

Corso di aggiornamento  
Progettazione strutturale e  
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

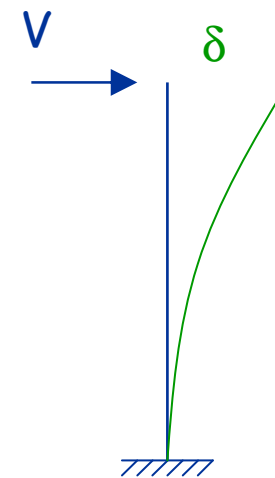
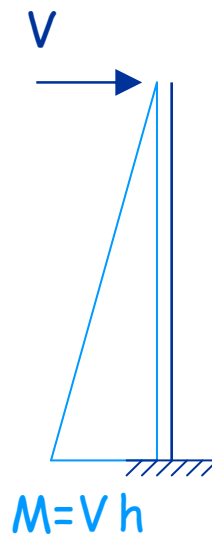
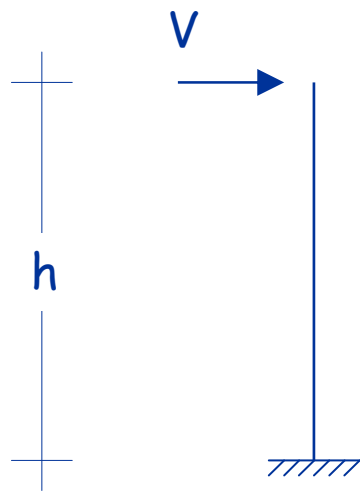
**Problemi specifici nel progetto  
di strutture antisismiche in acciaio**

3 - Effetto  $P-\delta$  e carico critico

Spoletto  
4-5 febbraio 2011  
Aurelio Ghersi

In campo elastico

# Schema monopiano, comportamento elastico

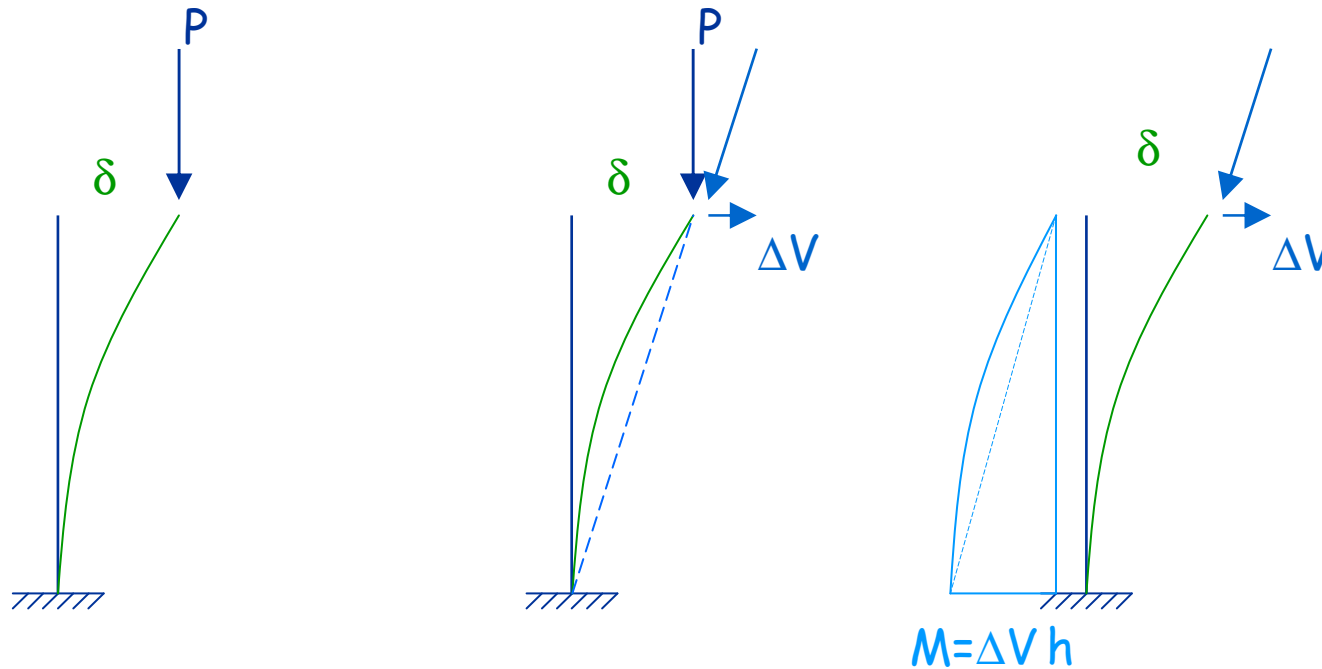


$$V = k \delta$$

$$k = \frac{3EI}{h^3}$$

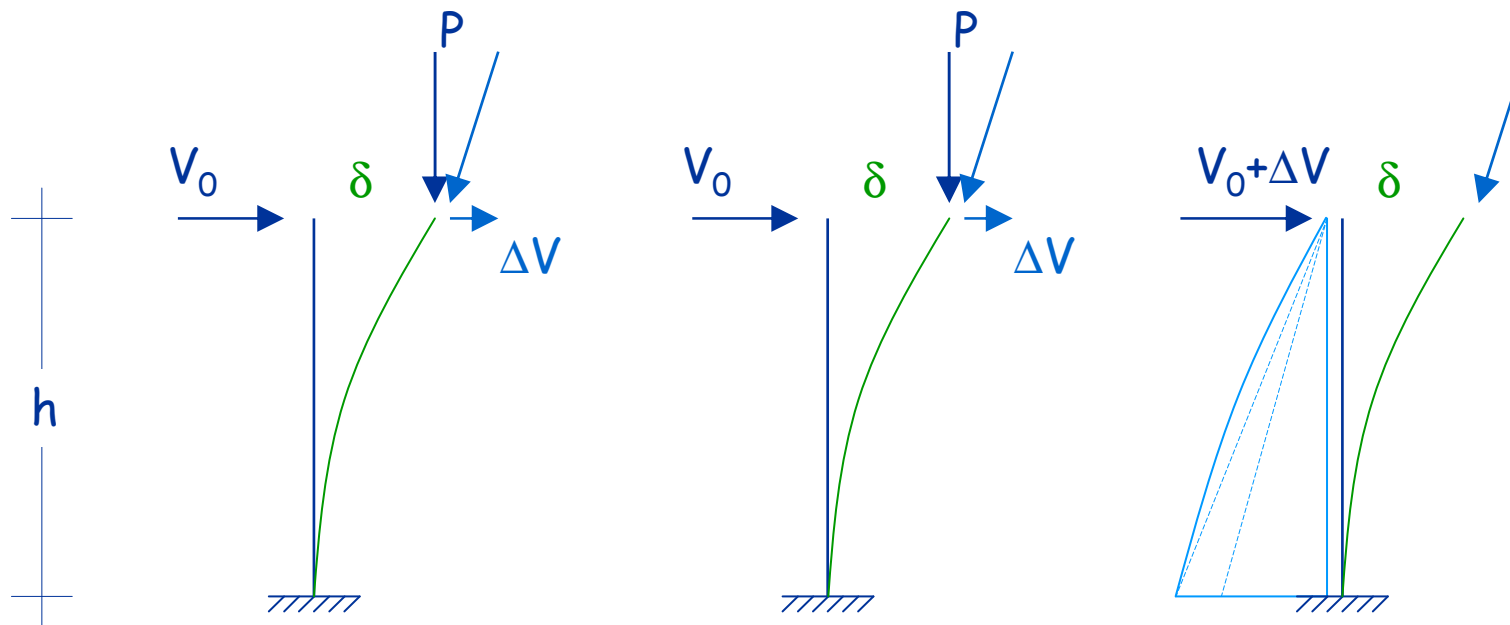
Relazione lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

# Schema monopiano, comportamento elastico



$$\Delta V = \frac{P \delta}{h}$$

# Schema monopiano, comportamento elastico

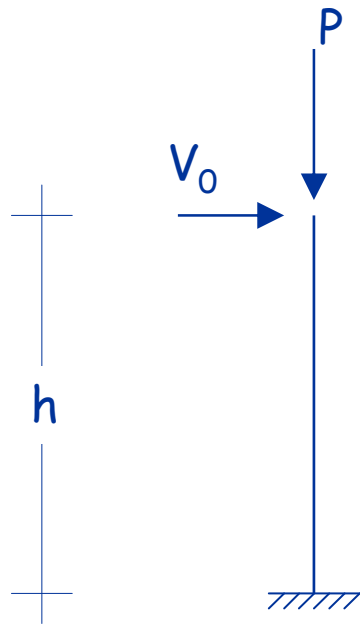


$$V = V_0 + \Delta V$$

$$M = (V_0 + \Delta V) h$$

$$\delta = \frac{V}{k}$$

## Schema monopiano, comportamento elastico



$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + \frac{P \delta}{h}$$

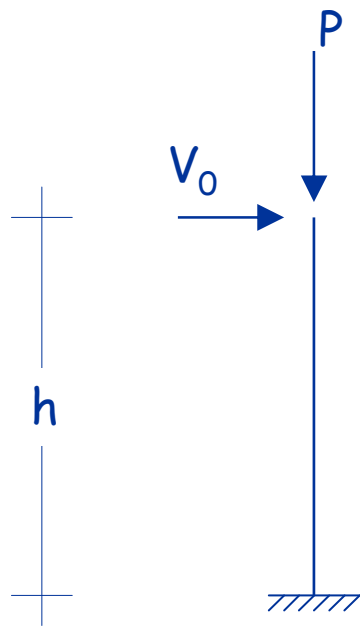
$$\delta = \frac{V}{k}$$

$$k \delta = V_0 + \frac{P \delta}{h}$$

$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

Relazione non lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

# Schema monopiano, comportamento elastico



$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

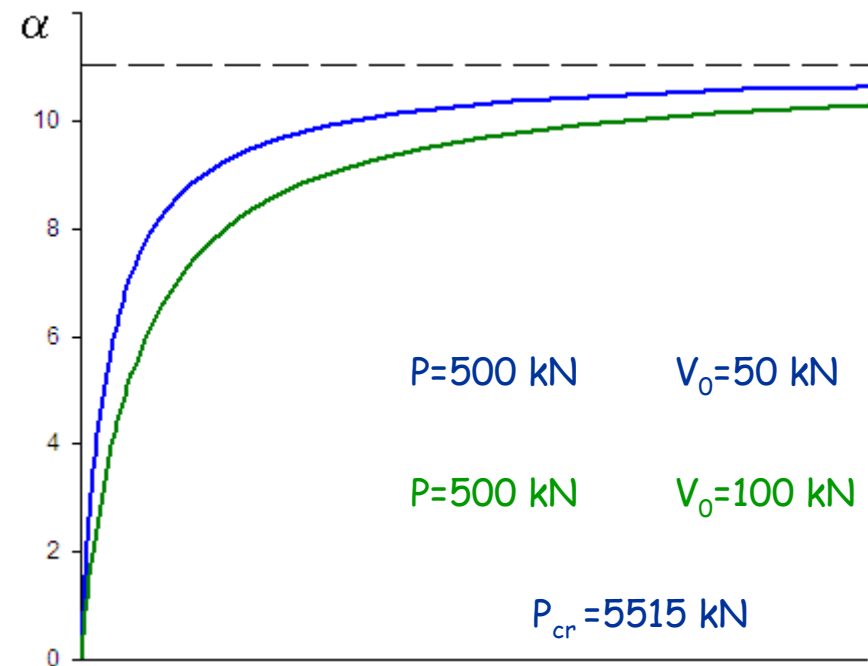
$$\delta = \frac{\alpha V_0 / k}{1 - \frac{\alpha P}{k h}}$$

Asintoto per

$$\alpha P = k h$$

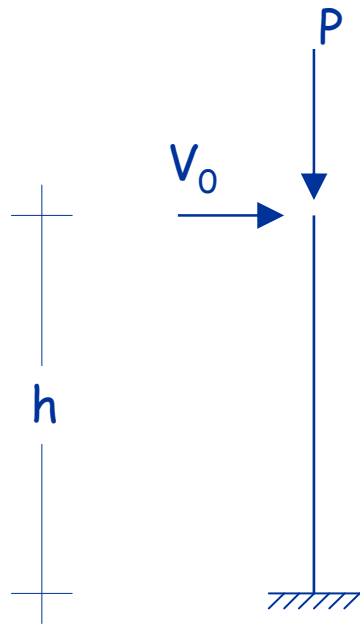
$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

Al crescere di  $V_0$  e  $P$   
(contemporaneamente)  
 $\alpha$  moltiplicatore di  $V_0$  e  $P$



Vedi file Excel Instabilità (mensola)

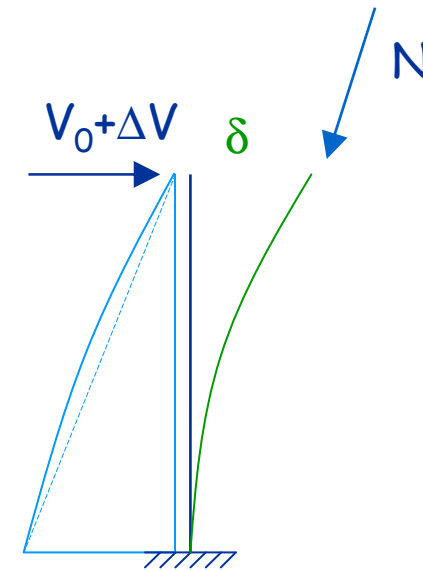
# Schema monopiano, carico critico in campo elastico



$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

indipendentemente da  $V_0$

ma la presenza di sforzo  
normale aumenta la  
deformazione dell'asta e  
riduce la rigidezza



Per la mensola

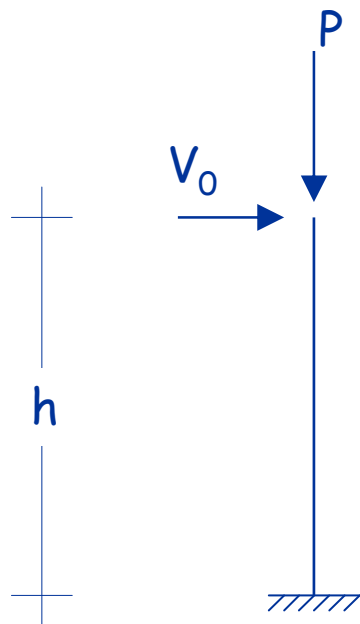
$$k h = \frac{3 E I}{h^2} = \frac{12 E I}{(2h)^2}$$

ma in realtà  
(Eulero)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2h)^2} \cong \frac{9.87 E I}{(2h)^2}$$



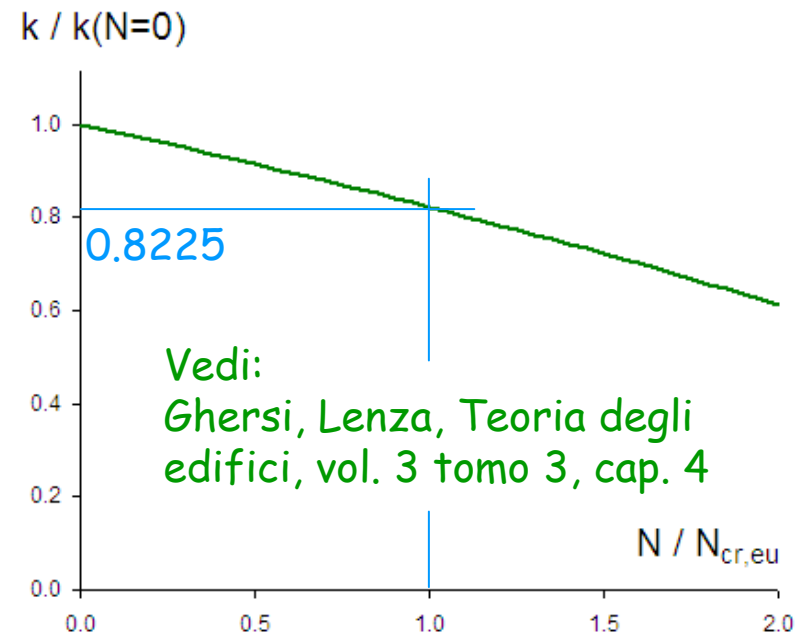
# Schema monopiano, carico critico in campo elastico



$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

indipendentemente da  $V_0$

ma la presenza di sforzo  
normale aumenta la  
deformazione dell'asta e  
riduce la rigidezza



Vedi:  
Gherzi, Lenza, Teoria degli  
edifici, vol. 3 tomo 3, cap. 4

variando così la rigidezza  
si ottengono i valori di Eulero

Per la mensola

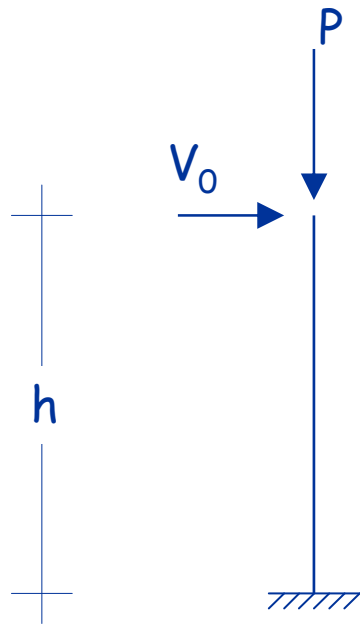
$$k h = \frac{3 E I}{h^2} = \frac{12 E I}{(2h)^2}$$

$$12 \times 0.8225 = 9.87$$

ma in realtà  
(Eulero)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2h)^2} \cong \frac{9.87 E I}{(2h)^2}$$

# Schema monopiano, comportamento elastico



$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

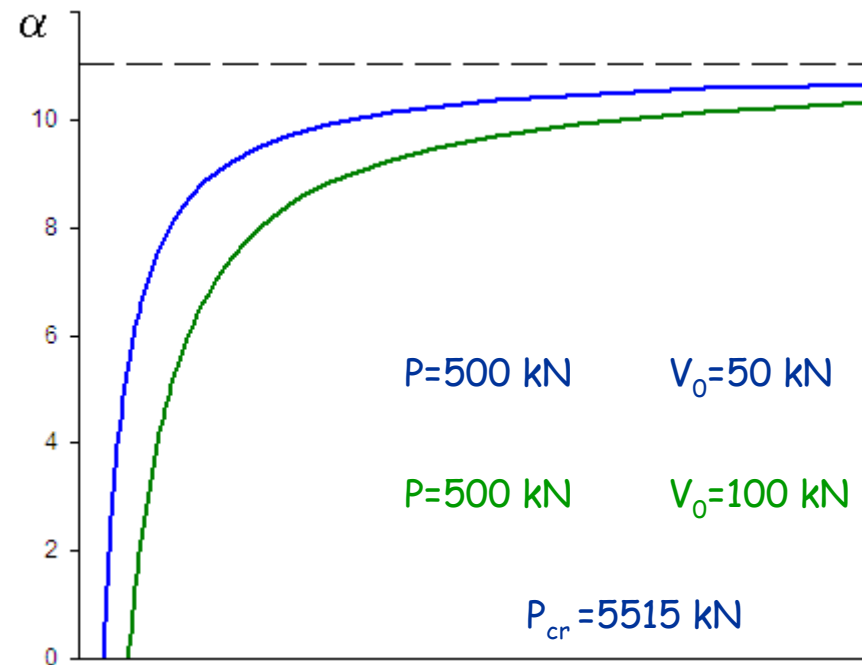
$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{\alpha P}{k h}}$$

Asintoto per

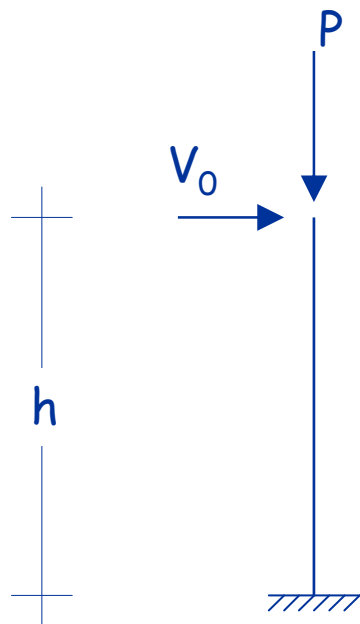
$$\alpha P = k h$$

$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

Al crescere di  $P$   
(con  $V_0$  costante)  
 $\alpha$  moltiplicatore di  $P$



# Schema monopiano, comportamento elastico

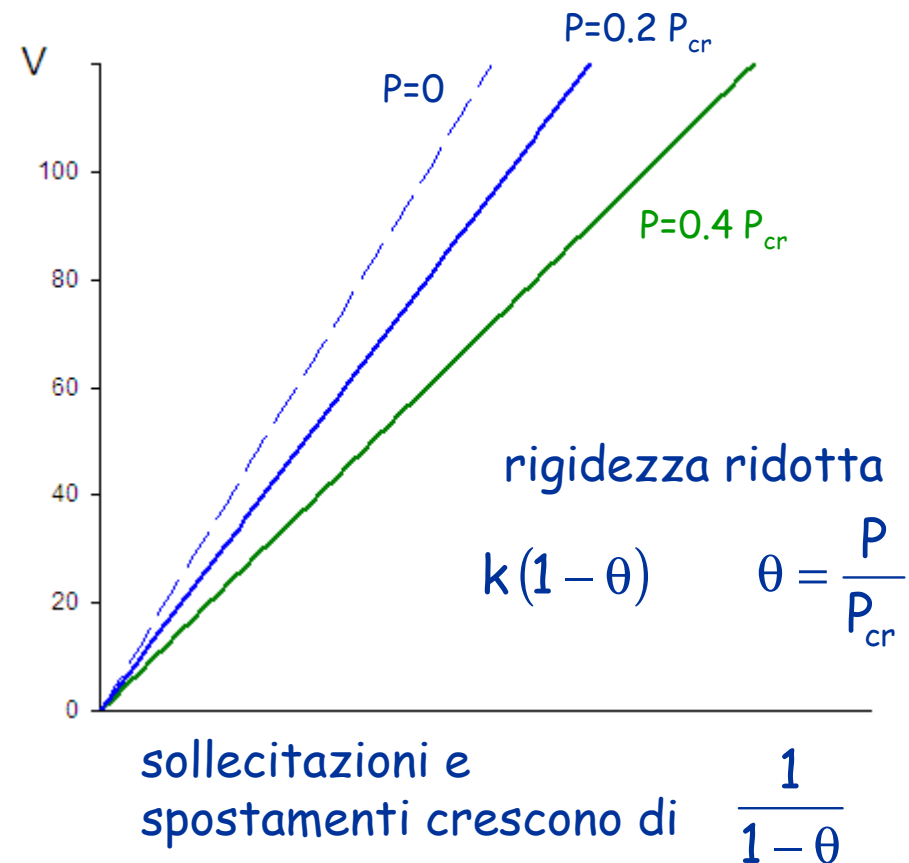


$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

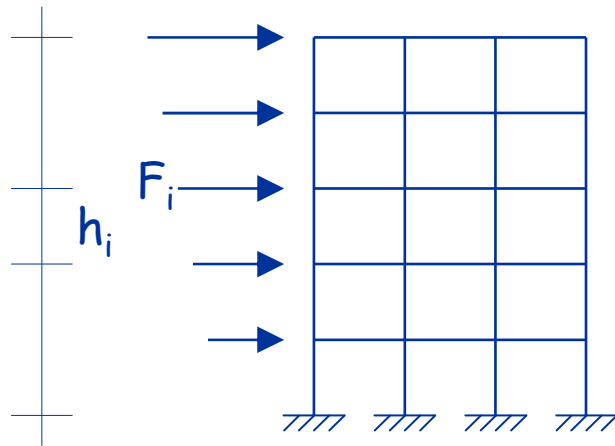
$$\delta = \frac{V / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

Comportamento lineare,  
ma l'effetto di  $P$  cresce in  
maniera non lineare con  $P$

Al crescere di  $V$   
(con  $P$  costante)

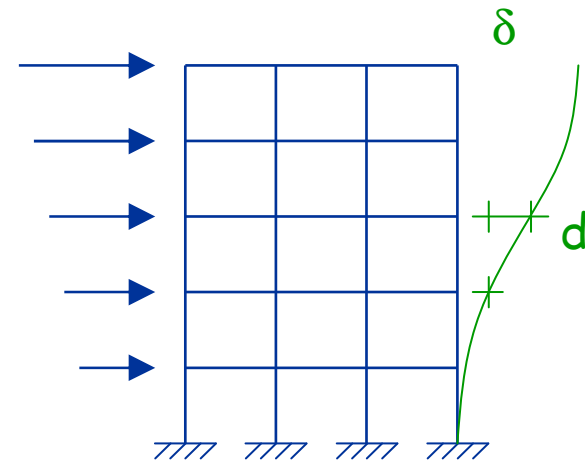


# Telaio multipiano, comportamento elastico



$F_i$  forza di piano

$V_i$  taglio di piano (somma  
forze al di sopra)



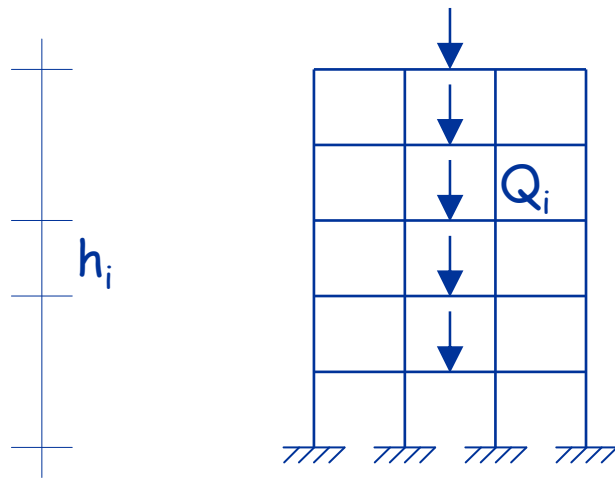
$\delta_i$  spostamenti assoluti

$d_i$  spostamenti relativi

$$F = k \delta$$

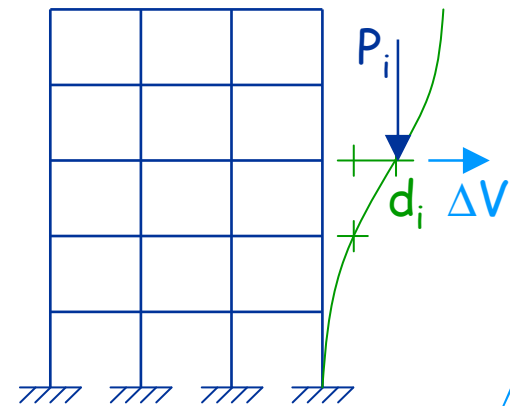
Relazione  
matriciale

# Telaio multipiano, comportamento elastico



$Q_i$  carico verticale di piano

$P_i$  carico totale  
sovrastante il piano



$$\Delta V_i = \frac{P_i d_i}{h_i}$$

Si può ottenere

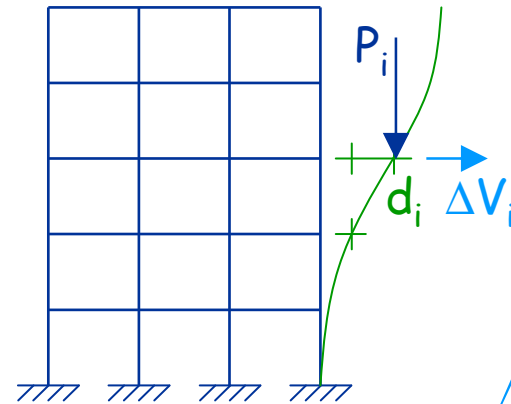
$$\Delta F = k_g \delta$$

Relazione  
matriciale

# Telaio multipiano, comportamento elastico

$$k_g = \begin{bmatrix} \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \end{bmatrix}$$

$$-\frac{P_i}{h_i} \quad \frac{P_i}{h_i} + \frac{P_{i+1}}{h_{i+1}} \quad -\frac{P_{i+1}}{h_{i+1}}$$



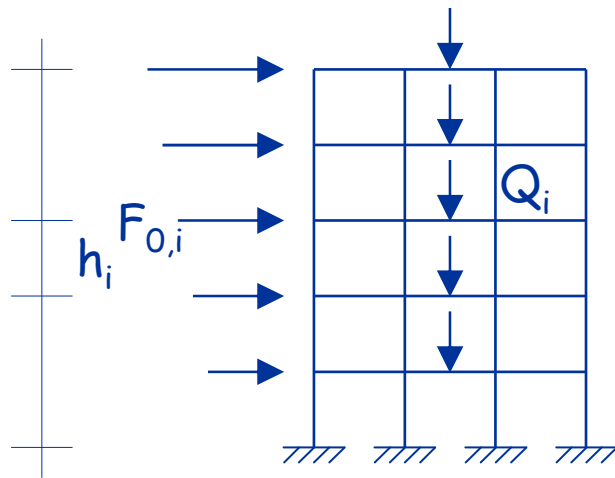
$$\Delta V_i = \frac{P_i d_i}{h_i}$$

Si può ottenere

$$\Delta F = k_g \delta$$

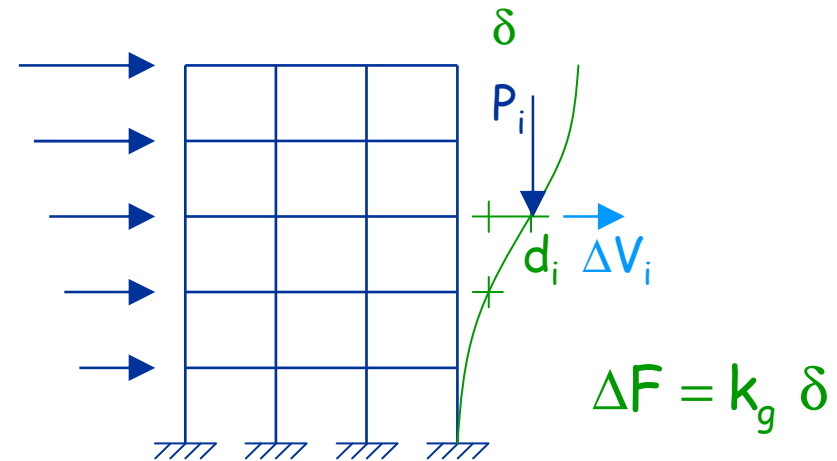
Relazione  
matriciale

# Telaio multipiano, comportamento elastico



$$F = F_0 + \Delta F = k \delta$$

Relazione  
matriciale

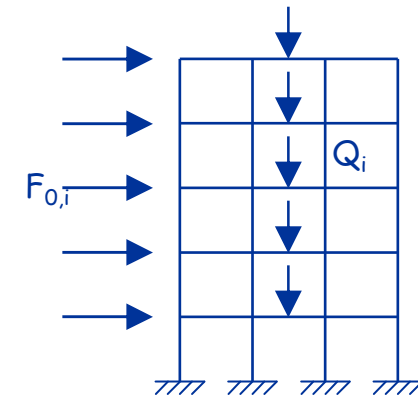


$$F_0 = F - \Delta F = k \delta - k_g \delta = (k - k_g) \delta$$

Matrice di rigidezza  
ridotta per tener  
conto dell'effetto P- $\delta$

# Telaio multipiano, comportamento elastico

matrice rigidezza		tutti i termini sono in kN/mm		
12.378	-16.672	5.314	-1.257	0.290
-16.672	36.593	-27.821	9.577	-2.098
5.314	-27.821	53.540	-43.431	15.500
-1.257	9.577	-43.431	73.692	-55.183
0.290	-2.098	15.500	-55.183	94.120
matrice geometrica				
0.171	-0.171	0	0	0
-0.171	0.557	-0.386	0	0
0	-0.386	0.986	-0.600	0
0	0	-0.600	1.414	-0.814
0	0	0	-0.814	1.843
matrice rigidezza - geometrica				
12.207	-16.501	5.314	-1.257	0.290
-16.501	36.036	-27.435	9.577	-2.098
5.314	-27.435	52.554	-42.831	15.500
-1.257	9.577	-42.831	72.278	-54.369
0.290	-2.098	15.500	-54.369	92.277

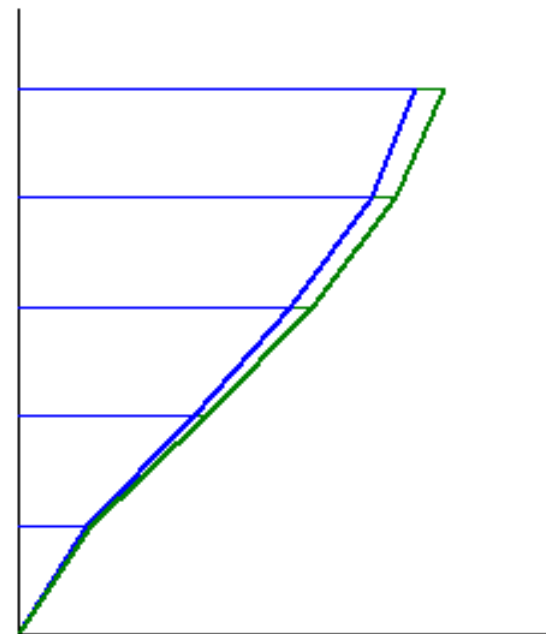
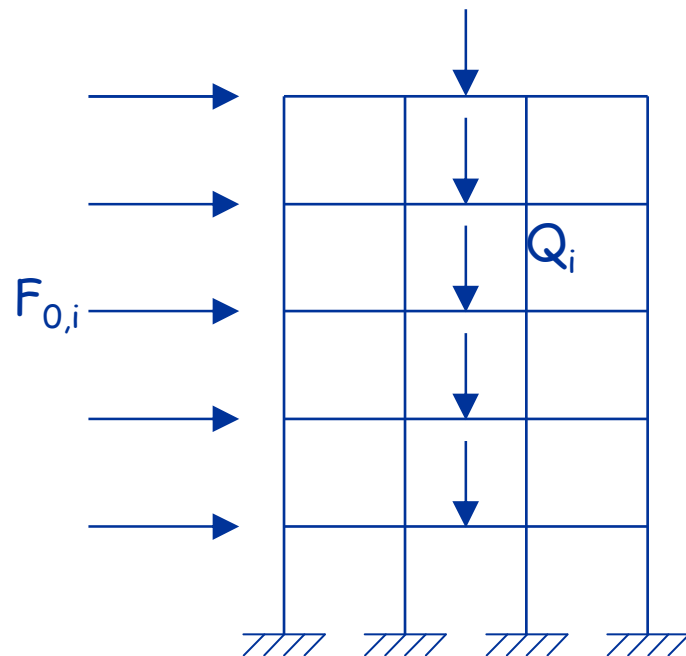


Vedi file Excel Instabilità (telaio)



# Telaio multipiano, comportamento elastico

piano	h [m]	z [m]	F [kN]	senza P- $\delta$ spo [mm]	con P- $\delta$ spo [mm]
5	3.50	17.50	100	145.7	155.6
4	3.50	14.00	100	129.5	138.7
3	3.50	10.50	100	99.8	107.1
2	3.50	7.00	100	64.4	69.0
1	3.50	3.50	100	24.8	26.4



## Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

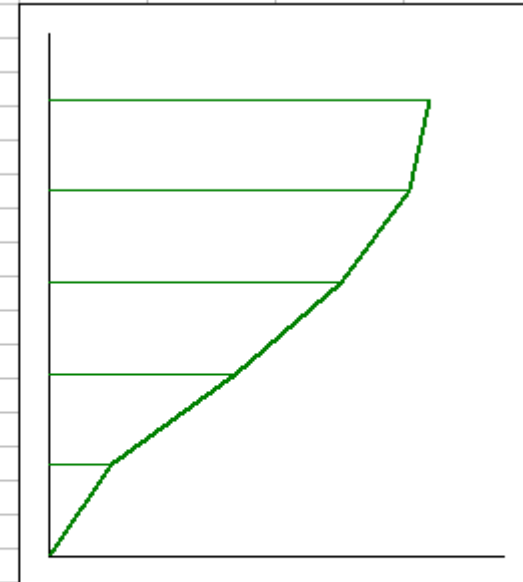
- Incrementando i carichi verticali di  $\alpha$  si ha carico critico quando non è più possibile portare forze orizzontali (le forze instabilizzanti tengono, da sole, la struttura deformata)

$$F_0 = (k - \alpha k_g) \delta = 0$$

- Si hanno soluzioni se  $\text{Det}(k - \alpha k_g) = 0$   
(problema di autovalori e autovettori)

## Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

<b>matrice rigidezza</b>					tutti i termini sono in kN/mm				
12.378	-16.672	5.314	-1.257	0.290					
-16.672	36.593	-27.821	9.577	-2.098					
5.314	-27.821	53.540	-43.431	15.500					
-1.257	9.577	-43.431	73.692	-55.183					
0.290	-2.098	15.500	-55.183	94.120					
<b>matrice geometrica</b>									
0.171	-0.171	0	0	0					
-0.171	0.557	-0.386	0	0					
0	-0.386	0.986	-0.600	0					
0	0	-0.600	1.414	-0.814					
0	0	0	-0.814	1.843					
<b>moltiplicatore critico</b>									
$\alpha_{cr}$	14.77215	modificare questo valore fino ad annullare il determinante							
<b>determinante</b>									
6.37E-05	valore da azzerare								
<b>matrice rigidezza - geometrica</b>									
9.846	-14.140	5.314	-1.257	0.290	t.noto	inversa			spo cr
-14.140	28.363	-22.123	9.577	-2.098	14.140	0.108	0.131	0.093	0.033
5.314	-22.123	38.979	-34.568	15.500	-5.314	0.131	0.248	0.201	0.076
-1.257	9.577	-34.568	52.800	-43.155	1.257	0.093	0.201	0.207	0.090
0.290	-2.098	15.500	-43.155	66.897	-0.290	0.033	0.076	0.090	0.056



# Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

## 1. Procedimento iterativo

Correzione dell'analisi lineare, iterativa									
			senza P- $\delta$		prima iterazione				
piano	F [kN]	V [kN]	spo [mm]	dr [mm]	$\Delta V$ [kN]	V' [kN]	F' [kN]	spo [mm]	dr [mm]
5	100	100	145.7	16.1	2.8	102.8	102.8	154.9	16.8
4	100	200	129.5	29.8	11.5	211.5	108.7	138.1	31.5
3	100	300	99.8	35.4	21.2	321.2	109.7	106.6	37.8
2	100	400	64.4	39.6	32.2	432.2	111.0	68.7	42.4
1	100	500	24.8	24.8	25.5	525.5	93.3	26.3	26.3

Calcolo lineare, con  
le forze assegnate

$\Delta V$

Nuove  
forze

Nuovi  
spostamenti

# Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

## 1. Procedimento iterativo

prima iterazione					seconda iterazione				
$\Delta V$ [kN]	$V'$ [kN]	$F'$ [kN]	spo [mm]	dr [mm]	$\Delta V$ [kN]	$V''$ [kN]	$F''$ [kN]	spo [mm]	$\Delta$ %
2.8	102.8	102.8	154.9	16.8	2.9	102.9	102.9	155.5	-0.03%
11.5	211.5	108.7	138.1	31.5	12.2	212.2	109.3	138.7	-0.03%
21.2	321.2	109.7	106.6	37.8	22.7	322.7	110.5	107.0	-0.03%
32.2	432.2	111.0	68.7	42.4	34.5	434.5	111.8	69.0	-0.03%
25.5	525.5	93.3	26.3	26.3	27.1	527.1	92.6	26.4	-0.03%

... iterando  
quanto occorre

$\Delta V$

Nuove  
forze

Nuovi  
spostamenti

# Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

## 2. Con determinazione approssimata del carico critico

Carico critico						senza P-δ				
piano	h [m]	z [m]	P [kN]	F [kN]	V [kN]	spo [mm]	dr [mm]	α cr	θ	1/1-θ
5	3.50	17.50	600	100	100	145.7	16.1	36.13	0.028	1.028
4	3.50	14.00	1350	100	200	129.5	29.8	17.43	0.057	1.061
3	3.50	10.50	2100	100	300	99.8	35.4	14.14	0.071	1.076
2	3.50	7.00	2850	100	400	64.4	39.6	12.41	0.081	1.088
1	3.50	3.50	3600	100	500	24.8	24.8	19.58	0.051	1.054
								α cr min	θ max	1/1-θmax
								12.41	0.081	1.088

a ogni piano si calcola  $\alpha_{cr} = \frac{V_i h_i}{P_i d_i}$  e si prende il minimo

# Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

## 2. Con determinazione approssimata del carico critico

								$\alpha_{cr \min}$	$\theta_{\max}$	$1/1-\theta_{\max}$
								12.41	0.081	1.088
Correzione dell'analisi lineare, con $\theta$										
		senza P- $\delta$	stima	con P- $\delta$						
piano	F [kN]	spo [mm]	spo [mm]	spo [mm]	$\Delta \%$					
5	100	145.7	158.4	155.6	1.8%					
4	100	129.5	140.9	138.7	1.6%					
3	100	99.8	108.5	107.1	1.4%					
2	100	64.4	70.0	69.0	1.5%					
1	100	24.8	27.0	26.4	2.1%					

$$\theta = \frac{1}{\alpha_{cr}} \quad \theta_{\max} = \frac{1}{\alpha_{cr, \min}}$$

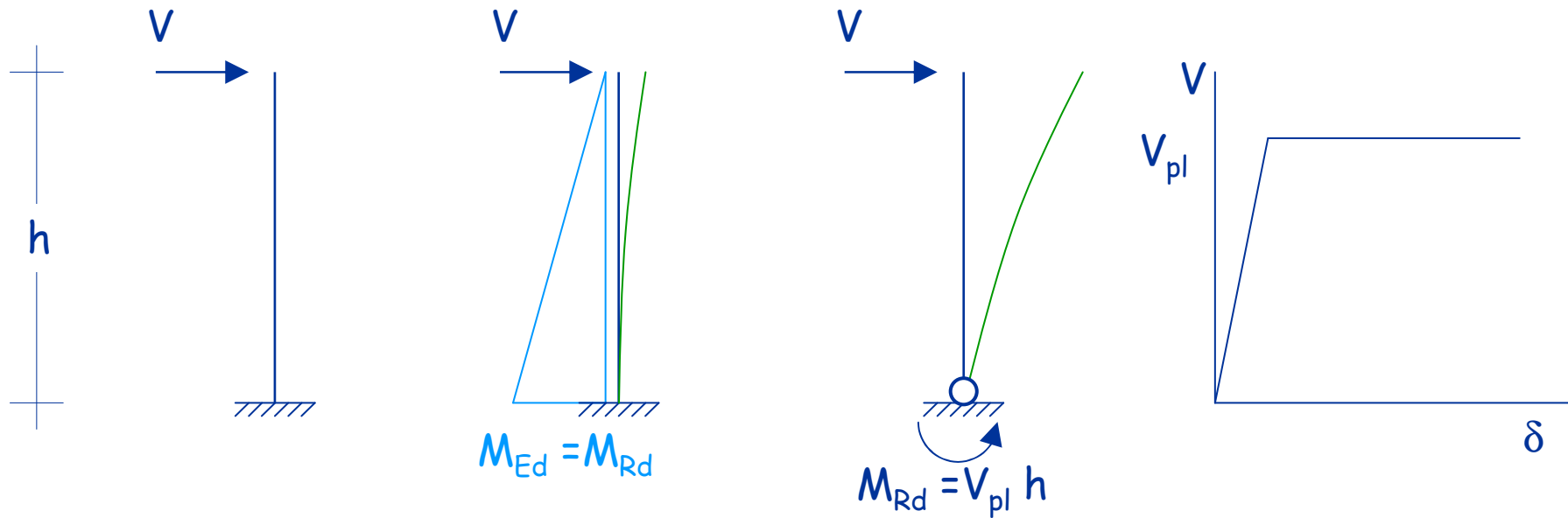
si amplificano i risultati di  $\frac{1}{1 - \theta_{\max}}$

In campo plastico



# Schema monopiano, comportamento in campo plastico

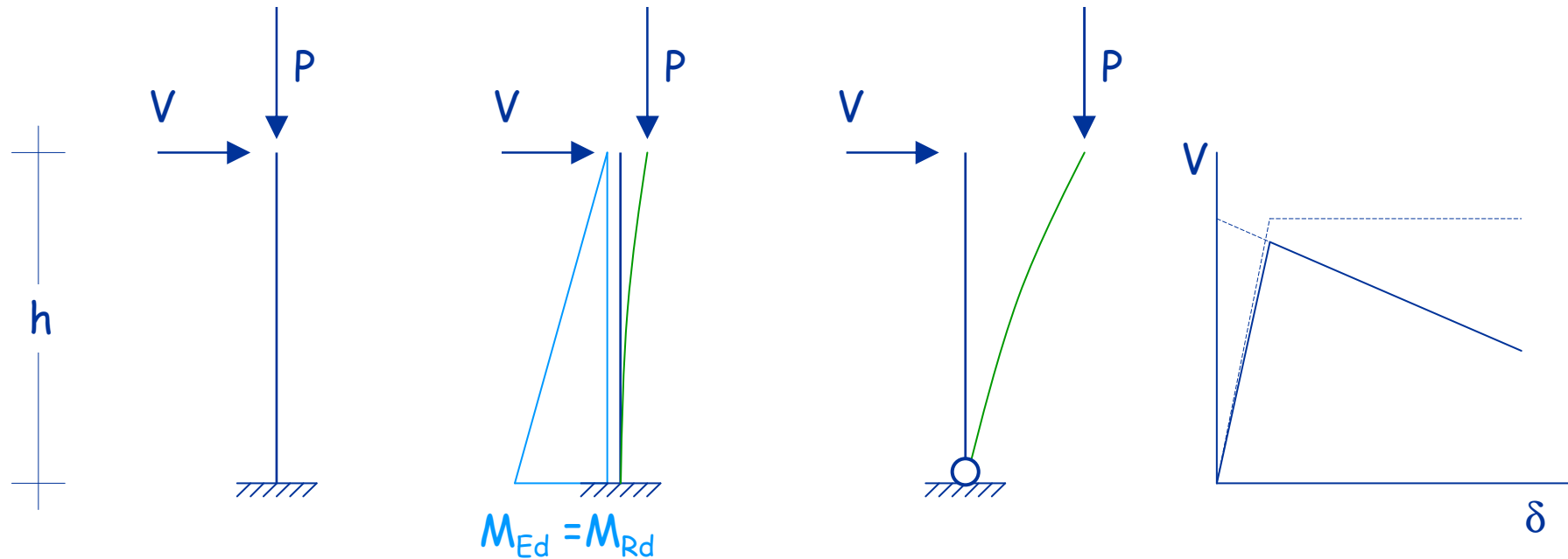
- Al crescere della forza orizzontale



Relazione non lineare tra carichi e spostamenti

# Schema monopiano, comportamento in campo plastico

- Se si considera l'effetto  $P-\delta$



Il tratto elastico lineare ha una pendenza minore

La cerniera plastica si forma per un taglio minore

Dopo la formazione della cerniera si prosegue con un tratto decrescente

# Schema monopiano, comportamento in campo plastico

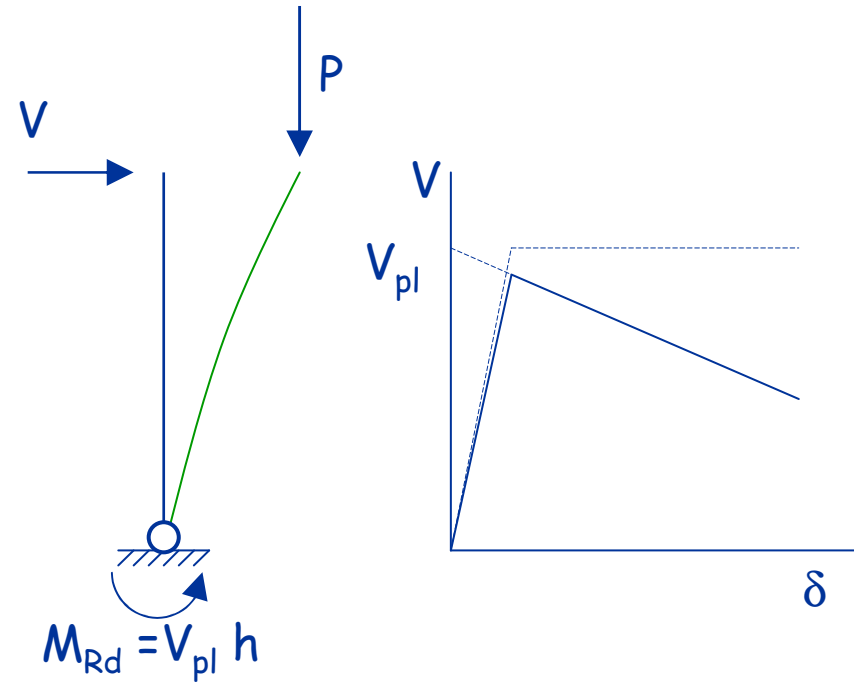
- Se si considera l'effetto P- $\delta$

Per l'equilibrio

$$V h + P \delta = V_{pl} h$$

$$V = V_{pl} - \frac{P \delta}{h}$$

(retta decrescente)



# Implicazioni per l'analisi sismica

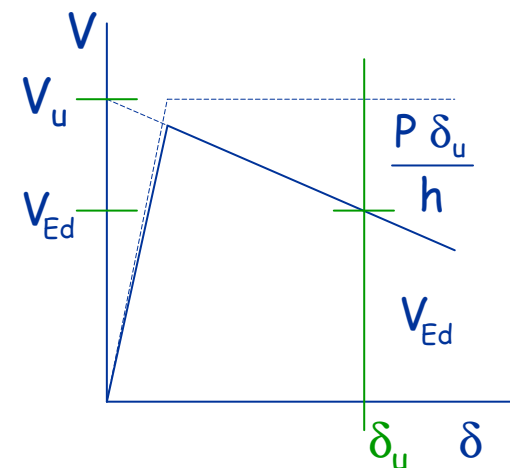
- Alla struttura sono applicate forze di calcolo  $V_{Ed}$
- La struttura in campo plastico raggiungerà uno spostamento  $\delta_u$



- La struttura deve essere in grado di portare un taglio plastico (ultimo)  $V_u$  maggiore di  $V_{Ed}$

$$\frac{V_u}{V_{Ed}} = \frac{V_u}{V_u - \frac{P \delta_u}{h}} = \frac{1}{1 - \frac{P \delta_u}{V_u h}} = \frac{1}{1 - \theta}$$

$$\text{con } \theta = \frac{P \delta_u}{V_u h}$$



# Applicazione ai telai

- Calcolare a tutti i piani il rapporto  $\theta_i = \frac{P_i d_{i,u}}{V_{i,u} h_i}$
- Determinarne il massimo  $\theta_{\max}$
- Incrementare i risultati del calcolo di  $\frac{1}{1 - \theta_{\max}}$

La normativa dice che:

- Se  $\theta_{\max} \leq 0.1$  l'effetti può essere trascurato
- Se  $0.1 < \theta_{\max} \leq 0.2$  l'incremento v  fatto cos 
- Se  $0.2 < \theta_{\max} \leq 0.3$  occorrono analisi pi  dettagliate
- Non   ammesso  $\theta_{\max} > 0.3$

# Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per  $d_u$  e  $V_u$ ?
- Spostamenti:
  - Il calcolo SLV è fatto con forze ridotte di  $q$  rispetto a quelle dello spettro elastico
  - Per Newmark, gli spostamenti in campo plastico sono gli stessi della struttura che rimane elastica
  - Quindi i valori di calcolo degli spostamenti devono essere incrementati di  $q$  o più precisamente, di  $S_e(T)/S_d(T)$

# Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per  $V_u$  e  $d_u$ ?

- Tagli:

- La prima plasticizzazione avviene per sisma incrementato di  $\Omega$

$$\Omega = \text{Min} \left( \frac{M_{pl,Rd} - M_{Ed,G}}{M_{Ed,E}} \right)_{\text{travi}}$$

- Tra prima plasticizzazione e collasso vi è un incremento di azione tagliante pari a  $\alpha_u / \alpha_1$
- Quindi i valori di calcolo del taglio devono essere incrementati di  $\Omega \alpha_u / \alpha_1$

- In definitiva si può usare l'espressione

$$\theta = \frac{P_d \frac{S_e(T)}{S_d(T)}}{V h \Omega \frac{\alpha_u}{\alpha_1}}$$