

PROGETTAZIONE STRUTTURALE E GEOTECNICA DI FONDAZIONI E OPERE DI SOSTEGNO

7: STATO DI SFORZO NELLE TERRE E CRITERI DI SNERVAMENTO

Di Francesco Romolo

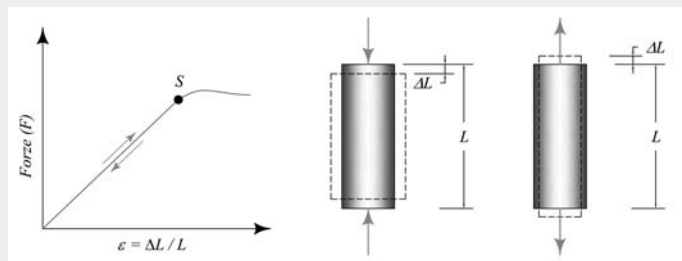
Prof. Gheresi Aurelio

CENNI STORICI

I primi esperimenti sulla resistenza dei materiali furono condotti da **Leonardo da Vinci**, il quale sottopose alcune funi a trazione mediante l'uso di secchielli riempiti di sabbia.

Il padre indiscusso della nascita della Scienza delle Costruzioni fu invece **Galileo Galilei** che nel 1594 pubblicò "*Della scienza meccanica*" e nel 1638 "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*".

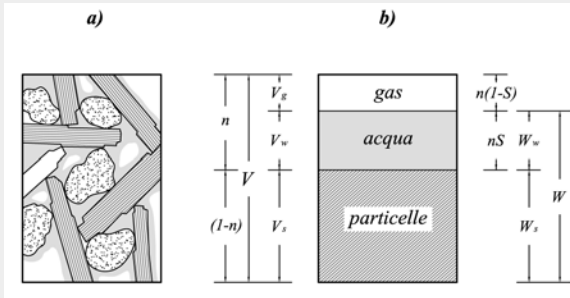
Ma se a **Newton** dobbiamo la scoperta di alcuni principi fisici fondamentali, come il concetto di *Forza* e di *Azione e Reazione*, ad **Hooke** va il merito della codificazione della *Legge dell'Elasticità* basata sull'allungamento di provini sottoposti a forze note.



Infine l'ultima grande rivoluzione fu dovuta a **Cauchy**, il quale rimosse il limite insito nella definizione di forza introducendo il concetto di *tensione* o *pressione*: $\sigma = P/A$ (1825). Cauchy riconobbe anche la natura tensoriale dello sforzo, ipotizzando che la tensione in un punto materiale contenuto in una superficie sia indipendente dalla forma di quest'ultima e dipenda invece solo dalla normale ad essa, sviluppando il concetto di stato di sollecitazione di un punto del mezzo continuo.

L'approccio innovativo di Cauchy comporta la generalizzazione dell'analisi dello stato di sforzo, liberandolo dalla costrizione legata ad usi particolari, come ad esempio lo studio delle travi inflesse introdotto da Coulomb nel 1773. Con Cauchy è finalmente possibile analizzare lo stato tensionale di un corpo generico.

COMPORTAMENTO DELLE TERRE: un veloce ripasso

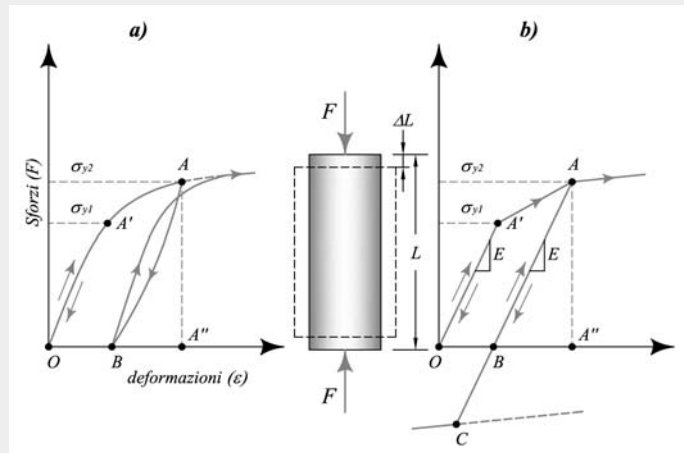


I terreni non sono però mezzi continui; anzi rappresentano la negazione del concetto stesso di mezzo continuo, essendo di fatto costituiti da uno scheletro solido con vuoti interparticellari più o meno in comunicazione e che possono accogliere fluidi di varia natura quali aria, acqua, oli, idrocarburi, ecc.

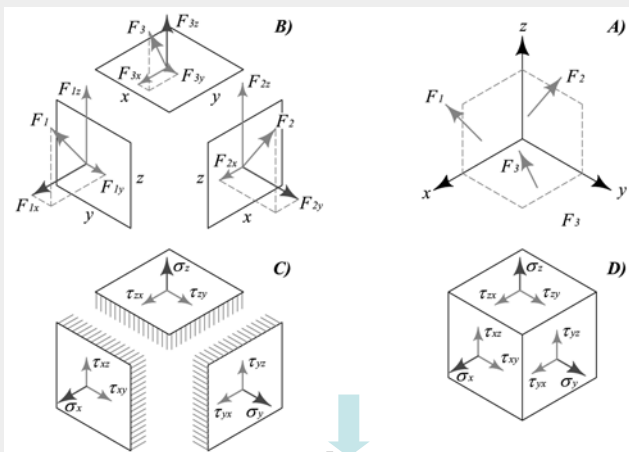
Nel contempo i terreni manifestano un comportamento meccanico anelastico, marcatamente non lineare e caratterizzato da bassa resistenza.

Ciò comporta che la risposta meccanica di un generico terreno, sottoposto ad esempio all'azione dei carichi indotti da una fondazione, si manifesta con una curva sforzi – deformazioni elastoplastica marcatamente non lineare e con una soglia elastica molto bassa, tanto da sviluppare deformazioni irreversibili anche con modesti livelli di sforzo.

Riunendo tali elementi in un unico assioma, risulta che ogni analisi geotecnica deve essere preceduta dall'analisi dello stato tensionale agente in sito, necessaria anche per una corretta gestione delle prove di laboratorio.



TENSORE DI SFORZO ed EQUAZIONI DI EQUILIBRIO



Tutti i vettori forze possono essere raggruppati in tre vettori risultanti agenti secondo altrettanti direzioni non parallele del tipo:

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} + F_{1z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} + F_{3y}\mathbf{j} + F_{3z}\mathbf{k}$$

e che assemblati in forma matriciale forniscono il tensore delle forze agente su un punto materiale:

$$[\mathbf{F}_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

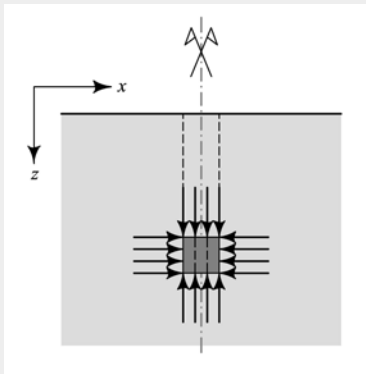
Infine, applicando il concetto di sforzo in quanto rapporto tra forza e superficie, si ottiene il tensore di tensione di carattere generale, applicabile a qualunque punto di un mezzo continuo. Notare che le componenti del tensore sono 9 mentre quelle indipendenti sono 6 per la simmetria tensoriale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + W_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + W_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + W_z &= 0 \end{aligned}$$

L'ultimo passo consiste nella scrittura delle equazioni di equilibrio alla traslazione rispetto alle tre direzioni del sistema cartesiano, con W_i rappresentanti le forze di volume dipendenti dalla densità del mezzo continuo.

A queste, note come **equazioni indefinite di equilibrio** o **equazioni di Cauchy**, occorre infine aggiungere anche le equazioni di equilibrio alla rotazione.

STATO DI SFORZO NEI MEZZI CONTINUI e NEI TERRENI SECCHI



Si supponga ora di essere in presenza di un mezzo continuo con superficie orizzontale ed infinitamente esteso in direzione orizzontale; le condizioni di simmetria, che comportano anche l'assenza di deformazioni laterali, negano lo sviluppo degli sforzi tangenziali agenti sui piani verticali ed orizzontali, con la conseguenza che le equazioni di equilibrio si riducono a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + W_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + W_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + W_z &= 0\end{aligned}$$

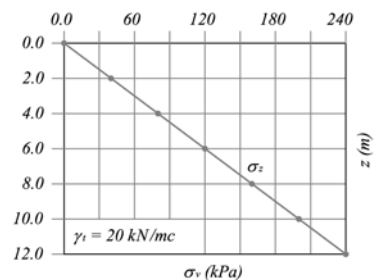
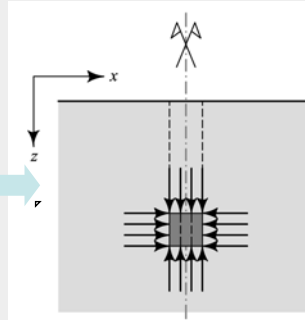
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma &= 0\end{aligned}$$

Notare che le forze di volume sono ora identificate con il peso di volume del mezzo (γ) e che per convenzione internazionale le forze di compressione sono negative mentre quelle di trazione positive.

Per concludere, non resta che integrare l'equazione nel dominio dato dall'asse verticale per giungere alla definizione di un'equazione in forma chiusa valida però solo per la geometria adottata.

$$\int_0^z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz = \int_0^z \gamma \cdot dz$$

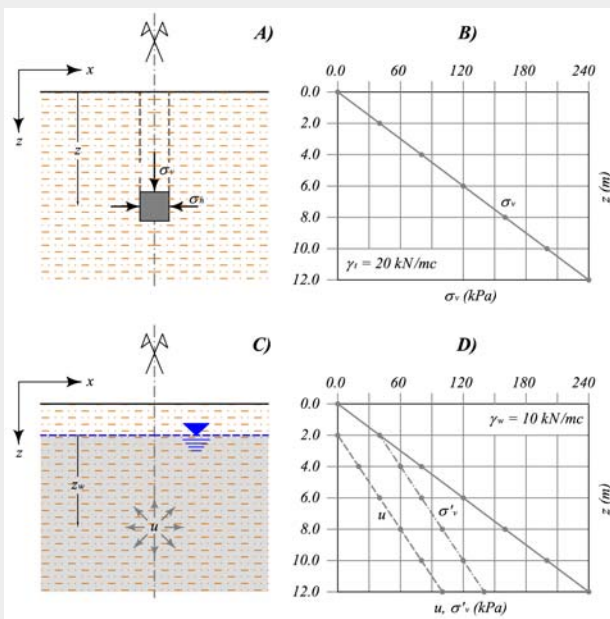
$$\sigma_z = \gamma \cdot z$$



STATO DI SFORZO NEI TERRENI SATURI

Nel caso dei terreni secchi il calcolo è identico a quello illustrato per i mezzi continui generici e lo sforzo verticale è definito **tensione verticale totale**.

Al contrario, in presenza di una falda freatica si assiste allo sviluppo di una pressione idrostatica, ovvero tale da determinare una spinta agente in tutte le direzioni e capace di alleggerire il peso proprio del terreno noto ora come **tensione verticale efficace**.



L'equazione è ottenuta sottraendo alla tensione totale la pressione idrostatica:

$$\sigma_z = \sigma_v = \sigma'_v - u = (\gamma_t \times z) - (\gamma_w \times z_w)$$

Nel caso di falda coincidente con il piano di campagna, tale equazione diventa:

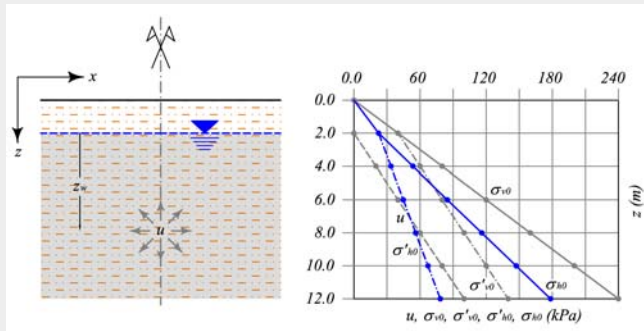
$$\sigma_v = (\gamma_t - \gamma_w) \times z = \gamma \times z$$

La tabella sottostante mostra i risultati dell'esempio illustrato a fianco e si ricorda che le equazioni date sono valide solo per la geometria di riferimento.

z (m)	σ_v (kPa)	u (kPa)	σ'_v (kPa)
2	40	0	40
4	80	20	60
6	120	40	80
8	160	60	100
10	200	80	120
12	240	100	140

Per configurazioni geometriche differenti occorre inserire le componenti tangenziali!

STATO DI SFORZO NEI TERRENI SATURI



Dalle equazioni di equilibrio è possibile ricavare la forma chiusa relativa al calcolo della tensione verticale ma non di quella orizzontale, per la quale occorre utilizzare la seguente relazione empirica:

$$\sigma_h = K_0 \times \sigma_v$$

con K_0 definito **coefficiente di spinta a riposo delle terre**.

Tale parametro può a sua volta essere individuato mediante la relazione empirica:

$$K_0(NC) = 1 - \sin \Phi$$

valida solo per terreni normalconsolidati.

A titolo di esempio, per $\Phi' = 30^\circ$ si ha $K_0 = 0,5$ con la conseguenza che la tensione orizzontale efficace è pari alla metà di quella orizzontale.

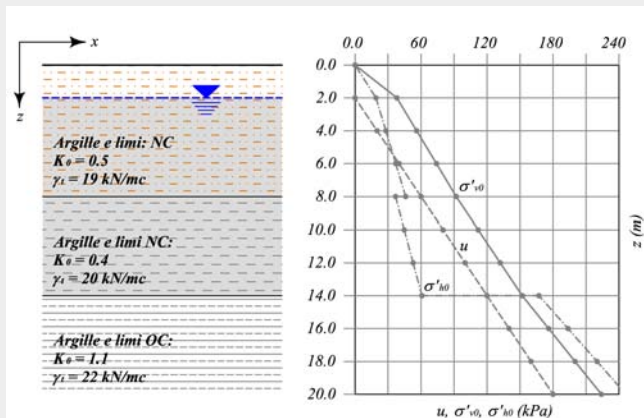
Esistono però anche i terreni sovraconsolidati, ossia che nella loro storia geologica sono stati assoggettati a tensioni superiori a quelle attuali; in questi casi si ha:

$$K_0(OC) = K_0(NC) \times OCR^{1-\sin \Phi}$$

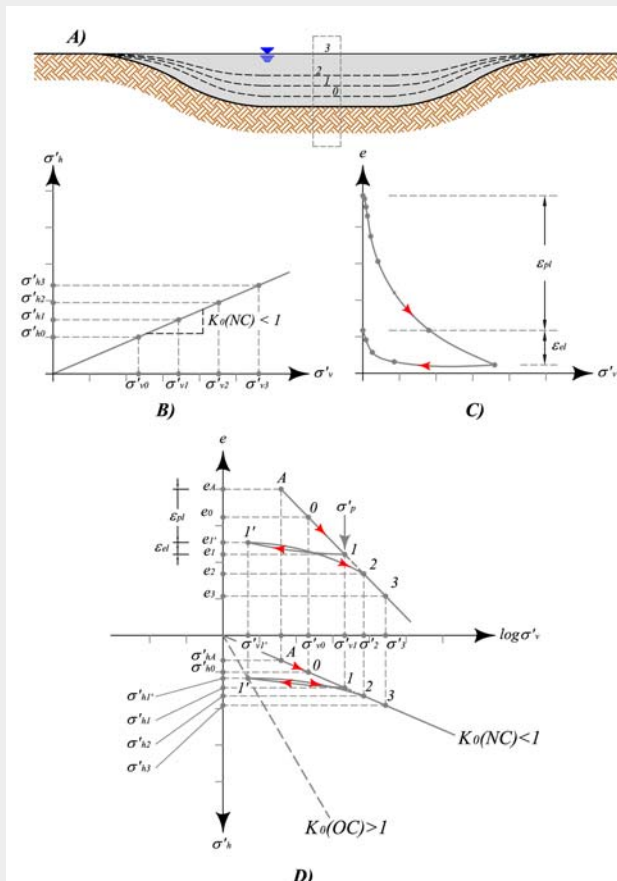
con OCR che denota il **grado di sovraconsolidazione**:

$$OCR = \sigma'_p / \sigma'_v$$

A sua volta σ'_p identifica la pressione di sovraconsolidazione e può essere determinata mediante le prove edometriche.



ANALISI DEI BACINI DI SEDIMENTAZIONE



Si ipotizzi l'esistenza di un ambiente lacustre in fase di lento accumulo, con lo scopo di analizzare il comportamento sforzi - deformazioni dei terreni di natura limosa ed argillosa (disegno "A").

Lo stato tensionale di un punto materiale subisce un incremento degli sforzi efficaci verticali ed orizzontali che rispetta la costante K_0 , tale da dare luogo alla **retta di normalconsolidazione** mostrata nel disegno "B". La curva sforzi - deformazioni è a sua volta marcatamente non lineare (disegno "C").

Analizzando l'evoluzione del bacino nel piano semilogaritmico è invece possibile linearizzare la risposta meccanica dei terreni (disegno "D"), secondo una sequenza che prevede:

- 1) una fase iniziale di accumulo (punti 0 → 1);
- 2) una fase di stasi seguita da erosione (punti 1 → 1');
- 3) la ripresa della sedimentazione (punti 1' → 2 → 3).

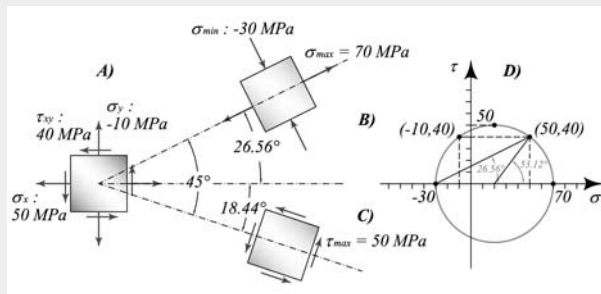
Il terreno si comporta allora inizialmente come un mezzo normalconsolidato e successivamente, a seguito dello scarico tensionale dipendente dall'erosione, come un mezzo sovraconsolidato con la massima pressione data da σ'_p . Infine la ripresa della sedimentazione con superamento di quest'ultima cancella la memoria tensionale del terreno che torna ad essere normalconsolidato seppur dotato di maggiore resistenza e minore deformabilità.

GLI SFORZI PRINCIPALI

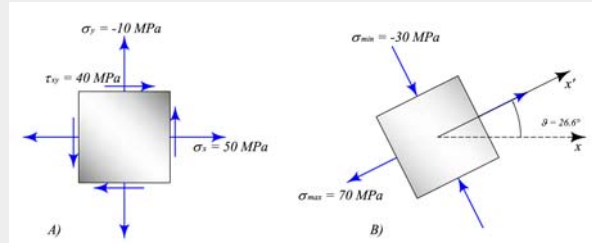
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La figura mostra la variazione dello stato tensionale piano in relazione alla rotazione rispetto all'asse z, ossia intorno all'origine degli assi.

Il nuovo stato tensionale può a sua volta essere calcolato attraverso l'utilizzo di matrici di trasformazione o tramite il metodo dei cerchi di Mohr.



Il tensore degli sforzi è relativo ad una qualunque condizioni di sollecitazione, con presenza di 6 componenti di sforzo indipendenti dati da tensioni normale e tangenziali. Ciò comporta che ruotando il cubetto solido di riferimento nello spazio, varia lo stato tensionale ad esso associato.



Se si ruota in continuazione il cubetto solido di riferimento si scopre infine l'esistenza di due condizioni limite:

- 1) l'esistenza di una configurazione geometrica per la quale si assiste all'assenza delle tensioni tangenziali, nel quale caso gli sforzi normali assumono il loro valore massimo e sono definiti **sforzi principali**.
- 2) l'esistenza di tensioni tangenziali massime ruotate di 45 rispetto al caso precedente.

Un muro di sostegno privo di attrito o un deposito alluvionale conducono alla presenza delle sole tensioni principali!

Potenza degli INVARIANTI

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\det|A| = (\sigma_x \sigma_y) - (\tau_{xy} \tau_{yx})$$

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\det|B| = (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy} \tau_{yx}) \cos^2 \theta + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy} \tau_{yx}) \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\det|A| = \det|B|$$

I tensori possono essere descritti rispetto ad un sistema di riferimento mediante le loro componenti che nel contempo possiedono proprietà invarianti, ossia hanno esistenze indipendenti rispetto a qualsiasi sistema di coordinate. Ciò comporta che una volta definite rispetto ad un dato sistema, le componenti possono essere rappresentate rispetto a qualunque altro sistema mediante le leggi di trasformazione invarianti.

Il determinante della matrice A è un invariante; di fatti applicando una matrice di trasformazione (rotazione), e sfruttando la relazione trigonometrica tra seni e coseni, si assiste all'invarianza dei determinanti.

Notare che il determinante di una matrice calcola l'area compresa tra due vettori; la stessa quindi non potrà mai variare al mutare del sistema di riferimento essendo un invariante.

gli INVARIANTI DI TENSIONE e lo SPAZIO DEGLI SFORZI PRINCIPALI

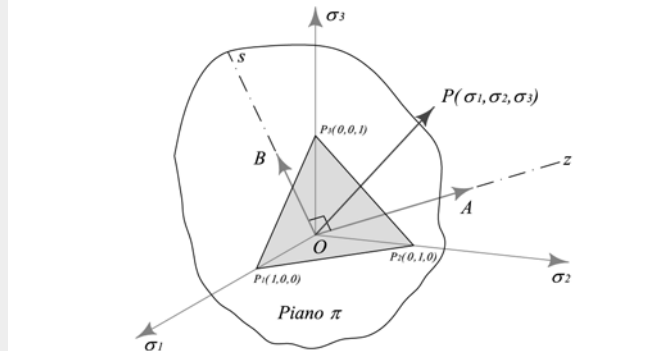
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

L'esistenza delle sole tensioni normali, definite sforzi principali massimo, intermedio e minimo, modifica il tensore degli sforzi e consente l'introduzione di alcuni invarianti di calcolo noti come invariante primo o lineare, invariante secondo o quadratico ed invariante terzo o cubico:

Notare, ad esempio, che l'invariante primo o lineare è la traccia del tensore e si dimostra che al variare del sistema di riferimento gli stessi non cambiano.

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

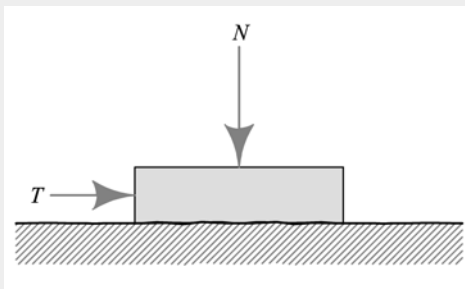
Un ulteriore vantaggio legato all'esistenza degli sforzi principali deriva dalla possibilità di definire lo **spazio degli sforzi principali**, ossia il luogo geometrico nel quale gli sforzi sono usati come unità di misura lungo gli assi coordinati come mostrato nella figura a fianco. Si assiste in questo modo ad una notevole semplificazione dello studio degli stati di sollecitazione, dal momento che un qualunque vettore sforzo può essere scomposto lungo due direzioni prefissate.



- 1) la **retta z** o **asse idrostatico**, perpendicolare ad un piano che possiede la medesima inclinazione rispetto agli assi coordinati; essa individua angoli uguali rispetto alle rette degli sforzi principali e possiede equazione $\sigma_{ott} = p = I_1/3$;
- 2) la **retta s** o **asse deviatorico**, perpendicolare alla precedente e pertanto contenuto nel piano e di equazione $\tau_{ott} = q = 1/3[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{1/2}$.

Sono proprio tali invarianti che consentono di analizzare le prove triassiali in laboratorio!

il MODELLO di MOHR – COULOMB: mattone su superficie scabra



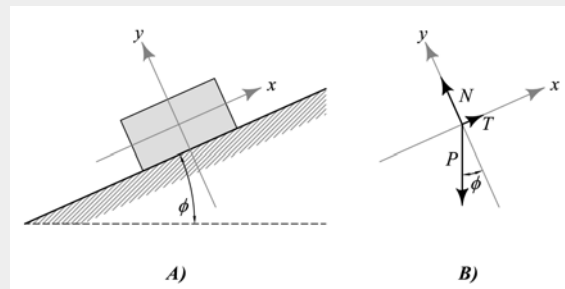
Le tensioni normali e tangenziali sono date da: $\sigma = N/A$; $\tau = T/A \Rightarrow T = \tau \times A$;

Ricavando l'area dalla prima ed inserendola nella seconda si ottiene: $T = (\tau/\sigma) \times N = \mu \times N$ che implica che la massima forza tangenziale sopportata è funzione del prodotto tra l'attrito statico del materiale e la forza normale.

Dividendo entrambi i membri per l'area si ottiene la forma:

$$\tau = \mu \times \sigma \quad (a)$$

che corrisponde all'inizio del moto del mattone.



Le condizioni di moto possono essere ricavate dall'equazione di equilibrio: $N + T + P =$ scomposta nelle due direzioni:

$$T - P \times \sin = 0 \quad (b)$$

$$N - P \times \cos = 0 \Rightarrow N = P \times \cos \quad (c)$$

Introducendo l'equazione relativa all'inizio del moto (in blu) nella (b) si ricava:

$$\mu \times N = P \times \sin \quad (d)$$

Infine, dal rapporto tra la (d) e la (c) si ottiene:

$$\mu = \tan \phi \quad (e)$$

Infine, inserendo l'equazione (e) nella (a) si perviene al criterio di rottura di Mohr-Coulomb valido per terreni puramente attritivi:

$$\tau = \sigma \times \tan \phi'$$

il MODELLO di MOHR - COULOMB

Il modello di Mohr – Coulomb afferma che la resistenza di un generico materiale dipende da due contributi ed aumenta con legge di variazione lineare:

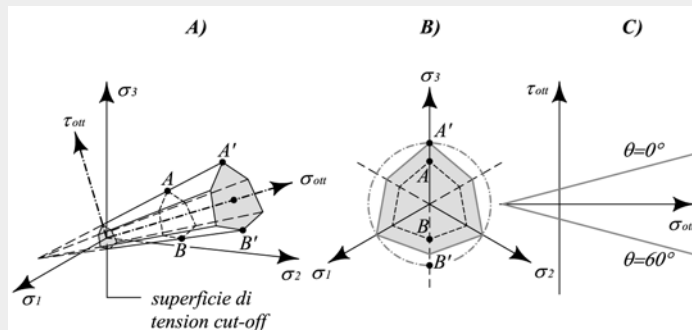
- 1) la coesione intercetta (da forze elettrostatiche)
- 2) l'angolo di attrito (da interazione meccanica)

$$\tau = c' + \sigma' \times \tan \phi'$$

Tali parametri, che consentono analisi in condizioni drenate, possono essere a loro volta derivati da prove di taglio diretto.

Visto in questo modo tale criterio di rottura risulta di scarsa utilità, dal momento che i parametri possono essere desunti anche da prove triassiali nelle quali le tensioni agenti sono i soli sforzi principali massimo e minimo. Dalla figura in alto è possibile però ricavare:

$$\sigma'_{(A)} = A'B - AA' = OC - R \sin \phi' = [(\sigma_1 + \sigma_3)/2] - [(\sigma_1 - \sigma_3)/2] \sin \phi' ; \tau_{(A)} = OB = R \cos \phi' = [(\sigma_1 - \sigma_3)/2] \cos \phi'$$



Introducendo infine tali equazioni nella relazione lineare di partenza si ottiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi' - 2c' \cos \phi' = 0$$

che identifica nello spazio degli sforzi principali un esagono irregolare. Questo, a sua volta, mostra che il comportamento dei terreni dipende sia dalla componente idrostatica e sia da quella deviatorica, ossia manifesta deformazioni di volume e di forma. Allo stesso modo l'equazione data può essere espressa in funzione degli invarianti.

Importante: per $\phi' = 0$ il criterio di Mohr-Coulomb diventa: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2c$

IL MODELLO DI TRESCA

Le tensioni ottaedriche assumono un'importanza strategica nella trattazione matematica del comportamento meccanico dei terreni e comunque di tutti quei materiali che manifestano importanti deformazioni in campo plastico.

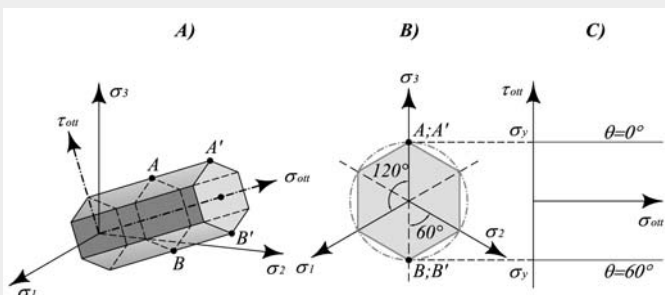
Il modello di Mohr-Coulomb ha infatti evidenziato che uno stato di sollecitazione complesso comporta nei solidi deformazioni di volume per compressione o trazione, associabili all'invariante p , e deformazioni distorsionali dovute all'azione degli sforzi tangenziali ed associabili all'invariante q .

Nello sviluppo storico dei criteri di snervamento i ricercatori rivolsero inizialmente la loro attenzione all'acciaio, scoprendo che le deformazioni plastiche dipendevano fondamentalmente dalle tensioni tangenziali, mentre le pressioni idrostatiche potevano essere trascurate. Il risultato fu lo sviluppo del modello di Tresca:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = 2k = \sigma_y = 2c$$

con k che rappresenta il massimo sforzo tangenziale supportabile dal materiale ovvero la resistenza limite del materiale (σ_y).

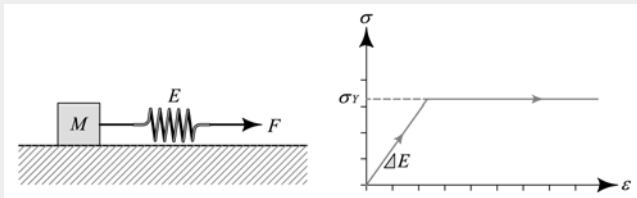
Generalizzando si ha: $\max[\sigma_1 - \sigma_2; \sigma_2 - \sigma_3; \sigma_3 - \sigma_1] = \sigma_y$ che nello spazio degli sforzi principali definisce 6 piani.



Da un punto di vista geometrico il criterio di Tresca corrisponde ad un cilindro a sezione esagonale con asse idrostatico.

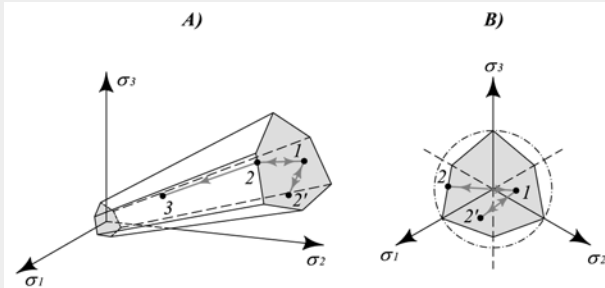
Notare che ponendo nel criterio di Mohr-Coulomb $\tau = \sigma_y = s_u$ lo stesso degenera nel criterio di Tresca che in Geotecnica viene utilizzato per analisi in condizioni non drenate.

IL MODELLO ELASTICO – PERFETTAMENTE PLASTICO



Non resta che comprendere come utilizzare i criteri di rottura illustrati attraverso l'idealizzazione del modello elastico perfettamente plastico.

Tale modello, che può essere schematizzato con un sistema massa + molla in serie, implica che il materiale sviluppa un comportamento elastico fino al raggiungimento della superficie limite (e della tensione di snervamento), nell'ambito della quale si assiste a deformazioni plastiche illimitate negando di fatto l'effetto incrudente. Ciò comporta che la superficie di snervamento rimane fissa nello spazio.

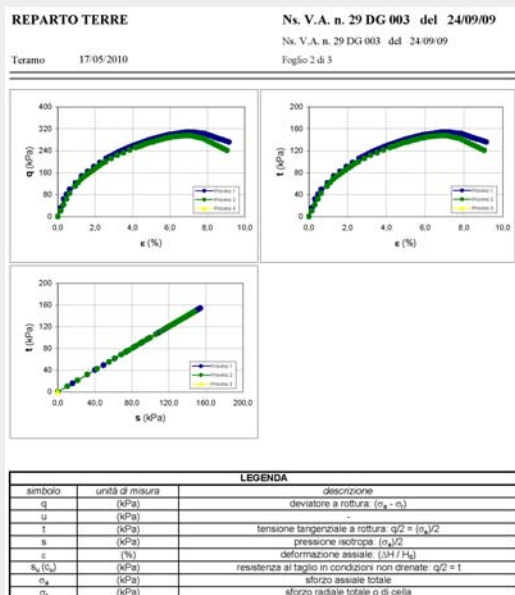


Gli svantaggi di tale modello sono insiti proprio nell'esistenza di una tensione di snervamento (σ_y) che non evolve per effetto incrudente ed alla quale corrispondono deformazioni illimitate.

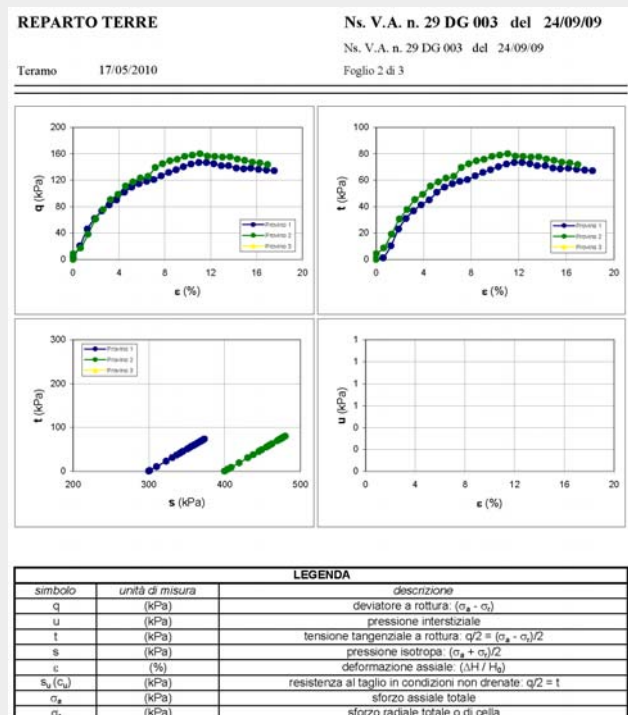
Nel contempo risulta facilmente replicabile in laboratorio, considerato che il fine ultimo delle prove sperimentali consiste proprio nella costruzione del più appropriato criterio di rottura.

Successivamente scopriremo che i terreni manifestano, entro certi limiti, curve sforzi – deformazioni marcatamente non lineari e molto aderenti al modello elastico – perfettamente plastico!

IL MODELLO ELASTICO – PERFETTAMENTE PLASTICO



Prova TRX-ELL



Prova TRX-UU

IL MODELLO ELASTICO – PERFETTAMENTE PLASTICO

Prova TRX-CID

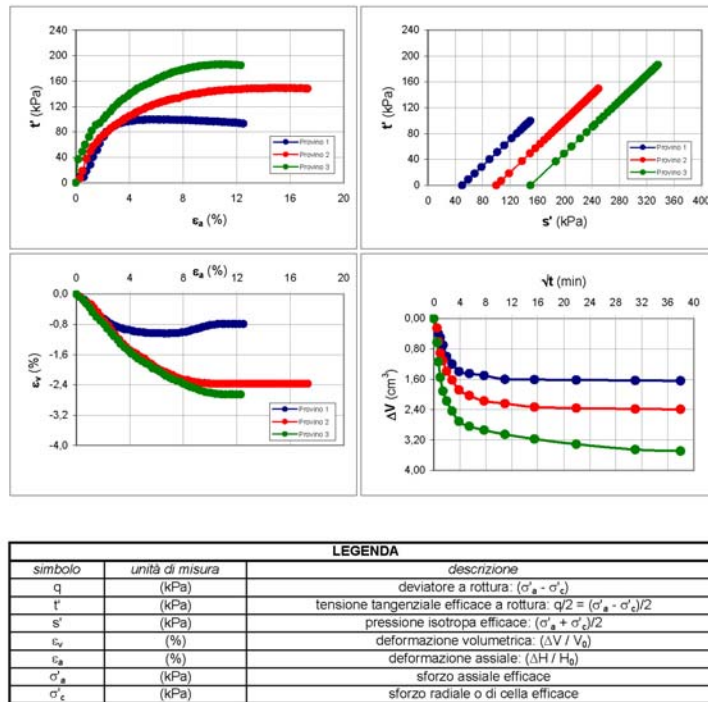
REPARTO TERRE

Ns. V.A. n. 29 DG 003 del 24/09/09

Teramo 17/05/2010

Ns. V.A. n. 29 DG 003 del 24/09/09

Foglio 5 di 5



FINE

*Tutte le figure sono protette dai diritti di copyright;
contattare gli autori per l'autorizzazione all'uso.*