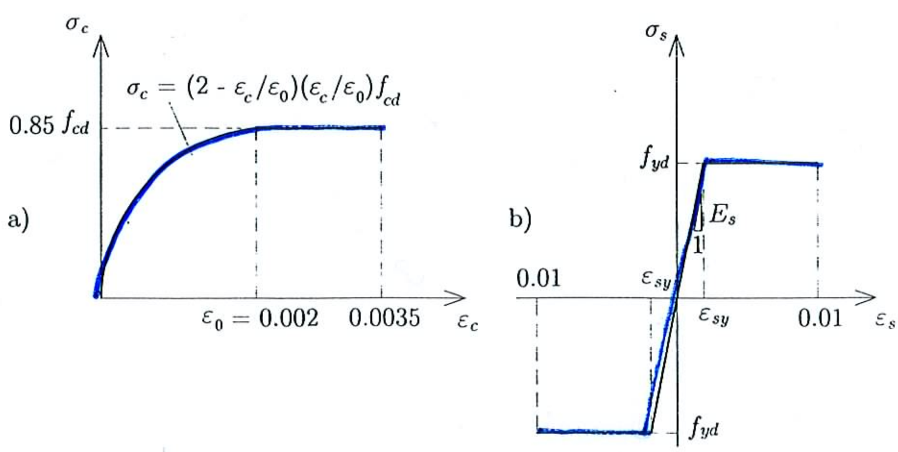


Figura 2.25 Legami sforzi-deformazioni di "progetto": a) conglomerato compresso; b) acciaio compresso e teso.

DIAGRAMMA MOMENTO - CURVATURA - N

- EQUILIBRIO

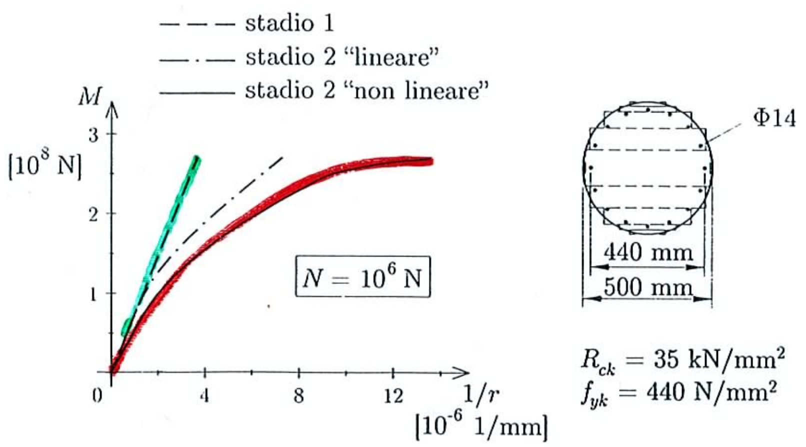
$$\begin{cases} N = \int\limits_{A_c} \sigma_c \, \mathrm{d}A_c + \sum\limits_i \sigma_s \, A_{s,i} & \rightsquigarrow \varepsilon_m = \varepsilon_0 \\ M = \int\limits_{A_c} \sigma_c \, y \, \mathrm{d}A_c + \sum\limits_i \sigma_s \, y_{s,i} \, A_{s,i} & \rightsquigarrow M \\ 1/r = (\varepsilon_0 - \varepsilon) / y \, , \end{cases} \tag{2.5}$$

? ε_0 VIENE RICAVATA ITERATIVAMENTE FINO AD OTTENERE LO SFORZO NORMALE N ASSEGNATO

essendo:

σ_c la tensione di compressione nel calcestruzzo;
A_c l'area di calcestruzzo;
σ_s la tensione (di compressione o trazione) nell'acciaio;
$A_{s,i}$ l'area della generica barra d'armatura;
y la distanza tra l'area elementare d'integrazione ed il baricentro geometrico G della sezione pensata interamente reagente;
$y_{s,i}$ la distanza tra la generica barra d'armatura e lo stesso baricentro geometrico G della sezione;
ε_0 la deformazione in corrispondenza dell'asse baricentrico;
ε la deformazione della generica striscia infinitesima d'integrazione considerata.

PROGRAMMA DI CALCOLO



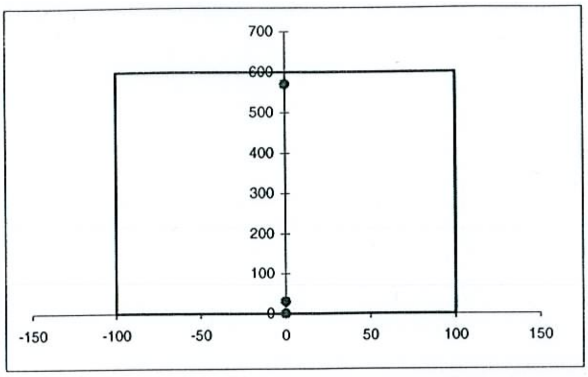
$R_{ck} = 35$ kN/mm^2
$f_{yk} = 440$ N/mm^2

Figura 3.5 La relazione $M - 1/r - N$ per una sezione in conglomerato armato di forma circolare, ricavata attraverso l'uso di un programma computazionale contenuto nel supporto informatico allegato alla terza di copertina.

DIAGRAMMA MOMENTO - CURVATURA : PROGRAMMA

DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLA SEZIONE



	Basi	Altezze	As [mm²]	Y As [mm]
1	200	600	462	30
2			157	570
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

CARATTERISTICHE MECCANICHE DEI MATERIALI

R_{ck} =	35	Resistenza cubica caratteristica del calcestruzzo in N/mm²
f_{ck} =	29.05	Resistenza cilindrica caratteristica del calcestruzzo in N/mm² ($f_{ck}=0.83R_{ck}$)
f_{cd} =	18.16	Resistenza di calcolo del calcestruzzo in N/mm² ($f_{cd}=f_{ck}/1.6$)
f_{ctm} =	2.83	Resistenza media a trazione in N/mm² (f_{ctm}=0.3f_{ck}^2/3 EC2 3.1.2.3)
f_{ctk} =	1.98	Resistenza caratteristica a trazione in N/mm² (f_{ctk}=0.7*f_{ctm} EC2 3.1.2.3)
f_{ctd} =	0.00	Resistenza di calcolo a trazione in N/mm²
E_{cm} =	31670.36	Modulo di elasticita' medio del calcestruzzo in N/mm² (9500*(f_{ck}+8)^2/3)
E_{cd} =	19793.98	Modulo di elasticita' di calcolo del calcestruzzo in N/mm² (E_{cm}/1.6)
f_{yk} =	440	Resistenza caratteristica dell'acciaio in N/mm²
f_{yd} =	382.61	Resistenza di calcolo dell'acciaio in N/mm² ($f_{yd}=f_{yk}/1.15$)
E_s =	200000	Modulo di elasticita' dell'acciaio in N/mm²
N =	-1.0E+06	Sforzo normale in N (applicato ad H/2 e positivo se di trazione)
β_1 =	1	Coefficiente β_1 EC2 A.2.2 (0.5 barre lisce, 1 barre aderenza migliorata)
β_2 =	1	Coefficiente β_2 EC2 A.2.2 (0.5 carichi ripetuti, 1 carichi breve durata)

Legge cls — 2 Legge costitutiva del calcestruzzo:
- 1 = Lineare elastica (l.e.)
- 2 = Sargin (EC2 4.2.1.3.3)
- 3 = Parabola rettangolo (EC2 4.2.1.3.3)

Valori di calcolo? — 1 Caratteristiche meccaniche dei materiali:
- 1 = valori caratteristici
- 2 = valori di calcolo

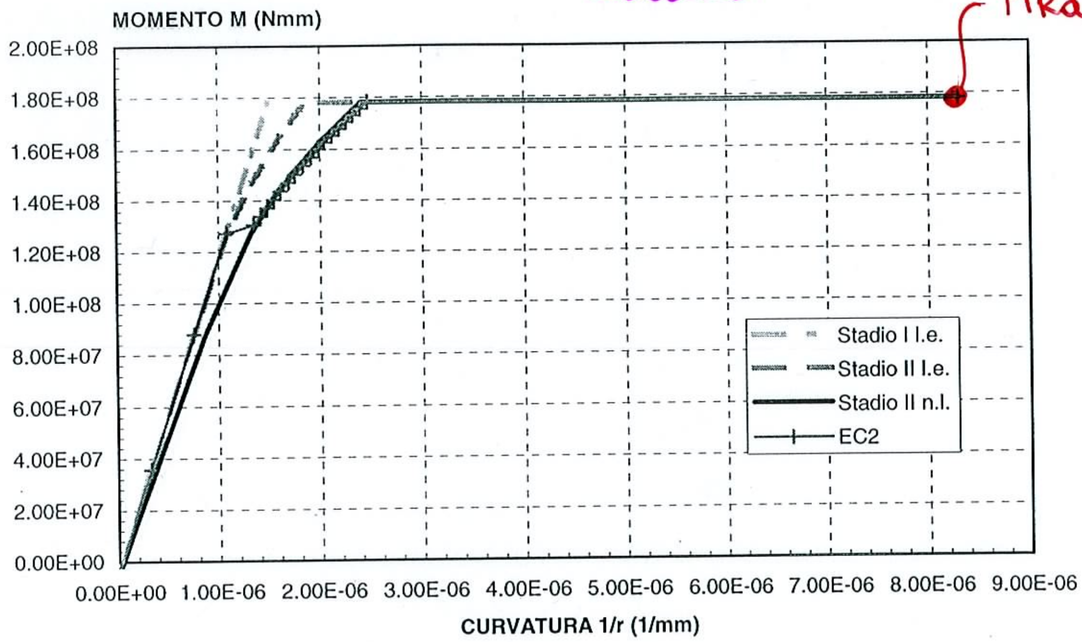
QUALI SCEGLIERE?

I_1 = 3.8383E+09 Momento d' inerzia sezione stadio I in mm^4

Mcr = 1.2716E+08 Momento di fessurazione in Nmm
MRd 1.7820E+08 Momento ultimo di calcolo in Nmm
Campo 4 Campo in cui viene raggiunto lo stato limite ultimo

DIAGRAMMA M-1/r N = -1000000 N Nsd = NRd

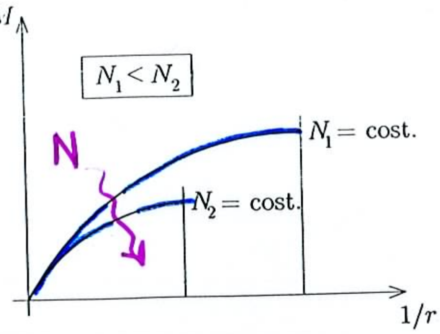
MRd



	STADIO I l.e.		STADIO II l.e.		STADIO II n.l.		EC2 (A.2.2)	
	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)
1	0.00E+00	-3.55E+06	5.35E-09	-3.55E+06	6.99E-09	-3.55E+06	0.00E+00	-3.55E+06
2	3.23E-07	3.57E+07	3.24E-07	3.57E+07	3.73E-07	3.57E+07	3.23E-07	3.57E+07
3	7.53E-07	8.79E+07	7.54E-07	8.79E+07	8.65E-07	8.79E+07	7.53E-07	8.79E+07
4	1.08E-06	1.27E+08	1.09E-06	1.27E+08	1.32E-06	1.27E+08	1.08E-06	1.27E+08
5	1.10E-06	1.30E+08	1.13E-06	1.30E+08	1.37E-06	1.30E+08	1.35E-06	1.30E+08
6	1.13E-06	1.34E+08	1.16E-06	1.34E+08	1.42E-06	1.34E+08	1.42E-06	1.34E+08
7	1.16E-06	1.37E+08	1.21E-06	1.37E+08	1.48E-06	1.37E+08	1.48E-06	1.37E+08
8	1.18E-06	1.40E+08	1.25E-06	1.40E+08	1.53E-06	1.40E+08	1.55E-06	1.40E+08
9	1.21E-06	1.44E+08	1.30E-06	1.44E+08	1.59E-06	1.44E+08	1.61E-06	1.44E+08
10	1.24E-06	1.47E+08	1.33E-06	1.47E+08	1.66E-06	1.47E+08	1.69E-06	1.47E+08
11	1.26E-06	1.50E+08	1.39E-06	1.50E+08	1.72E-06	1.50E+08	1.75E-06	1.50E+08
12	1.29E-06	1.53E+08	1.43E-06	1.53E+08	1.79E-06	1.53E+08	1.84E-06	1.53E+08
13	1.32E-06	1.57E+08	1.48E-06	1.57E+08	1.87E-06	1.57E+08	1.91E-06	1.57E+08
14	1.35E-06	1.60E+08	1.54E-06	1.60E+08	1.94E-06	1.60E+08	1.99E-06	1.60E+08
15	1.37E-06	1.63E+08	1.58E-06	1.63E+08	1.99E-06	1.63E+08	2.04E-06	1.63E+08
16	1.39E-06	1.65E+08	1.61E-06	1.65E+08	2.06E-06	1.65E+08	2.12E-06	1.65E+08
17	1.41E-06	1.68E+08	1.66E-06	1.68E+08	2.13E-06	1.68E+08	2.19E-06	1.68E+08
18	1.43E-06	1.70E+08	1.71E-06	1.70E+08	2.20E-06	1.70E+08	2.26E-06	1.70E+08
19	1.45E-06	1.73E+08	1.76E-06	1.73E+08	2.27E-06	1.73E+08	2.33E-06	1.73E+08
20	1.47E-06	1.76E+08	1.81E-06	1.76E+08	2.34E-06	1.76E+08	2.40E-06	1.76E+08
21	1.50E-06	1.78E+08	1.86E-06	1.78E+08	2.41E-06	1.78E+08	2.47E-06	1.78E+08
22	1.50E-06	1.78E+08	8.30E-06	1.78E+08	8.30E-06	1.78E+08	8.30E-06	1.78E+08

Stadio I = calcestruzzo resistente a trazione e compressione
Stadio II = calcestruzzo resistente a sola compressione
l.e. = calcestruzzo compresso lineare elastico
n.l. = calcestruzzo compresso non lineare
1/r = curvatura

DIAGRAMMA M - 1/r - N : IMPORTANZA DI N



Il diagramma dipende da N

Figura 3.3 La relazione momento M – curvatura $1/r$ – azione assiale N.

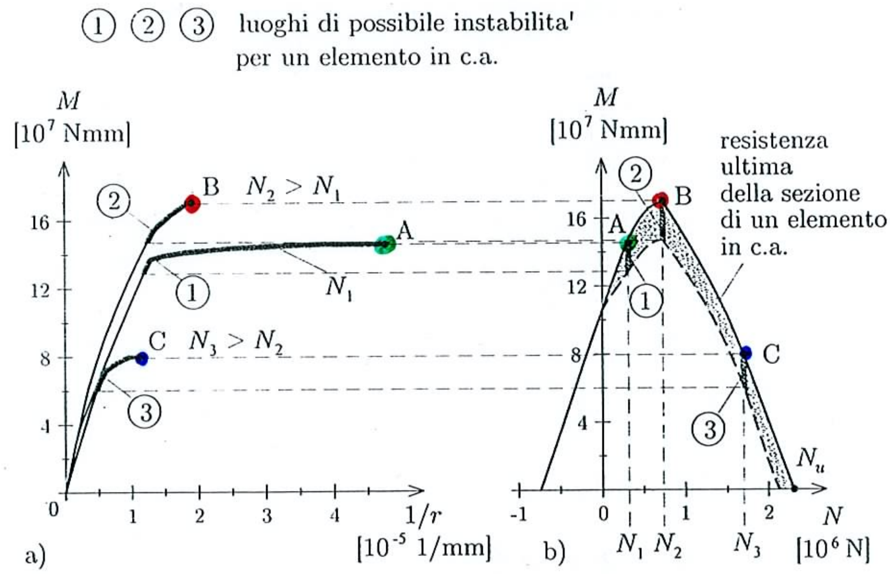


Figura 2.26 Il legame momento–curvatura–azione assiale per la sezione in conglomerato armato di Figura 2.23: a) intreccio delle curve al variare di N ; b) il corrispondente dominio di interazione $M - N$ per la stessa sezione, con indicate la zona di "contrazione" per effetto dell'instabilità.

Al crescere di N i diagrammi si "intrecciano"

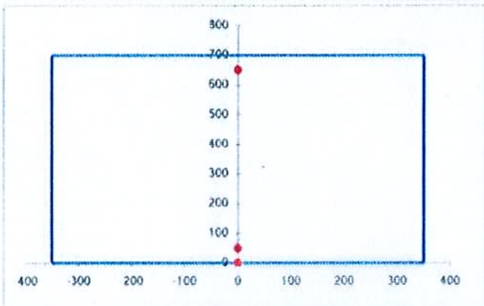
METODO COLONNA MODELLO : ESEMPIO

(Ferretti, Iori, Morini - La Stabilita' delle strutture, CD allegato)

Programma per **SOLO USO DIDATTICO** fornito ai partecipanti del Corso di Aggiornamento Professionale in merito alla
MISURA DELLA SICUREZZA DI STRUTTURE IN C.A. E C.A.P. CON IL METODO SEMIPROBABILISTICO AGLI STATI LIMITE
Convenzione tra l'Universita' di Parma e l'Ordine degli Ingegneri della Provincia di Parma ai sensi art. 92 DPR 386/80
Maggio 1997

DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLA SEZIONE



	Basi	Altezze	As [mm²]	Y As [mm]
1	700	700	4523.76	50
2			4523.76	650
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

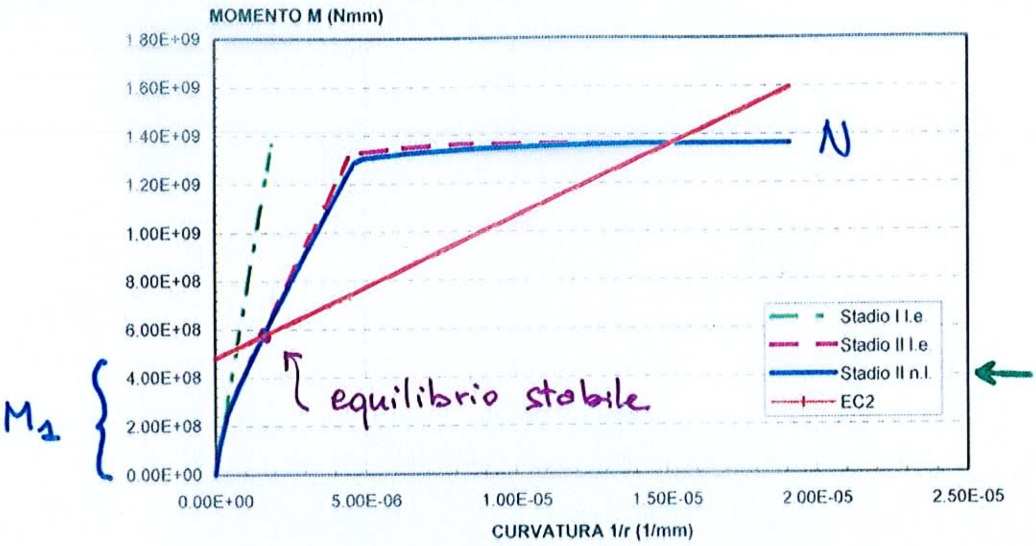
CARATTERISTICHE MECCANICHE DEI MATERIALI

R_{ck} =	48.1927711	Resistenza cubica caratteristica del calcestruzzo in N/mm²
f_{ck} =	40.00	Resistenza cilindrica caratteristica del calcestruzzo in N/mm² (f_{ck}=0.83R_{ck})
f_{cd} =	26.67	Resistenza di calcolo del calcestruzzo in N/mm² (f_{cd}=f_{ck}/1.6)
f_{ctm} =	3.51	Resistenza media a trazione in N/mm² (f_{ctm}=0.3f_{ck}^2/3 EC2 3.1.2.3)
f_{ctk} =	2.46	Resistenza caratteristica a trazione in N/mm² (f_{ctk}=0.7*f_{ctm} EC2 3.1.2.3)
f_{ctd} =	0.00	Resistenza di calcolo a trazione in N/mm²
E_{cm} =	35000.00	Modulo di elasticita' medio del calcestruzzo in N/mm² (9500*(f_{ck}+8)^2/3)
E_{cd} =	29166.67	Modulo di elasticita' di calcolo del calcestruzzo in N/mm² (E_{cm}/1.6)
f_{yk} =	450	Resistenza caratteristica dell'acciaio in N/mm²
f_{yd} =	391.30	Resistenza di calcolo dell'acciaio in N/mm² (f_{yd}=f_{yk}/1.15)
E_s =	200000	Modulo di elasticita' dell'acciaio in N/mm²
N =	-1.0E+06	Sforzo normale in N (applicato ad H/2 e positivo se di trazione)
β_1 =	1	Coefficiente β_1 EC2 A.2.2 (0.5 barre lisce, 1 barre aderenza migliorata)
β_2 =	1	Coefficiente β_2 EC2 A.2.2 (0.5 carichi ripetuti, 1 carichi breve durata)
Legge cls	2	Legge costitutiva del calcestruzzo: 1 = Lineare elastica (l.e.) 2 = Sargin (EC2 4.2.1.3.3) 3 = Parabola rettangolo (EC2 4.2.1.3.3)
Valori di calcolo?	2	Caratteristiche meccaniche dei materiali: 1 = valori caratteristici 2 = valori di calcolo

METODO COLONNA MODELLO : ESEMPIO

I_1 =	2.4778E+10	Momento d' inerzia sezione stadio I in mm^4
M_{cr} =	1.3038E+08	Momento di fessurazione in Nmm
M_{Rd}	1.3634E+09	Momento ultimo di calcolo in Nmm
Campo	2	Campo in cui viene raggiunto lo stato limite ultimo

DIAGRAMMA M-1/r N = -1000000 N

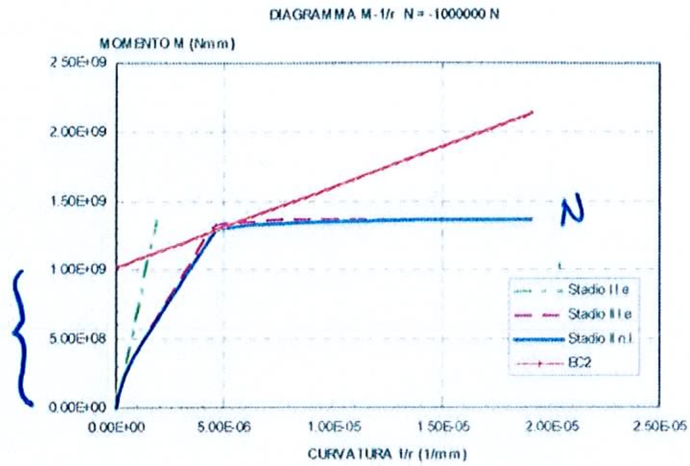


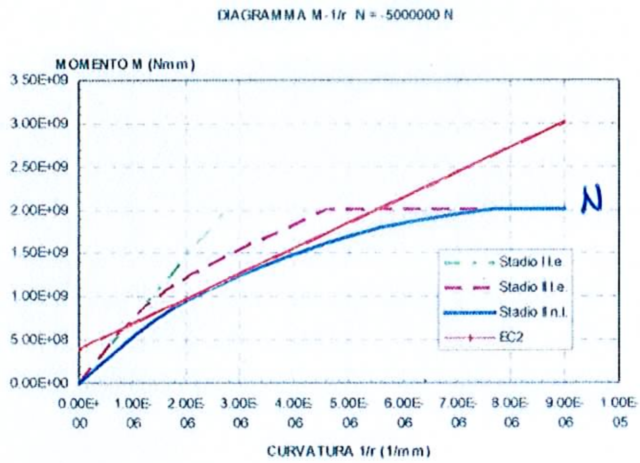
	STADIO I l.e.		STADIO II l.e.		STADIO II n.l.		EC2 (A.2.2)	
	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)	1/r (1/mm)	M (Nmm)
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		
2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		
3	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		
4	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		
5	1.70E-07	1.23E+08	1.64E-07	1.23E+08	1.59E-07	1.23E+08		
6	3.40E-07	2.45E+08	4.06E-07	2.45E+08	4.02E-07	2.45E+08		
7	5.09E-07	3.68E+08	8.07E-07	3.68E+08	8.13E-07	3.68E+08		
8	6.79E-07	4.91E+08	1.26E-06	4.91E+08	1.28E-06	4.91E+08		
9	8.49E-07	6.14E+08	1.73E-06	6.14E+08	1.77E-06	6.14E+08		
10	1.02E-06	7.36E+08	2.21E-06	7.36E+08	2.27E-06	7.36E+08		
11	1.19E-06	8.59E+08	2.68E-06	8.59E+08	2.78E-06	8.59E+08		
12	1.36E-06	9.82E+08	3.16E-06	9.82E+08	3.29E-06	9.82E+08		
13	1.53E-06	1.10E+09	3.65E-06	1.10E+09	3.81E-06	1.10E+09		
14	1.70E-06	1.23E+09	4.13E-06	1.23E+09	4.34E-06	1.23E+09		
15	1.72E-06	1.25E+09	4.20E-06	1.25E+09	4.43E-06	1.25E+09		
16	1.75E-06	1.27E+09	4.28E-06	1.27E+09	4.51E-06	1.27E+09		
17	1.78E-06	1.29E+09	4.36E-06	1.29E+09	4.60E-06	1.29E+09		
18	1.81E-06	1.31E+09	4.43E-06	1.31E+09	4.92E-06	1.31E+09		
19	1.83E-06	1.32E+09	4.66E-06	1.32E+09	6.39E-06	1.32E+09		
20	1.86E-06	1.34E+09	6.01E-06	1.34E+09	8.87E-06	1.34E+09		
21	1.89E-06	1.36E+09	8.20E-06	1.36E+09	1.40E-05	1.36E+09		
22	1.89E-06	1.36E+09	1.91E-05	1.36E+09	1.91E-05	1.36E+09		

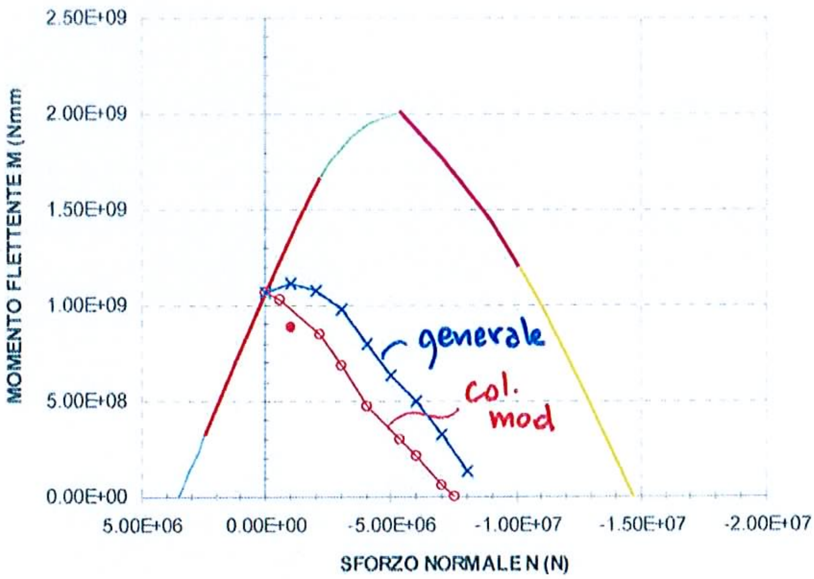
Stadio I = calcestruzzo resistente a trazione e compressione
Stadio II = calcestruzzo resistente a sola compressione
l.e. = calcestruzzo compresso lineare elastico
n.l. = calcestruzzo compresso non lineare
1/r = curvatura
M = momento flettente

ESEMPIO : METODO GENERALE VS. COL. MODELLO

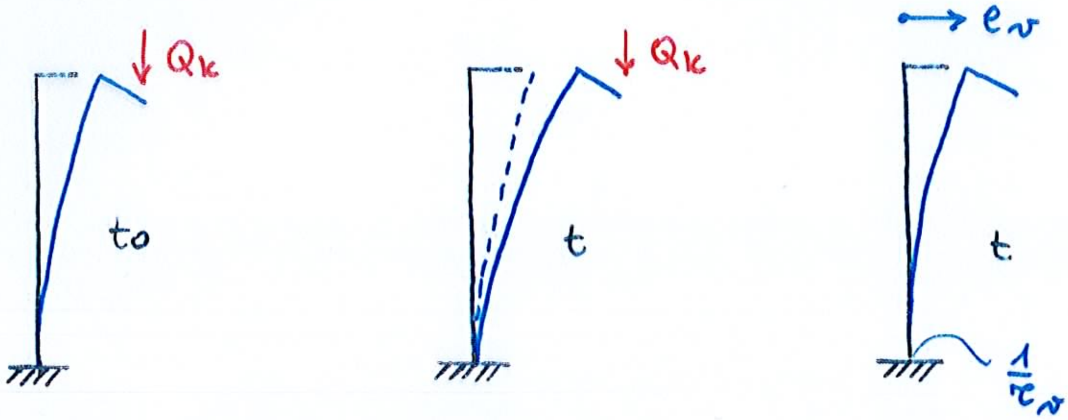
$M_{1,max}$





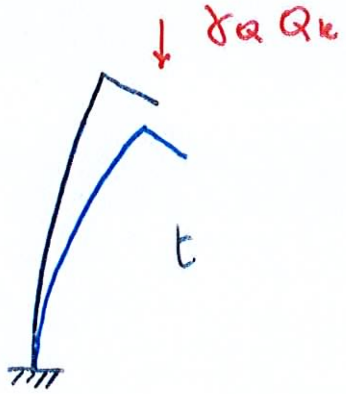


EFFETTO DELLA VISCOSITA'



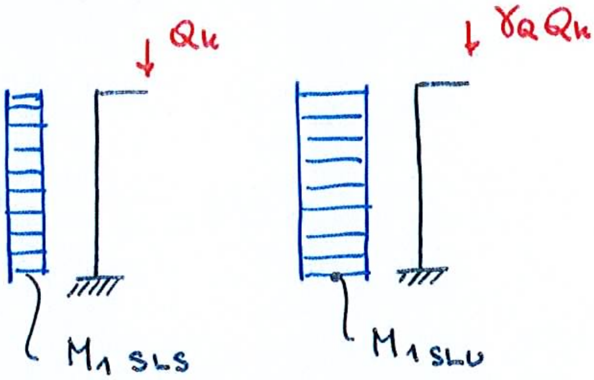
combinazione quasi permanente

scarico



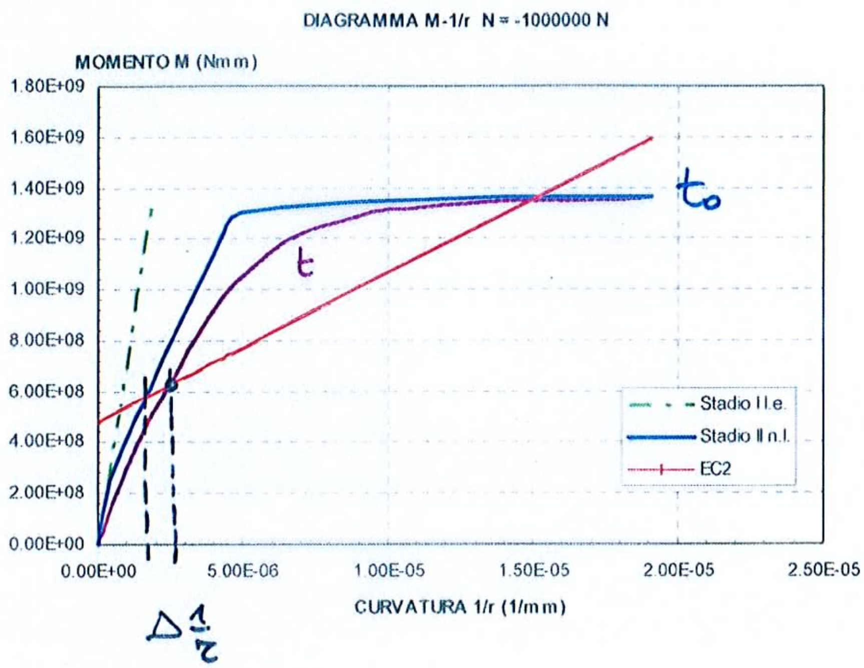
combinazione SLU

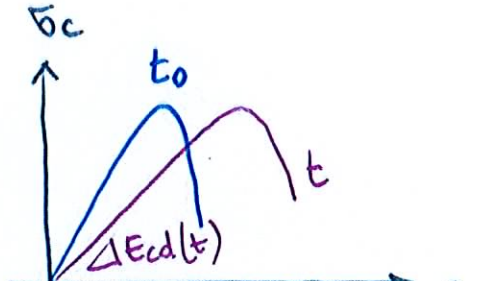
La viscosità equivale ad un'imperfezione della colonna (eccentricità e_v o curvatura $1/r_v$) che ne riduce la capacità portante



$$\varphi_{eff} = \varphi(t, t_0)\Big|_{\infty} \frac{M_{1\,SLS}}{M_{1\,SLU}}$$

COLONNA MODELLO E VISCOSITA'





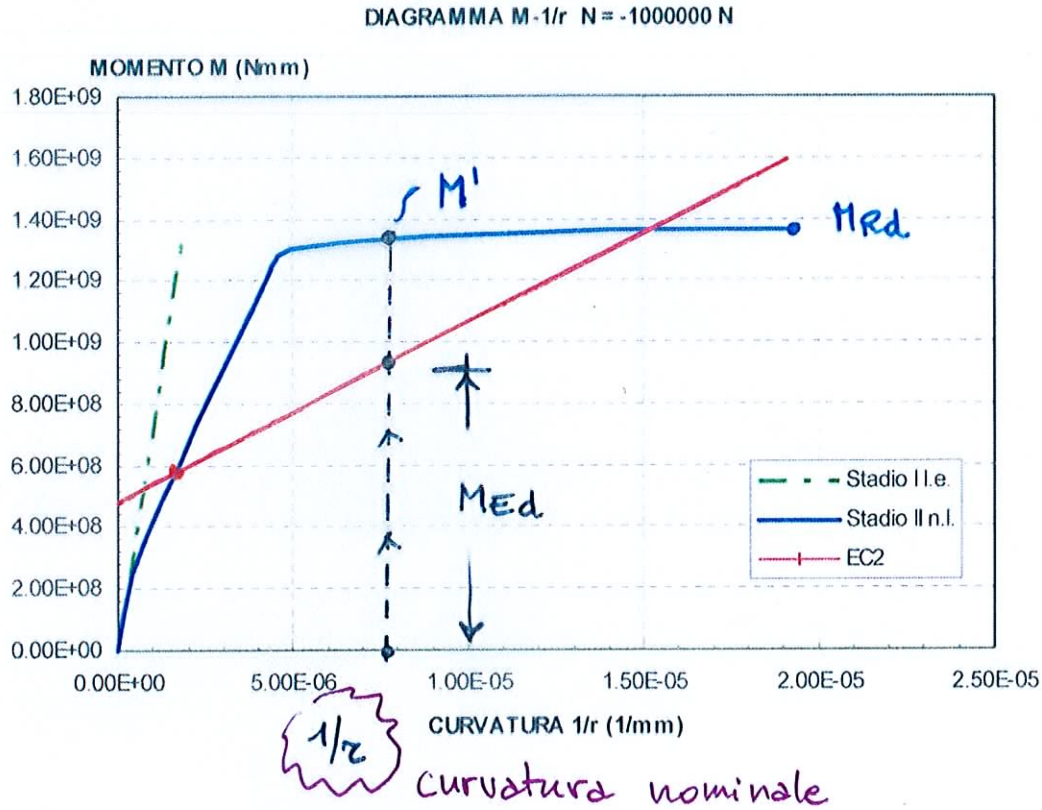
$$E_{cd}(t) = \frac{E_{cd}(t_0)}{1+\varphi_{eff}}$$

metodo effective modulus

La soluzione si ottiene per valori di curvatura più grandi

METODO CURVATURA NOMINALE

Già adottato dal British Code (1972)



- Dato $\frac{1}{r}$ calcolo M_{Ed}
- Se $M_{Ed} < M'$ le curve si sono intersecate e la verifica é soddisfatta
- Per non calcolare M' scrivo

$$M_{Ed} < M' \leq M_{Rd}$$

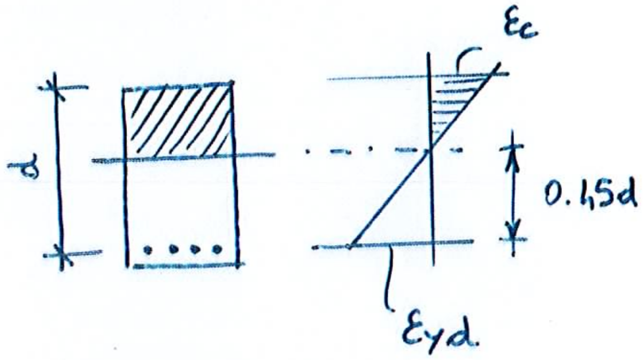
$M' \approx M_{Rd}$

$$\boxed{M_{Ed} \leq M_{Rd}}$$

METODO CURVATURA NOMINALE : EC2

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \cdot \frac{1}{r_0}$$

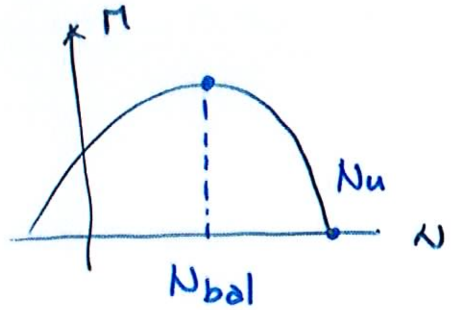
- $\frac{1}{r_0}$



$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45\, d}$$

- K_r considera effetto di N

$$K_r = \frac{N_u - N}{N_u - N_{bal}} \le 1$$



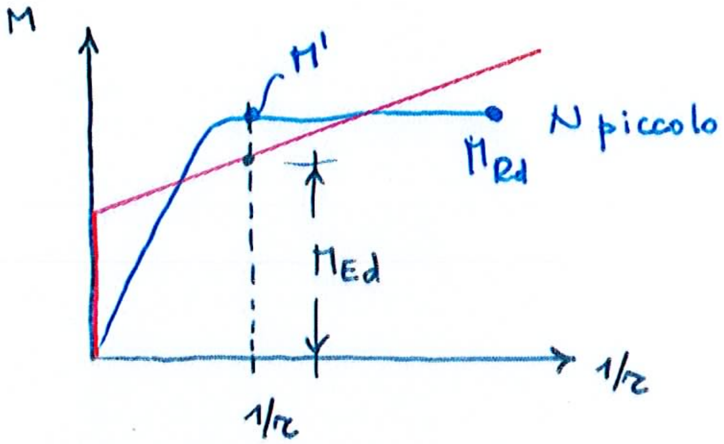
- K_φ considera viscosita'

$$K_\varphi = 1 + \beta\, \varphi_{eff} \ge 1$$

$$\beta = 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}$$

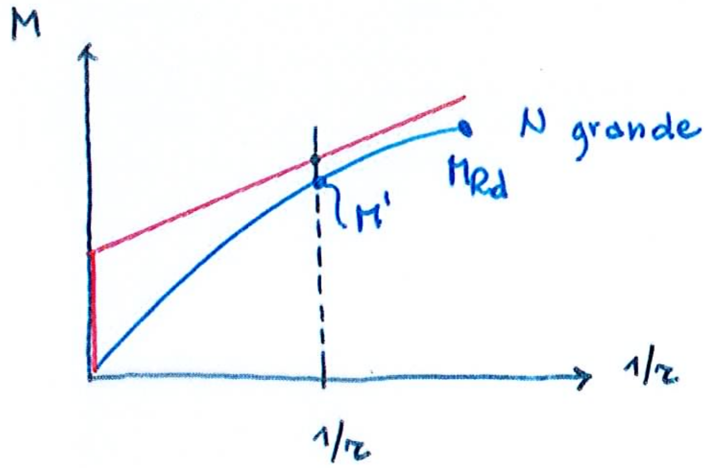
λ = snellezza

METODO CURVATURA NOMINALE : IMPORTANZA 1/r



$M_{Ed} < M'$

$M_{Ed} < M_{Rd}$

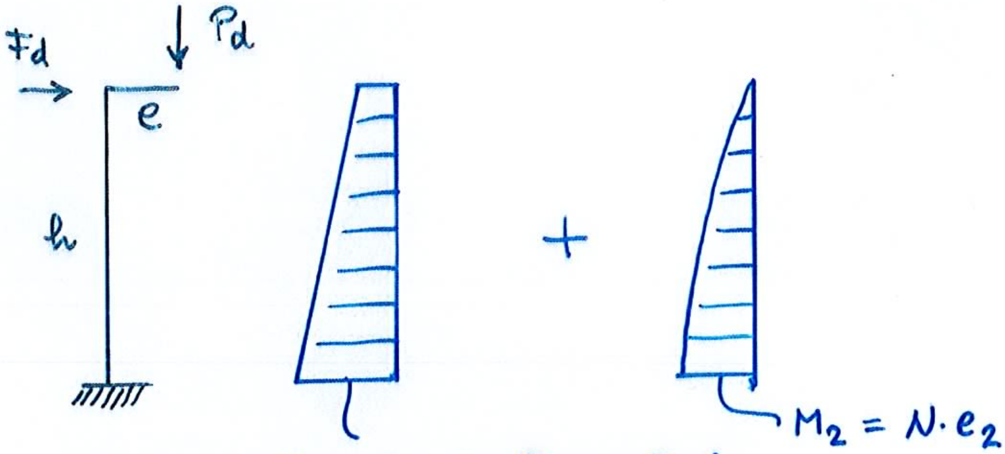


$M_{Ed} > M'$

$M_{Ed} < M_{Rd}$

ma la verif.
non è
soddisfatta !!

METODO CURVATURA NOMINALE : ESEMPIO



$M_1 = M_{0Ed} = P_d \cdot e + F_d \cdot h$

$M_2 = N \cdot e_2$

$$M_{Ed} = M_1 + M_2$$

$$M_1 = 10^6 \cdot 400 + 40 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^3 = 8.8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_2 = N \cdot e_2 = 10^6 \cdot 390.3 = 3.903 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

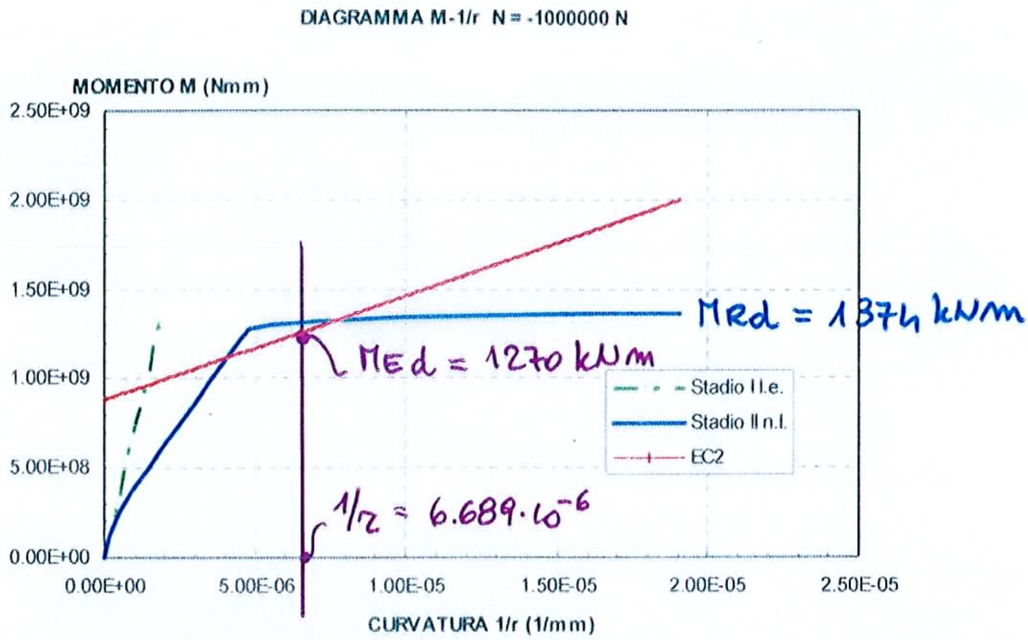
$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot l^2 = 6.689 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot 12000^2 = 390.3 \text{ mm}$$

$$M_{Ed} = M_1 + M_2 = 1.270 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

$$M_{Rd} = 1.374 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ ⇝ verificato

METODO CURVATURA NOMINALE : ESEMPIO



$$1/r_0 = \frac{f_{yd}}{E_s}\,\frac{1}{0.45d} = \frac{391.3}{200000}\,\frac{1}{0.45\cdot 650} = 6.689\cdot 10^{-6}\ 1/mm$$

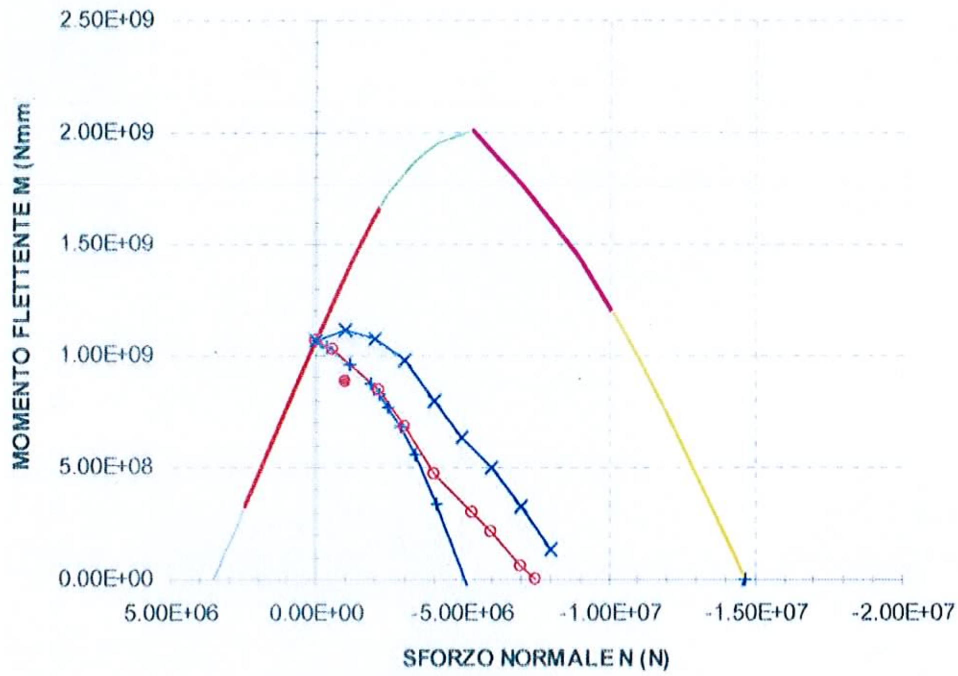
$$K_r = \frac{N_u - N}{N_u - N_{bal}} = \frac{1.467\cdot 10^{7} - 10^{6}}{1.467\cdot 10^{7} - 5.355\cdot 10^{6}} = 1.338 \leq 1 \rightsquigarrow 1$$

$$K_\varphi = 1 - \beta\,\varphi_{eff} = 1 - 0.243\cdot 2.5 = 0.39 \geq 1 \rightsquigarrow 1$$

$$\beta = 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0.243$$

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} = 6.689\cdot 10^{-6}\ 1/mm$$

ESEMPIO : COLONNA MODELLO VS. CURV. NOMIN



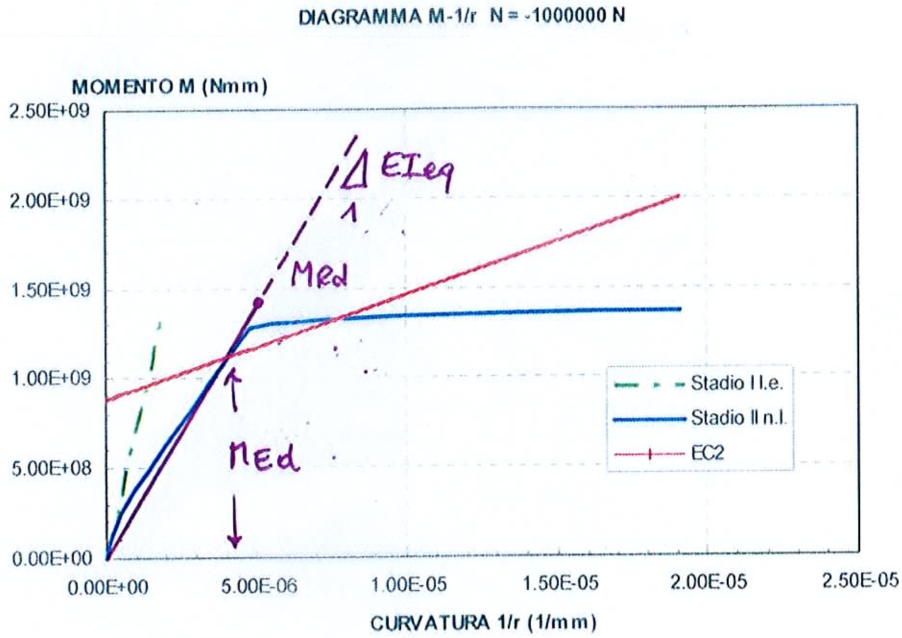
Dato il dominio M–N é molto semplice tracciare il dominio ridotto con il metodo della curvatura nominale

$$M_1 + M_2 \leq M_{Rd} \rightsquigarrow M_1 \leq M_{Rd} - M_2$$

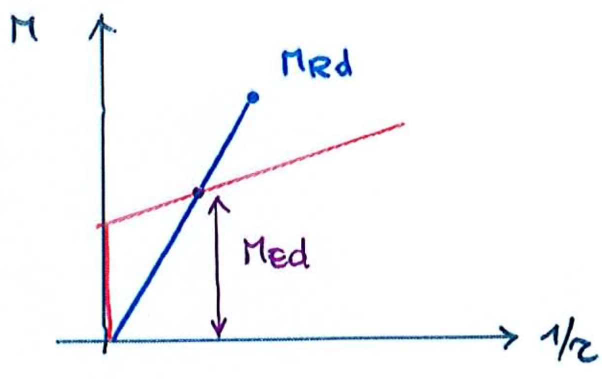
METODO RIGIDEZZA EQUIVALENTE

Mac Gregor, Breen, Pfrang (1970)

Adottato dalle "norme" ACI 318 e dall' EC2

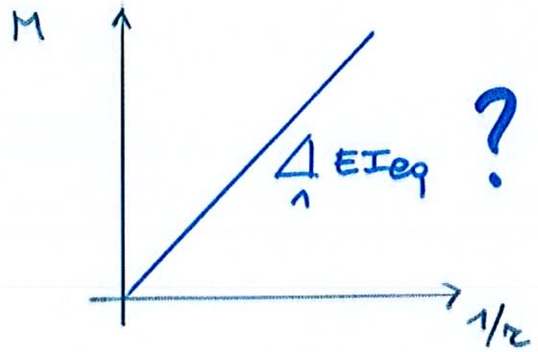


Approssimo il diagramma M-1/r con una retta secante di pendenza EIeq

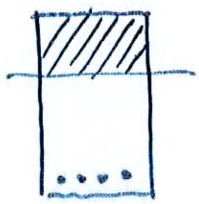


$\boxed{M_{Ed} \leq M_{Rd}}$

METODO RIGIDEZZA NOMINALE : EC2



$$EI = E_{cd} I_c + E_s I_s$$



$$EI_{eq} = k_c E_{cd} I_c + k_s E_s I_s$$

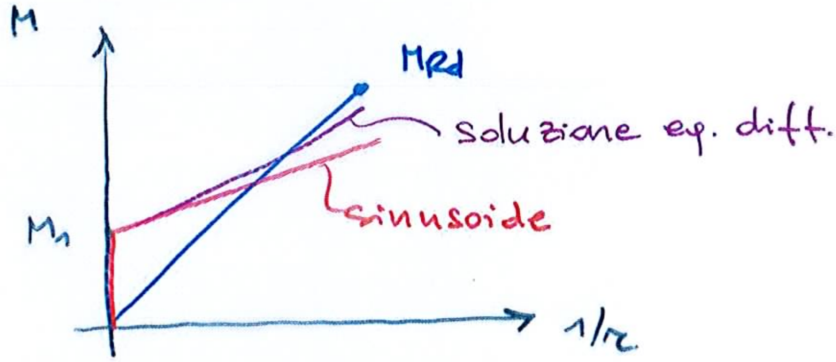
$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \geq 0.002 \qquad \begin{cases} k_s = 1 \\ k_c = \dfrac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{eff}} \\ k_1 = \sqrt{f_{ck}/20} \qquad k_2 = \dfrac{N}{A_c f_{cd}} \dfrac{\lambda}{170} \leq 0.2 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} > 0.01 \qquad \begin{cases} k_s = 0 \\ k_c = \dfrac{0.3}{1 + \varphi_{eff}} \end{cases}$$

espressione semplificata

METODO RIGIDEZZA NOMINALE : EC2

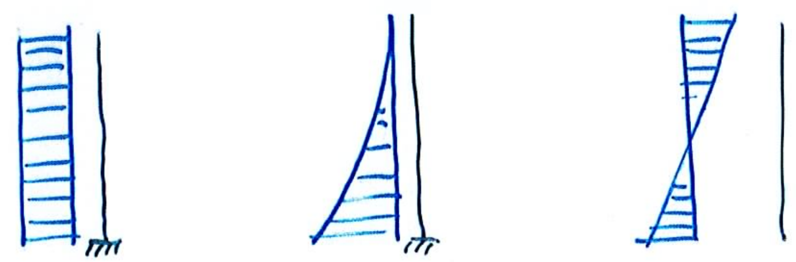
Poiché $EI_{eq} = cost$ posso rinunciare all'ipotesi di deformata sinusoidale ed integrare l'eq. differenziale



$$M_{Ed} = M_1 \left(1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N} - 1} \right) \qquad \text{(EC2 5.28)}$$

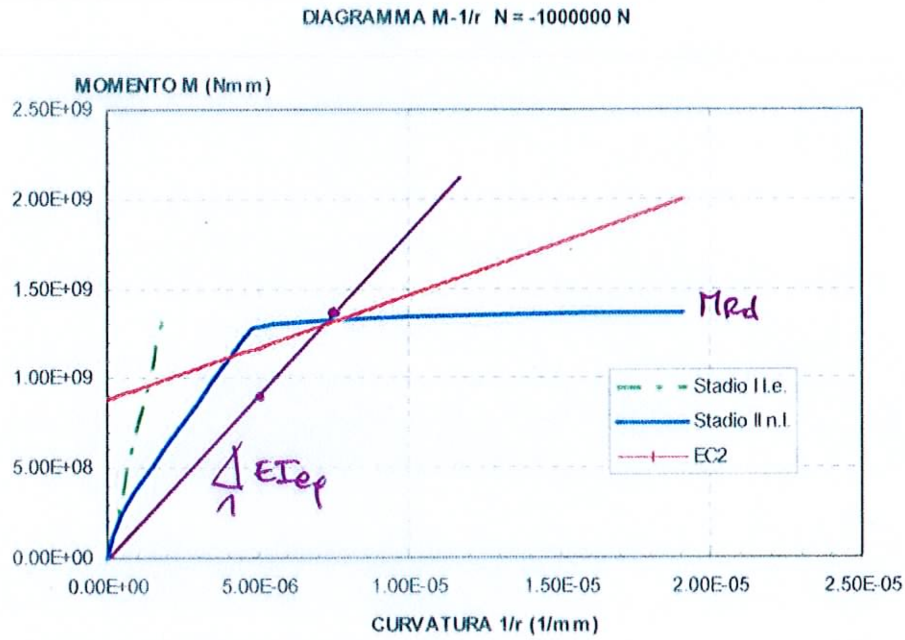
$$N_B = \frac{\pi^2 EI_{eq}}{l_0^2}$$

$$\beta = \frac{\pi^2}{C_0} \qquad \text{(EC2 5.29)}$$



$C_0 = 8$ $\qquad$ $C_0 = 9.6$ $\qquad$ $C_0 = 12$

METODO RIGIDEZZA NOMINALE : ESEMPIO



$$l_0 = 2l = 24{,}000 \text{ mm}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{700^4/12}{700^2}} = 202.07 \text{ mm}$$

$$\lambda = l_0/i = 119$$

$$\rho = A_s/A_c > 0.002$$

$$K_s = 1 \qquad K_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1.41$$

$$K_c = \frac{K_1 K_2}{1 + \varphi_{eff}}$$

METODO RIGIDEZZA NOMINALE : ESEMPIO

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1.41$$

$$k_2 = \frac{N/A_c f_{cd} \cdot \lambda}{170} = 0.063$$

$$k_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{eff}} = \frac{1.41 \cdot 0.063}{1 + 2.5} = 0.0254$$

- $$EI_{ep} = 0.063 \cdot 1.41 \cdot \frac{700^4}{12} \cdot 29167 + 2 \cdot 10^5 \cdot (2 \cdot 4520) \cdot 300^2 =$$
$$= 17.75 \cdot 10^{13} \ Nmm^2$$

- $$N_B = \frac{\pi^2 EI_{ep}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 17.75 \cdot 10^{13}}{(2 \cdot 12000)^2} = 3.04 \cdot 10^6 \ N$$

- $$N_B / N = \alpha = \frac{3.04 \cdot 10^6}{1.00 \cdot 10^6} = 3.04$$

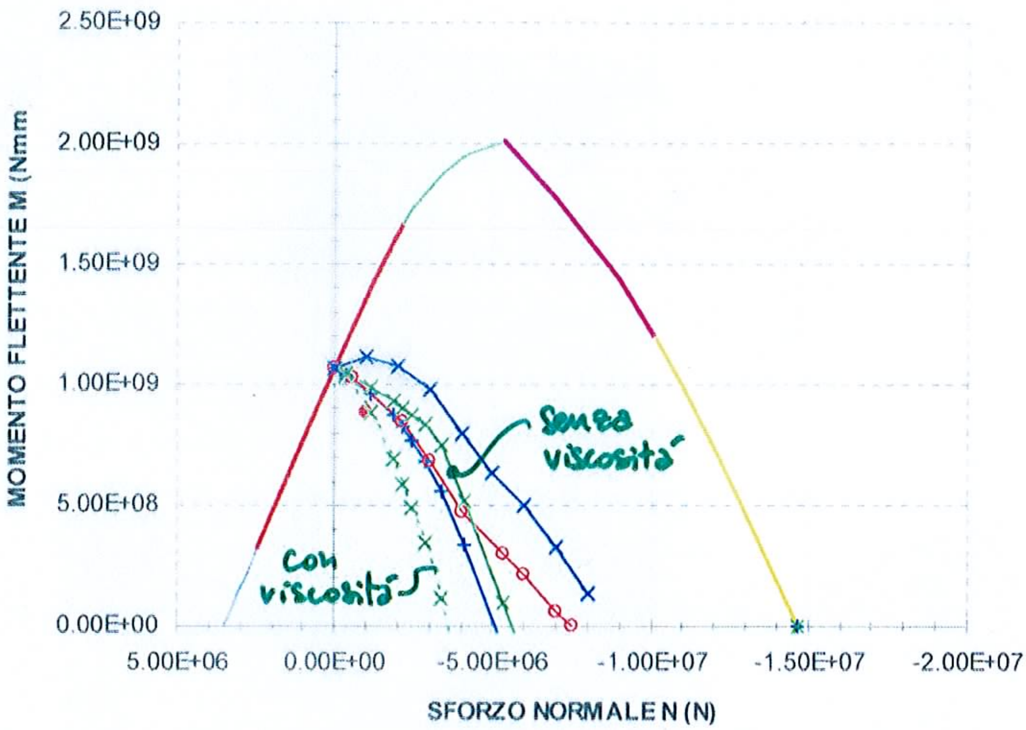
- $$M_{Ed} = M_1 \left(1 + \frac{\overbrace{\beta}^{\pi^2/C_0}}{\alpha - 1} \right)$$

$$M_{Ed} = P \cdot e \left(1 + \frac{\pi^2/8}{\alpha - 1} \right) + F \cdot h \left(1 + \frac{\pi^2/12}{\alpha - 1} \right)$$

$$M_{Ed} = 1321 \ kNm \qquad M_{Rd} = 1374 \ kNm$$

$$M_{Ed} < M_{Rd} \rightsquigarrow \text{verificato}$$

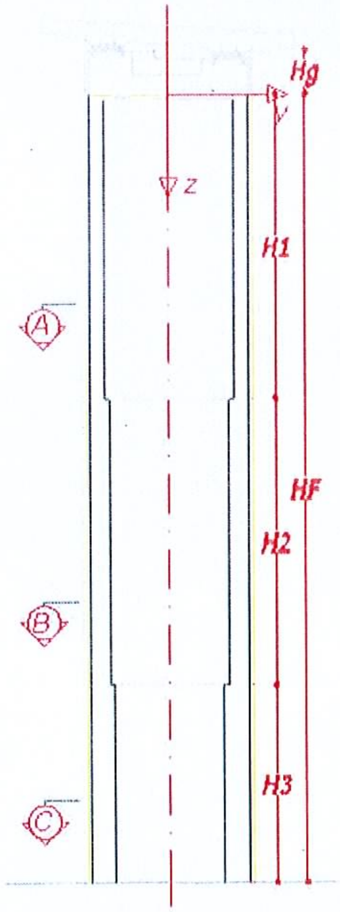
ESEMPIO : CONFRONTO TRA I ≠ METODI



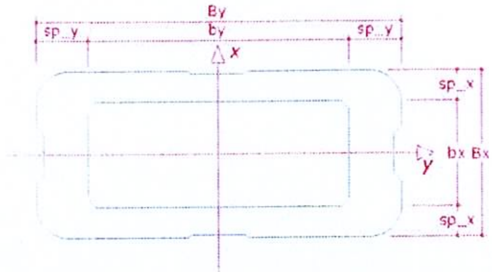
COLONNE CON SEZIONE VARIABILE

Se la sezione é variabile il collasso non é detto che avvenga alla base della colonna ⤳ metodo generale

Sezione trasversale della pila

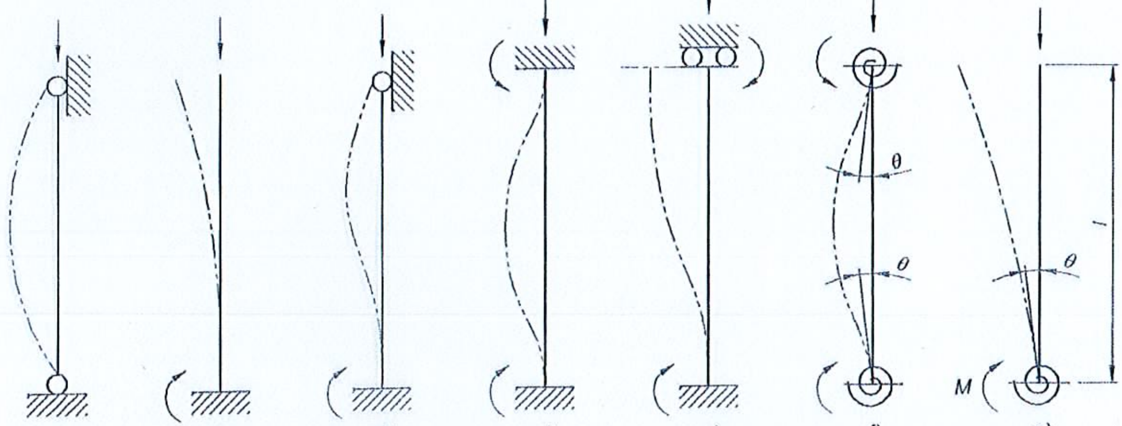


Sezione generica della pila



SNELLEZZA DI UNA COLONNA

l_0 = lunghezza libera d' inflessione



a) $l_0 = l$ b) $l_0 = 2\,l$ c) $l_0 = 0{,}7\,l$ d) $l_0 = l/2$ e) $l_0 = l$ f) $l/2 < l_0 < l$ g) $l_0 > 2\,l$

Telai a nodi fissi [vedere figura 5.7 (f)]:

$$l_0 = 0{,}5l \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0{,}45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0{,}45 + k_2}\right)} \tag{5.15}$$

Telai a nodi mobili [vedere figura 5.7 (g)]:

$$l_0 = l \cdot \max\left\{\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right)\right\} \tag{5.16}$$

dove:

k_1, k_2 sono le flessibilità relative alla rotazione degli incastri alle estremità 1 e 2 rispettivamente;

k $= (\theta / M) \cdot (EI / l)$;

θ è la rotazione degli incastri per il momento flettente M; vedere anche figura 5.7 (f) e (g);

EI è la rigidezza flessionale dell'elemento compresso, vedere anche il punto 5.8.3.2 (4) e (5);

$\lambda = l_0 / i$ snellezza

i = raggio d'inerzia della sezione di calcestruzzo non fessurato

SNELLEZZA LIMITE λ_{lim} (EC2)

$\lambda \leq \lambda_{lim}$ ⤳ trascuro effetti secondo ordine

$$\lambda_{lim} = 20 \frac{A\,B\,C}{\sqrt{n}}$$

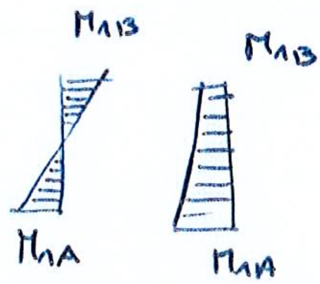
$$A = \frac{1}{1 + 0.2\,\varphi_{eff}}$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} \qquad \text{con} \qquad \omega = \frac{A_s\,f_{yd}}{A_c\,f_{cd}}$$

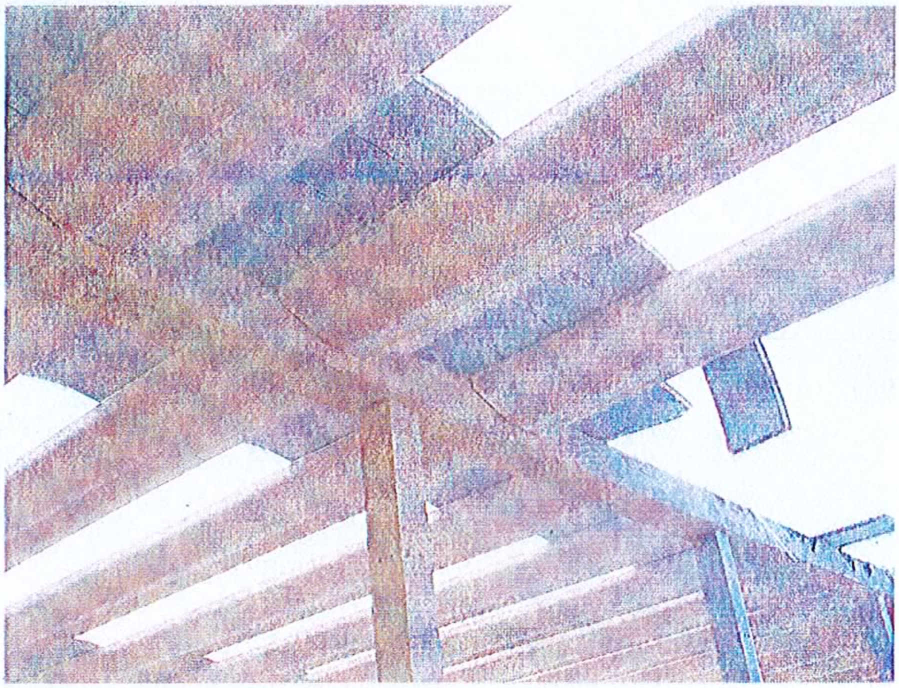
$$C = 1.7 - r_m$$

$$r_m = M_{1A} / M_{1B}$$

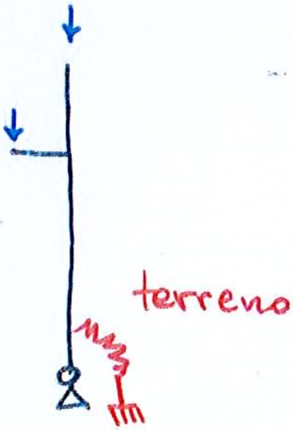
$$n = \frac{N_{sd}}{A_c\,f_{cd}}$$

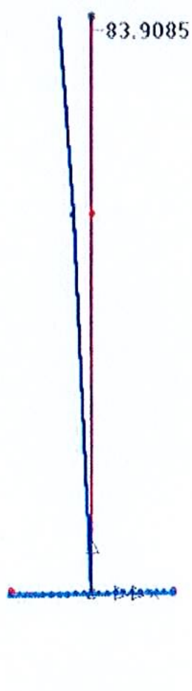


IMPORTANZA INTERAZIONE TERRENO - STRUTTURA



(B. Chiaia)





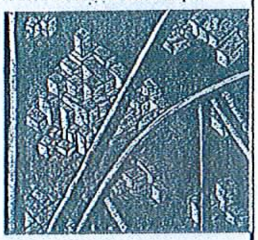
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

serie di ingegneria civile

leone corradi dell'acqua

meccanica delle strutture

la valutazione
della capacità portante



3

McGraw-Hill

ZDENĚK P. BAŽANT
LUIGI CEDOLIN

STABILITY OF STRUCTURES

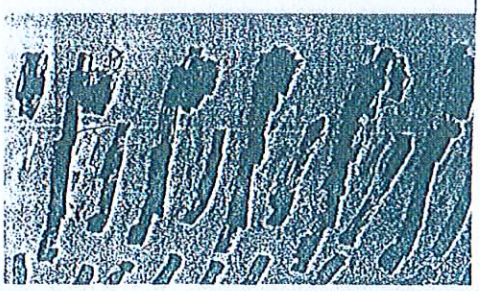
Elastic, Inelastic,
Fracture, and
Damage Theories

Ed. Dover

Daniele Ferretti
Ivo Iori
Marco Morini

La stabilità delle strutture

Il caso delle costruzioni in cemento armato



CD-ROM

McGraw-Hill