

Corso di aggiornamento
Progettazione strutturale e
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

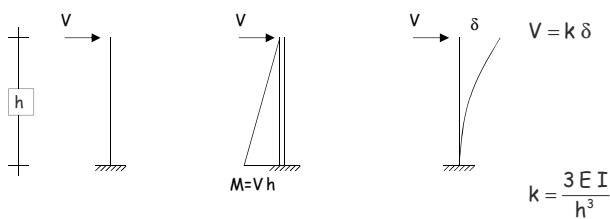
**Problemi specifici nel progetto di strutture
antisismiche in acciaio**

3 - Effetto P- δ e carico critico

Spoletto
11-12 maggio 2012
Aurelio Ghersi

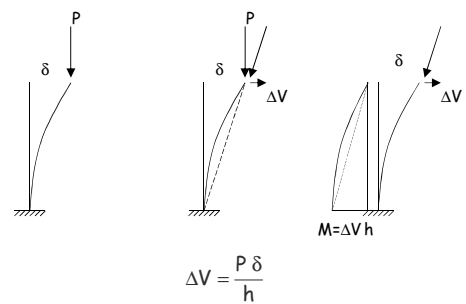
In campo elastico

**Schema monopiano,
comportamento elastico**

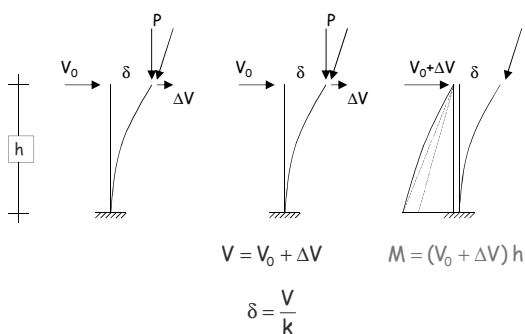


Relazione lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

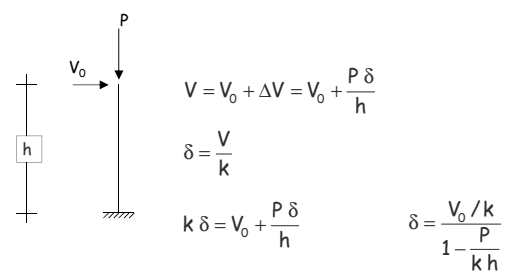
**Schema monopiano,
comportamento elastico**



**Schema monopiano,
comportamento elastico**

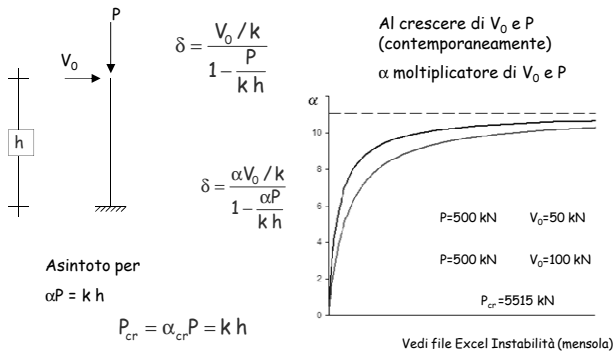


**Schema monopiano,
comportamento elastico**

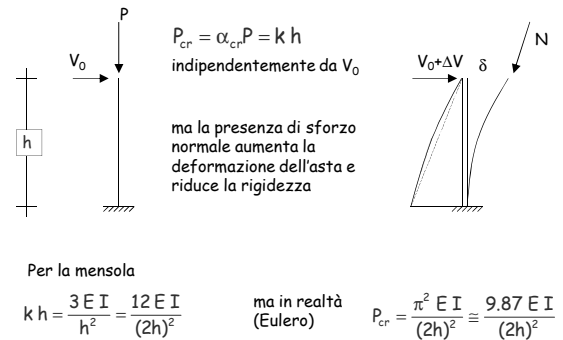


Relazione non lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

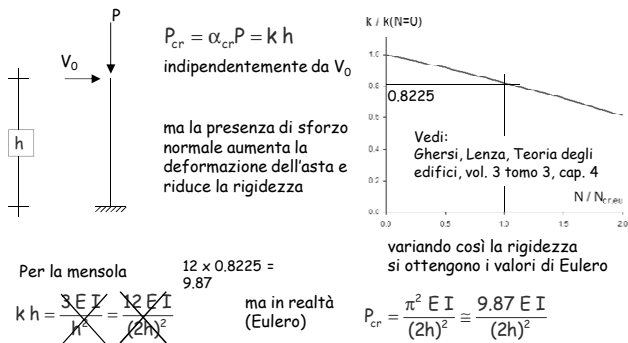
Schema monopiano, comportamento elastico



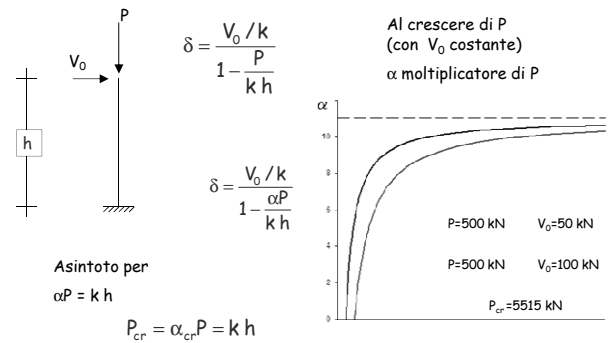
Schema monopiano, carico critico in campo elastico



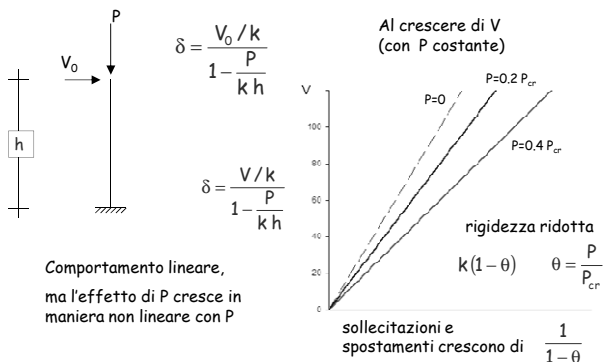
Schema monopiano, carico critico in campo elastico



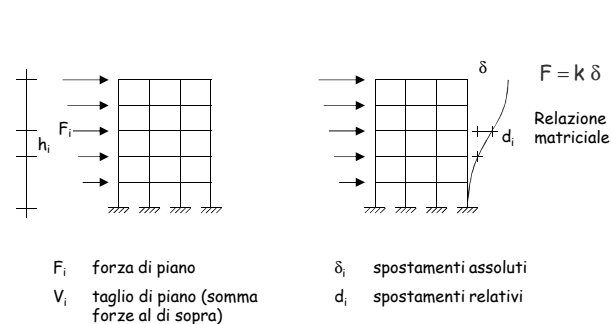
Schema monopiano, comportamento elastico



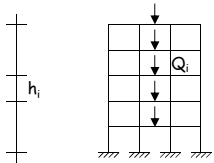
Schema monopiano, comportamento elastico



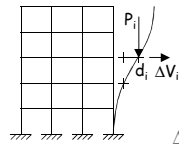
Telaio multipiano, comportamento elastico



Telaio multipiano, comportamento elastico



Q_i carico verticale di piano
 P_i carico totale sovrastante il piano

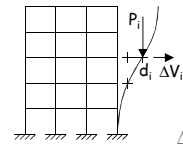


Si può ottenere

$$\Delta F = k_g \delta \quad \text{Relazione matriciale}$$

Telaio multipiano, comportamento elastico

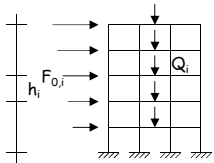
$$k_g = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ & x & x & x \\ & & x & x & x \end{bmatrix}$$



Si può ottenere

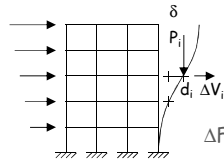
$$\Delta F = k_g \delta \quad \text{Relazione matriciale}$$

Telaio multipiano, comportamento elastico



$$F = F_0 + \Delta F = k \delta$$

Relazione matriciale

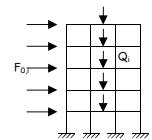


$$F_0 = F - \Delta F = k \delta - k_g \delta = (k - k_g) \delta$$

Matrice di rigidità ridotta per tener conto dell'effetto P-δ

Telaio multipiano, comportamento elastico

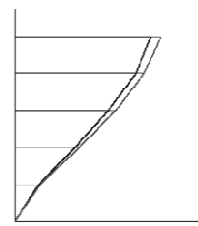
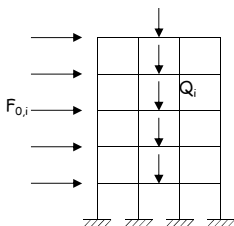
matrice rigidità		tutti i termini sono in kN/mm		
12.3/8	-16.6/2	5.314	-1.257	0.290
16.672	-6.083	27.021	9.577	2.090
5.314	-27.021	53.540	-13.431	15.500
-1.257	9.577	-42.431	73.692	-35.183
0.290	-2.090	-5.500	-55.183	94.120
matrice geometrica				
0.171	-0.171	0	0	0
-0.171	0.557	-0.386	0	0
0	-0.386	0.986	-0.600	0
0	0	0.600	1.414	0.814
0	0	0	-0.814	1.813
matrice rigidità geometrica				
12.207	16.501	5.314	1.257	0.290
-16.501	36.036	-27.435	9.577	-2.090
5.314	27.435	62.664	42.831	15.500
1.257	9.577	42.831	72.278	-35.369
0.290	-2.090	-5.500	-55.369	92.777



Vedi file Excel Instabilità (telaio)

Telaio multipiano, comportamento elastico

piano	h [m]	z [m]	Γ [kN]	senza P-δ (con P-δ)	
				spo [mm]	spo [mm]
5	3.50	17.50	100	145.7	155.6
4	3.50	14.00	100	129.5	138.7
3	3.50	10.50	100	99.8	107.1
2	3.50	7.00	100	64.4	69.0
1	3.50	3.50	100	24.8	25.4



Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

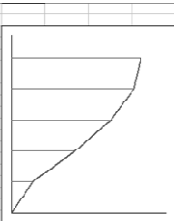
- Incrementando i carichi verticali di α si ha carico critico quando non è più possibile portare forze orizzontali (le forze instabilizzanti tengono, da sole, la struttura deformata)

$$F_0 = (k - \alpha k_g) \delta = 0$$

- Si hanno soluzioni se $\text{Det}(k - \alpha k_g) = 0$ (problema di autovalori e autovettori)

Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

matrice rigidità									
tutti i termini sono in dN/mm									
12.378	-16.672	5.314	-1.267	0.260					
16.672	36.893	27.821	9.677	-2.098					
5.314	-27.821	52.540	-3.421	15.500					
-1.267	9.677	-3.421	73.682	-55.103					
0.260	-2.098	15.500	-55.103	94.120					
matrice geometrica									
0.171	0.171	0	0	0					
-6.171	0.557	-0.388	0	0					
0	-0.388	0.896	0.609	0					
0	0	-0.609	1.414	-0.814					
0	0	0	-0.814	1.843					
moltiplicazione critica									
o cr = 14.71215 modificare questo valore fino ad annullare il determinante									
determinante									
6.37E-05 valore da azzerare									
matrice rigidità - geometrica									
9.665	-14.140	5.314	-1.267	0.260					
-14.140	28.363	-22.123	9.677	-2.098					
5.314	-22.123	36.979	-34.568	15.500					
-1.267	9.677	-34.568	52.908	-55.103					
0.260	-2.098	15.500	-55.103	94.120					
matrice rigidezza									
14.140	28.363	36.979	52.908	94.120					
28.363	56.726	68.958	105.816	188.240					
36.979	68.958	105.816	188.240	327.360					
52.908	105.816	188.240	327.360	571.480					
94.120	188.240	327.360	571.480	941.200					



Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

1. Procedimento iterativo

Correzione dell'analisi lineare, iterativa									
piano	F [kN]	V [kN]	senza P-Δ		prima iterazione		F' [kN]	s _{sp} [mm]	d _r [mm]
			s _{po} [mm]	d _r [mm]	ΔV [kN]	V' [kN]			
5	120	100	145.7	16.1	2.8	102.8	102.8	154.3	16.8
4	120	200	129.5	29.8	1.5	211.5	100.7	130.1	31.5
3	120	300	99.3	35.4	2.2	321.2	109.7	106.5	37.8
2	120	400	64.4	39.6	3.2	432.2	111.0	68.7	42.4
1	120	500	24.3	24.8	25.5	525.5	93.3	26.3	26.3

Calcolo lineare, con le forze assegnate

ΔV

Nuove forze

Nuovi spostamenti

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

1. Procedimento iterativo

prima iterazione									
ΔV [kN]	V' [kN]	I' [kN]	s _{sp} [mm]	d _r [mm]	seconda iterazione				
ΔV [kN]	V' [kN]	I' [kN]	s _{sp} [mm]	d _r [mm]	ΔV [kN]	V' [kN]	I' [kN]	s _{sp} [mm]	Δ %
2.8	102.8	102.8	154.3	16.8	2.9	102.9	102.9	155.5	-0.03%
1.5	211.5	106.7	138.1	31.5	12.2	212.2	109.3	138.7	-0.03%
2.2	321.2	109.7	106.5	37.8	22.7	322.7	110.5	107.0	-0.03%
3.2	432.2	111.0	68.7	42.4	34.5	434.5	111.0	69.0	-0.03%
25.5	525.5	93.3	26.3	26.3	27.1	527.1	92.8	26.1	-0.03%

... iterando
quanto occorre

ΔV

Nuove forze

Nuovi spostamenti

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

2. Con determinazione approssimata del carico critico

Carico critico									
piano	h [m]	z [m]	P [kN]	F [kN]	V [kN]	s _{sp} [mm]	d _r [mm]	α _{cr}	θ
5	3.50	17.50	600	100	100	145.7	16.1	36.73	0.028
4	3.50	14.00	1350	100	200	129.5	29.8	17.43	0.057
3	3.50	10.50	2100	100	300	99.3	35.4	14.14	0.071
2	3.50	7.00	2850	100	400	64.4	39.6	12.41	0.081
1	3.50	3.50	3600	100	500	24.3	24.8	19.58	0.051
								α _{cr min}	θ max
								12.41	0.081
								1/1-θ _{max}	1.088

a ogni piano si calcola $\alpha_{cr} = \frac{V_i h}{P_i d_i}$ e si prende il minimo

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

2. Con determinazione approssimata del carico critico

Correzione dell'analisi lineare, con θ									
piano	F [kN]	senza P-Δ		con P-Δ		Δ %			
		s _{po} [mm]	s _{sp} [mm]	s _{po} [mm]	s _{sp} [mm]				
5	100	145.7	152.4	152.4	152.4	-3.9%			
4	100	129.5	140.9	133.7	133.7	-5.6%			
3	100	99.3	108.5	107.1	107.1	-4.4%			
2	100	64.4	70.0	68.0	68.0	-5.5%			
1	100	24.3	27.0	26.4	26.4	-2.1%			

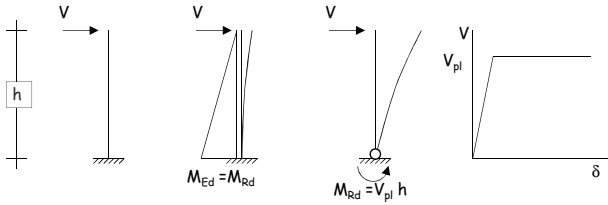
si amplificano i risultati di $\frac{1}{1-\theta_{max}}$

$$\theta = \frac{1}{\alpha_{cr}} \quad \theta_{max} = \frac{1}{\alpha_{cr,min}}$$

In campo plastico

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

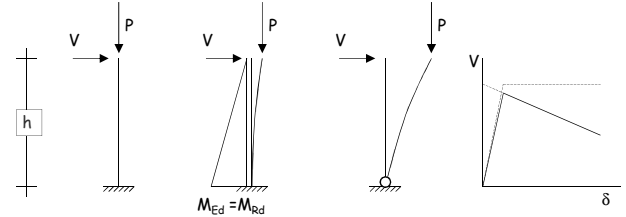
- Al crescere della forza orizzontale



Relazione non lineare tra carichi e spostamenti

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

- Se si considera l'effetto P-δ



Il tratto elastico lineare ha una pendenza minore

La cerniera plastica si forma per un taglio minore

Dopo la formazione della cerniera si prosegue con un tratto decrescente

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

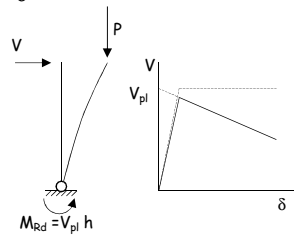
- Se si considera l'effetto P-δ

Per l'equilibrio

$$V h + P \delta = V_{pl} h$$

$$V = V_{pl} - \frac{P \delta}{h}$$

(retta decrescente)



Implicazioni per l'analisi sismica

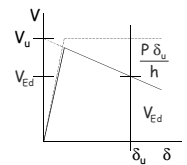
- Alla struttura sono applicate forze di calcolo V_{Ed}
- La struttura in campo plastico raggiungerà uno spostamento δ_u



- La struttura deve essere in grado di portare un taglio plastico (ultimo) V_u maggiore di V_{Ed}

$$\frac{V_u}{V_{Ed}} = \frac{V_u}{V_u - \frac{P \delta_u}{h}} = \frac{1}{1 - \frac{P \delta_u}{V_u h}} = \frac{1}{1 - \theta}$$

$$\text{con } \theta = \frac{P \delta_u}{V_u h}$$



Applicazione ai telai

- Calcolare a tutti i piani il rapporto $\theta_i = \frac{P_i d_{i,u}}{V_{i,u} h_i}$
- Determinarne il massimo θ_{max}
- Incrementare i risultati del calcolo di $\frac{1}{1 - \theta_{max}}$

La normativa dice che:

- Se $\theta_{max} \leq 0.1$ l'effetto può essere trascurato
- Se $0.1 < \theta_{max} \leq 0.2$ l'incremento va fatto così
- Se $0.2 < \theta_{max} \leq 0.3$ occorrono analisi più dettagliate
- Non è ammesso $\theta_{max} > 0.3$

NTC 08, punto 7.3.1

Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per d_u e V_u ?
- Spostamenti:
 - Il calcolo SLV è fatto con forze ridotte di q rispetto a quelle dello spettro elastico
 - Per Newmark, gli spostamenti in campo plastico sono gli stessi della struttura che rimane elastica
 - Quindi i valori di calcolo degli spostamenti devono essere incrementati di q o più precisamente, di $S_e(T)/S_d(T)$

Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per V_u e d_u ?

- Tagli:

- La prima plasticizzazione avviene per sisma incrementato di Ω

$$\Omega = \min \left(\frac{M_{p(Rd)} - M_{Ed,0}}{M_{Ed,E}} \right)_{\text{travi}}$$
- Tra prima plasticizzazione e collasso vi è un incremento di azione tagliante pari a α_u / α_1
- Quindi i valori di calcolo del taglio devono essere incrementati di $\Omega \alpha_u / \alpha_1$

- In definitiva si può usare l'espressione

$$\theta = \frac{P_d \frac{S_d(T)}{S_d(T)}}{V_h \Omega \frac{\alpha_u}{\alpha_1}}$$