

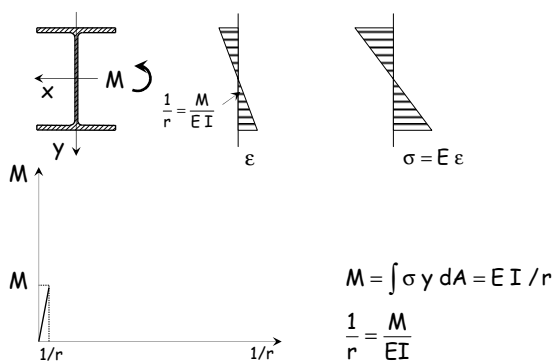
**Progetto di aste e collegamenti in acciaio**

6 - Flessione e taglio

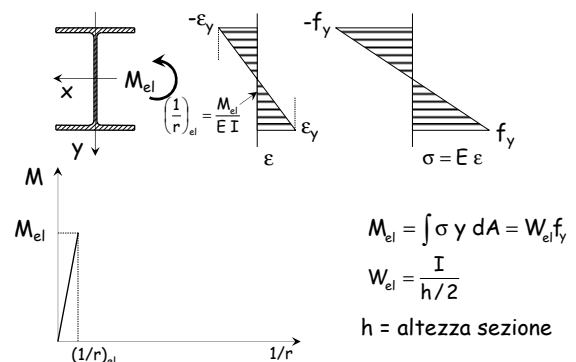
Spoletto  
2-4 febbraio 2012  
Aurelio Ghersi

**Flessione**

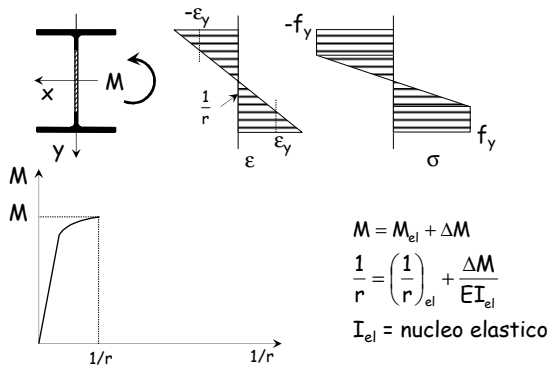
**Comportamento ultimo**



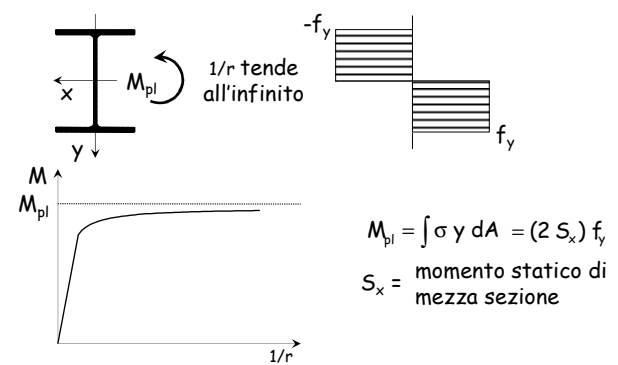
**Comportamento ultimo**



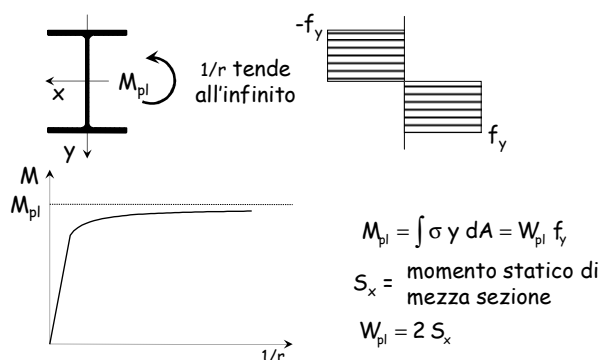
**Comportamento ultimo**



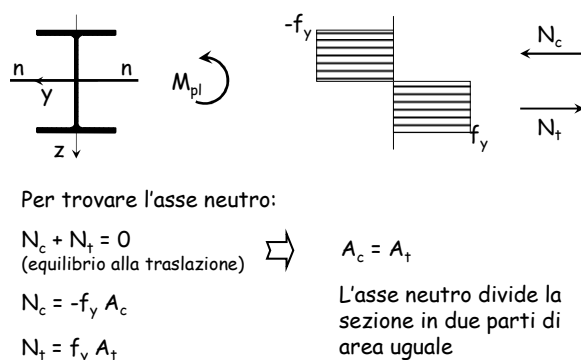
**Comportamento ultimo**



### Comportamento ultimo

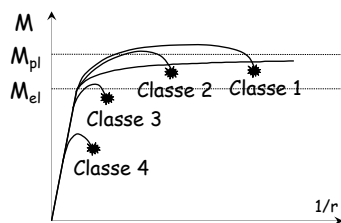


### Comportamento ultimo



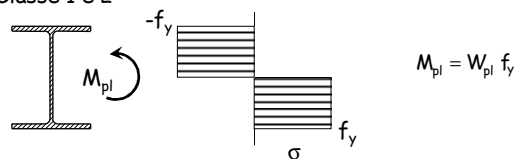
### Comportamento di aste reali

- Classe 1 -  $M$  supera  $M_{pl}$  e la sezione è molto duttile
- Classe 2 -  $M$  supera  $M_{pl}$  ma la sezione è meno duttile
- Classe 3 - La rottura avviene per  $M \approx M_{el}$
- Classe 4 - La rottura avviene per  $M < M_{el}$

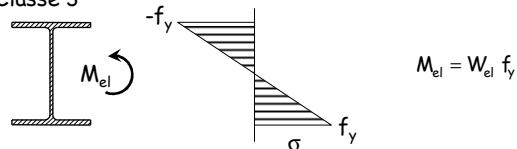


### Verifica - stato limite ultimo

Classe 1 e 2

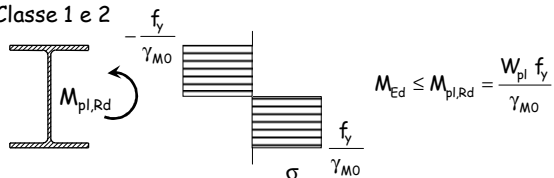


Classe 3

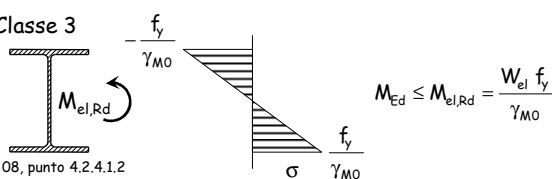


### Verifica - stato limite ultimo

Classe 1 e 2

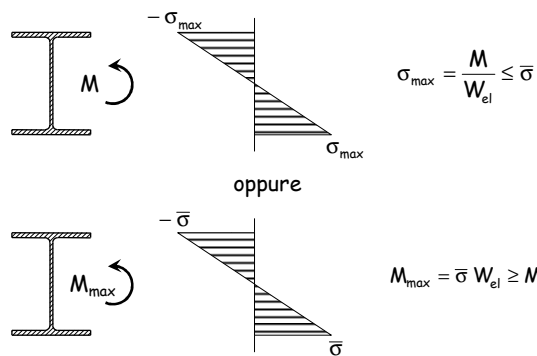


Classe 3



NTC 08, punto 4.2.4.1.2

### Verifica - tensioni ammissibili



## Verifica - confronto

### Classe 1 e 2

TA

$$M_{\max} = \sigma W_{el}$$

Per sezioni a doppio T

$$W_{pl} \approx 1.15 W_{el}$$

SLU

$$M_{pl,Rd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} W_{pl}$$

### Classe 3

$$M_{\max} = \sigma W_{el}$$

$$160 \times 1.4 = 224$$

$$M_{el,Rd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} W_{el}$$

$$235 / 1.05 = 224$$

Acciaio S235 (Fe 360)

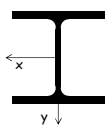
## Verifica - commento

Tenendo conto delle differenze tra i carichi agenti, la resistenza a flessione valutata allo stato limite ultimo è:

- Circa il 15% maggiore per sezioni di classe 1 e 2;
- Sostanzialmente simile per sezioni di classe 3.

## Esempio - profilato

Dati:



HE 240 A

$M_{Ed} = 125 \text{ kNm}$

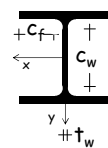
Acciaio S235

Procedura

- 1 - Si determina la classe del profilato (la peggiore tra quella dell'anima e della flangia).
- 2 - Si calcola il momento resistente  $M_{Rd}$ .
- 3 - Si verifica che  $M_{Ed} < M_{Rd}$ .

## Esempio - profilato

Dati:



HE 240 A

$M_{Ed} = 125 \text{ kNm}$

Acciaio S235

1 - Classe del profilato

$$c_w = 164 \text{ mm}$$

$$t_w = 7.5 \text{ mm}$$

$$c_f = 95.3 \text{ mm}$$

$$t_f = 12 \text{ mm}$$

$$\text{Anima: } \frac{c_w}{t_w} = \frac{164}{7.5} = 21.9$$

$$\text{Ala: } \frac{c_f}{t_f} = \frac{95.3}{12} = 7.9$$

## Parti interne compresse

$$\frac{c}{t} \leq 72 \varepsilon$$

Classe	Parte soggetta a flessione	Parte soggetta a compressione	Parte soggetta a flessione e a compressione
1			
2			
3			
4			
5			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$
	235	235	235
	100	100	100
	0.81	0.81	0.81
	0.71	0.71	0.71

NTC08, tab. 4.2.I

## Parti esterne compresse

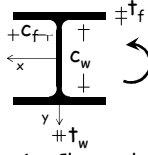
$$\frac{c}{t} \leq 9 \varepsilon$$

Classe	Plattabande esterne soggette a compressione	Plattabande esterne soggette a flessione e a compressione	Plattabande esterne soggette a flessione e a compressione
1			
2			
3			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$
	235	235	235
	1.00	0.81	0.71
	0.81	0.71	0.71

NTC08, tab. 4.2.II

### Esempio - profilato

Dati:



HE 240 A

$M_{Ed} = 125 \text{ kNm}$

Acciaio S235

Il profilato è di classe 1

1 - Classe del profilato

$c_w = 164 \text{ mm}$   $t_w = 7.5 \text{ mm}$

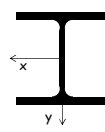
$c_f = 95.3 \text{ mm}$   $t_f = 12 \text{ mm}$

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{164}{7.5} = 21.9 \leq 72 \varepsilon = 72$  ( $\varepsilon = \sqrt{235/f_y} = 1$ )

Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{95.3}{12} = 7.9 \leq 9 \varepsilon = 9$

### Esempio - profilato

Dati:



HE 240 A

$M_{Ed} = 125 \text{ kNm}$

Acciaio S235

Il profilato è di classe 1

2 e 3 - Momento resistente e verifica

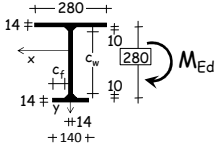
Dal sagomario:  $W_{pl,x} = 744.6 \text{ cm}^3$

$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{744.6 \times 235}{1.05 \times 10^3} = 166.6 \text{ kNm}$

Sezione verificata

### Esempio - sezione composta

Dati:



$M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$

Acciaio S235

1 - Classe della sezione

$c_w = 260 \text{ mm}$   $t_w = 14 \text{ mm}$

$c_f = 53 \text{ mm}$   $t_f = 14 \text{ mm}$

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{260}{14} = 18.5$

Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{53}{14} = 3.8$

### Parti interne compresse

Classe	Parte soggetta a flessione	Parte soggetta a compressione	Parte soggetta a flessione e a compressione
1			
2			
3			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$
	235	235	235
	1.00	0.92	0.81
			0.75
			0.71

A favore di sicurezza  $\frac{c}{t} \leq 33 \varepsilon$

NTC08, tab. 4.2.I

### Parti esterne compresse

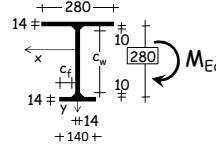
Classe	Plattabande esterne soggette a compressione	Plattabande esterne soggette a flessione e a compressione	Plattabande esterne soggette a flessione e a compressione
1			
2			
3			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$	$f_{yk}$
	235	235	235
	1.00	0.92	0.81
			0.75
			0.71

$\frac{c}{t} \leq 9 \varepsilon$

NTC08, tab. 4.2.II

### Esempio - sezione composta

Dati:



$M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$

Acciaio S235

La sezione è di classe 1

1 - Classe della sezione

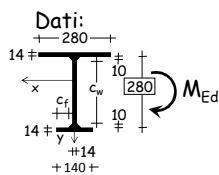
$c_w = 260 \text{ mm}$   $t_w = 14 \text{ mm}$

$c_f = 53 \text{ mm}$   $t_f = 14 \text{ mm}$

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{260}{14} = 18.5 < 33 \varepsilon = 33$  ( $\varepsilon = \sqrt{235/f_y} = 1$ )

Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{53}{14} = 3.8 < 9 \varepsilon = 9$

### Esempio - sezione composta



Dati:  
 $M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$   
 Acciaio S235

La sezione è di classe 1

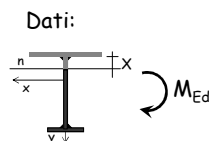
#### 2 - Momento resistente

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$W_{pl} = 2 S_x \quad S_x = \text{momento statico di mezza sezione (parte tesa o compressa)}$$

Bisogna trovare l'asse neutro ed il baricentro

### Esempio - sezione composta



Dati:  
 $M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$   
 Acciaio S235

La sezione è di classe 1

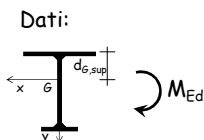
#### 2.1 - Asse neutro

Divide la sezione in due parti di area uguale

$$A_t = 14 \times 280 + 14 \times X = \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad X = 70 \text{ mm}$$

$$A = 9800 \text{ mm}^2$$

### Esempio - sezione composta



Dati:  
 $M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$   
 Acciaio S235

La sezione è di classe 1

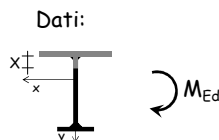
#### 2.2 - Baricentro

Calcolo il momento statico della sezione rispetto al bordo superiore:

$$S_{sup} = 1221080 \text{ mm}^3 \quad \Rightarrow \quad d_{G,sup} = 124.7 \text{ mm}$$

$$S_{sup} = A d_{G,sup}$$

### Esempio - sezione composta



Dati:  
 $M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$   
 Acciaio S235

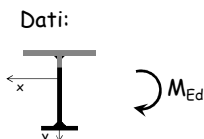
La sezione è di classe 1

#### 2.3 - Modulo di resistenza

Calcolo il momento statico della parte tesa o della parte compressa rispetto all'asse baricentrico:

$$W_{pl} = 2 S_x = 1070.2 \text{ cm}^2 \quad S_x = 535.1 \text{ cm}^2$$

### Esempio - sezione composta



Dati:  
 $M_{Ed} = -250 \text{ kNm}$   
 Acciaio S235

La sezione è di classe 1

#### 2.4 e 3 - Momento resistenza e verifica

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{1070.2 \times 235}{1.05 \times 10^3} = 239.5 \text{ kNm}$$

$$W_{pl} = 2 S_x = 1070.2 \text{ cm}^2 \quad S_x = 535.1 \text{ cm}^2$$

La sezione non è verificata

### Progetto - stato limite ultimo

1 - Si assume la classe della sezione (1, 2 o 3).

2 - Invertendo l'espressione di verifica si ottiene la formula di progetto della sezione.

$$\text{Classe 1 e 2: } M_{Ed} \leq M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \Rightarrow \quad W_{pl} = \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}$$

$$\text{Classe 3: } M_{Ed} \leq M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \Rightarrow \quad W_{el} = \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}$$

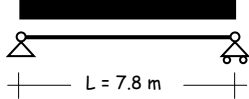
3 - Si sceglie il profilato.

4 - Si verifica la classe del profilato.

### Esempio

Dati:

$$G_d + Q_d = 2.56 \text{ kN/m}$$



Acciaio S235  
Sezione serie HEA  
 $M_{Ed} = 19.5 \text{ kNm}$

1 - Classe della sezione.

Suppongo che la sezione appartenga alla classe 1 o 2.

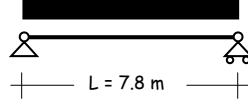
2 - Determinazione del modulo plastico.

$$W_{pl} = \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{MO}} = \frac{19.5 \times 10^3}{235 / 1.05} = 87.1 \text{ cm}^3$$

### Esempio

Dati:

$$G_d + Q_d = 2.56 \text{ kN/m}$$



Acciaio S235  
Sezione serie HEA  
 $M_{Ed} = 19.5 \text{ kNm}$   
 $W_{pl} \geq 87.1 \text{ cm}^3$

3 - Scelta della sezione.

Si potrebbe usare un **HE 120 A**

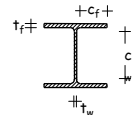
$$W_{pl} = 119.5 \text{ cm}^3$$

$$c_w = 74 \text{ mm}$$

$$c_f = 60 \text{ mm}$$

$$t_w = 5 \text{ mm}$$

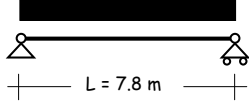
$$t_f = 8 \text{ mm}$$



### Esempio

Dati:

$$G_d + Q_d = 2.56 \text{ kN/m}$$



Acciaio S235  
Sezione serie HEA  
 $M_{Ed} = 19.5 \text{ kNm}$   
 $W_{pl} \geq 87.1 \text{ cm}^3$

4 - Determinazione della classe della sezione.

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{74}{5} = 14.8 \leq 72 \varepsilon = 72 \quad (\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 1)$

Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{40.5}{8} = 5.1 \leq 9 \varepsilon = 9$

La sezione è realmente di classe 1

### Esempio

- Si deve però verificare anche lo stato limite di esercizio
- Il calcolo è stato fatto in un esempio precedente (SLE)
- Si è visto che è necessaria una sezione parecchio più grande (HE 160 A, HE 140 B, IPE 180)
- Si consiglia di procedere sempre effettuando contemporaneamente le due verifiche (o meglio usando le due condizioni per il progetto)

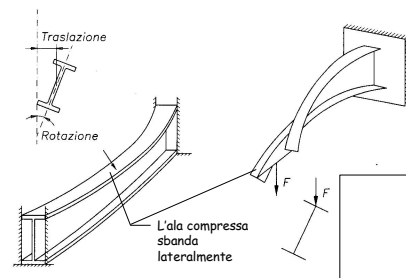
### Instabilità flessio-torsionale

- Le travi inflesse possono sbandare trasversalmente, con rotazione intorno al loro asse (torsionale)



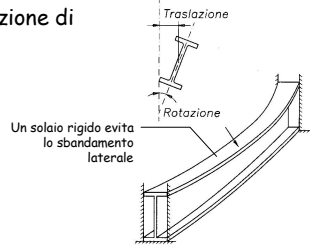
### Instabilità flessio-torsionale

- Le travi inflesse possono sbandare trasversalmente, con rotazione intorno al loro asse (torsionale)



## Instabilità flessio-torsionale

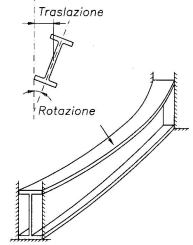
- Le travi inflesse possono sbandare trasversalmente, con rotazione intorno al loro asse (torsionale)
- L'instabilità può essere evitata con opportuna disposizione di elementi strutturali



## Instabilità flessio-torsionale

- Le travi inflesse possono sbandare trasversalmente, con rotazione intorno al loro asse (torsionale)
- L'instabilità può essere evitata con opportuna disposizione di elementi strutturali
- Se non può essere evitata, bisogna ridurre il momento resistente

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M1}}$$



## Instabilità flessio-torsionale

- Le travi inflesse possono sbandare trasversalmente, con rotazione intorno al loro asse (torsionale)
- L'instabilità può essere evitata con opportuna disposizione di elementi strutturali
- Se non può essere evitata, bisogna ridurre il momento resistente

Espressioni simili a quelle dell'instabilità Euleriana

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}$$

$$\Phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

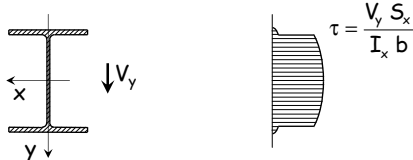
$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M1}}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{pl} f_y}{M_{cr}}}$$

Ulteriori fattori intervengono per distribuzioni di momento non uniforme e per sezioni non compatte

## Taglio

## Comportamento ultimo



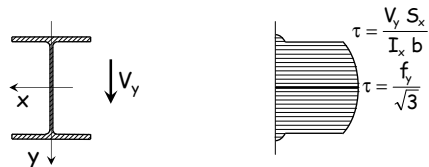
In campo lineare le tensioni si valutano con la formula di Jouraski:

$S_x$  momento statico della sezione al di sopra (o al di sotto) della corda rispetto all'asse baricentrico;

$I_x$  momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico;

$b$  ampiezza della corda.

## Comportamento ultimo



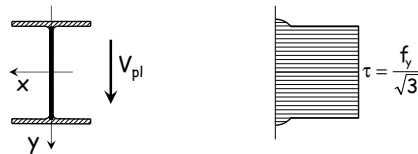
Facendo crescere il taglio, la fibra che sta sull'asse baricentrico (la più sollecitata) si plasticizza.

### Comportamento ultimo



La plasticizzazione si propaga fino a che ...

### Comportamento ultimo



... si plasticizza tutta l'anima.

$$V_{pl} = A_{anima} \frac{f_y}{\sqrt{3}}$$

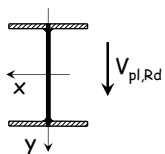
per sezioni a doppio T

$$V_{pl} = A_v \frac{f_y}{\sqrt{3}}$$

in generale

area resistente a taglio

### Verifica - stato limite ultimo



Per profili a doppio T

Si plasticizza tutta l'anima ed i raccordi circolari

Taglio resistente secondo NTC08 ed Eurocodice 3

$$V_{pl,Rd} = A_v \frac{f_y / \sqrt{3}}{\gamma_{M0}}$$

$A_v$  area resistente a taglio

NTC08, punto 4.2.4.1.2 - EC3-1-1, punto 6.2.6

### Area resistente a taglio

- Precedenti versioni suggerivano di valutare l'area resistente a taglio in maniera approssimata

$$A_v = 1.04 h t_w$$

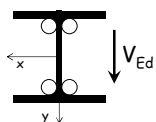
- Ora sono suggerite formule più dettagliate: per travi a doppio T, caricate nel piano dell'anima

$$A_v = A - 2 b t_f + (t_w + 2 r) t_f$$

- Altre formule sono fornite per sezioni di forma diversa

### Esempio

Dati:



HE 120 A

$V_{Ed} = 10 \text{ kN}$

(dalla trave progettata)

Acciaio S235

Procedura

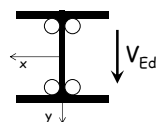
1 - Si determina l'area resistente a taglio  $A_v$

2 - Si calcola il taglio resistente  $V_{pl,Rd}$ .

3 - Si verifica che  $V_{Ed} < V_{pl,Rd}$ .

### Esempio

Dati:



HE 120 A

$V_{Ed} = 10 \text{ kN}$

Acciaio S235

$b = 120 \text{ mm}$   $t_f = 8 \text{ mm}$

$h = 114 \text{ mm}$   $t_w = 5 \text{ mm}$

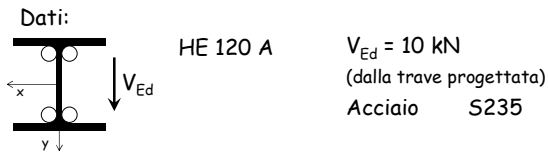
$r = 12 \text{ mm}$   $A = 2534 \text{ mm}^2$

1- Area resistente a taglio  $A_v$

$$A_v = 2534 - 2 \times 120 \times 8 + (5 + 2 \times 12) \times 8 = 846 \text{ mm}^2$$



## Esempio



2 e 3 - Taglio resistente e verifica

$$A_v = 846 \text{ mm}^2$$

$$V_{pl,Rd} = \frac{846 \times 235 / \sqrt{3}}{1.05} \times 10^{-3} = 109.3 \text{ kN}$$

Sezione verificata

## Taglio - considerazioni

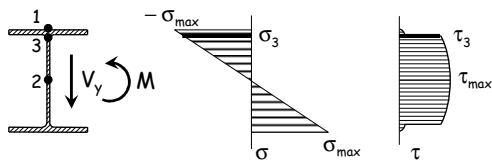
- In genere i profilati sono tali da avere una resistenza a taglio più che sufficiente
- Procedimento usuale: progettare a flessione - verificare a taglio

## Interazione Taglio - Momento flettente Tensioni ammissibili

Generalmente la sezione è sottoposta a taglio e flessione. In questo caso, esiste interazione?

Oltre alle verifiche:

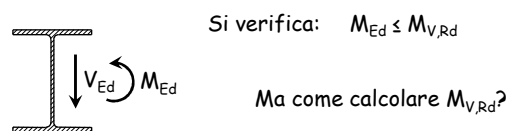
1.  $\sigma_{max} \leq \bar{\sigma}$
  2.  $\tau_{max} \leq \bar{\sigma} / \sqrt{3}$
  3.  $\sqrt{\sigma_3^2 + 3 \tau_3^2} \leq \bar{\sigma}$
- Si controlla che:



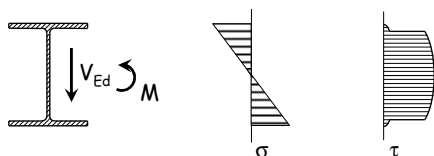
## Interazione Taglio - Momento flettente Stato limite ultimo

Come tener conto dell'interazione taglio - momento flettente?

- La sezione impegna parte delle sue risorse per portare il taglio
- Allora il momento resistente risulterà ridotto e pari a  $M_{V,Rd}$



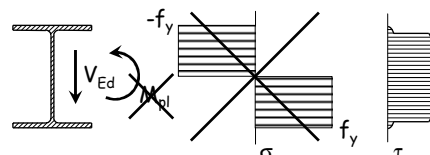
## Momento resistente ridotto per Taglio



Faccio crescere il momento fino al collasso della sezione

(Se la sezione è di classe 1 o 2 corrisponde alla completa plasticizzazione)

## Momento resistente ridotto per Taglio

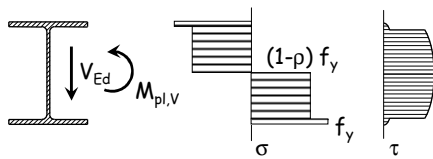


È possibile ottenere questo diagramma delle tensioni  $\sigma$ ?

NO, dove le  $\tau$  sono elevate lo snervamento avverrà per valori di  $\sigma$  più bassi pari a:

$$\sigma = (1-p) f_y \quad \text{con } p < 1$$

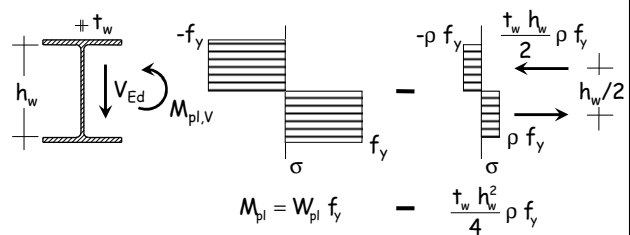
### Momento resistente ridotto per Taglio



Per una sezione a doppio T la tensione va ridotta nell'anima?

$$M_{pl,V} = \int \sigma y dA$$

### Momento resistente ridotto per Taglio

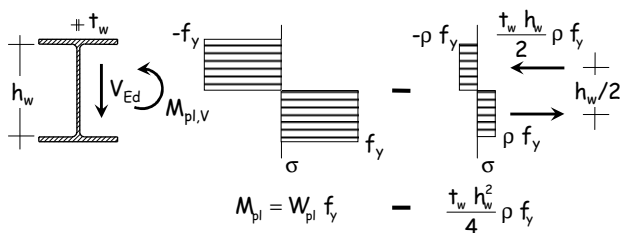


$$M_{pl} = W_{pl} f_y - \frac{t_w h_w^2}{4} \rho f_y$$

$$M_{pl,V} = \left( W_{pl} - \rho \frac{t_w h_w^2}{4} \right) f_y \quad \text{se si considera che } h_w t_w \approx A_V \dots$$

Questo è il  $W_{pl}$  dell'anima

### Momento resistente ridotto per Taglio



$$M_{pl} = W_{pl} f_y - \frac{t_w h_w^2}{4} \rho f_y$$

se si considera che  $h_w t_w \approx A_V \dots$

$$M_{pl,V} = \left( W_{pl} - \rho \frac{A_V^2}{4 t_w} \right) f_y$$

### Taglio - considerazioni

- Finché il taglio sollecitante è piccolo rispetto a quello resistente (meno della metà) non c'è problema di interazione flessione-taglio
- Se il taglio è più grande occorre ridurre la resistenza a flessione

### Flessione e taglio (prescrizioni di normativa)

- Quando  $V_{Ed} > 0.5 V_{pl,Rd}$

$$M_{V,Rd} = \frac{\left( W_{pl} - \rho \frac{A_V^2}{4 t_w} \right) f_y}{\gamma_{M0}}$$

Questo è il  $W_{pl}$  dell'anima

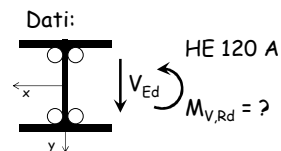
con

$$\rho = \left( \frac{2 V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2$$

$A_V$  = Area resistente a taglio

NTC 08, punto 4.2.4.1.2

### Esempio



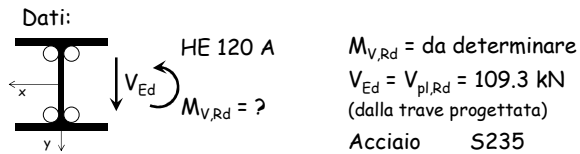
$M_{V,Rd}$  = da determinare  
 $V_{Ed} = V_{pl,Rd} = 109.3 \text{ kN}$   
 (dalla trave progettata)  
 Acciaio S235

$$M_{V,Rd} = \frac{\left( W_{pl} - \rho \frac{A_V^2}{4 t_w} \right) f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{\left( 119.4 - \frac{1 \times 8.46^2}{4 \times 0.5} \right) \times \frac{235}{10^3}}{1.05} = 18.7 \text{ kNm}$$

$$\rho = \left( \frac{2 V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2 = \left( \frac{2 \times 109.3}{109.3} - 1 \right)^2 = 1$$

$$t_w = 5 \text{ mm} \quad A_V = 8.46 \text{ cm}^2 \quad W_{pl} = 119.4 \text{ cm}^3$$

### Esempio



$$M_{V,Rd} = \frac{\left( W_{pl} - \frac{\rho A_v^2}{4 t_w} \right) f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{\left( 119.4 - \frac{1 \times 8.46^2}{4 \times 0.5} \right) \times \frac{235}{10^3}}{1.05} = 18.7 \text{ kNm}$$

Solo flessione       $M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{119.4 \times 235}{1.05 \times 10^3} = 26.7 \text{ kNm}$

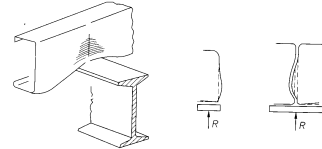
Riduzione del 30% per un taglio molto forte

### Taglio

#### Resistenza dell'anima ad azioni locali

In presenza di azioni concentrate o di taglio molto elevato si può avere:

- Schiacciamento dell'anima in prossimità della piattabanda caricata
- Imbozzamento dell'anima sotto forma di instabilità localizzata e schiacciamento dell'anima in prossimità della piattabanda caricata
- Instabilità dell'anima estesa a gran parte dell'altezza della membratura



### Taglio

#### Resistenza dell'anima ad azioni locali

In presenza di azioni concentrate o di taglio molto elevato si può avere:

- Schiacciamento dell'anima in prossimità della piattabanda caricata
- Imbozzamento dell'anima sotto forma di instabilità localizzata e schiacciamento dell'anima in prossimità della piattabanda caricata
- Instabilità dell'anima estesa a gran parte dell'altezza della membratura

Il problema si può risolvere disponendo costole di irrigidimento in corrispondenza dell'applicazione del carico o degli appoggi  
 La necessità cresce all'aumentare del taglio e della snellezza dell'anima

In alternativa, occorre verificare la trave nei confronti dei fenomeni innanzi citati (vedere Eurocodice 3, parte 1-5)