

Corso di aggiornamento  
Progettazione strutturale e  
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

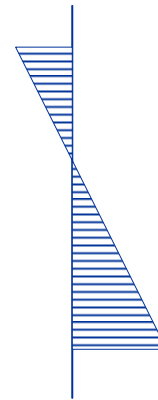
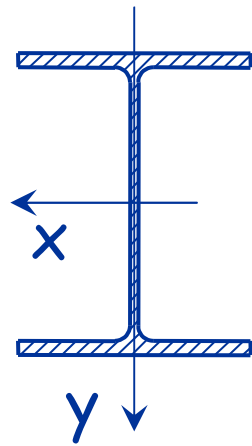
**Progetto di aste e collegamenti in acciaio**

7 - Flessione composta

Spoletto  
2-4 febbraio 2012  
Aurelio Gheresi

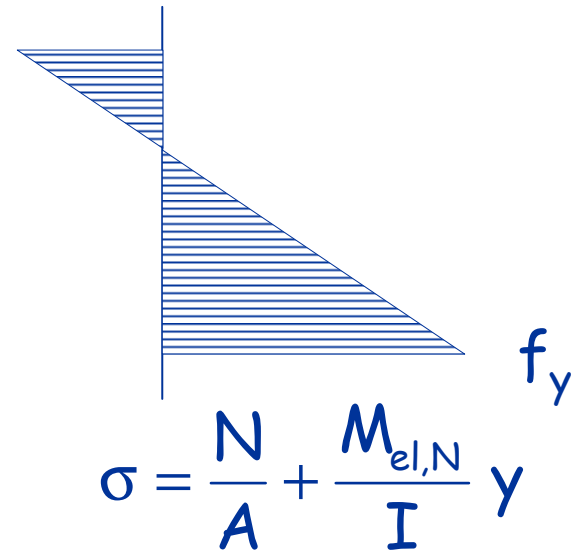
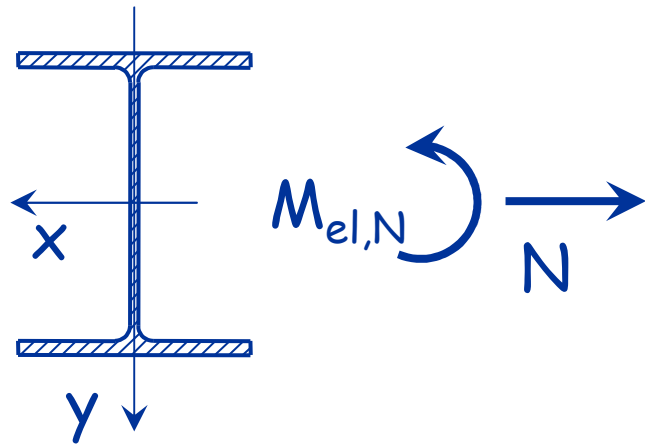
Flessione composta  
tensoflessione

# Comportamento ultimo



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

# Comportamento ultimo



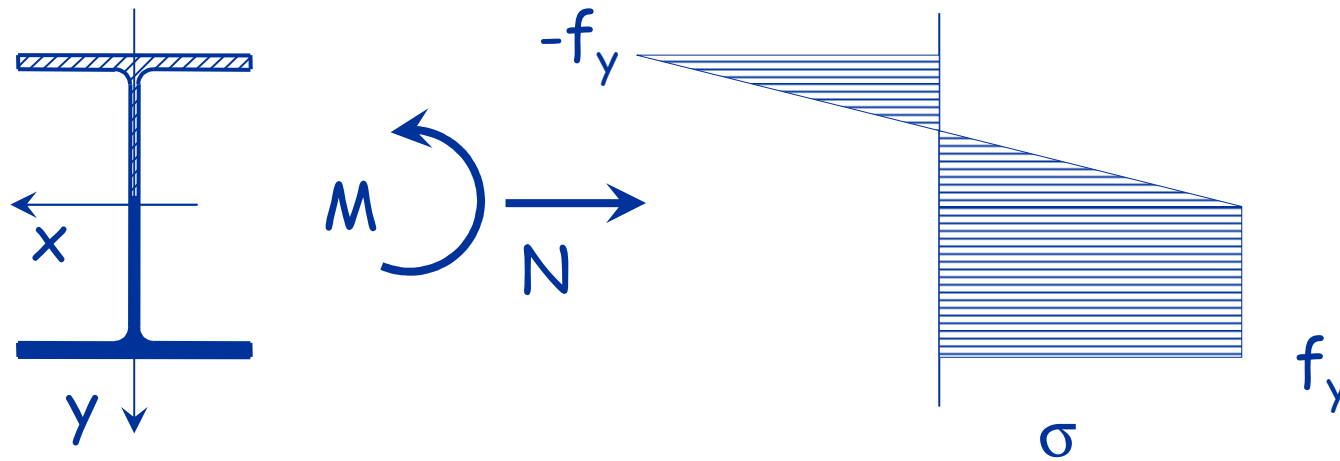
Per calcolare  $M_{el,N}$ :

$$f_y = \frac{N}{A} + \frac{M_{el,N}}{W_{el}}$$



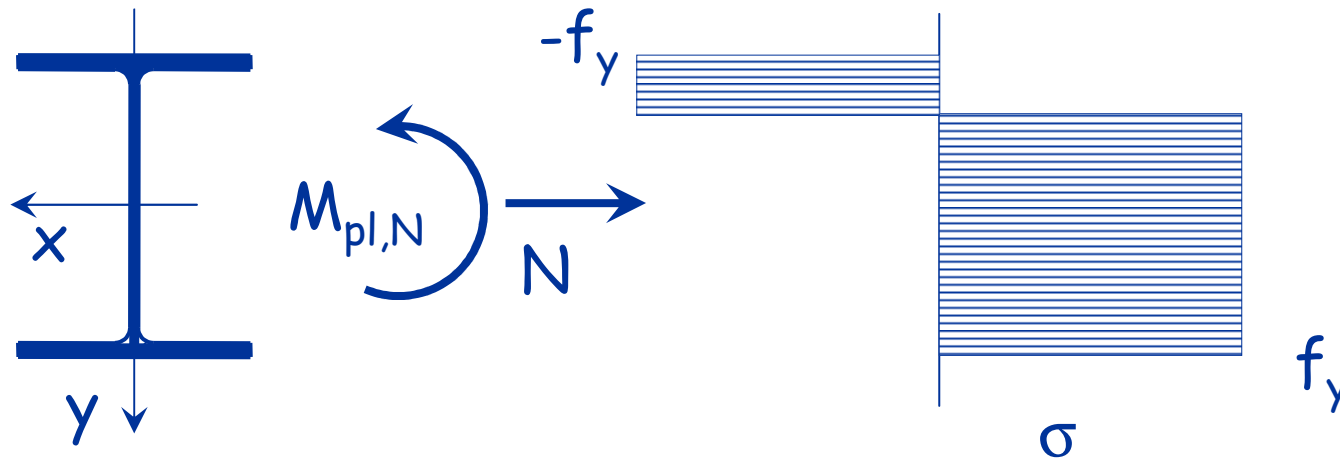
$$M_{el,N} = \left( f_y - \frac{N}{A} \right) W_{el}$$

## Comportamento ultimo



Incrementando il momento flettente le deformazioni plastiche si propagano fino alla completa plasticizzazione della sezione

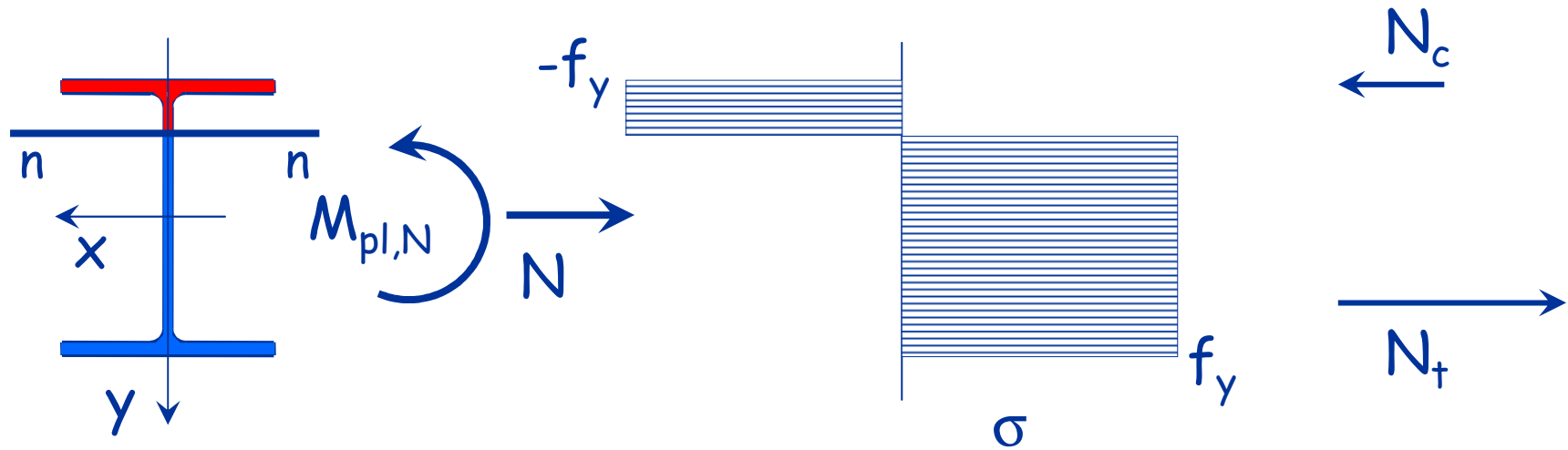
# Comportamento ultimo



Per calcolare  $M_{pl,N}$ :

- 1 - Bisogna prima determinare la posizione dell'asse neutro, dall'equilibrio alla traslazione;
- 2 - Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse baricentrico si determina poi  $M_{pl,N}$

# Comportamento ultimo



## 1 - Determinazione dell'asse neutro

$$N_c + N_t = N$$

(equilibrio alla traslazione)

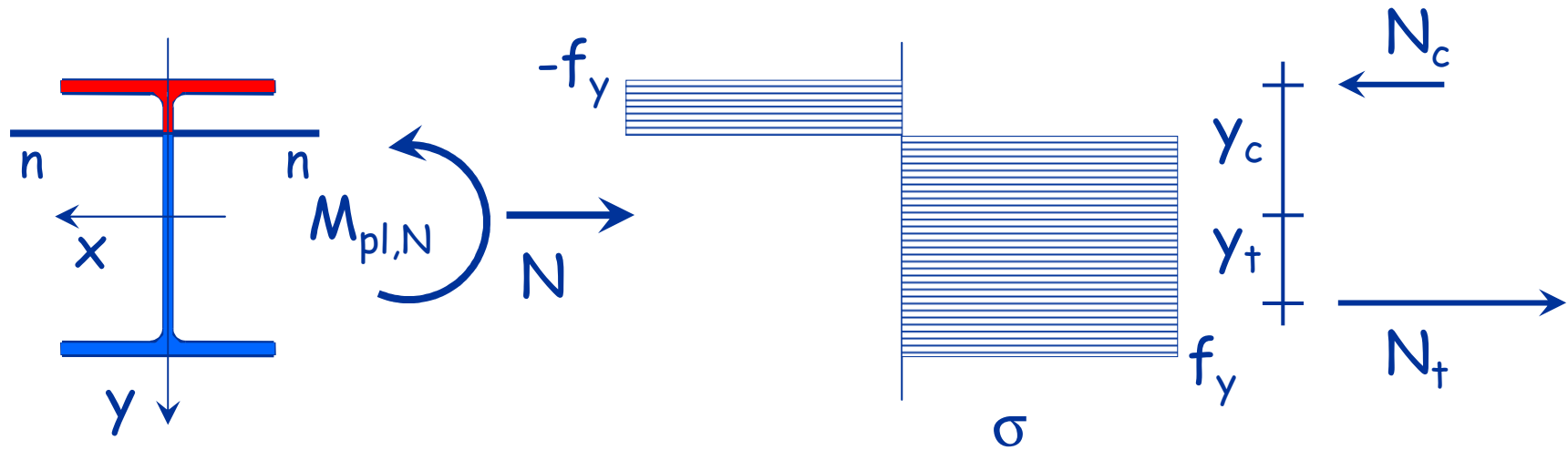


Asse neutro

$$N_c = -f_y A_c$$

$$N_t = f_y A_t$$

# Comportamento ultimo



## 2 - Calcolo di $M_{pl,N}$

$$M_{pl,N} = N_t y_t - N_c y_c = f_y (A_t y_t - A_c y_c)$$

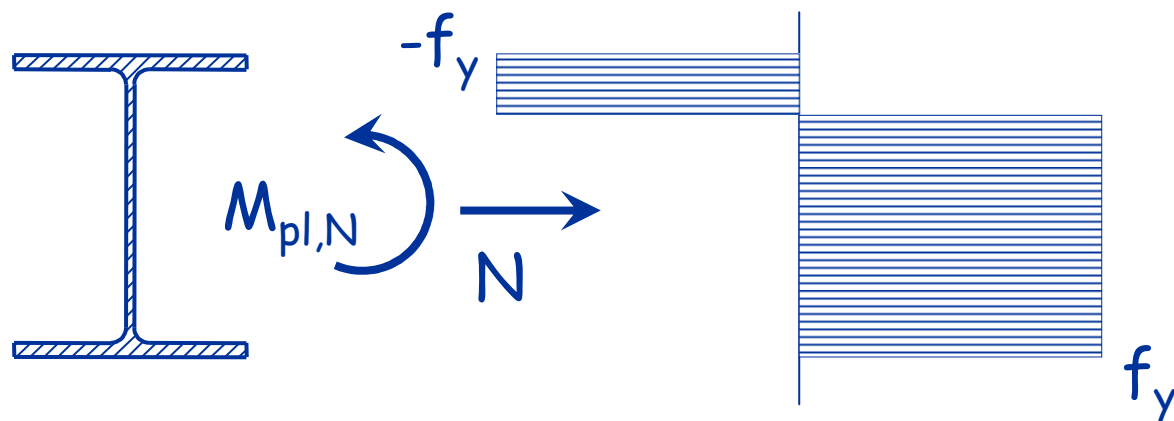
$$N_c = -f_y A_c$$

$$N_t = f_y A_t$$

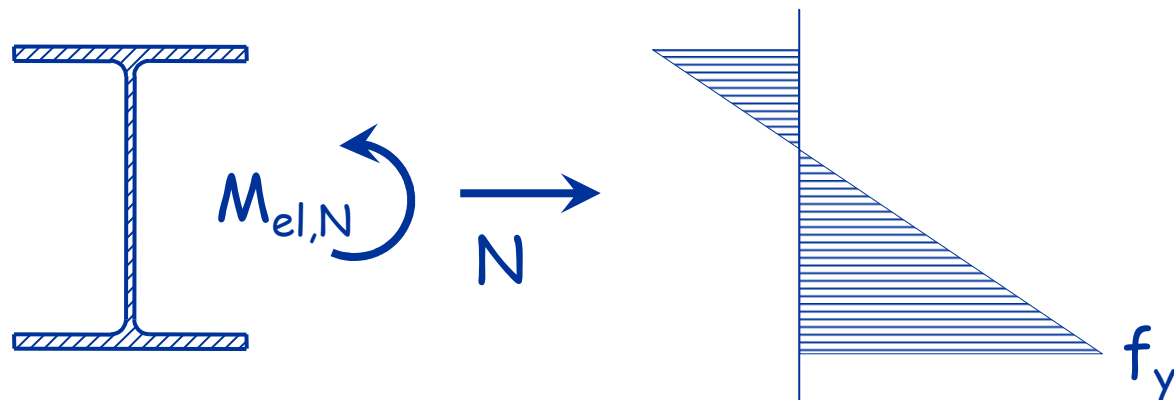


# Verifica - stato limite ultimo

Classe 1 e 2

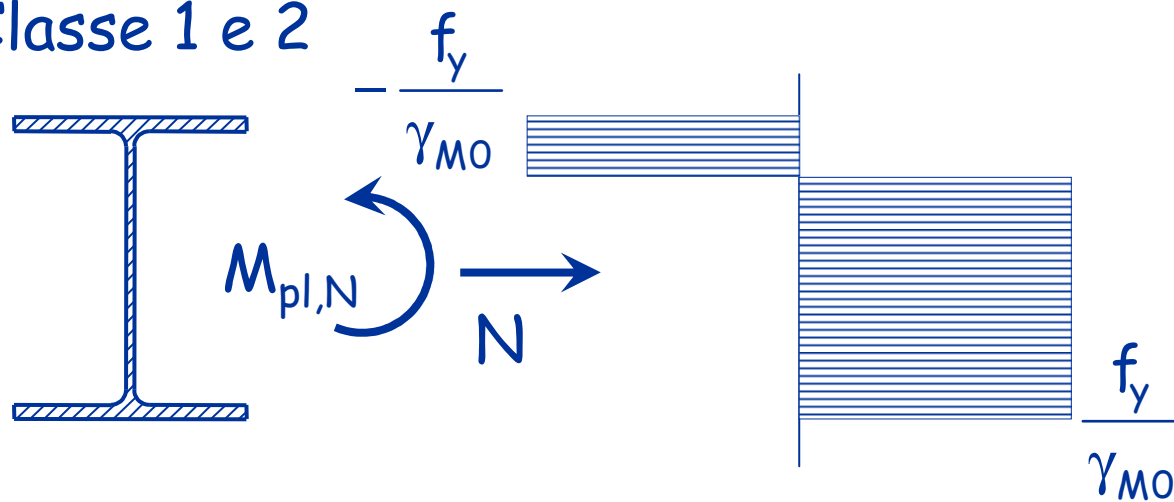


Classe 3



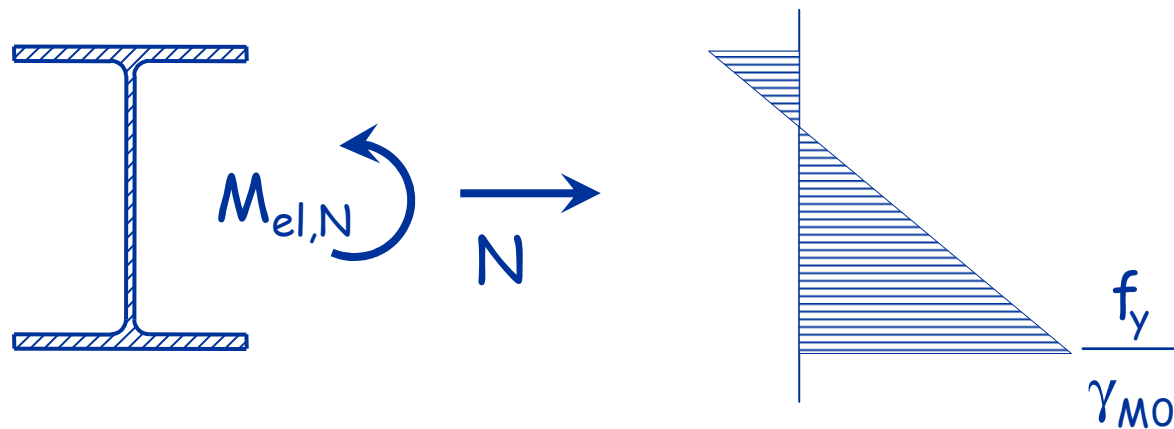
# Verifica - stato limite ultimo

Classe 1 e 2



$$M_{Ed} \leq M_{pl,N,Rd}$$

Classe 3



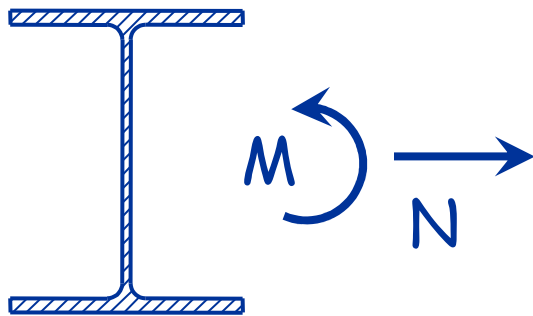
$$M_{Ed} \leq M_{el,N,Rd}$$

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie  $M$ - $N$  per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

Per ricavare una coppia  $M$ - $N$  del dominio

Sezione



Si assegna una posizione dell'asse neutro

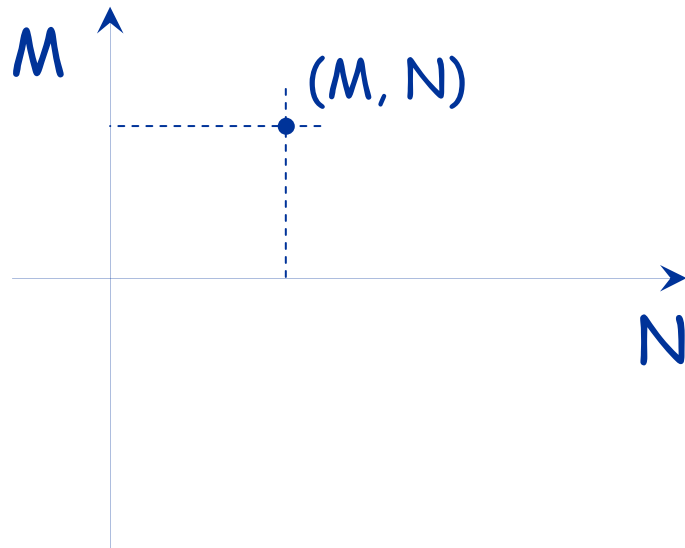
Si determina  $N$

Si determina  $M$  ( $M_{pl,N}$  o  $M_{el,N}$ )

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie  $M$ - $N$  per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

Per ricavare una coppia  $M$ - $N$  del dominio



Si assegna l'asse neutro

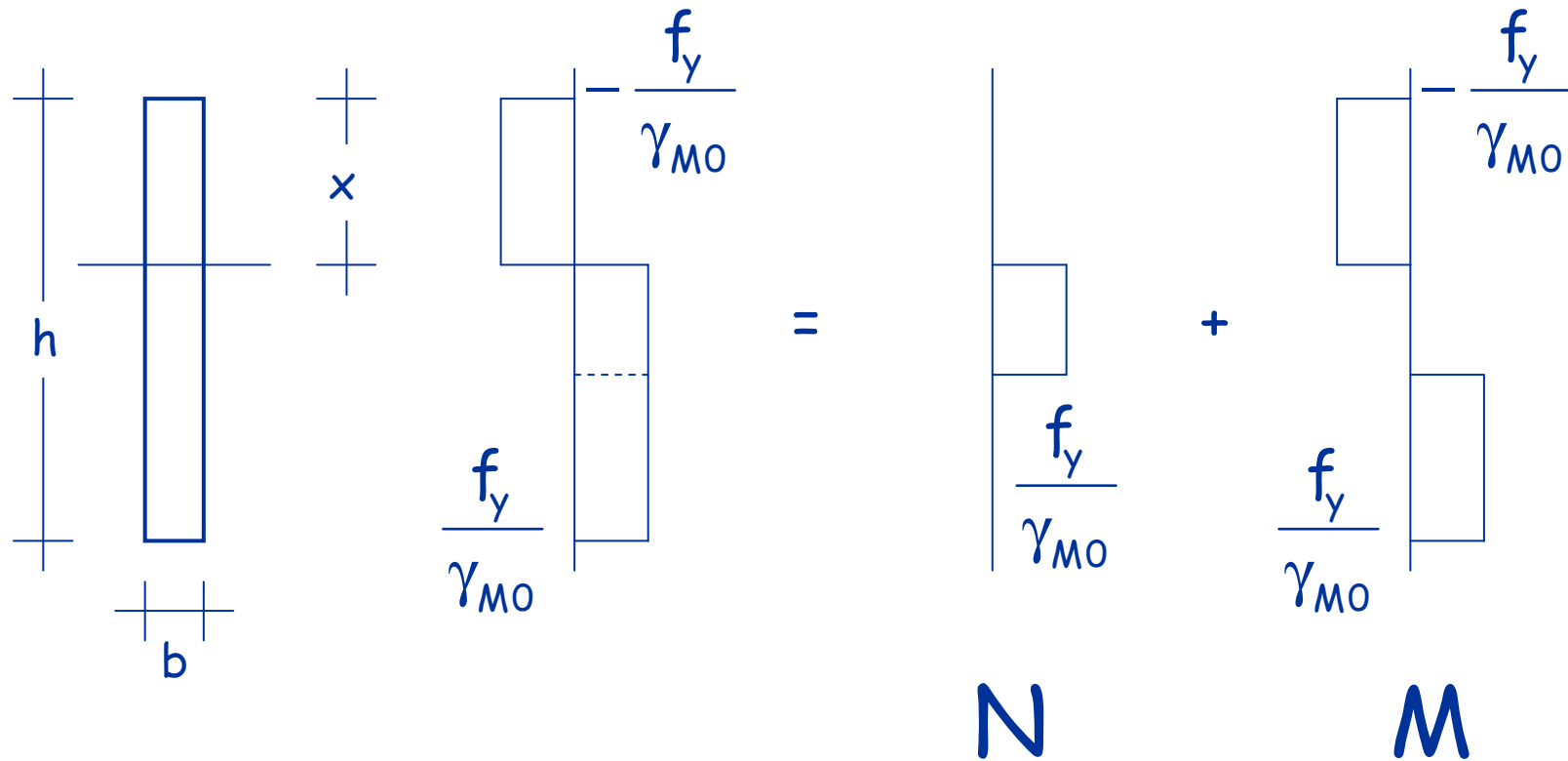
Si determina  $N$

Si determina  $M$  ( $M_{pl,N}$  o  $M_{el,N}$ )

e si riporta la coppia  
 $M - N$  nel diagramma

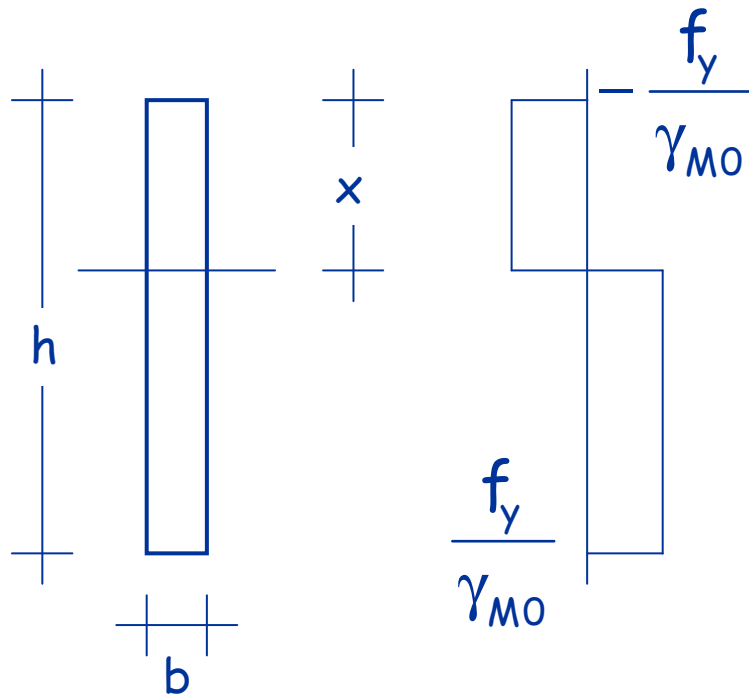
# Esempio

## Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)



# Esempio

## Sezione rettangolare (solo ideale)



$$N = b (h - 2 x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

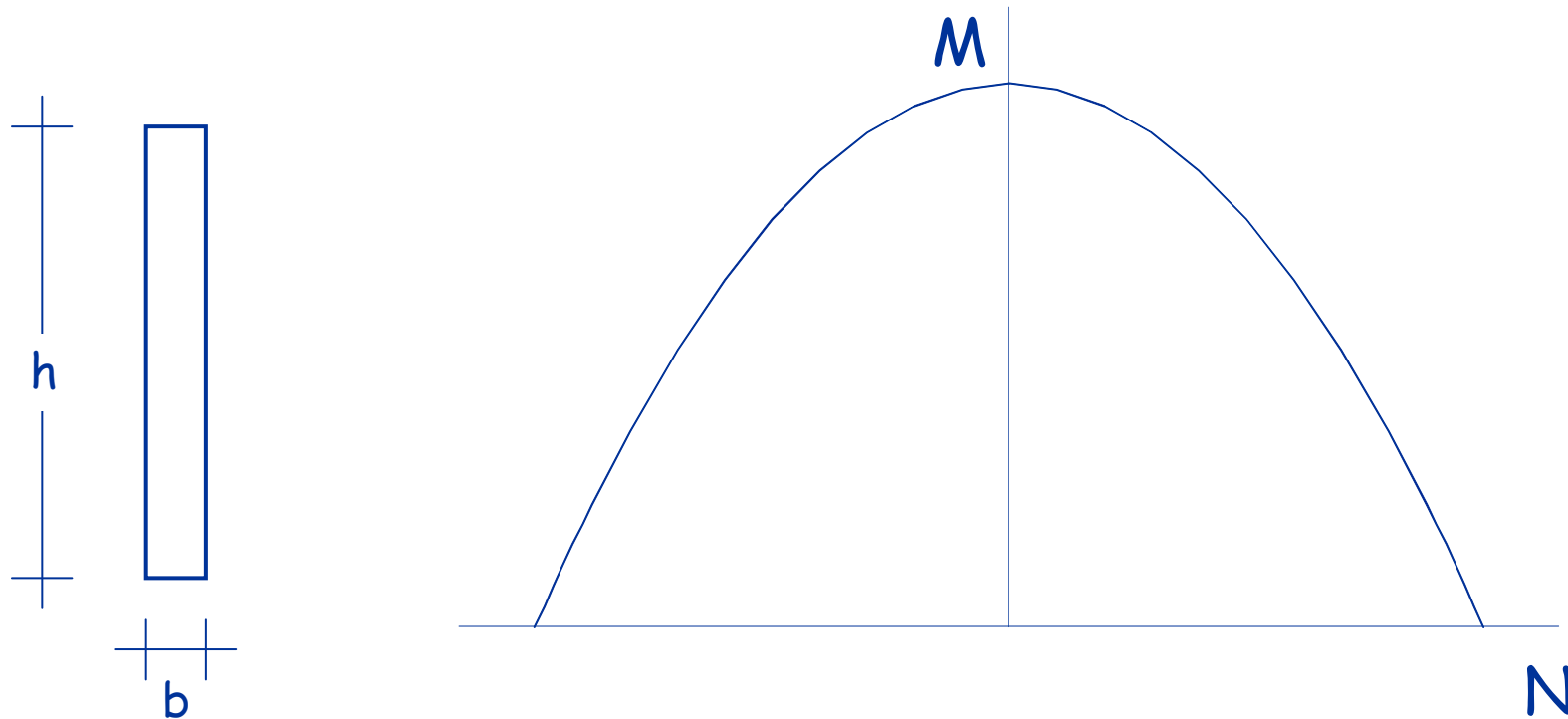
$$M = b x (h - x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$



$$M = \left[ \frac{bh^2}{4} \frac{f_y^2}{\gamma_{M0}^2} - \frac{1}{4b} N^2 \right] \frac{\gamma_{M0}}{f_y}$$

# Esempio

## Sezione rettangolare (solo ideale)

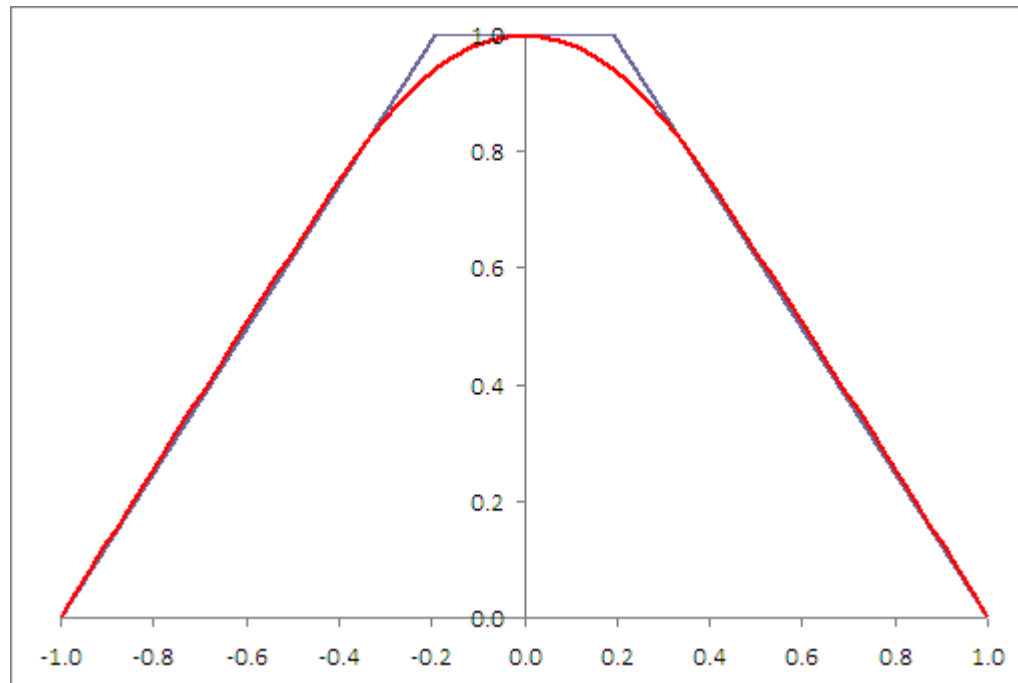


Il dominio ha un andamento parabolico

Questo vale solo per sezioni rettangolari (ad esempio un piatto)

# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte

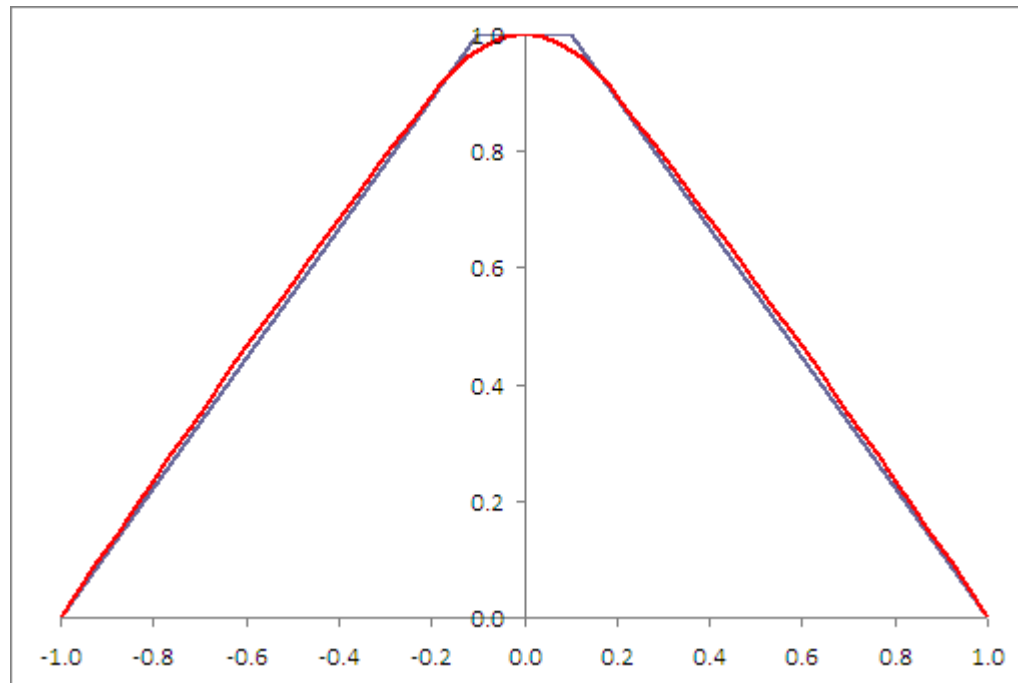
- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)



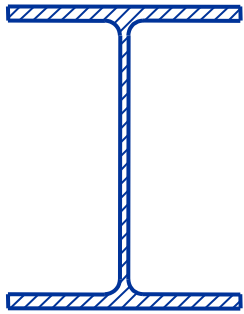


# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte

- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)



# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte

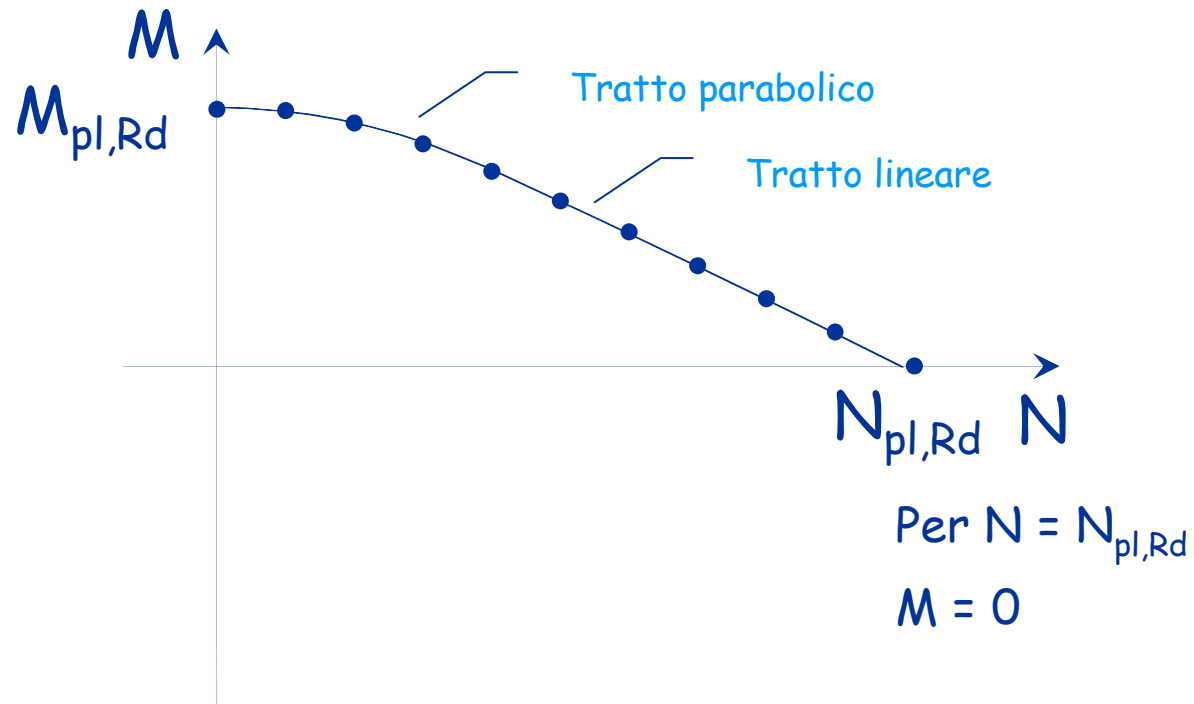


Per  $N = 0$

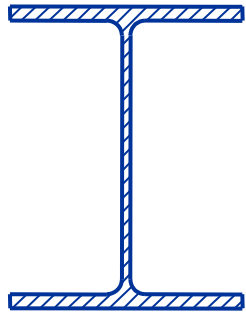
$$M = M_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

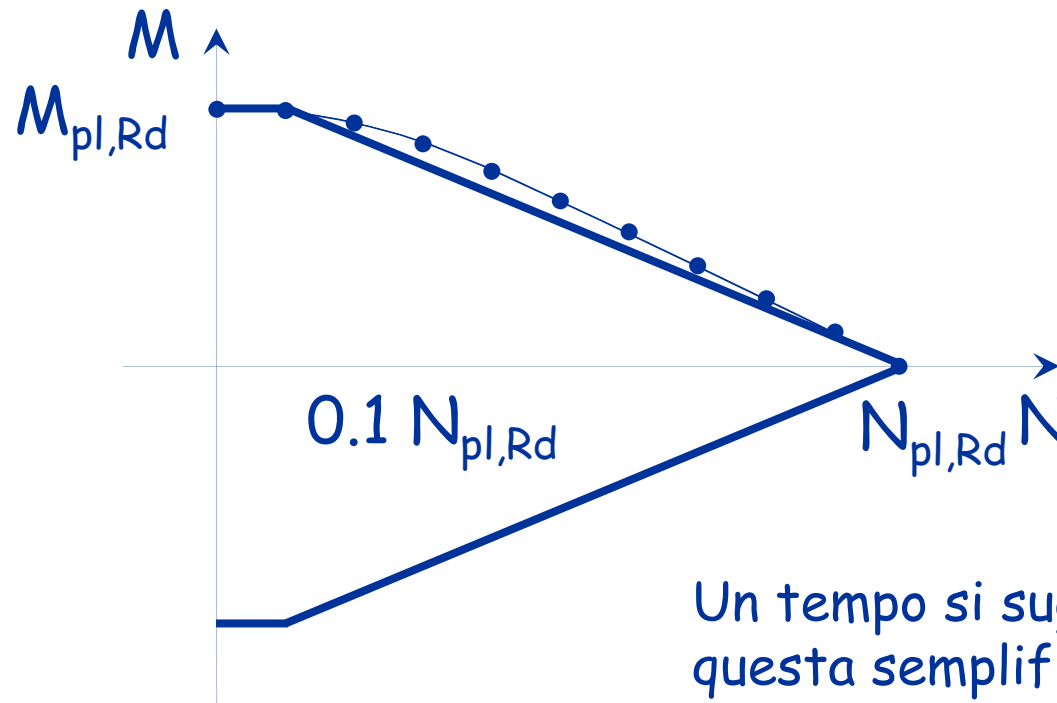
$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \quad N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

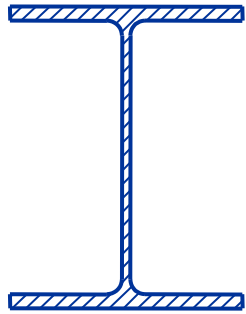
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Un tempo si suggeriva  
questa semplificazione

# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

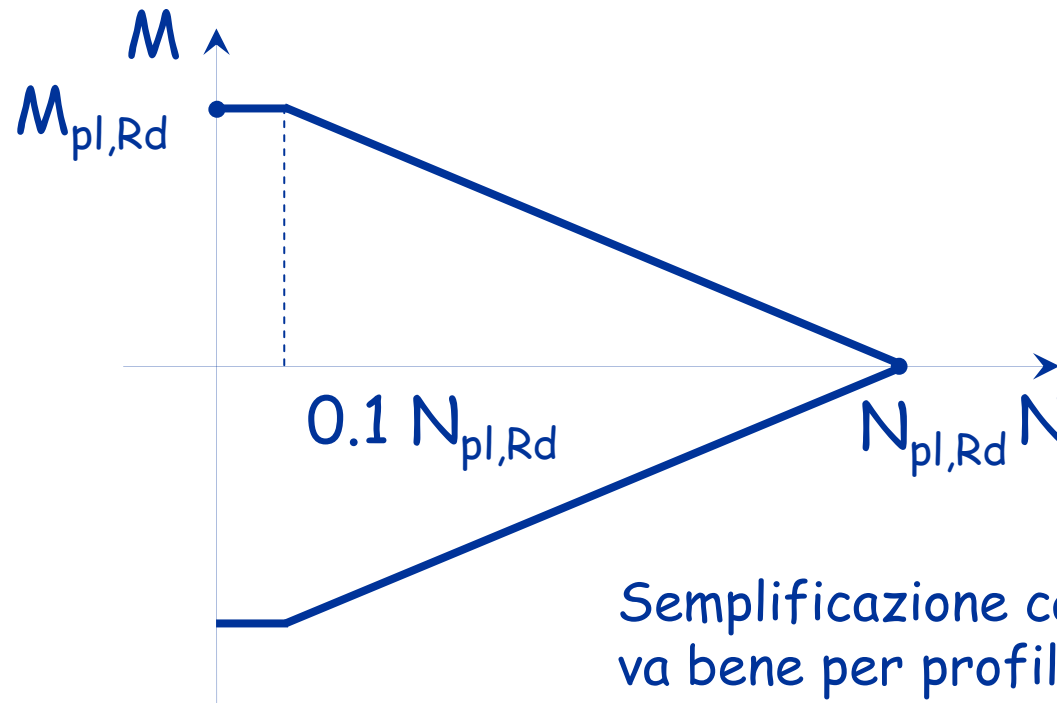
$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \quad N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

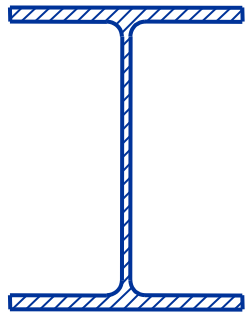
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Semplificazione cautelativa,  
va bene per profili HE

# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd}$$

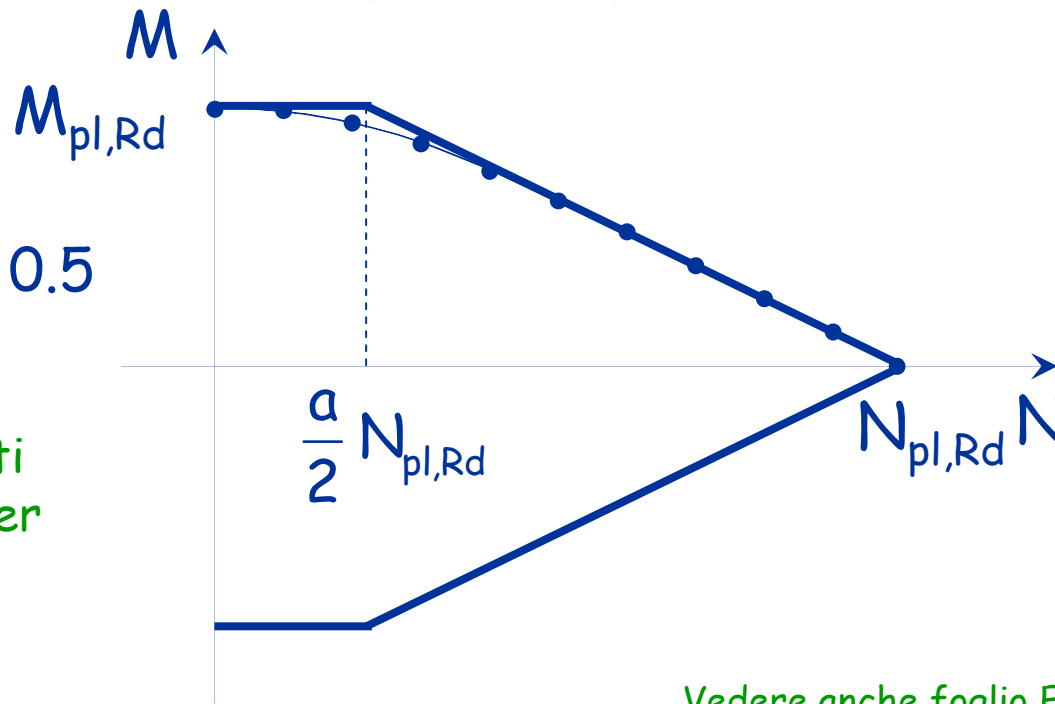
$$N \leq \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5 a}$$

$$N > \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

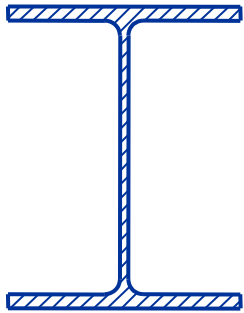
$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} \leq 0.5$$

Differenze più forti  
per gli IPE, meno per  
gli HE



Vedere anche foglio Excel Sagomario

# Dominio di resistenza per sezioni di classe 3



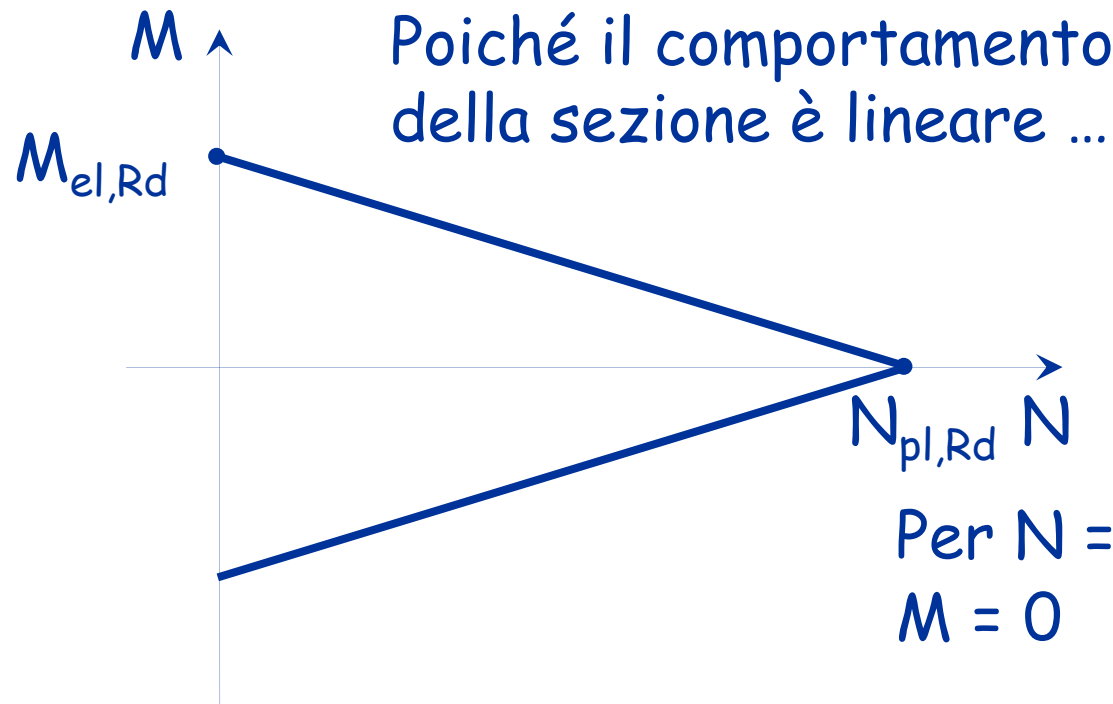
$$M_{el,N,Rd} = M_{el,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right)$$

Lo stesso vale per il  
metodo delle  
tensioni ammissibili  
(ma con  $\sigma_{am}$ )

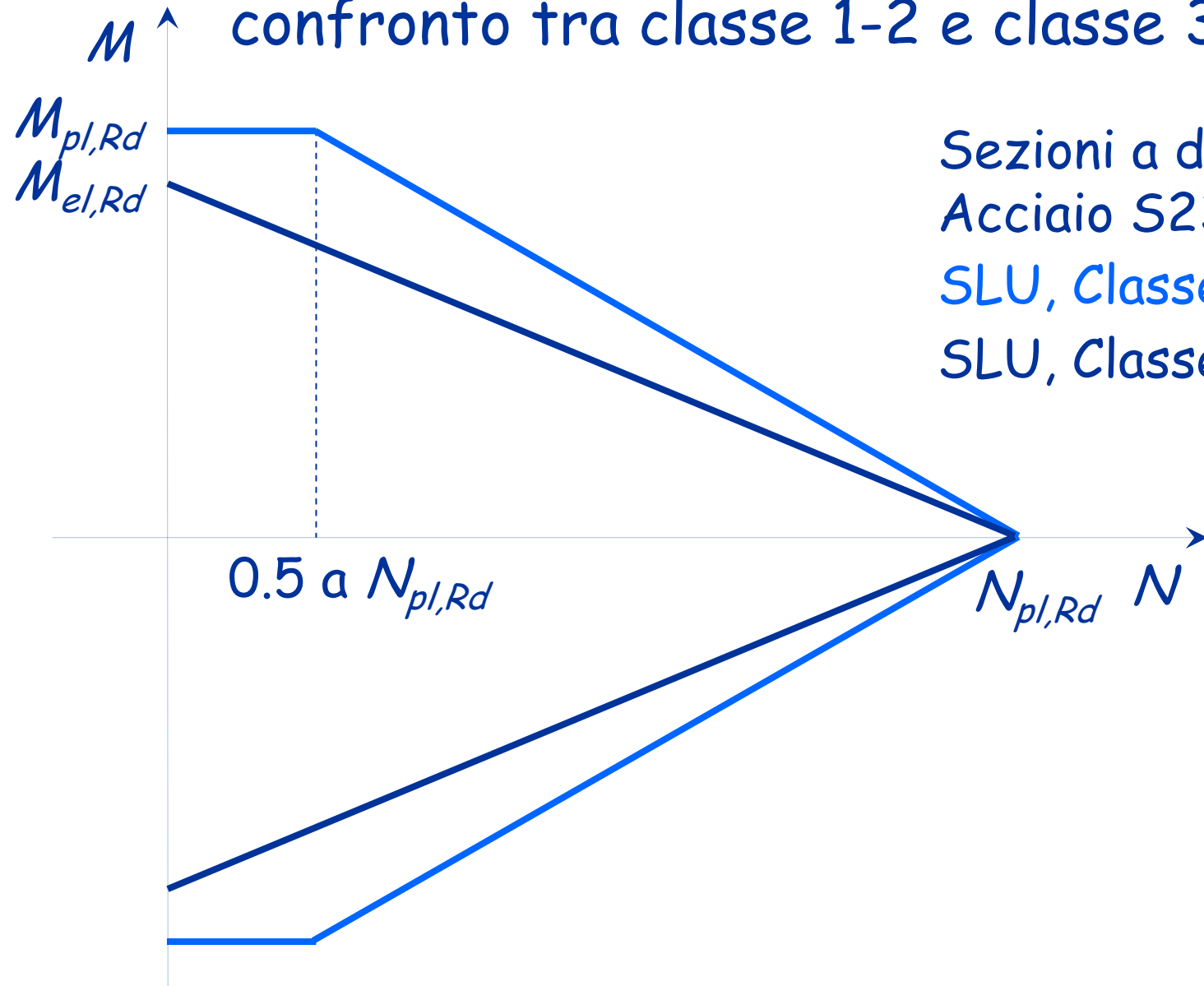
Per  $N = 0$   
 $M = M_{el,Rd}$

$$M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



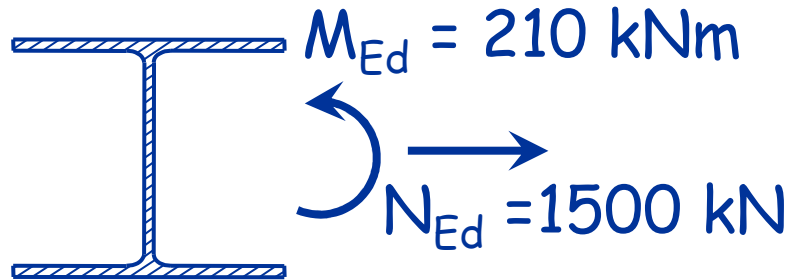
# Dominio di resistenza confronto tra classe 1-2 e classe 3



Sezioni a doppio T  
Acciaio S235  
SLU, Classe 1 e 2  
SLU, Classe 3

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	$149 \text{ cm}^2$
$W_{pl}$	$1868 \text{ cm}^3$
Acciaio	S235

1 - Classe della sezione

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{208}{11} = 19 \leq 72 \quad \varepsilon = 72$

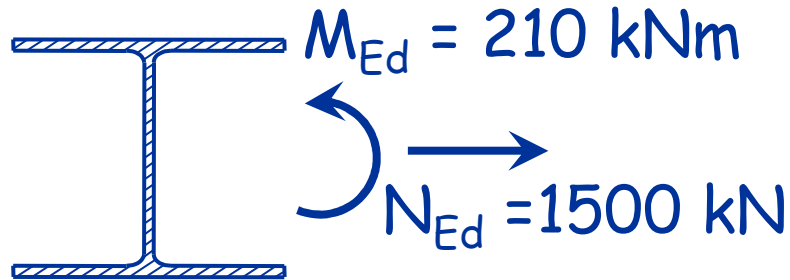
Flangia:  $\frac{c}{t_f} = \frac{117.5}{19} = 6.2 \leq 9 \quad \varepsilon = 9$

La sezione appartiene alla classe 1.



# Esempio

Dati:



Sezione

HEB300

A

$149 \text{ cm}^2$

$W_{pl}$

$1868 \text{ cm}^3$

Acciaio

S235

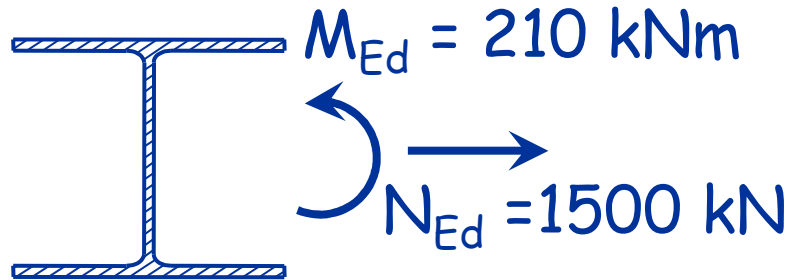
2 - Determinazione di  $N_{pl,Rd}$  ed  $M_{pl,Rd}$

$$N_{pl,Rd} = \frac{f_y A}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 149}{1.05 \times 10} = 3334.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{f_y W_{pl}}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 1868}{1.05 \times 10^3} = 418.1 \text{ kNm}$$

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	$149 \text{ cm}^2$
$W_{pl}$	$1868 \text{ cm}^3$
Acciaio	S235
$b=300 \text{ mm}$	$t=19 \text{ mm}$

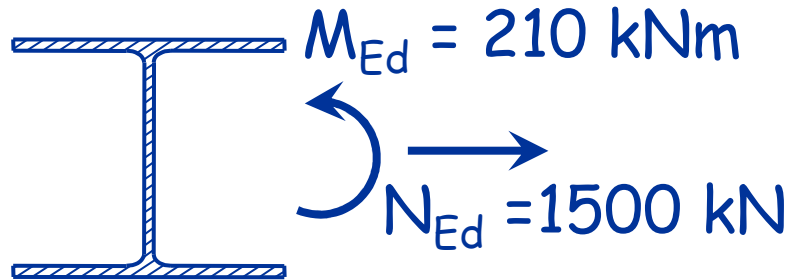
3 - Determinazione di  $a$

$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} = \frac{14900 - 2 \times 300 \times 19}{14900} = 0.235$$

$$\frac{a}{2} N_{pl,Rd} = \frac{0.235}{2} 3334.8 = 391.8 \text{ kN}$$

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
Acciaio	S235
$N_{pl,Rd}$	3334.8 kN
$M_{pl,Rd}$	418.1 kNm

4 - Determinazione di  $M_{pl,N,Rd}$  e verifica

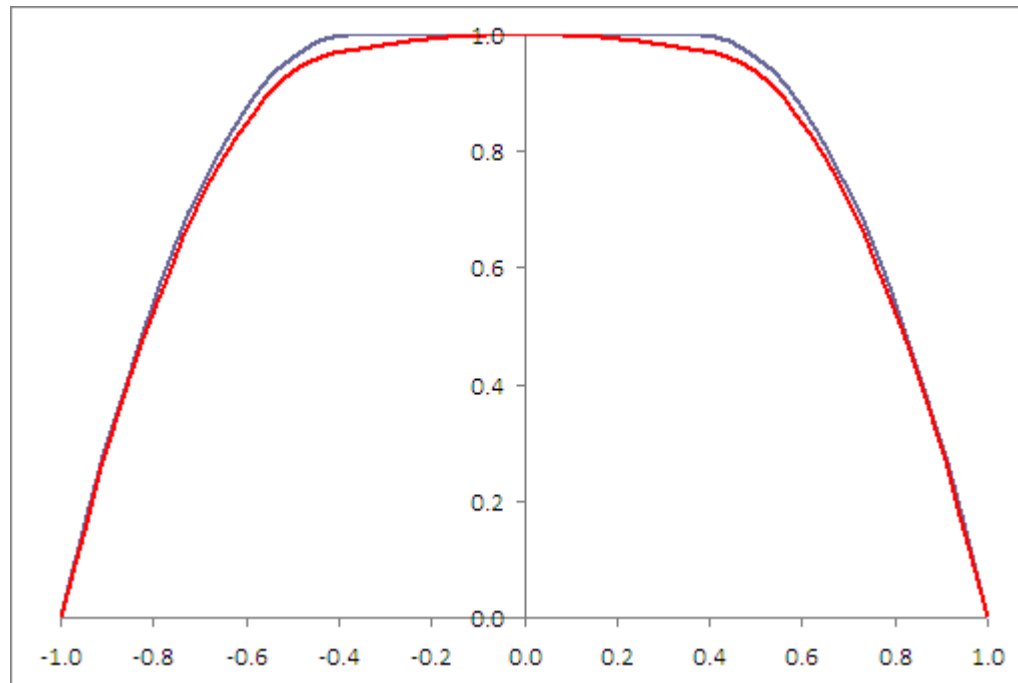
$$N_{Ed} = 1500 \text{ kN} \geq \frac{\alpha}{2} N_{pl,Rd} = 391.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5 \times 0.235} = 260.7 \text{ kNm} > M_{Ed} = 210.0 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

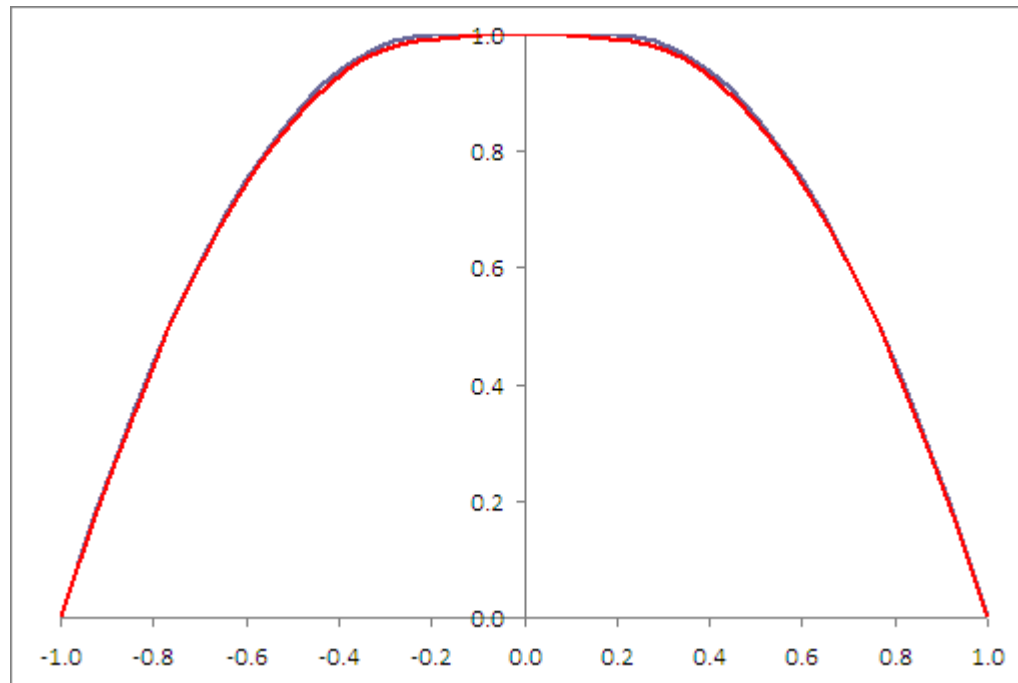
# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse debole

- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)

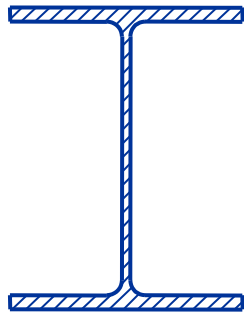


# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse debole

- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)



# Dominio di resistenza sezione a doppio T con $M$ nell'asse debole

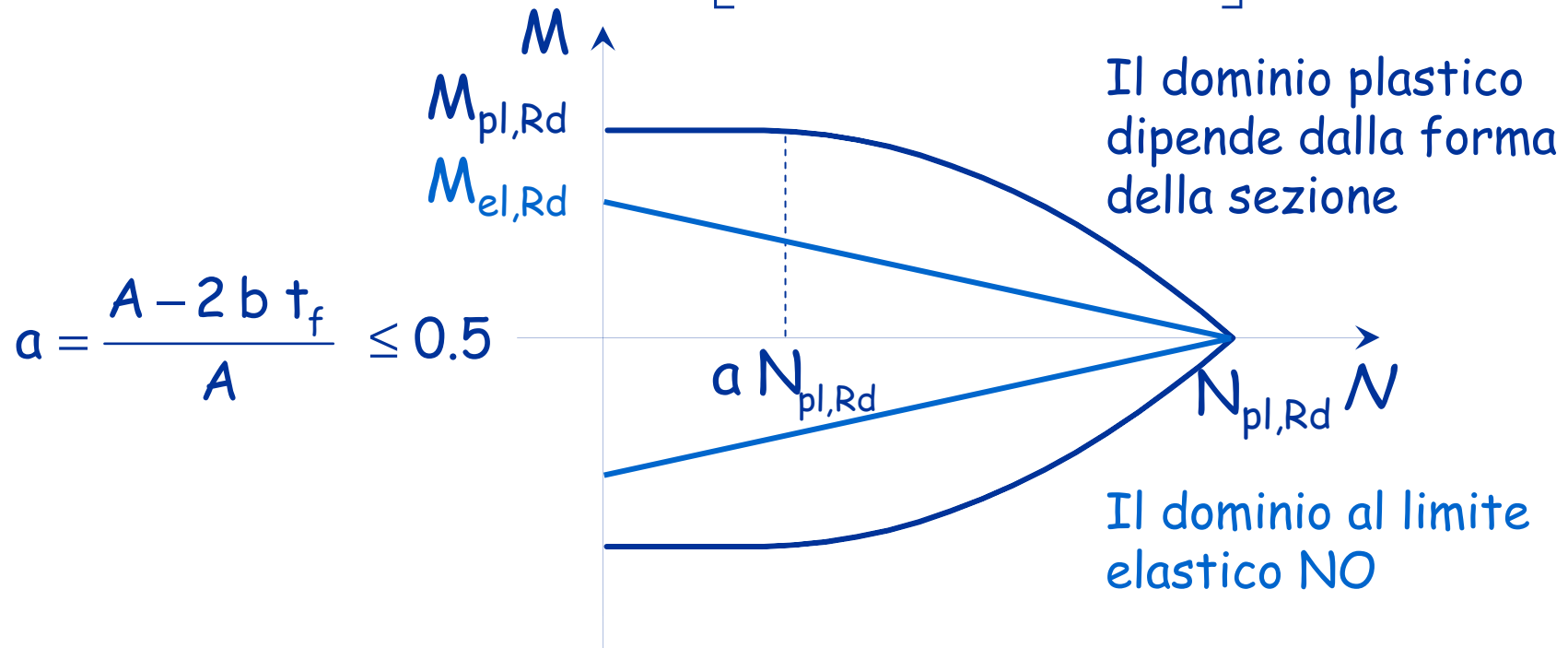


$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd}$$

$$N \leq a N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left[ 1 - \left( \frac{N/N_{pl,Rd} - a}{1 - a} \right)^2 \right]$$

$$N > a N_{pl,Rd}$$

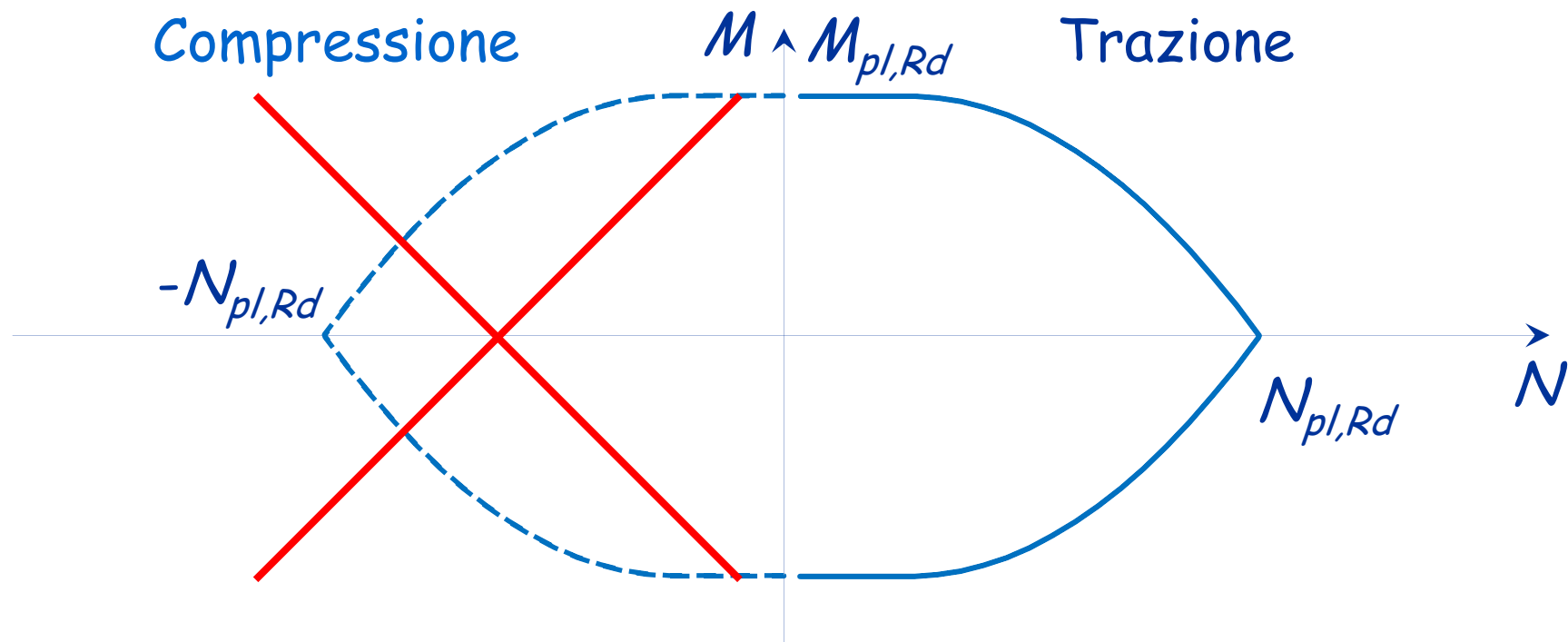


Flessione composta  
pressoflessione

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

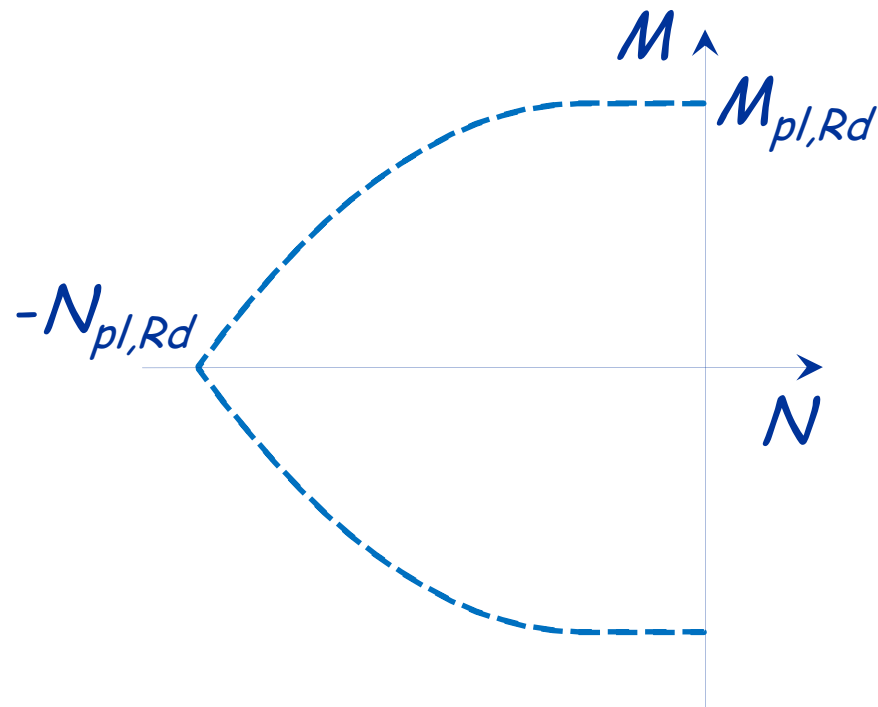
Si possono ottenere semplicemente ribaltando il dominio M-N costruito nel caso di tenso-flessione?

Va bene per la singola sezione, ma per l'asta bisogna tener conto dell'instabilità

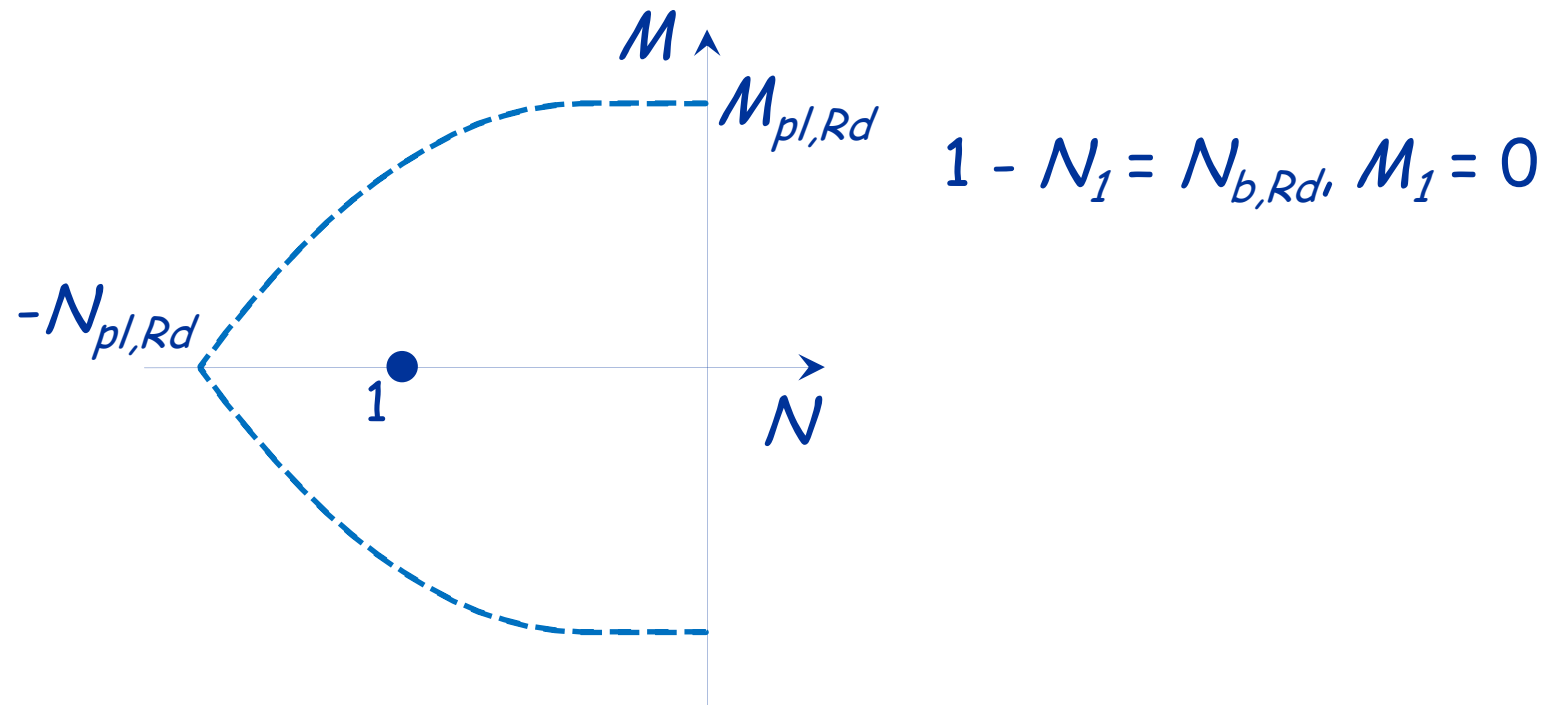
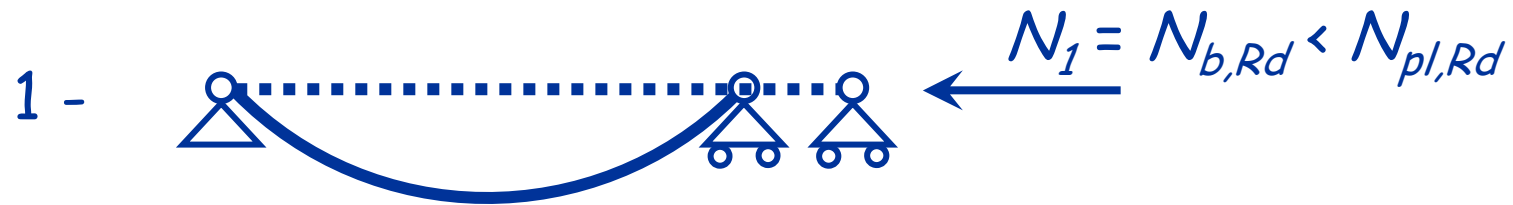




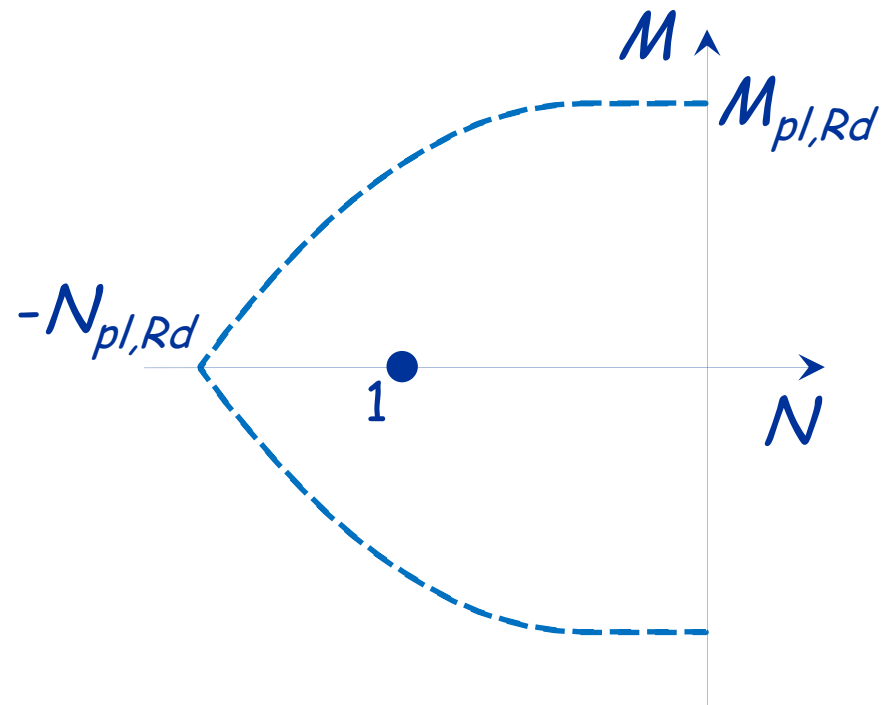
# Costruzione del dominio di resistenza



# Costruzione del dominio di resistenza

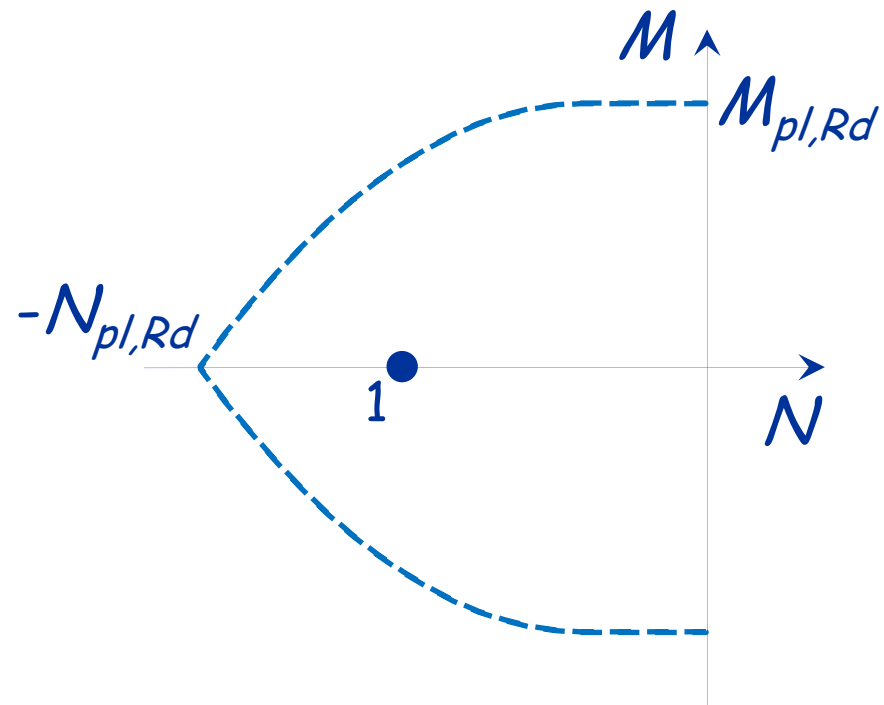


# Costruzione del dominio di resistenza



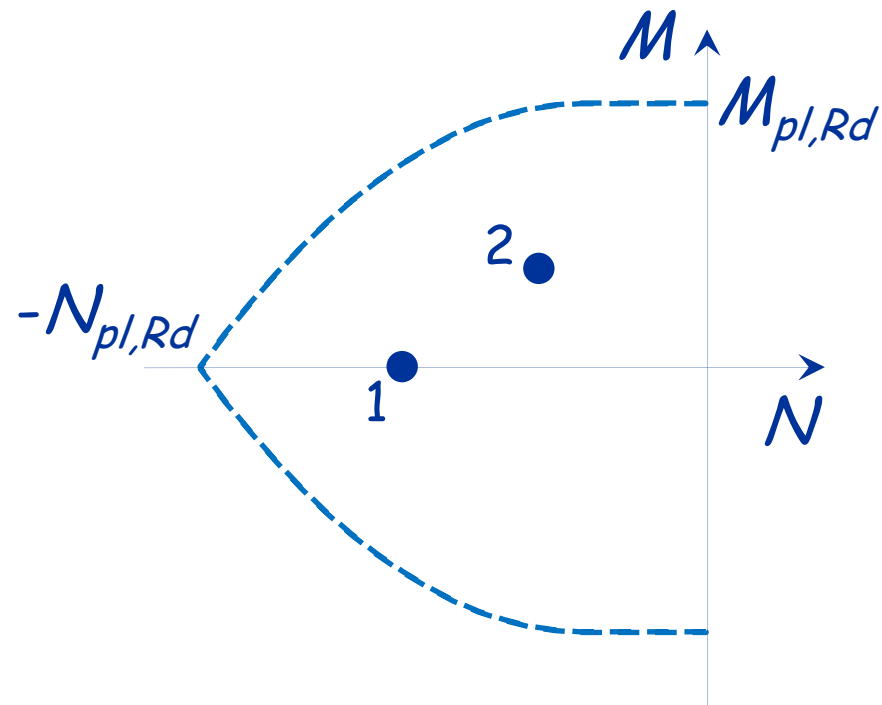
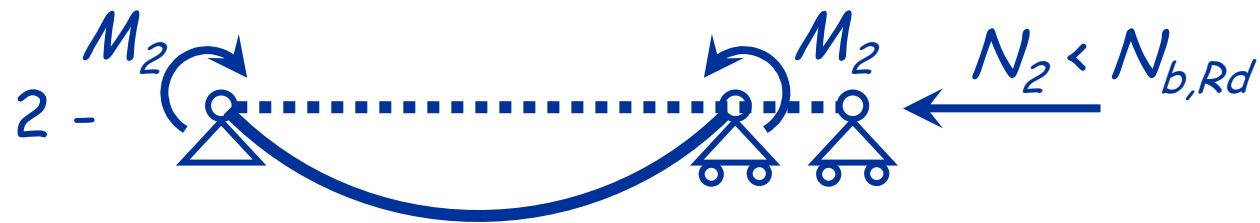
$$1 - N_1 = N_{b,Rd}, M_1 = 0$$

# Costruzione del dominio di resistenza



$$1 - N_1 = N_{b,Rd}, M_1 = 0$$

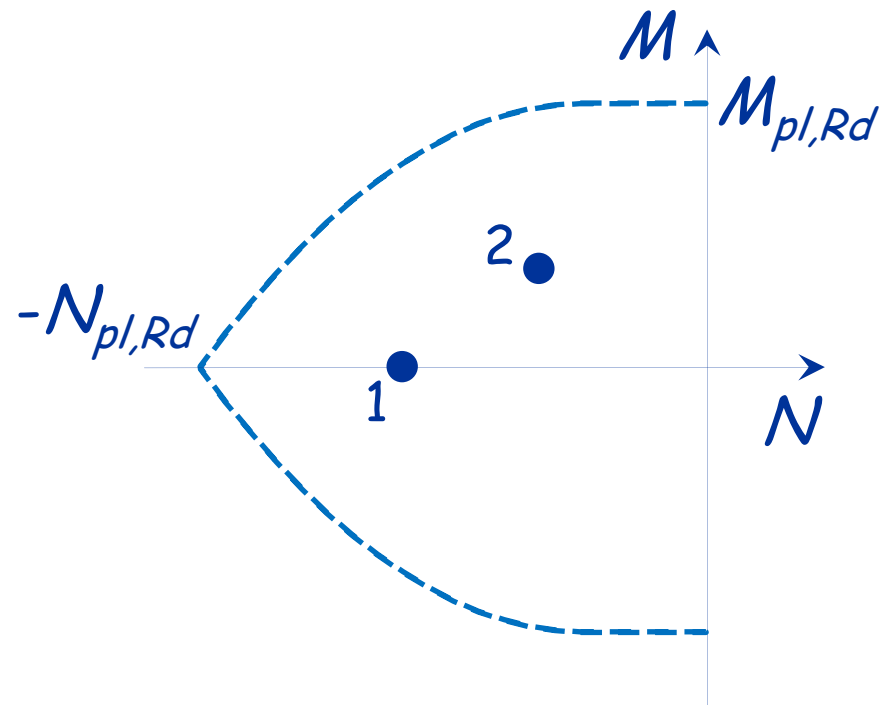
# Costruzione del dominio di resistenza



$$1 - N_1 = N_{b,Rd}, M_1 = 0$$

$$2 - N_2 < N_{b,Rd}, M_2 < M_{pl,Rd}$$

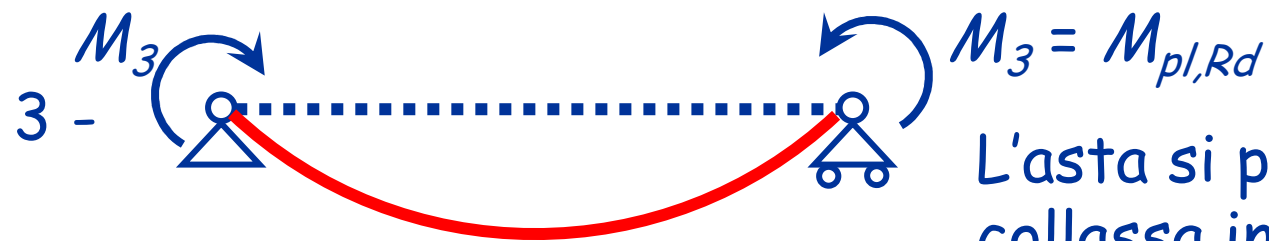
# Costruzione del dominio di resistenza



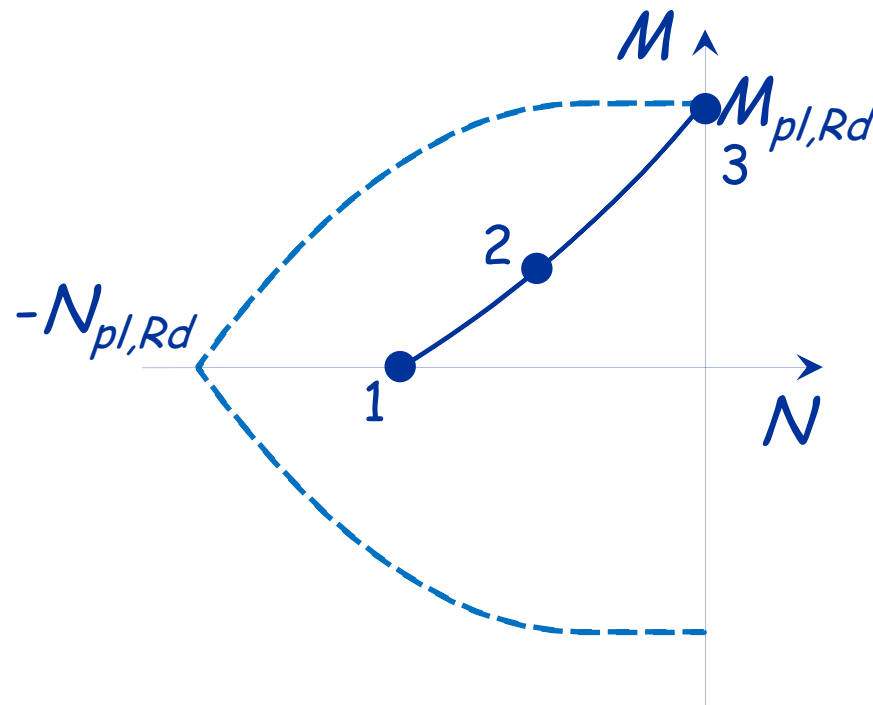
1 -  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

2 -  $N_2 < N_{b,Rd}$ ,  $M_2 < M_{pl,Rd}$

# Costruzione del dominio di resistenza



L'asta si plasticizza e  
collassa in assenza di  
sforzo normale



1 -  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

2 -  $N_2 < N_{b,Rd}$ ,  $M_2 < M_{pl,Rd}$

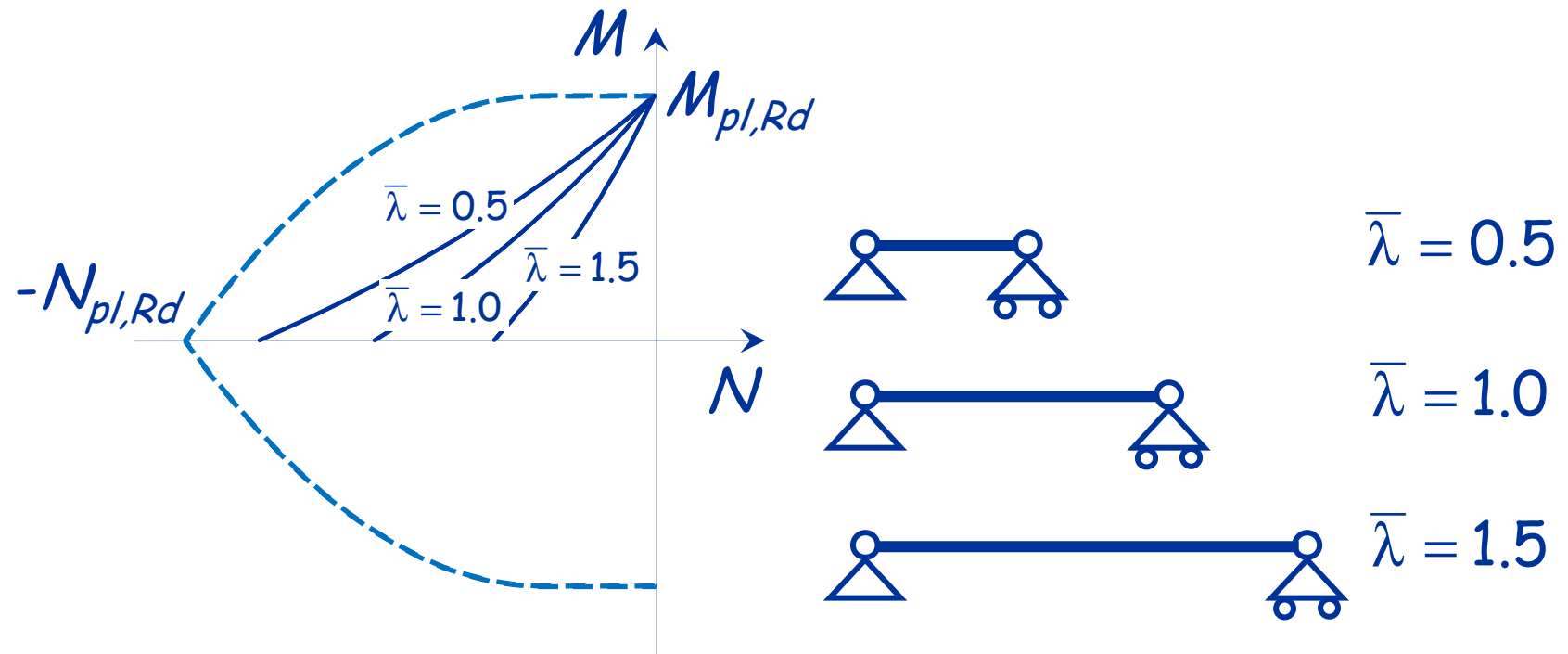
3 -  $N_3 = 0$ ,  $M_3 = M_{pl,Rd}$

Collegando i punti si  
ottiene il dominio

# Influenza della snellezza

Il dominio dipende dalla snellezza dell'asta:

- L'ampiezza del dominio si riduce all'aumentare della snellezza;

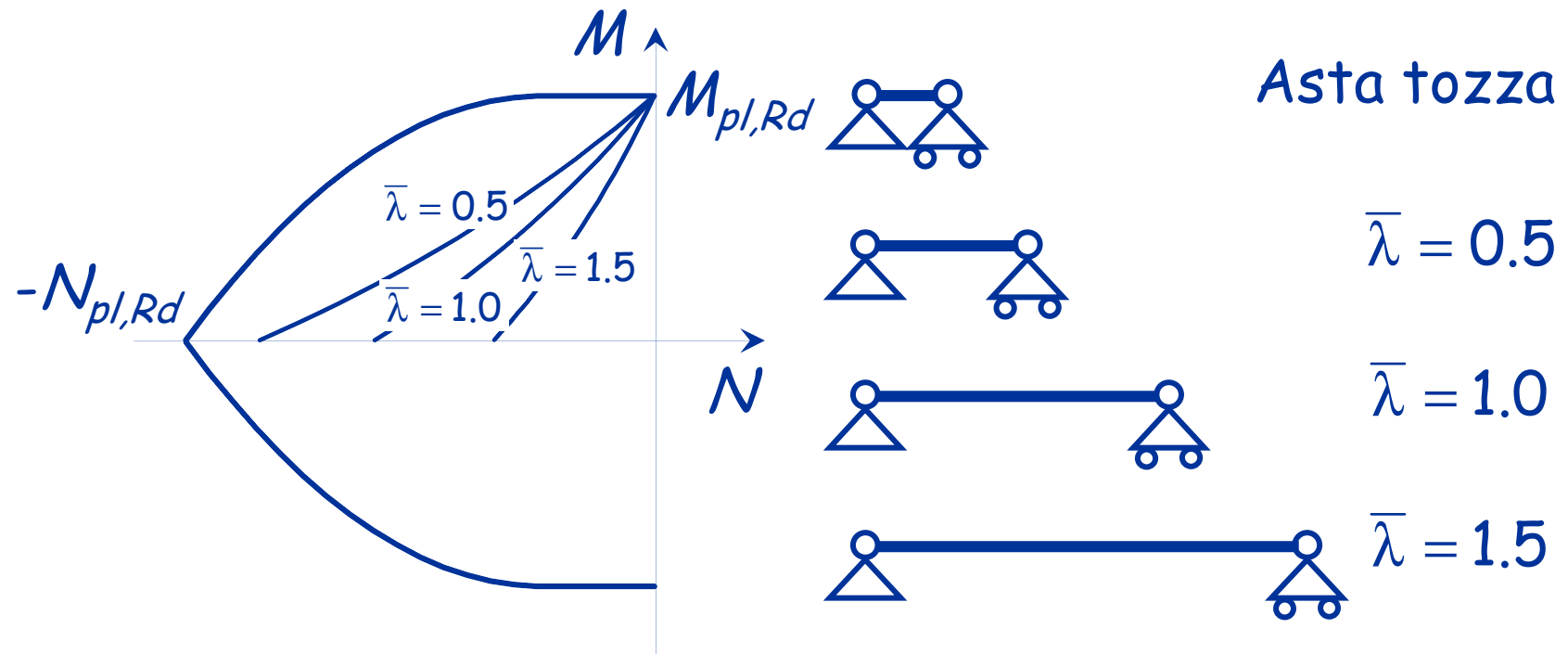




# Influenza della snellezza

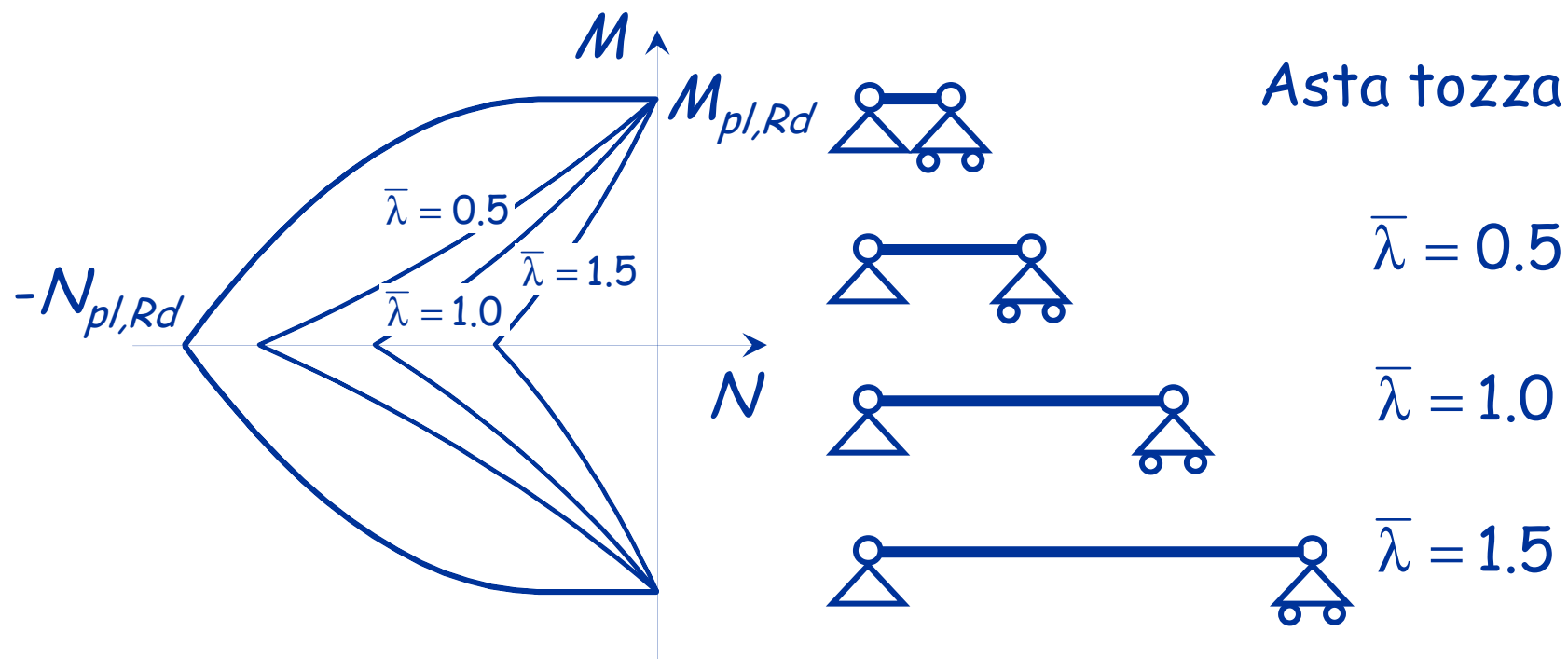
Il dominio dipende dalla snellezza dell'asta:

- Nel caso di aste tozze coincide con quello per presso-flessione della sezione



# Influenza della snellezza

Il dominio è simmetrico per aste con sezione trasversale simmetrica



# Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone due formule:

- Metodo A

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{min} \cdot f_{yk} \cdot A} + \frac{M_{yeq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_y \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{zeq,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_z \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

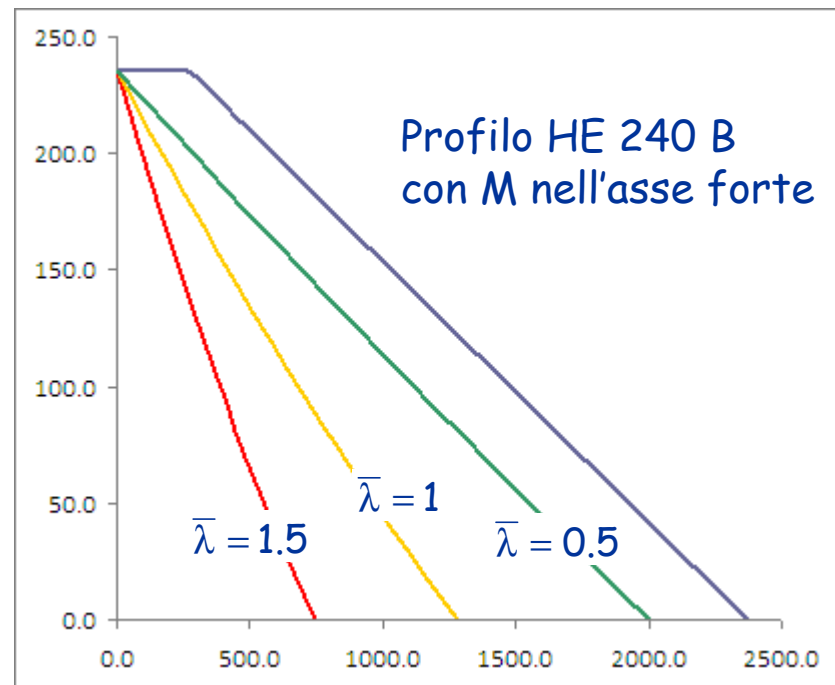
o, in sostanza:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

$N_{cr}$  è il carico critico Euleriano

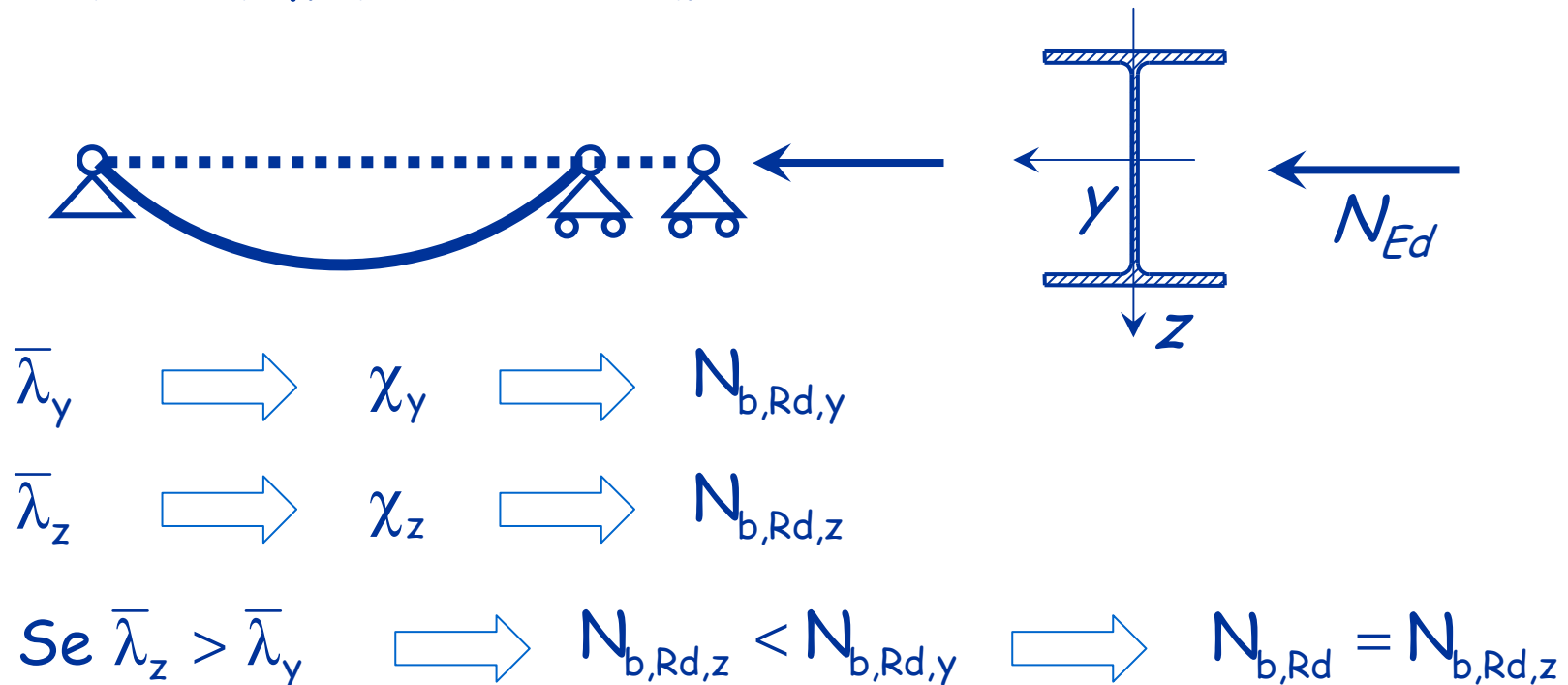
# Dominio di resistenza metodo A

- Si ottengono le curve mostrate sotto



# Considerazioni su domini di resistenza

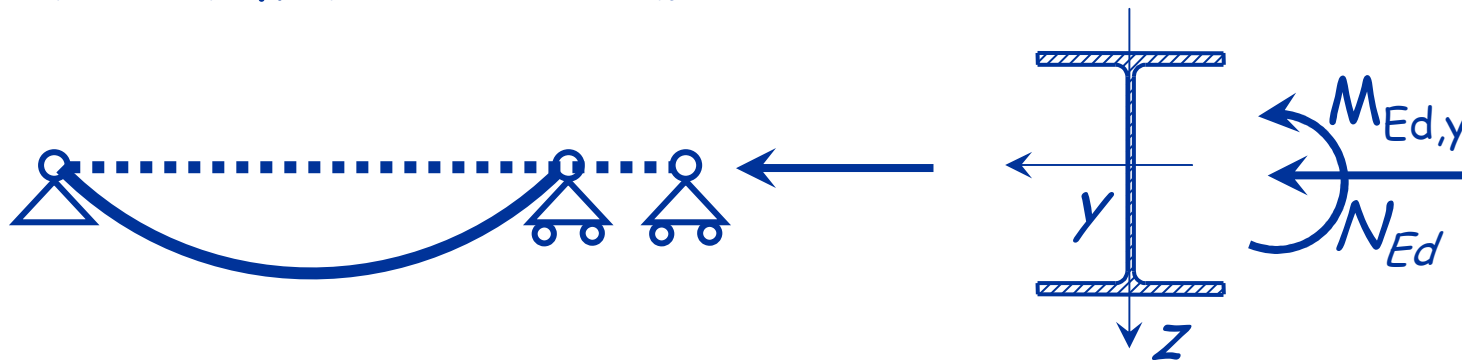
Un'asta in acciaio soggetta a compressione si instabilizza nel piano con minor resistenza



L'instabilità si verifica nel piano ortogonale all'asse  $z$

# Considerazioni su domini di resistenza

Un'asta in acciaio soggetta a compressione si instabilizza nel piano con minor resistenza



$$\bar{\lambda}_z > \bar{\lambda}_y \quad \Rightarrow \quad N_{b,Rd,z} < N_{b,Rd,y} \quad \Rightarrow \quad N_{b,Rd} = N_{b,Rd,z}$$

L'instabilità si verifica nel piano ortogonale all'asse y

La presenza di un momento  $M_{Edx}$  favorisce l'instabilità dell'asta quanto un momento  $M_{Edz}$ ? **Probabilmente NO**

# Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone quindi una seconda formula:

- Metodo B

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{LT} \cdot W_y \cdot f_{yk}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{W_z \cdot f_{yk}} \leq 1$$
$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{LT} \cdot W_y \cdot f_{yk}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed} \cdot \gamma_{M1}}{W_z \cdot f_{yk}} \leq 1$$

o, in sostanza:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

Circolare, punto 4.2.4.1.3.3.2

Eurocodice 3, punto 6.3.3(4) e appendice B

# Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone due formule:

- Metodo B

si noti che in questo caso le verifiche sono due e il denominatore di  $N$  è diverso a seconda del piano in cui agisce  $M$

è meno gravoso quando c'è solo momento rispetto all'asse forte, mentre l'asta sbanda intorno all'asse debole

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

Circolare, punto 4.2.4.1.3.3.2

Eurocodice 3, punto 6.3.3(4) e appendice B



# Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone due formule:

- Metodo B

I coefficienti k si calcolano con apposite formule

k	Tipi di sezione	Sezioni di classe 3 e 4 (proprietà delle sezioni calcolate in campo elastico)	Sezioni di classe 1 e 2 (proprietà delle sezioni calcolate in campo plastico)
$k_{yy}$	I, H, Sezioni cave	$\alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$	$\alpha_{my} \cdot \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
$k_{yz}$	I, H, Sezioni cave	$k_{zz}$	$0,6 \cdot k_{zz}$
$k_{zy}$	I, H, Sezioni cave	$0,8 \cdot k_{yy}$	$0,6 \cdot k_{yy}$
$k_{zz}$	I, H	$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$	$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + (2\bar{\lambda}_y - 0,6) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 1,4 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
	Sezioni cave		$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
Per pressoflessione retta, $M_{y,Ed} \neq 0$ , , $k_{zy} = 0$ ( $M_{z,Ed} = 0$ ).			

## Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone due formule:

- Metodo B

In particolare, per momento solo nell'asse forte si ha

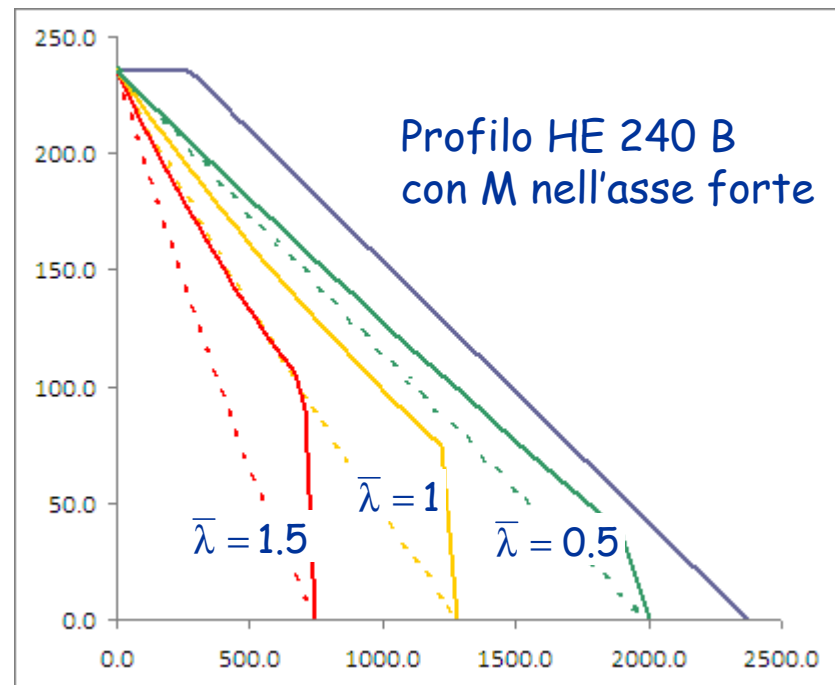
$$k_{yy} = 1 + (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} \leq 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}}$$

$$k_{yz} = 0,6 k_{yy}$$

e si utilizza solo la prima equazione

# Dominio di resistenza metodo B

- Si ottengono le curve mostrate sotto  
(con tratteggio sono indicate le curve precedenti)



In questo  
caso il  
metodo A è  
molto  
cautelativo

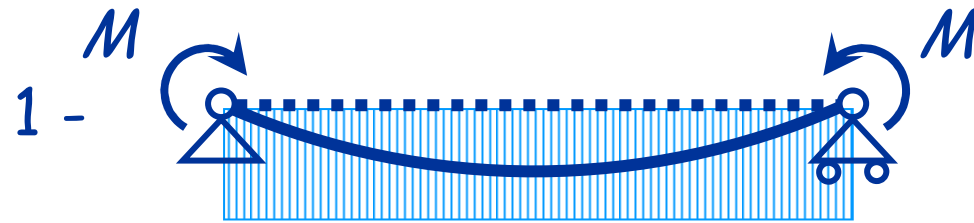
## Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

- Le curve mostrate in precedenza si riferiscono al caso di momento flettente costante lungo l'asta
- Se il momento flettente varia, si considera un momento equivalente

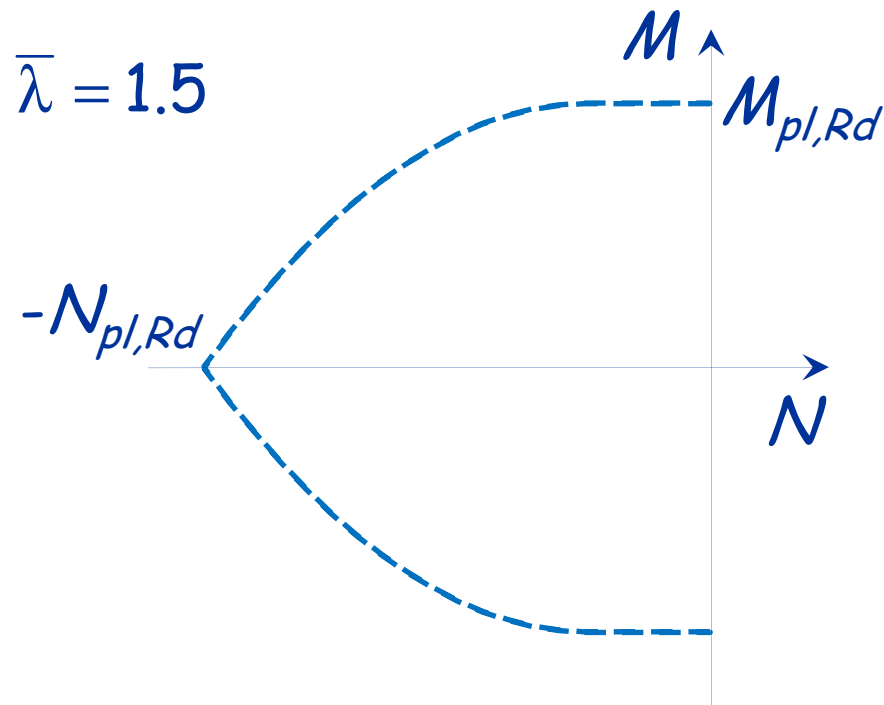
$$M_{eq,Ed} = \alpha_m M_{Ed,max}$$

con  $\alpha_m \leq 1$  che dipende dalla distribuzione di  $M$

# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento



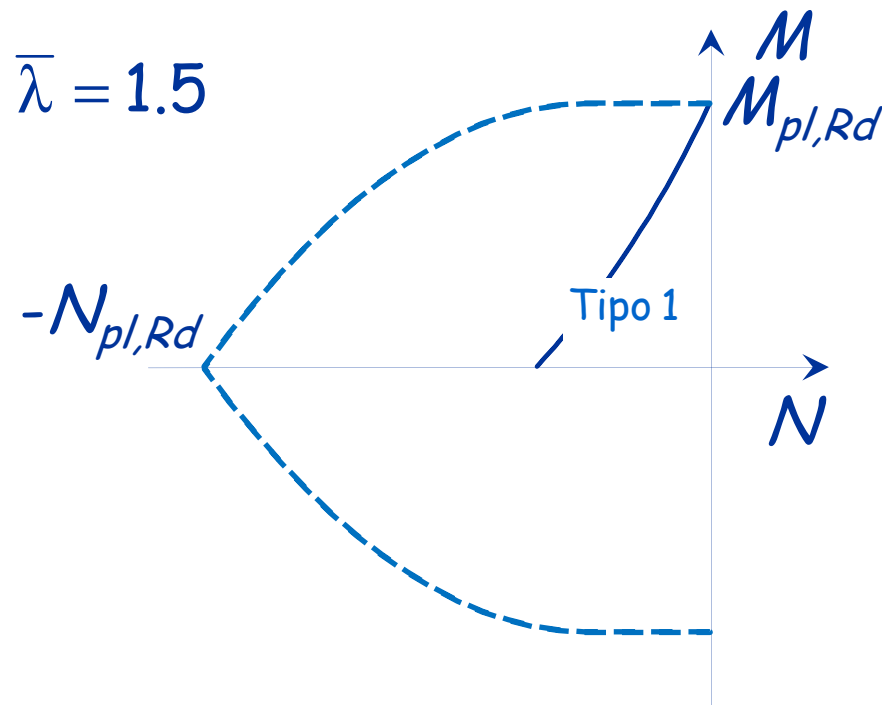
Distribuzione di  
momenti tipo 1  
(costante)



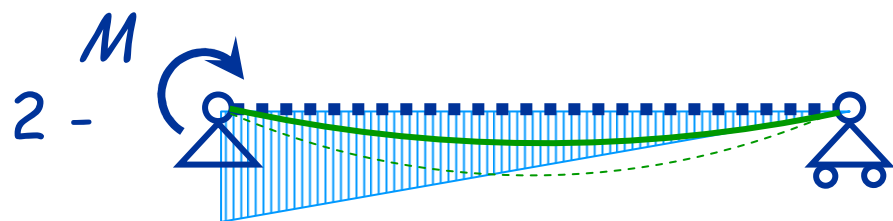
# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento



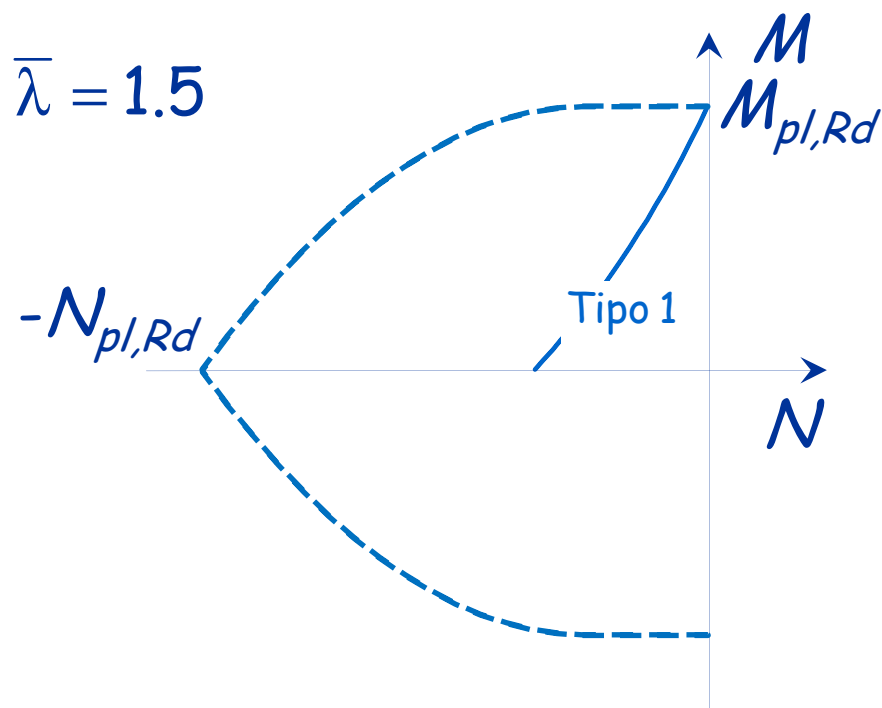
Distribuzione di  
momenti tipo 1  
(costante)



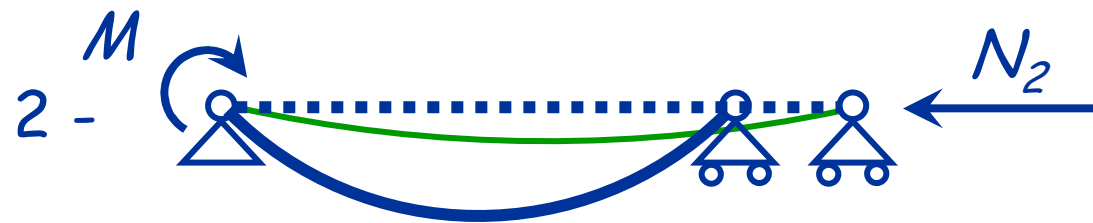
# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento



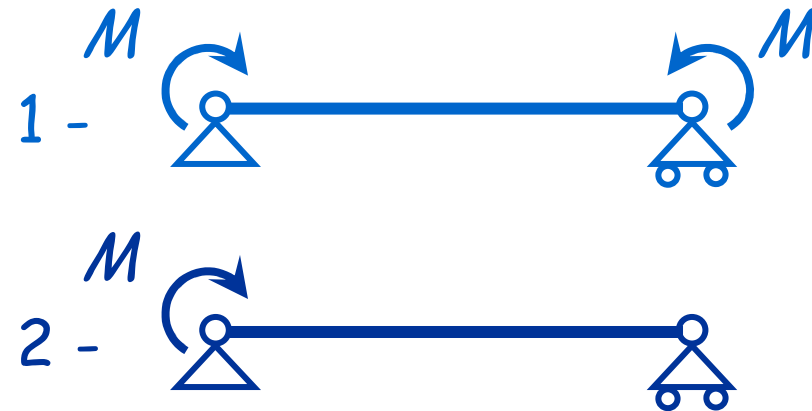
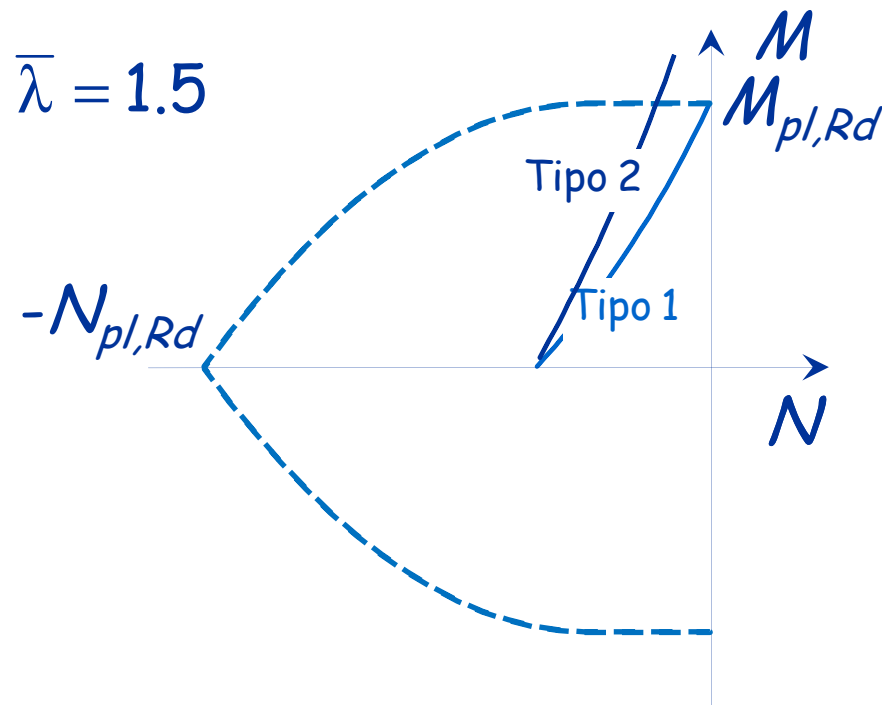
Distribuzione di  
momenti tipo 2  
(lineare)



# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento

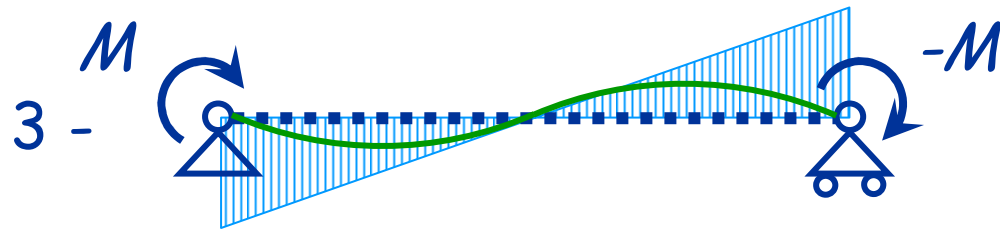


Distribuzione di  
momenti tipo 2  
(lineare)

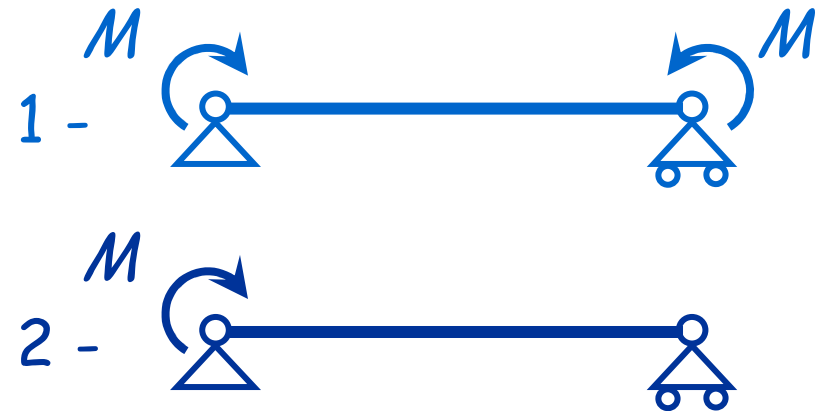
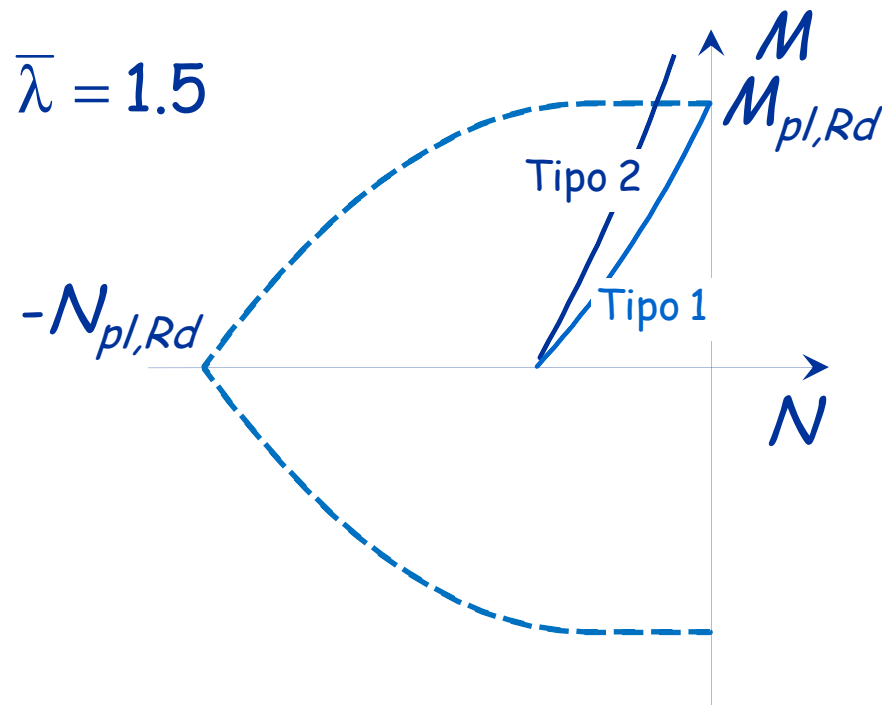




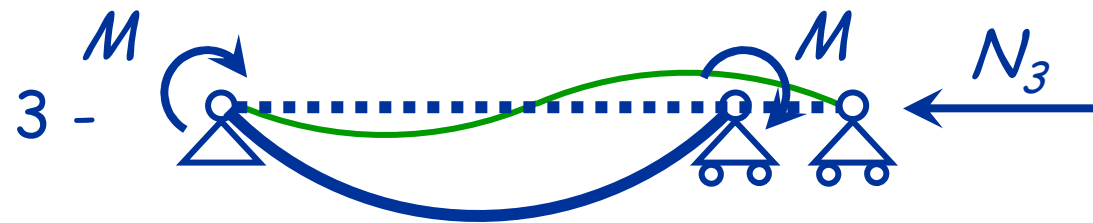
# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento



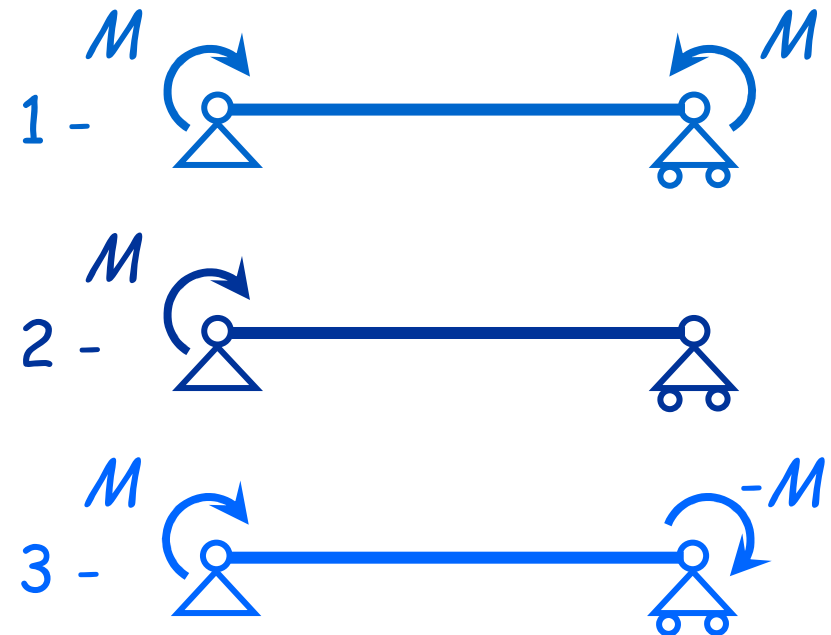
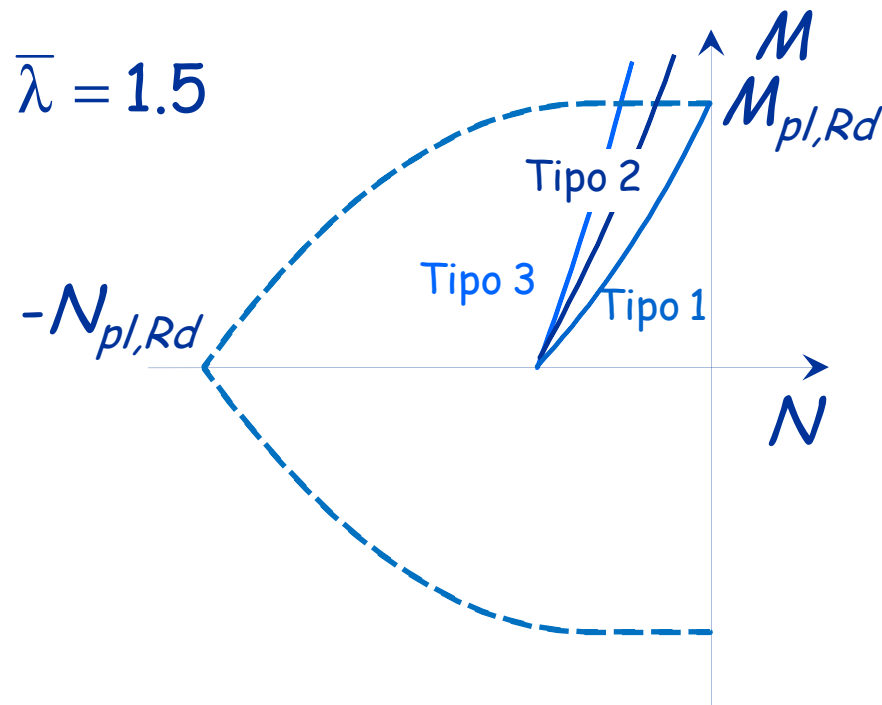
Distribuzione di  
momenti tipo 3  
(a farfalla)



# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento



Distribuzione di  
momenti tipo 3  
(a farfalla)

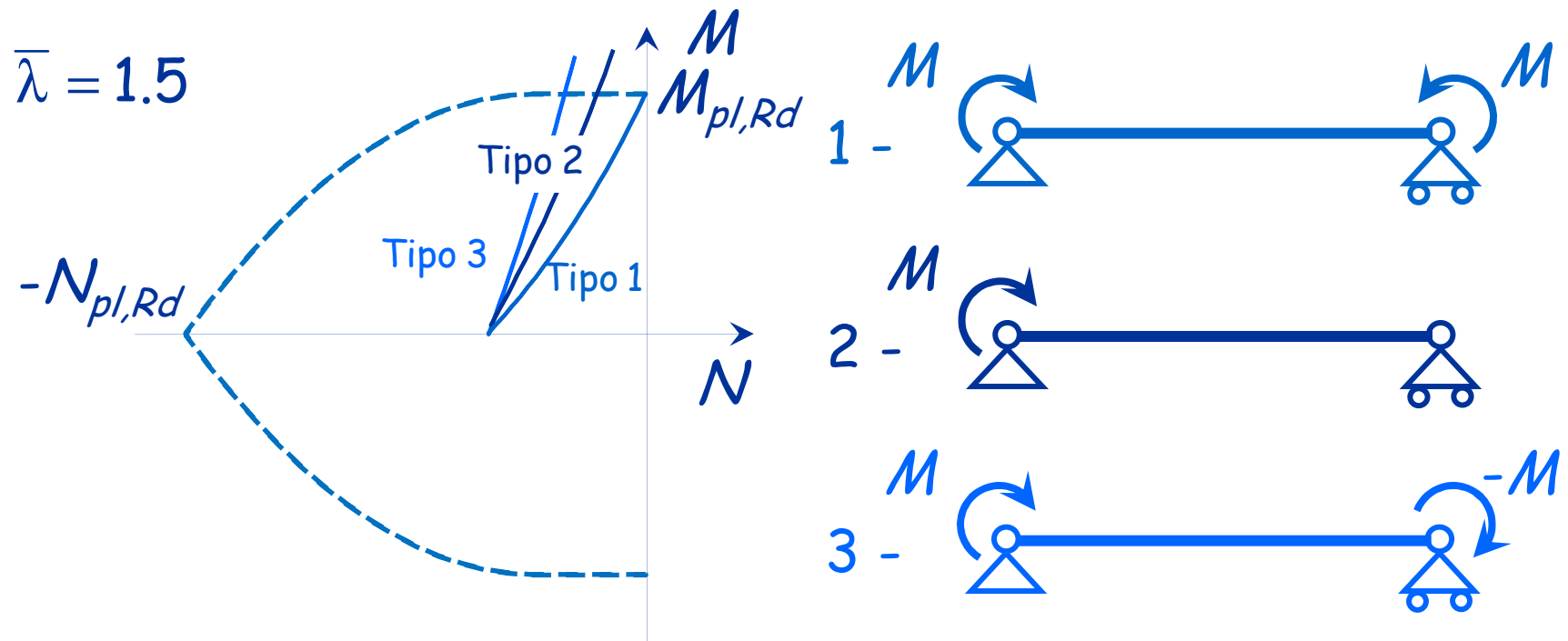


# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma del momento

Il dominio dipende dall'andamento del diagramma del momento flettente:

- L'ampiezza del dominio aumenta passando dal diagramma di tipo 1 a quello di tipo 3.



## Dominio di resistenza influenza del diagramma di $M$ (modello A)

- Il momento equivalente  $M_{eq,Ed}$  tiene conto della variazione del momento nell'asta e può essere preso pari a
$$M_{eq,Ed} = 1.3 M_{m,Ed}$$

assumendo comunque  $0.75 M_{max,Ed} \leq M_{eq,Ed} \leq M_{max,Ed}$

$M_{m,Ed}$  è il valore medio del momento nell'asta

- Per asta vincolata agli estremi con momento variabile linearmente si può assumere


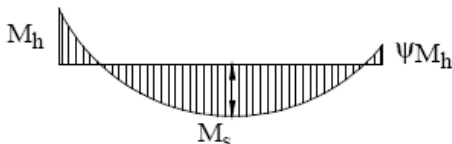
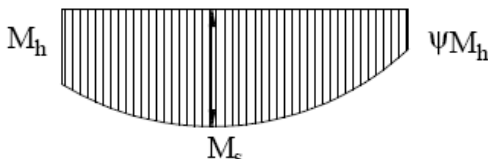
$$M_{eq,Ed} = 0.6 M_a - 0.4 M_b$$

assumendo comunque  $M_{eq,Ed} \geq 0.4 M_a$

$M_a$  è il massimo tra i due ed il segno si riferisce al verso della coppia  $M$  (se  $M_a = -M_b$  il diagramma di  $M$  è costante e  $M_{eq,Ed} = M_a$ )

# Dominio di resistenza influenza del diagramma di $M$ (modello B)

- Se si usa il metodo B sono fornite espressioni più complesse

Diagramma del momento	Intervallo		Coefficienti $\alpha_{my}$ , $\alpha_{mz}$ , $\alpha_{mLT}$	
			Carico uniforme	Carico concentrato
 $M_h$ <span style="float: right;"><math>\psi M_h</math></span>	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $M_h$ <span style="float: right;"><math>\psi M_h</math></span> $M_s$ $\alpha_s = M_s / M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,1(1 - \psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
 $M_h$ <span style="float: right;"><math>\psi M_h</math></span> $M_s$ $\alpha_h = M_h / M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1 + 2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h(1 + 2\psi)$

Circolare, punto 4.2.4.1.3.3.2

Eurocodice 3, punto 6.3.3(4) e appendice B

## Nell'Eurocodice 3


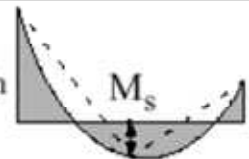
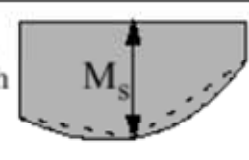
Interaction factors	Type of sections	Design assumptions	
		elastic cross-sectional properties class 3, class 4	plastic cross-sectional properties class 1, class 2
$k_{xx}$	I-sections RHS-sections	$C_{mx} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_x \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mx} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mx} \left( 1 + (\bar{\lambda}_x - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mx} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{xy}$	I-sections RHS-sections	$k_{yy}$	$0,6 k_{yy}$
$k_{yx}$	I-sections RHS-sections	$0,8 k_{xx}$	$0,6 k_{xx}$
$k_{yy}$	I-sections	$C_{my} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left( 1 + (2\bar{\lambda}_y - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	RHS-sections		$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
For I- and H-sections and rectangular hollow sections under axial compression and uniaxial bending $M_{x,Ed}$ the coefficient $k_{yx}$ may be $k_{yx} = 0$ .			

# Nell'Eurocodice 3

Interaction factors	Type of sections	Design assumptions	
		elastic cross-sectional properties class 3, class 4	plastic cross-sectional properties class 1, class 2
$k_{xx}$	I-sections RHS-sections	$C_{mx} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_x \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mx} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mx} \left( 1 + (\bar{\lambda}_x - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mx} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_x N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{xy}$	I-sections RHS-sections	$k_{yy}$	$0,6 k_{yy}$
$k_{yx}$	I-sections RHS-sections		$0,6 k_{xx}$
$k_{yy}$	I-sections	$C_{my} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}}$
	RHS-sections		$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
For I- and H-sections and rectangular hollow sections under axial compression and uniaxial bending $M_{x,Ed}$ the coefficient $k_{yx}$ may be $k_{yx} = 0$ .			

Nota: nella Circolare è indicato con  $\alpha_m$  quello che qui (sull'EC3) è indicato con  $C_m$

# Nell'Eurocodice 3

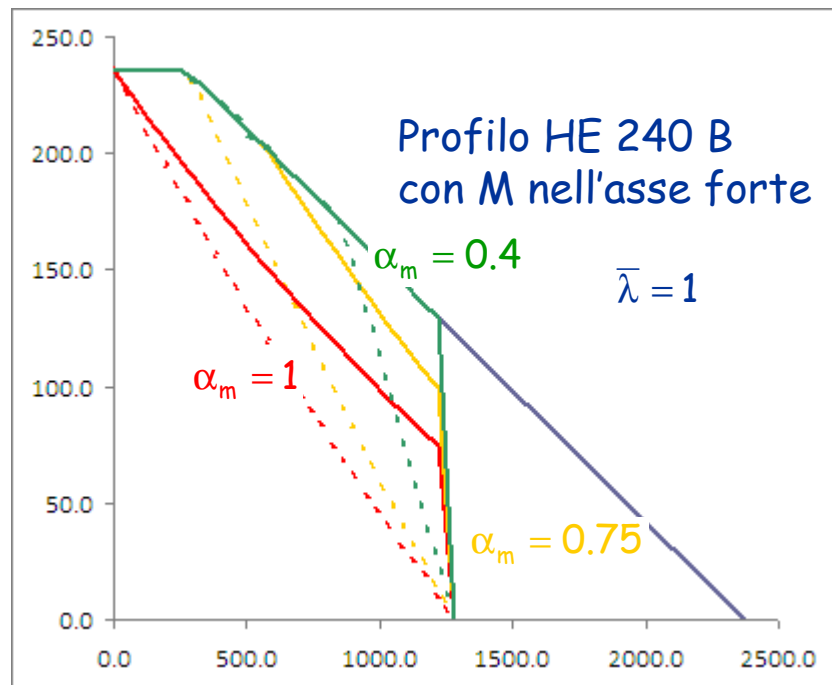
Moment diagram	range		$C_{mx}$ and $C_{my}$ and $C_{mLT}$	
			uniform loading	concentrated load
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $\alpha_s = M_s/M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,1(1-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
 $\alpha_h = M_h/M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$	$0,90 - 0,10\alpha_h(1+2\psi)$
For members with sway buckling mode the equivalent uniform moment factor should be taken $C_{mx} = 0,9$ or $C_{my} = 0,9$ respectively.				
$C_{mx}$ , $C_{my}$ and $C_{mLT}$ should be obtained according to the bending moment diagram between the relevant braced points as follows:				
moment factor	bending axis	points braced in direction		
$C_{mx}$	x-x'	y-y'		
$C_{my}$	y-y'	x-x'		
$C_{mLT}$	x-x'	x-x'		

Eurocodice 3, annesso B



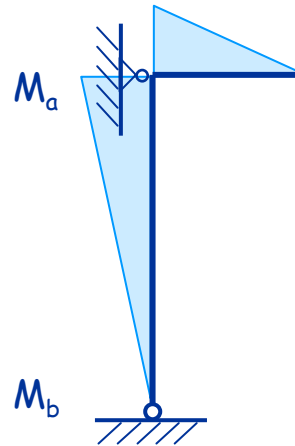
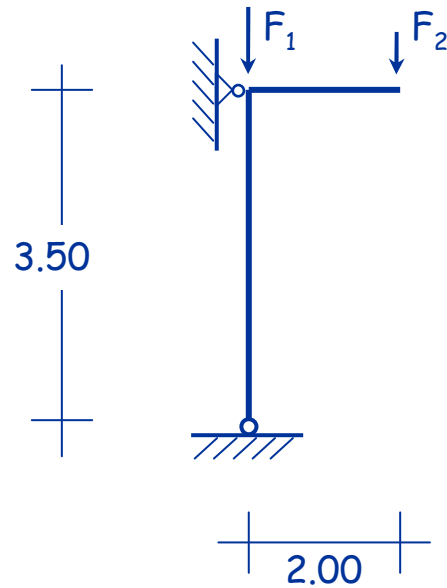
# Dominio di resistenza influenza del diagramma del momento

- Si ottengono le curve mostrate sotto  
(con tratteggio sono indicate le curve del metodo A)



Anche in  
questo caso  
il metodo A  
è molto  
cautelativo

# Esempio



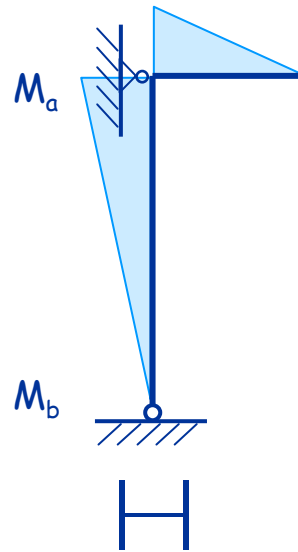
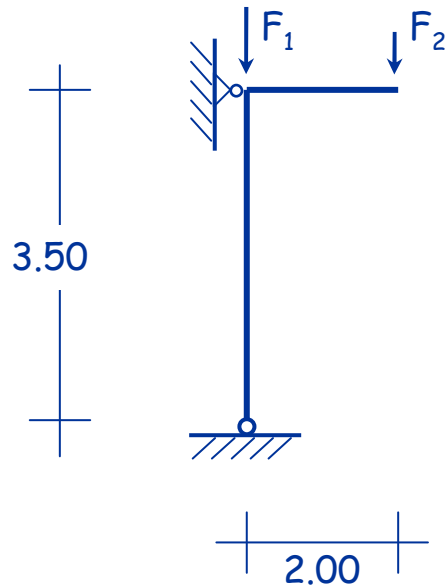
$$F_1 = 800 \text{ kN}$$
$$F_2 = 60 \text{ kN}$$

$$M_a = 120 \text{ kNm}$$
$$M_b = 0 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 860 \text{ kN}$$

$$M_{eq,Ed} = 0.6 \times 120 - 0.4 \times 0 = 72 \text{ kNm}$$

# Esempio



Sezione	HEB300
A	149 cm <sup>2</sup>
W <sub>pl</sub>	1868 cm <sup>3</sup>
Acciaio	S235

$$M_{pl,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

$$N_{bRd} = 2826.8 \text{ kN}$$



instabilità intorno a y

$$l_0 = 3.50 \text{ m}$$

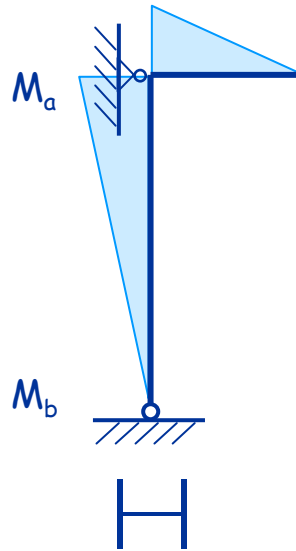
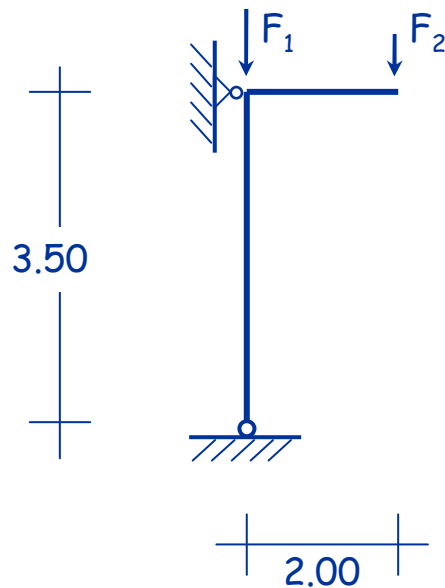
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_x}{l_0^2}$$



instabilità intorno a x

$$N_{cr} = 42579 \text{ kN}$$

# Esempio (metodo A)



Sezione	HEB300
A	149 cm <sup>2</sup>
W <sub>pl</sub>	1868 cm <sup>3</sup>
Acciaio	S235

$$M_{pl,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

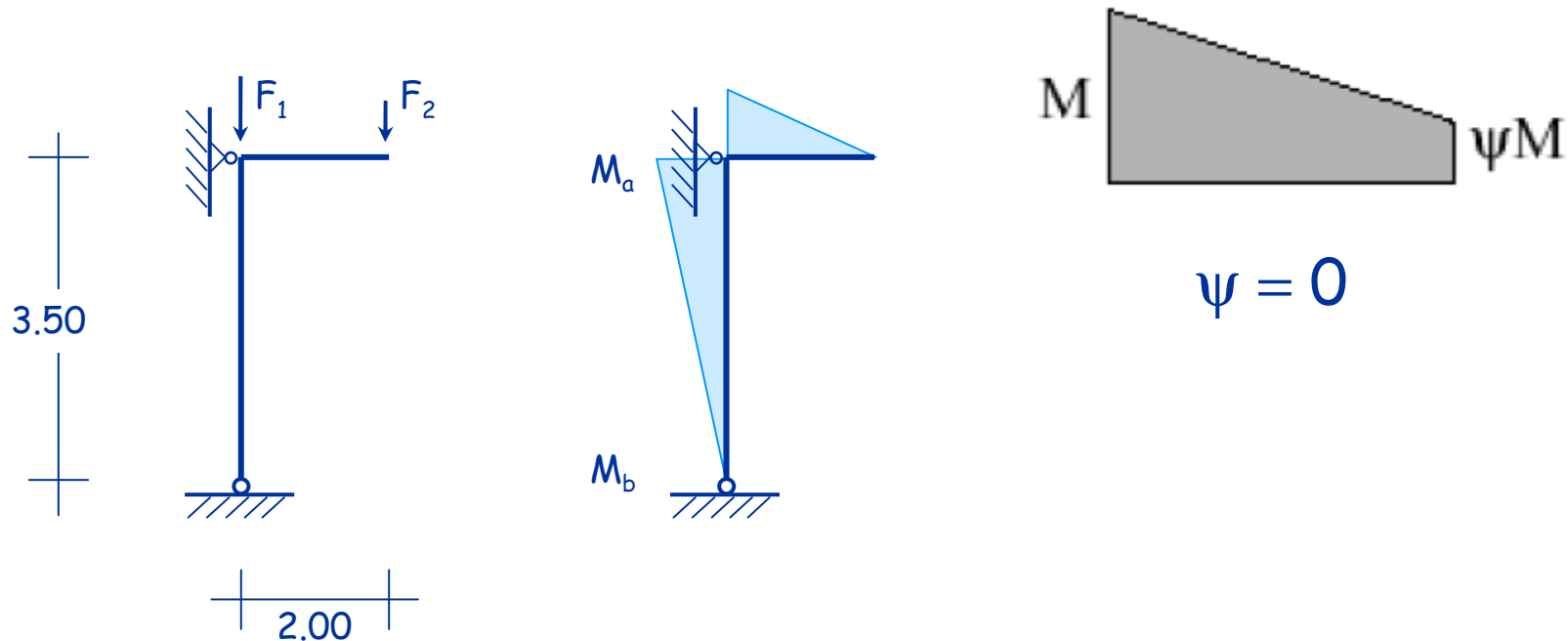
$$N_{bRd} = 2826.8 \text{ kN}$$

$$N_{bRd,x} = 3231.2 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{M_{x,eq,Ed}}{M_{x,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,x}} \right)} = \frac{860}{2826.8} + \frac{72}{418.1 \left( 1 - \frac{860}{42579} \right)} =$$

$$= 0.304 + 0.176 = 0.480 \leq 1$$

## Esempio (metodo B)



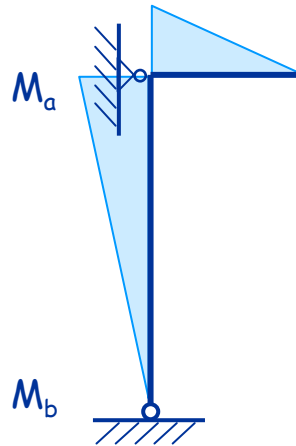
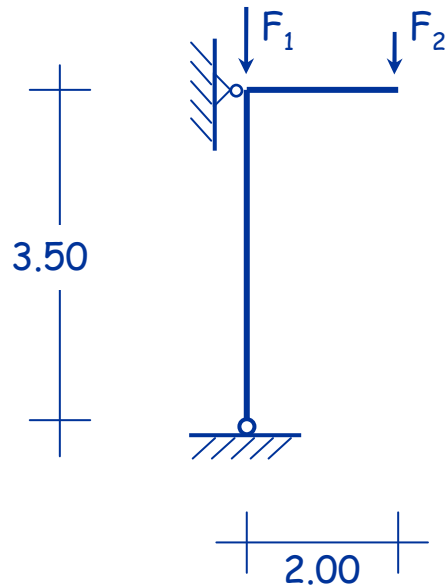
$$F_1 = 800 \text{ kN}$$
$$F_2 = 60 \text{ kN}$$

$$M_a = 120 \text{ kNm}$$
$$M_b = 0 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 860 \text{ kN}$$

$$C_{mx} = 0.6 + 0.4 \psi = 0.6$$

# Esempio



$$\bar{\lambda}_x = 0.287$$

$$\chi_x = 0.9689$$

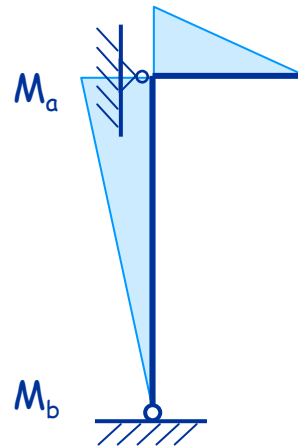
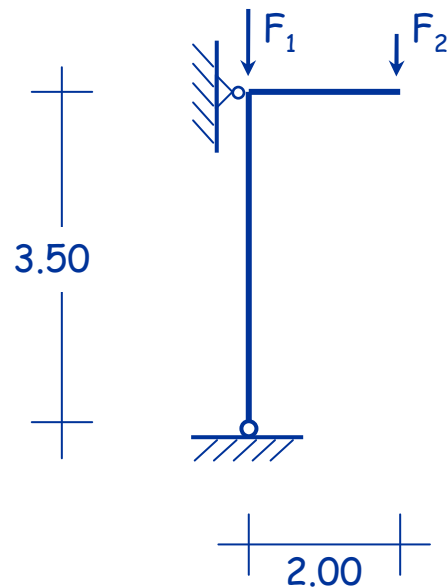
$$\bar{\lambda}_y = 0.492$$

$$\chi_y = 0.8477$$

$$k_{xx} = c_{mx} \left[ 1 + (\bar{\lambda}_x - 0.2) \frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_x A f_x} \right] = 0.6 \left[ 1 + (0.287 - 0.2) \frac{860}{3231.2} \right] = 0.614$$

$N_{bRd,x}$

# Esempio



$$\bar{\lambda}_x = 0.287$$

$$\chi_x = 0.9689$$

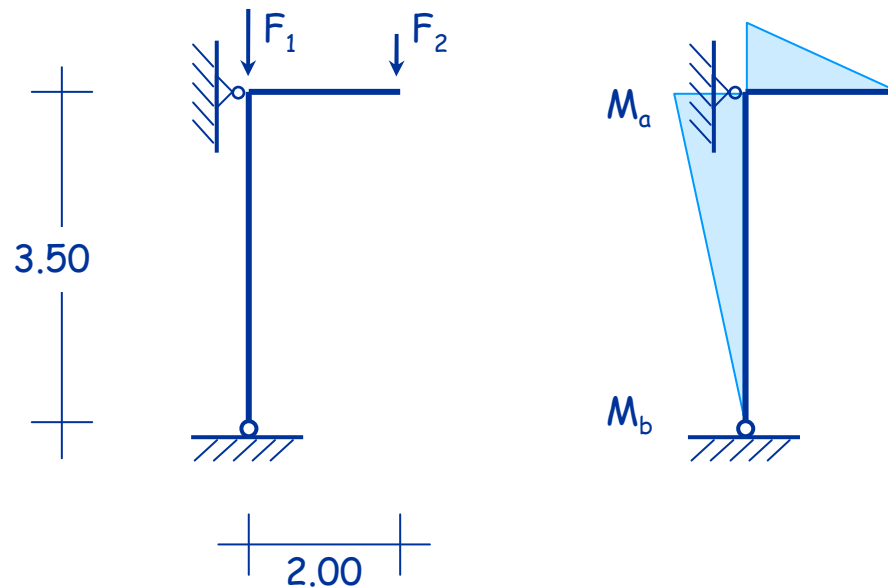
$$\bar{\lambda}_y = 0.492$$

$$\chi_y = 0.8477$$

$$k_{xx} \leq C_{mx} \left[ 1 + 0.8 \frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_x A f_y} \right] = 0.6 \left[ 1 + 0.8 \frac{860}{3231.2} \right] = 0.728$$

Ok, quindi  $k_{xx} = 0.614$

# Esempio



$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_x A f_y} + \frac{k_{xx} M_{x,Ed} \gamma_{M1}}{W_{pl,x} f_y} = \frac{860}{3233.2} + \frac{0.614 \times 120}{418.1} =$$

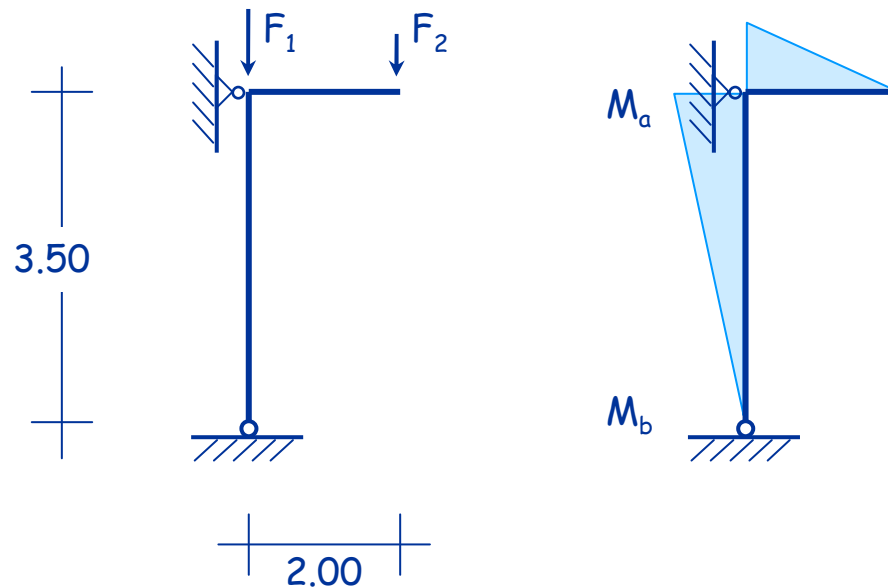
$$= 0.266 + 0.176 = 0.442 < 1$$

$N_{bRd,x}$                        $M_{pl,Rd,x}$

Con il Metodo A era 0.480



# Esempio



Perché  $k_{yx} = 0$

$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_y A f_y} + \frac{k_{yx} M_{xEd} \gamma_{M1}}{W_{pl,x} f_y} = \frac{860}{2828.6} = 0.304$$

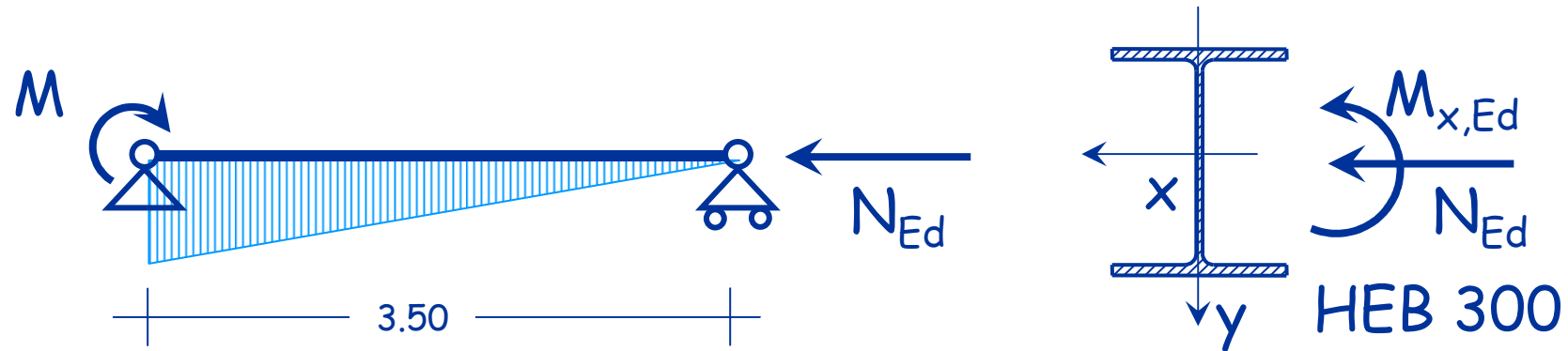
$N_{bRd,y}$

Verifica di stabilità con sforzo normale centrato

### Nota:

Le diapositive che seguono erano state preparate da Edoardo Marino per confrontare metodo A e B. Io ho fatto diversamente i confronti e non le utilizzo, ma le ho comunque lasciate per ricordo

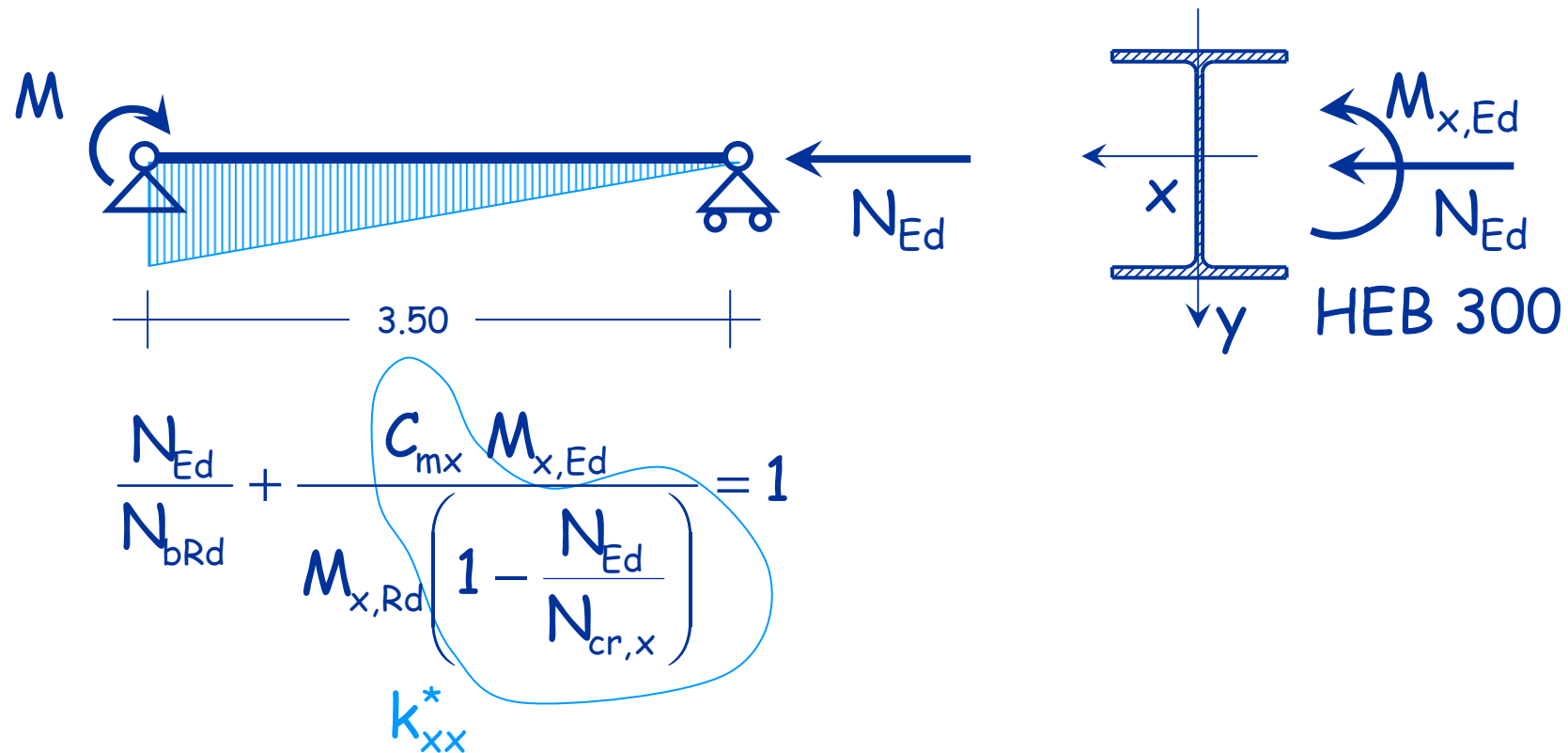
# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A)



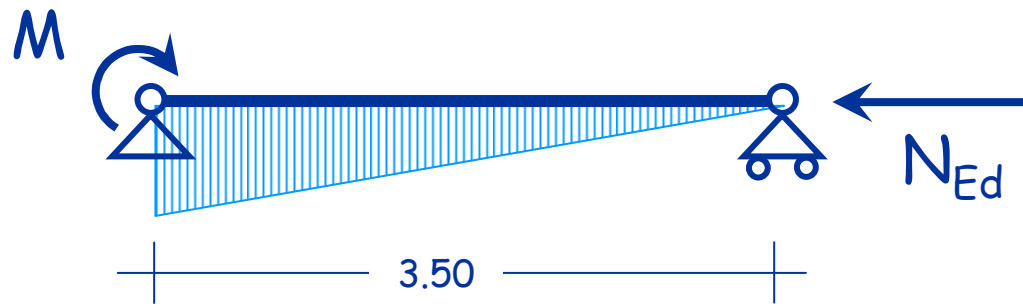
$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{M_{x,eq,Ed}}{M_{x,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,x}} \right)} \leq 1$$

$$M_{x,eq,Ed} = 0.6 M_a - 0.4 M_b = M_a \underbrace{\left( 0.6 - 0.4 \frac{M_b}{M_a} \right)}_{C_{mx}}$$

# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A)



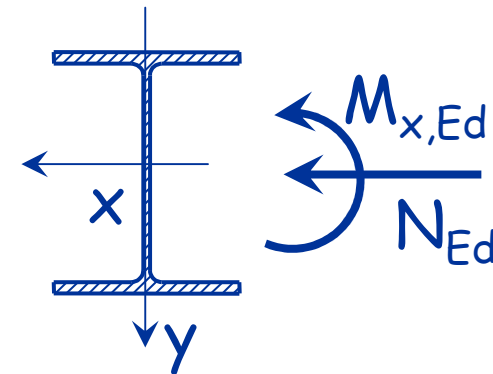
# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A)



$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{k_{xx}^* M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}} \leq 1$$

$$k_{xx}^* = \frac{C_{mx}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,x}}}$$

$$C_{mx} = (0.6 + 0.4 \psi) = 0.6$$



HEB 300

$$M_{pl,x,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

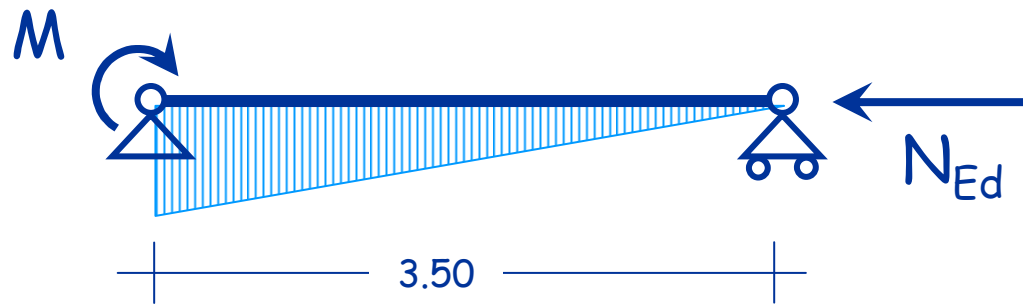
$$N_{bRd} = 2826.7 \text{ kN}$$

$$N_{cr,x} = 42579.2 \text{ kN}$$

Nel caso in questione

$$\psi = \frac{M_b}{M_a} = 0$$

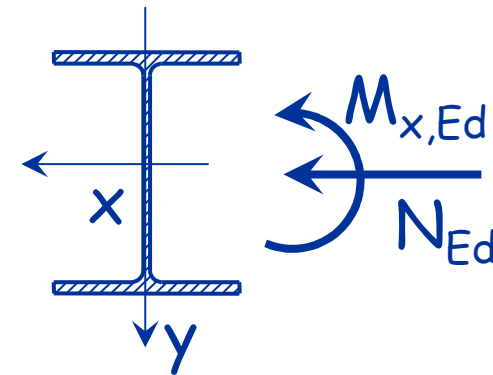
# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A)



$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{k_{xx}^* M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}} \leq 1$$

Costruisco il dominio per punti

Fisso  $N_{Ed} \Rightarrow k_{xx}^* \Rightarrow M_{Ed,x} = \frac{M_{Rd,x}}{k_{xx}^*} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} \right)$



HEB 300

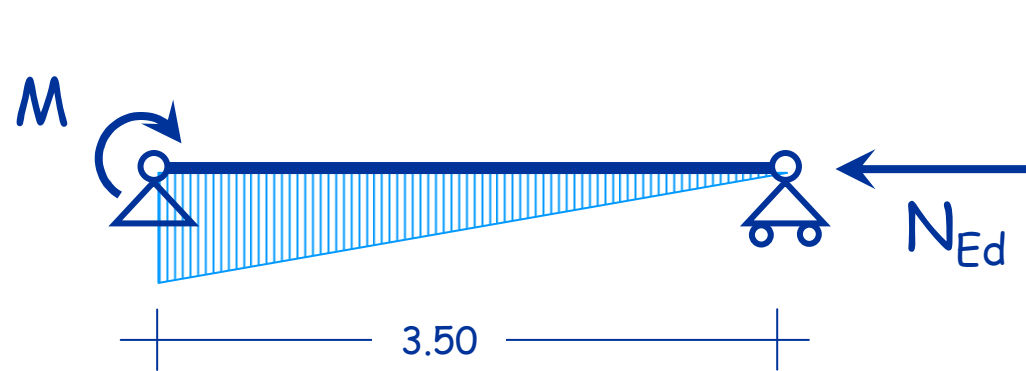
$$M_{pl,x,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

$$N_{bRd} = 2826.7 \text{ kN}$$

$$N_{cr,x} = 42579.2 \text{ kN}$$

Vedere anche foglio Excel Presso-flessione-DomX

# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo B)

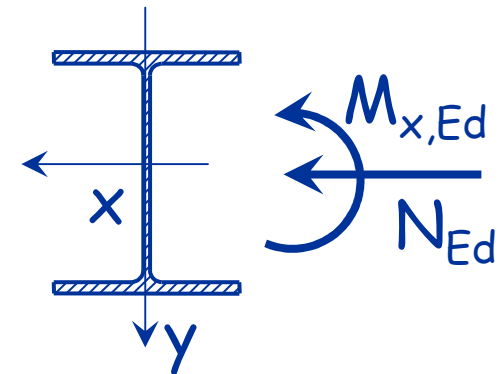


$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd,x}} + \frac{k_{xx} M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}} \leq 1$$

$k_{xx}$  = vedi EC3

$$C_{mx} = (0.6 + 0.4 \psi) = 0.6$$

$$\psi = \frac{M_b}{M_a} = 0$$

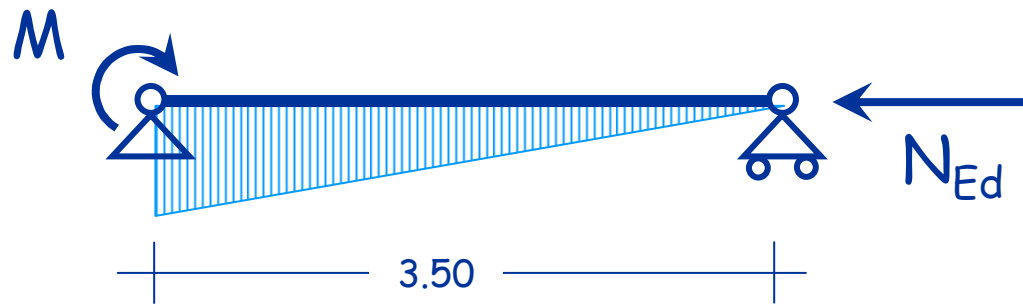


HEB 300

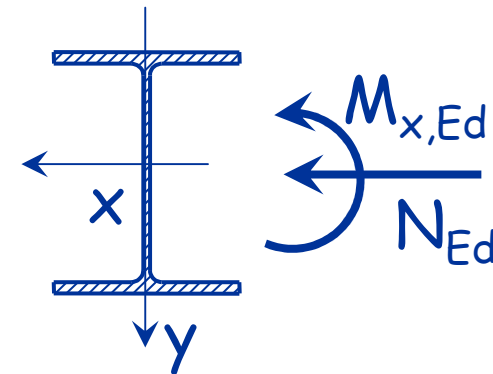
$$M_{pl,x,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

$$N_{bRd,x} = 3231.2 \text{ kN}$$

# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo B)



$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd,x}} + \frac{k_{xx} M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}} \leq 1$$



HEB 300

$$M_{pl,x,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

$$N_{bRd,x} = 2961.0 \text{ kN}$$

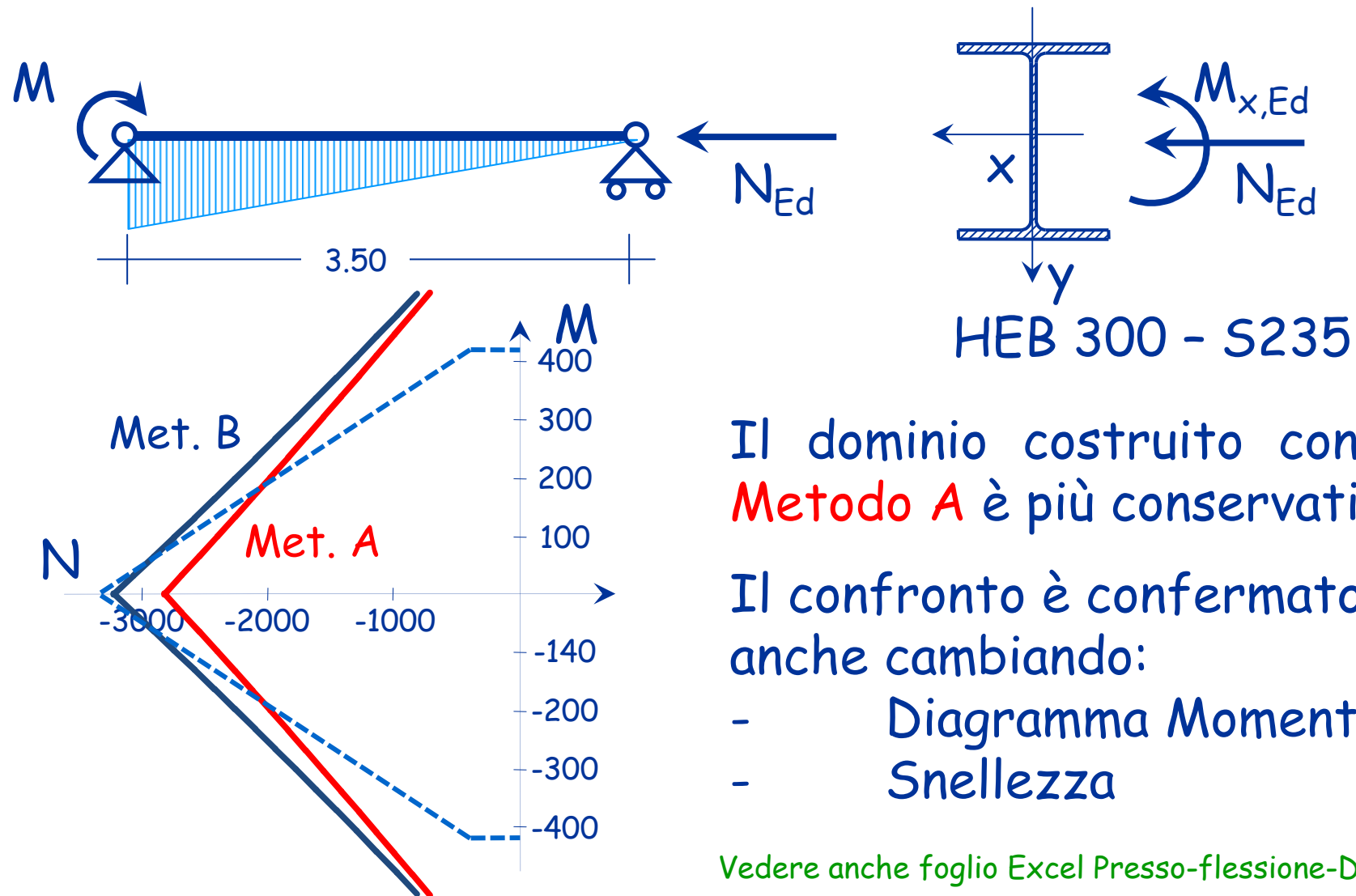
Costruisco il dominio per punti

Fisso  $N_{Ed}$   $\Rightarrow$   $k_{xx}$   $\Rightarrow$   $M_{Ed,x} = \frac{M_{Rd,x}}{k_{xx}} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{bRd,x}} \right)$

Vedere anche foglio Excel Presso-flessione-DomX



# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A vs Metodo B)



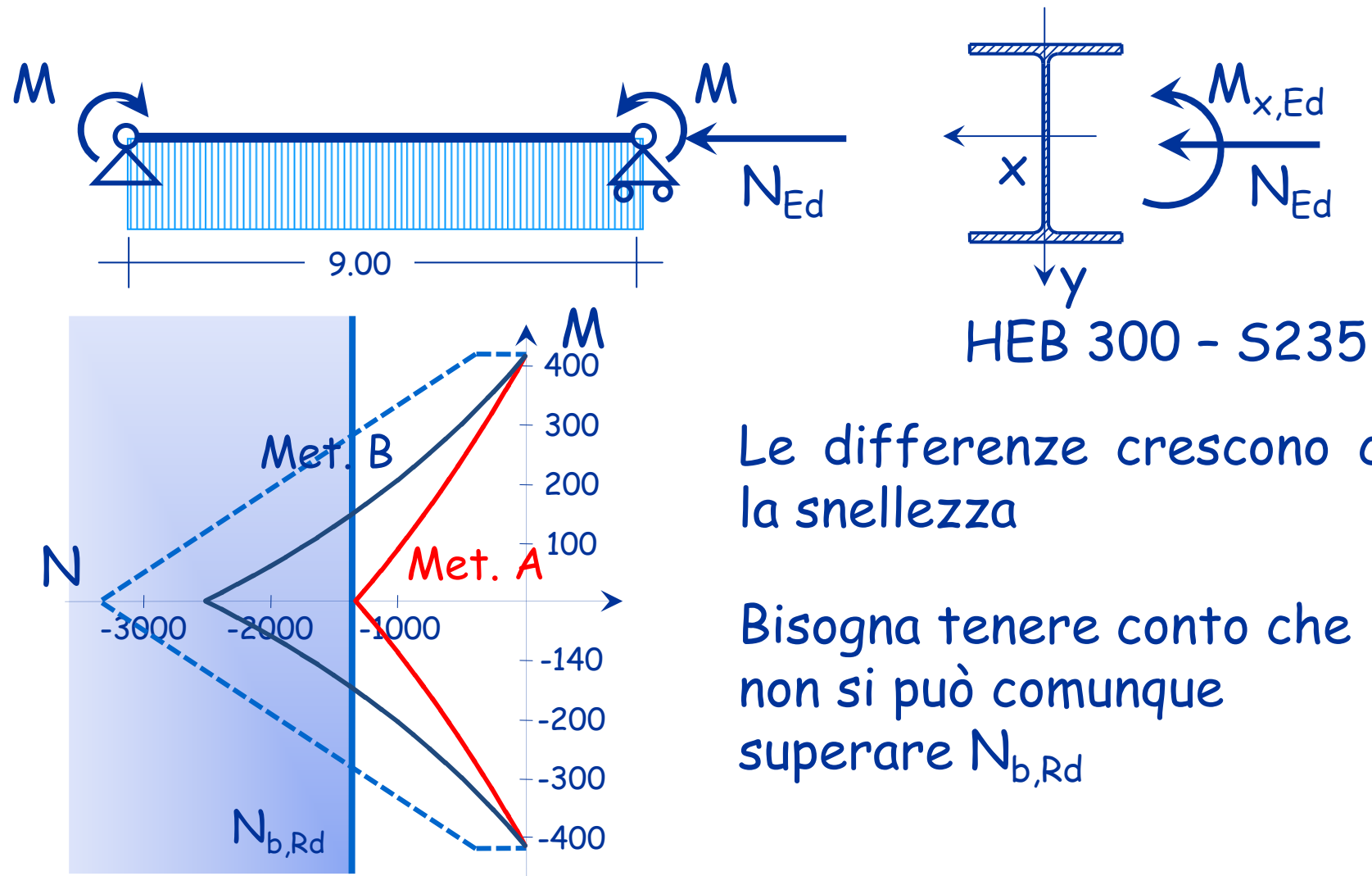
Il dominio costruito con il **Metodo A** è più conservativo

Il confronto è confermato anche cambiando:

- Diagramma Momento
- Snellezza

Vedere anche foglio Excel Presso-flessione-DomX

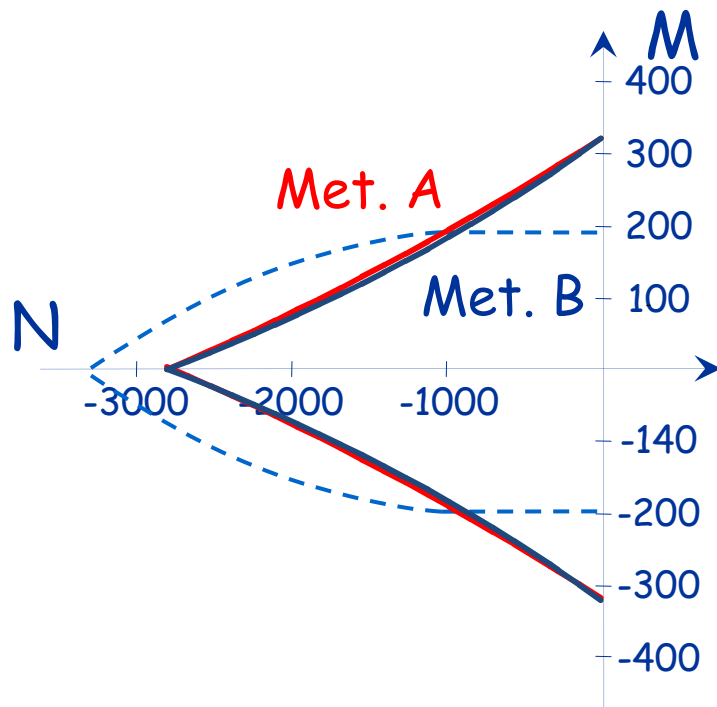
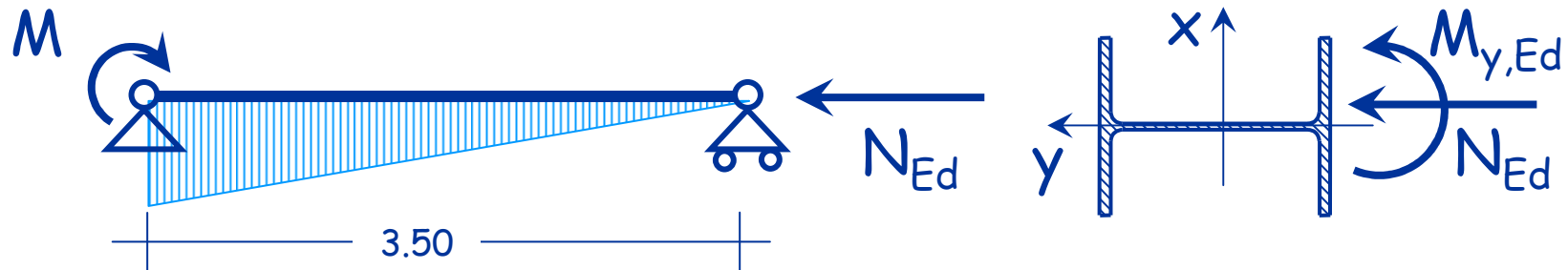
# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A vs Metodo B)



Le differenze crescono con la snellezza

Bisogna tenere conto che non si può comunque superare  $N_{b,Rd}$

# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A vs Metodo B)



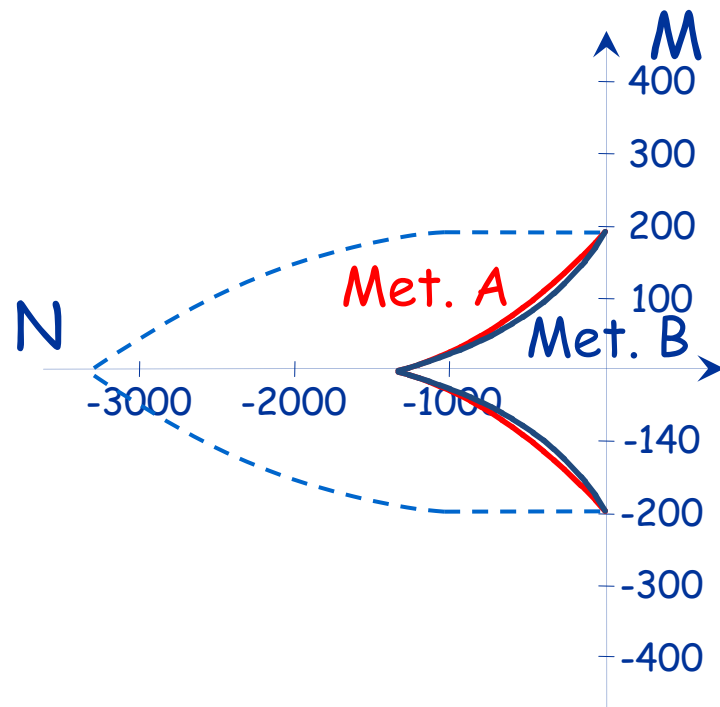
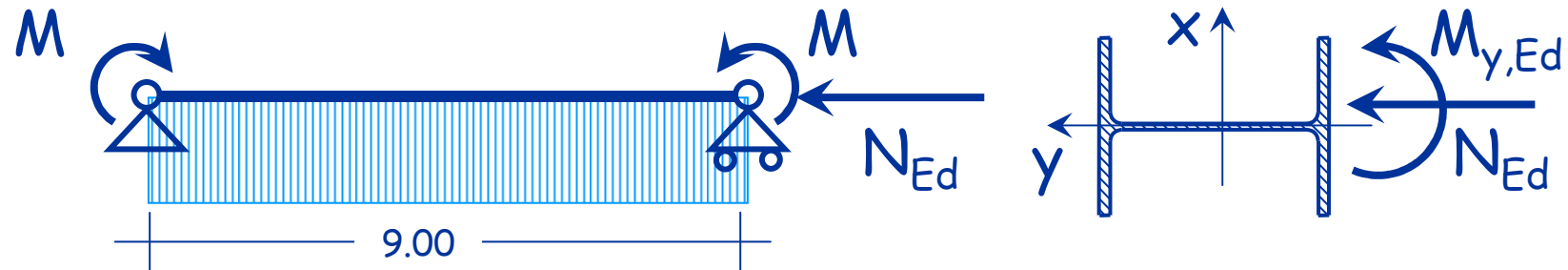
HEB 300 - S235

Il domini si costruiscono allo stesso modo

I due domini sono quasi coincidenti

Vedere anche foglio Excel Presso-flessione-DomY

# Domini di resistenza - presso-flessione retta (Metodo A vs Metodo B)



HEB 300 - S235

I due domini sono quasi coincidenti anche in altre condizioni.