

Corso di aggiornamento
Progettazione strutturale e
Norme Tecniche per le Costruzioni

Progetto di elementi strutturali in c.a.

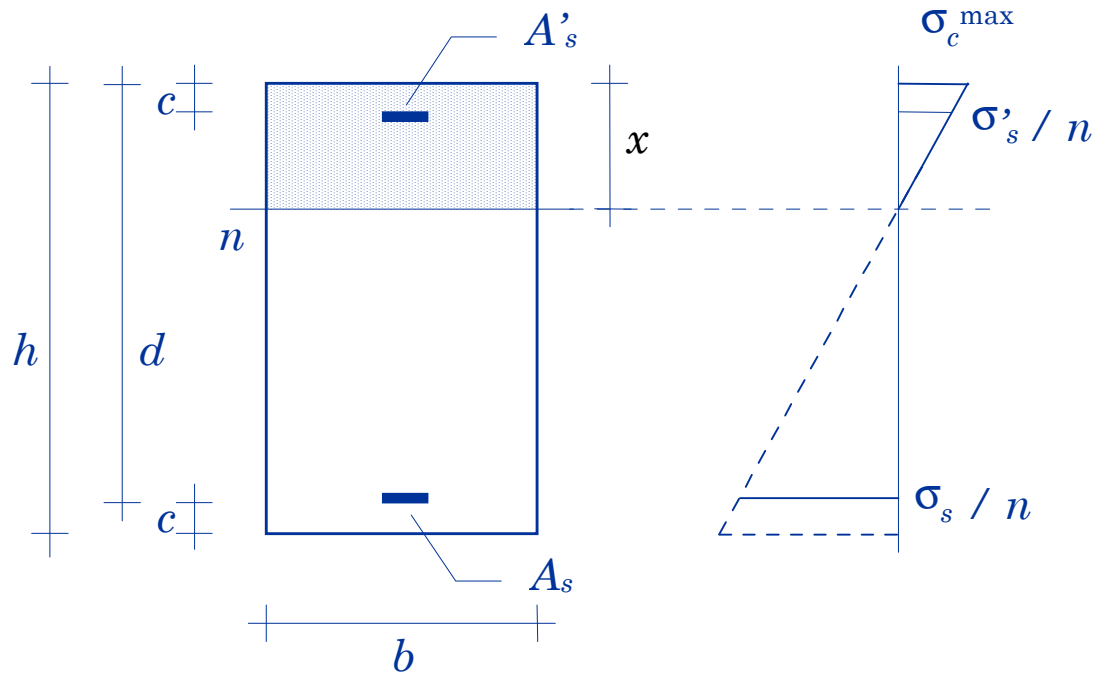
Flessione semplice, duttilità

Spoletto
30 novembre - 1 dicembre 2012

Aurelio Ghersi

Verifica di sezioni inflesse

Verifica - tensioni ammissibili



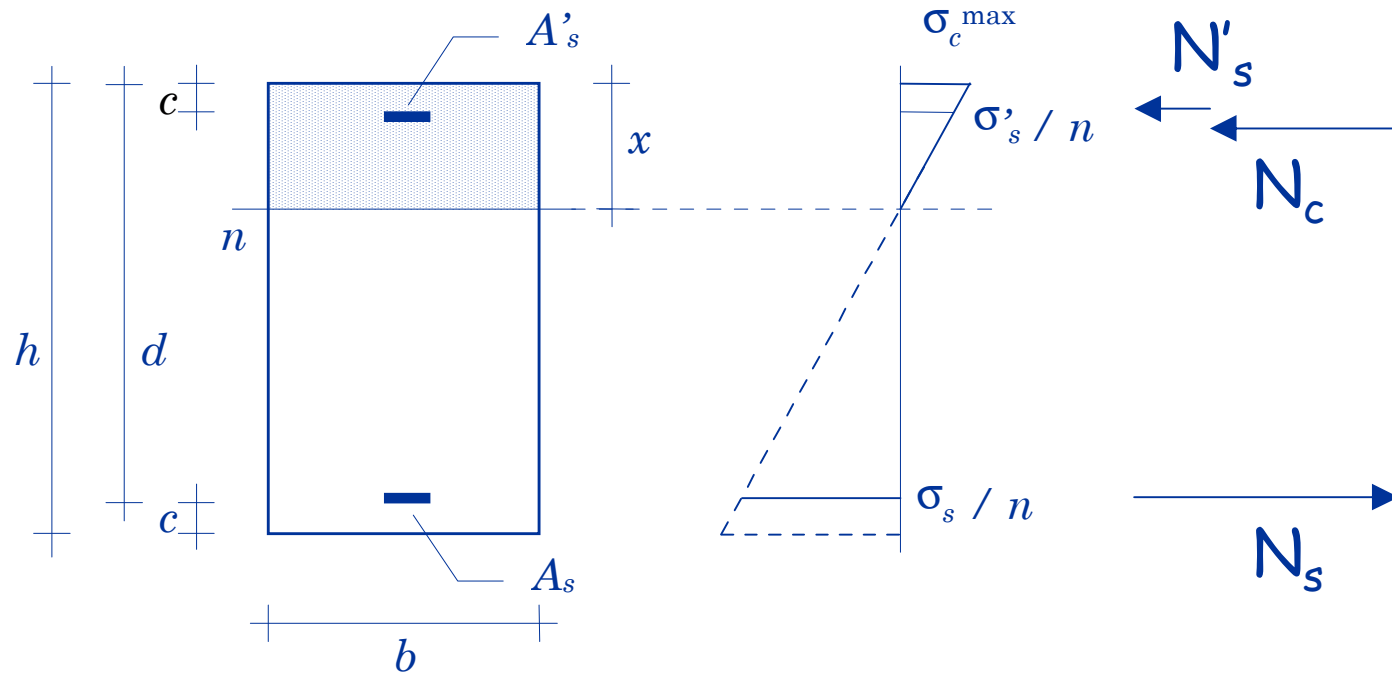
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili



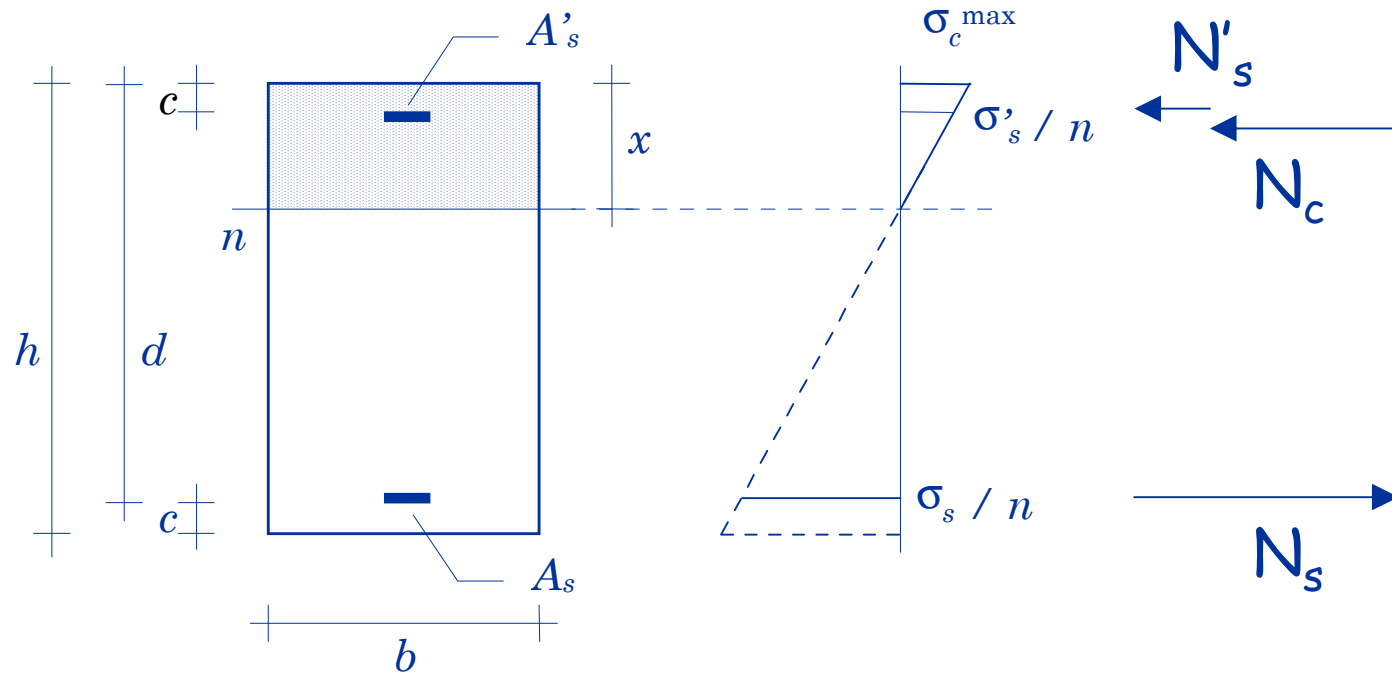
Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

oppure ...

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico
per la sezione reagente
omogeneizzata)

Verifica - tensioni ammissibili

Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

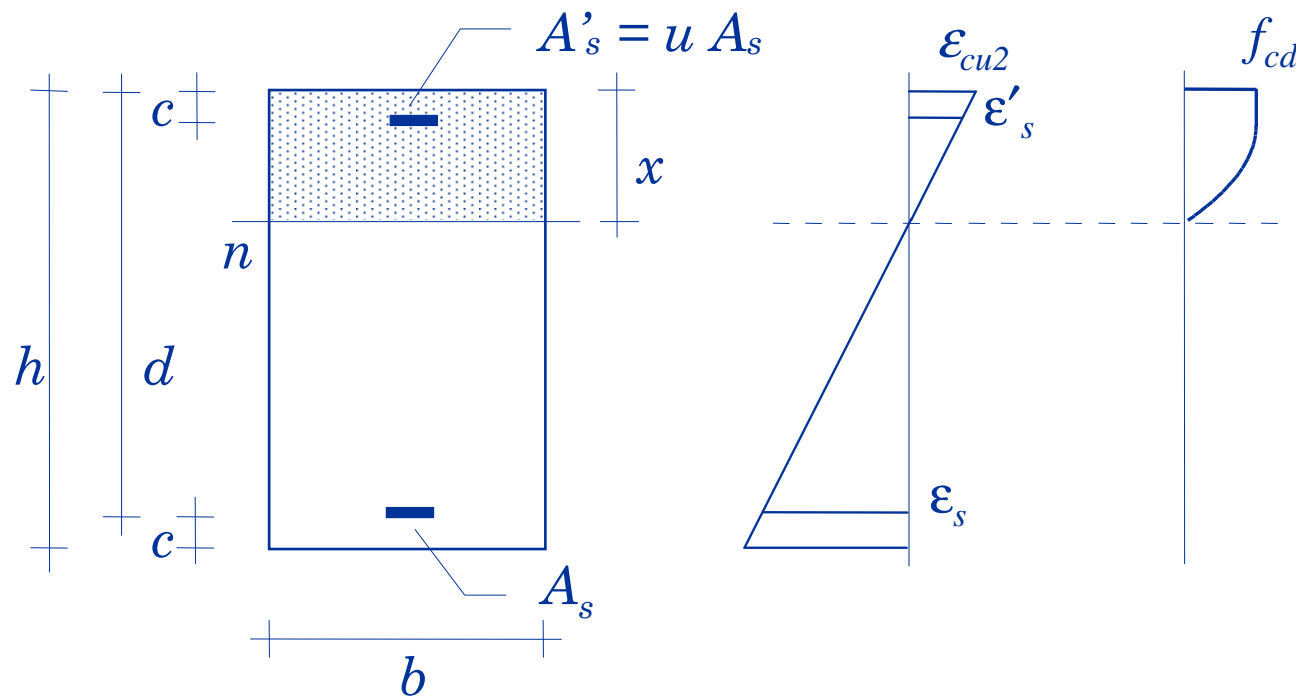
E poi:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

con:

$$I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Verifica - stato limite ultimo



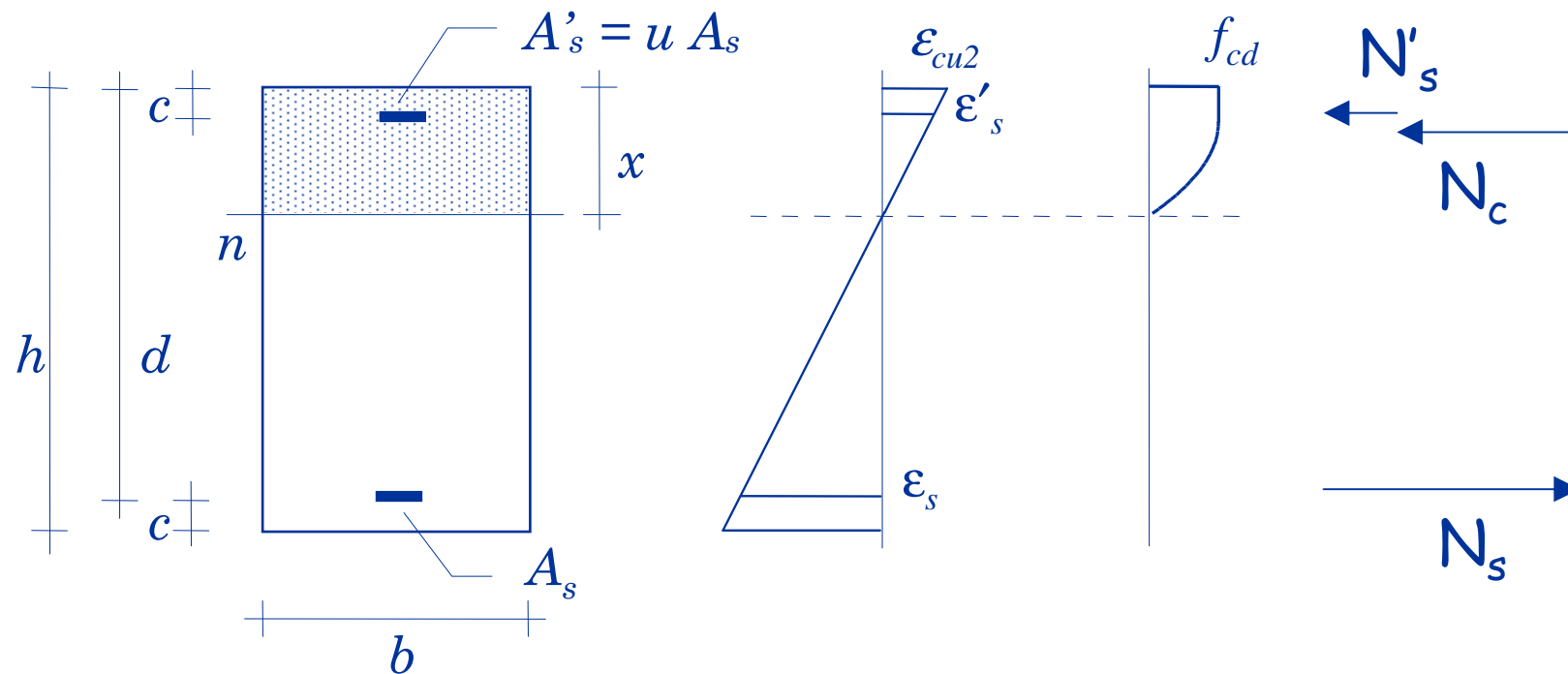
Dati:

Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

Verifica - stato limite ultimo

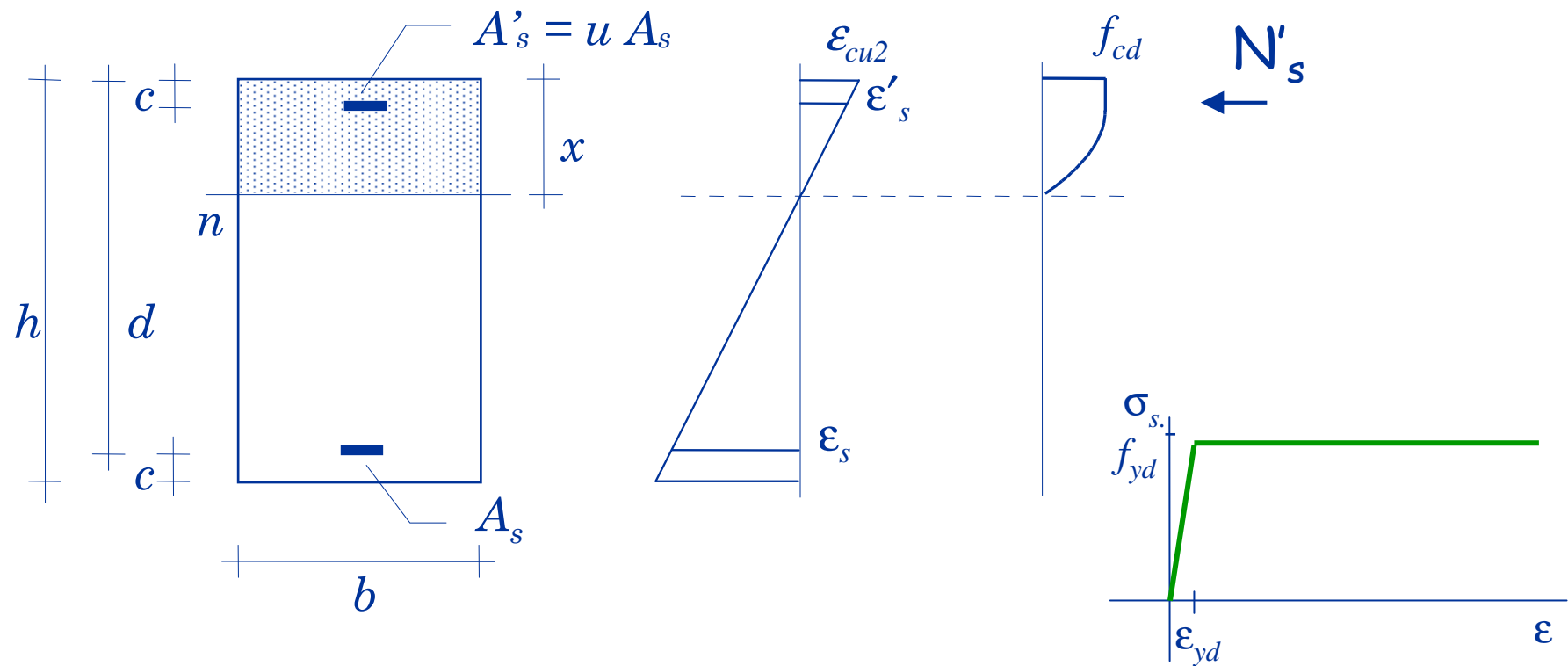


Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:

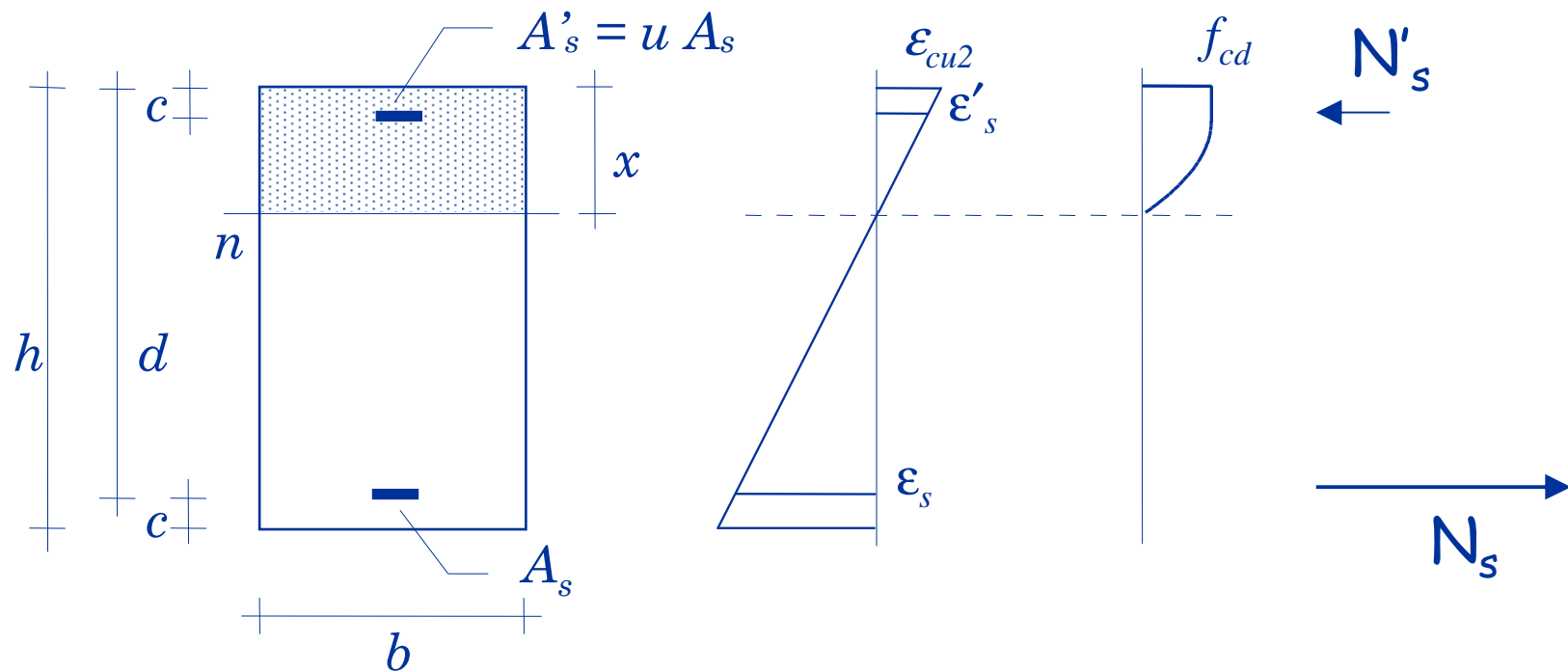


$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu2}$$

in molti casi $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$

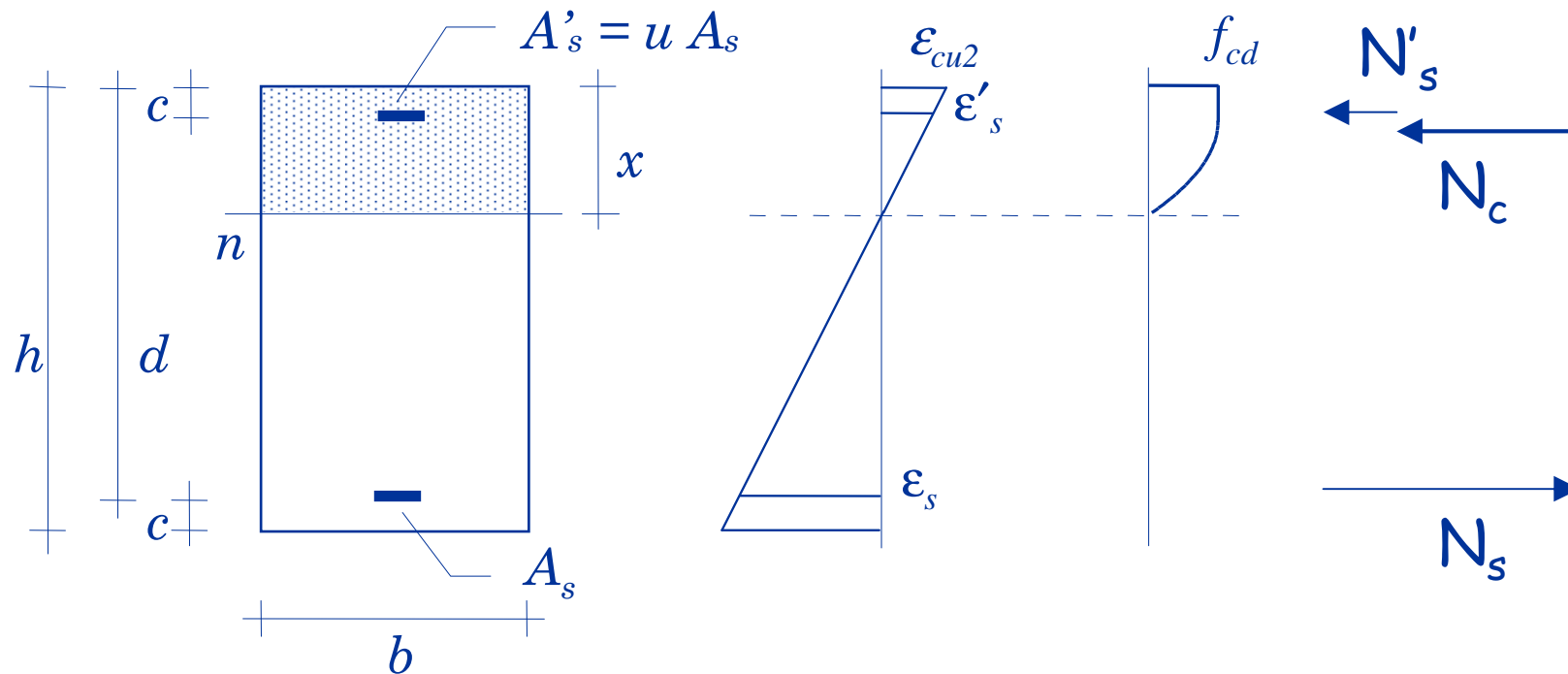
se $\epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



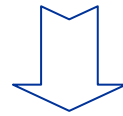
Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta \ b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$



$$\beta b x f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio è una equazione di primo
grado:

$$\beta b x f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio è una equazione di primo
grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo
grado

$$\beta b x f_{cd} + A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

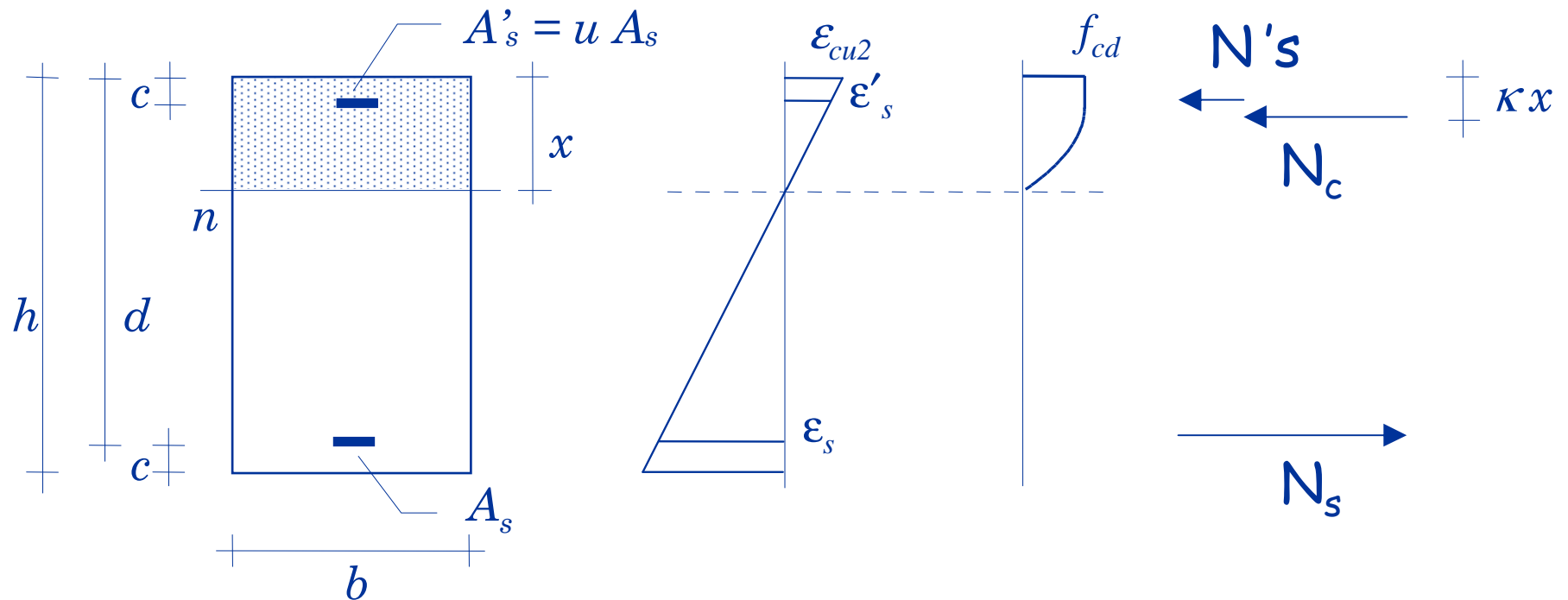
Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio è una equazione di primo
grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo
grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni
ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

Momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio n. 1

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50 c=4
cm

Calcestruzzo C25/30
Acciaio B450C

Armature $A_s = 4\varnothing 20$
 $A'_s = 2\varnothing 14$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 1

individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.74 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu2} = \frac{10.74 - 4}{10.74} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.19 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (1.86×10^{-3}) la posizione trovata è esatta

Esempio n. 1

individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu2} \geq \varepsilon_{yd}$$

Si ottiene la profondità minima dell'asse neutro affinché l'armatura compressa sia snervata:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu2}|}{|\varepsilon_{cu2}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.14 c$$

Per acciaio B450C

Nell'esempio si è ottenuto:

$$x = 10.74 \text{ cm} \geq 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

Esempio n. 1

calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 3.08 \times 391 \times 10^{-1} = 120.4 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 10.74) + 120.4 \times (0.416 \times 10.74 - 4)] \times 10^{-2}$$

$$M_{Rd} = 204.5 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Esempio n. 2

verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50 c=4
cm

Calcestruzzo C25/30
Acciaio B450C

Armature $A_s = 4\varnothing 20$
 $A'_s = 3\varnothing 20$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata,
controllare se è vero e in caso contrario passare
all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 9.42) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 3.56 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 3.56 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 6.51 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

Esempio n. 2

individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = 283 \text{ MPa}$$

ε'_s

Esempio n. 2

calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$N'_s = 9.42 \times 283 \times 10^{-1} = 266.6 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 6.51) + 266.6 \times (0.416 \times 6.51 - 4)] \times 10^{-2}$$

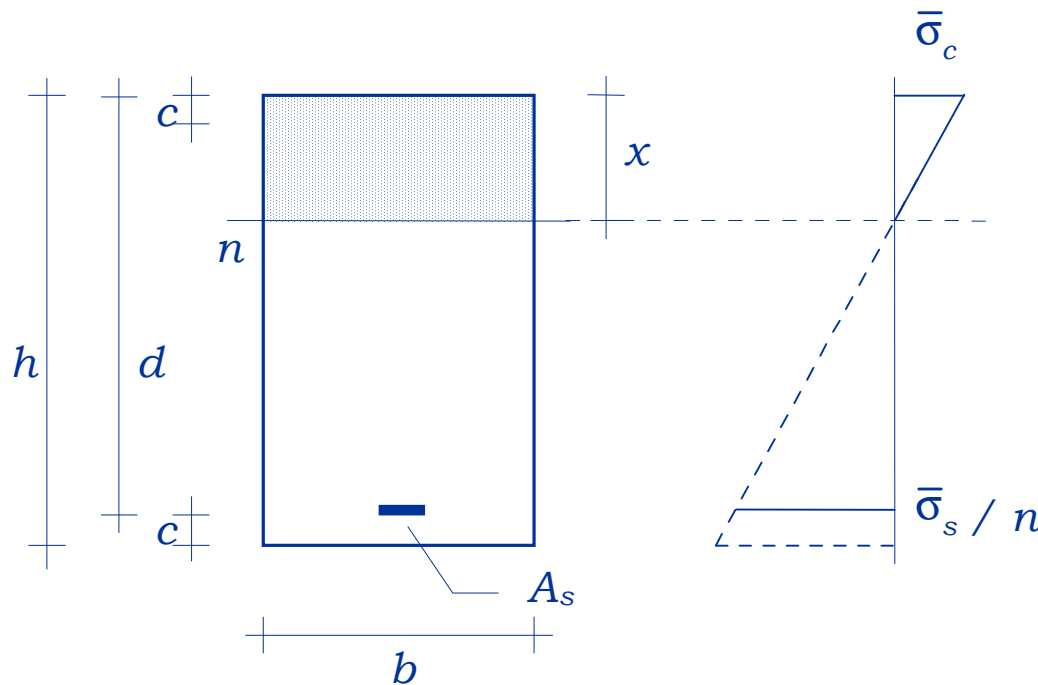
$$M_{Rd} = 209.2 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

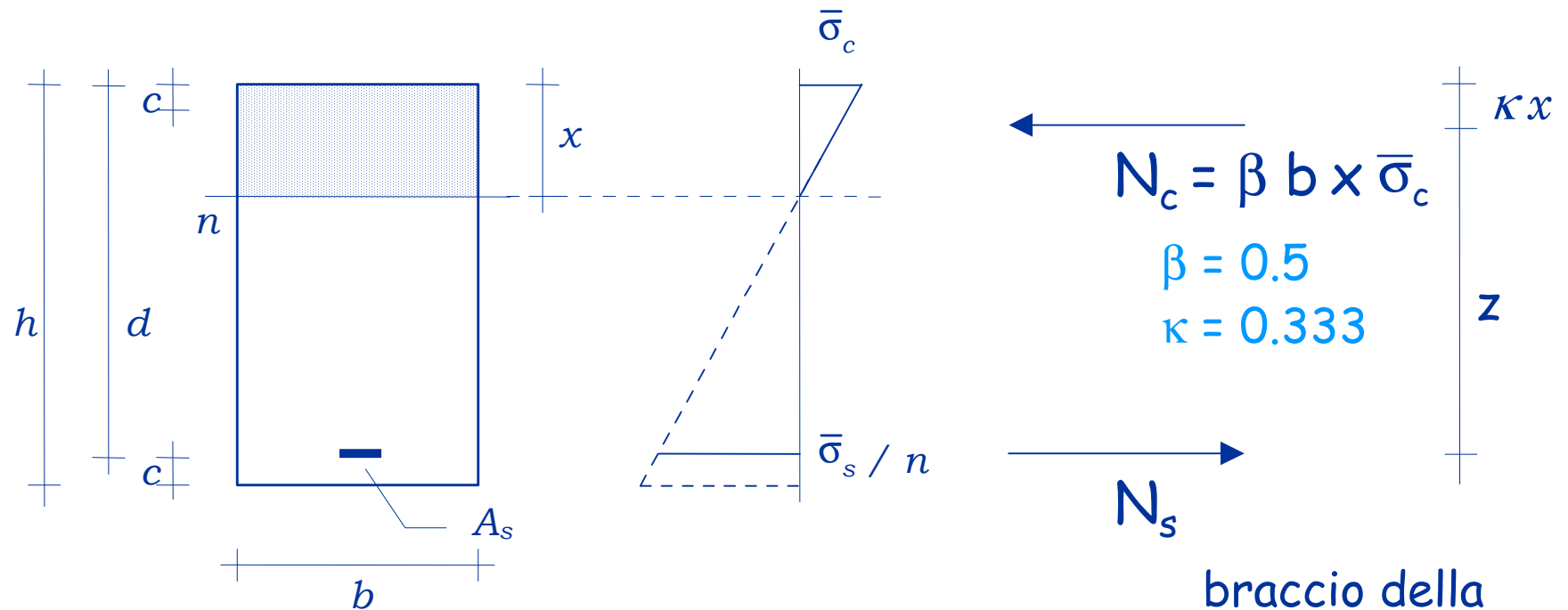
Progetto - tensioni ammissibili



$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

- 1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

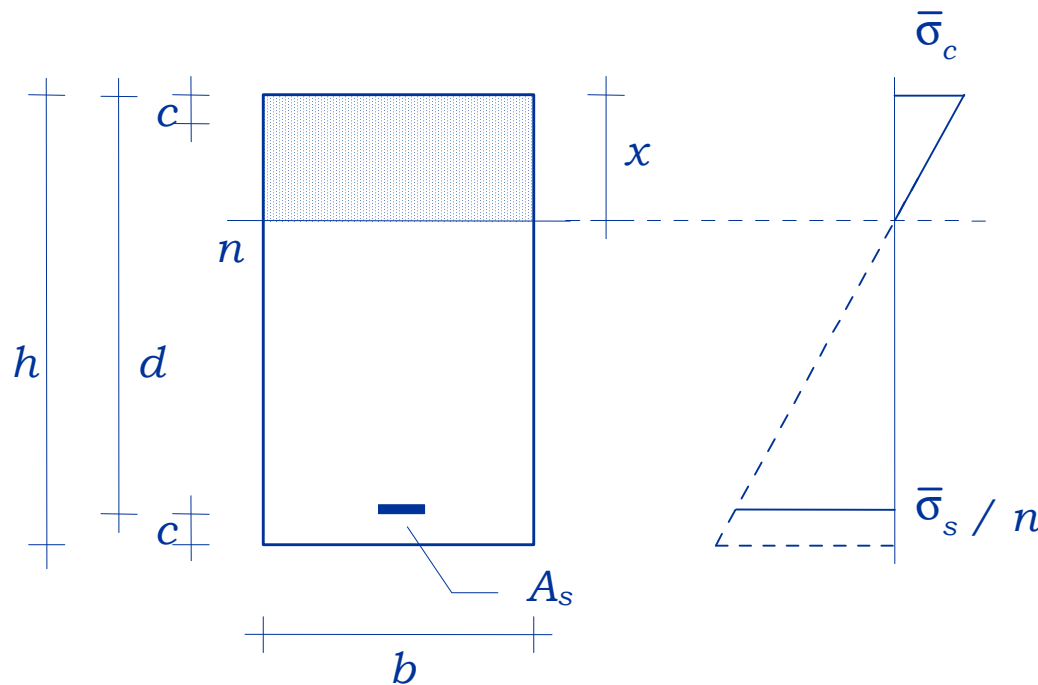
Progetto - tensioni ammissibili



2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z \quad M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



Si ottiene:

$$M = \frac{b d^2}{r^2}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:

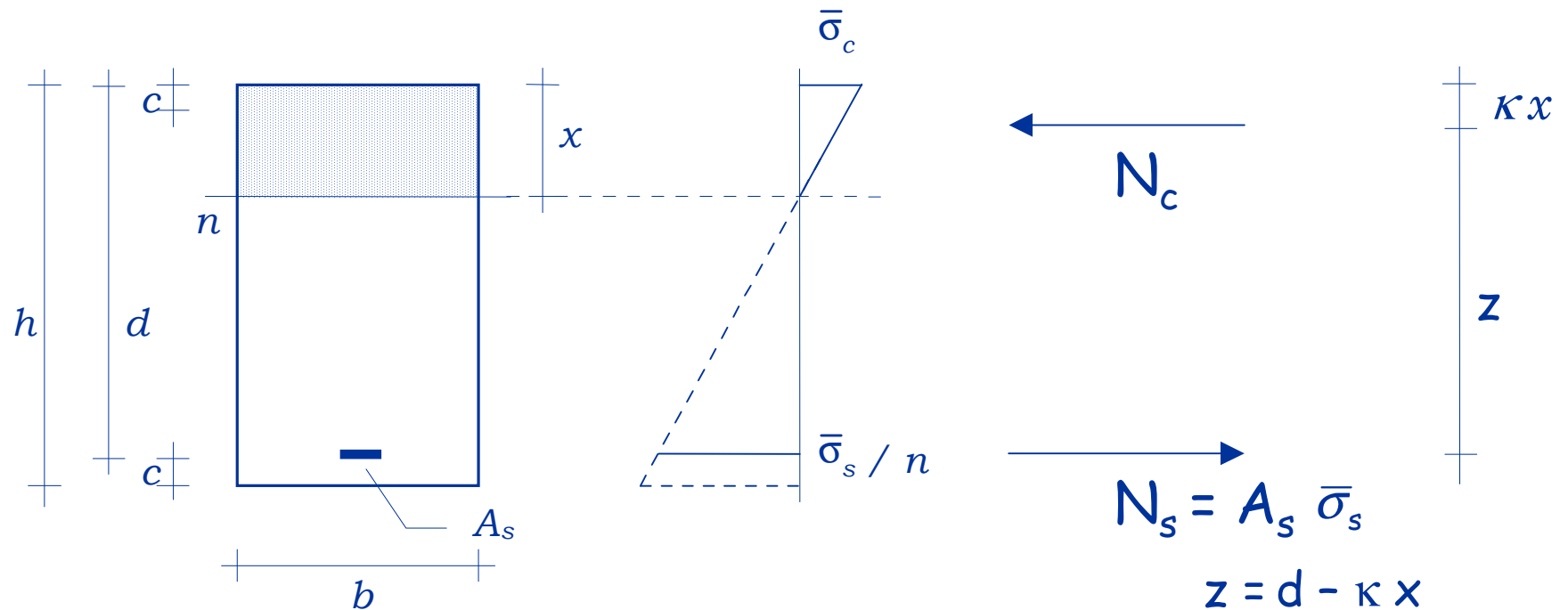
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) \bar{\sigma}_c}}$$

2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z$$

$$M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

Progetto - tensioni ammissibili



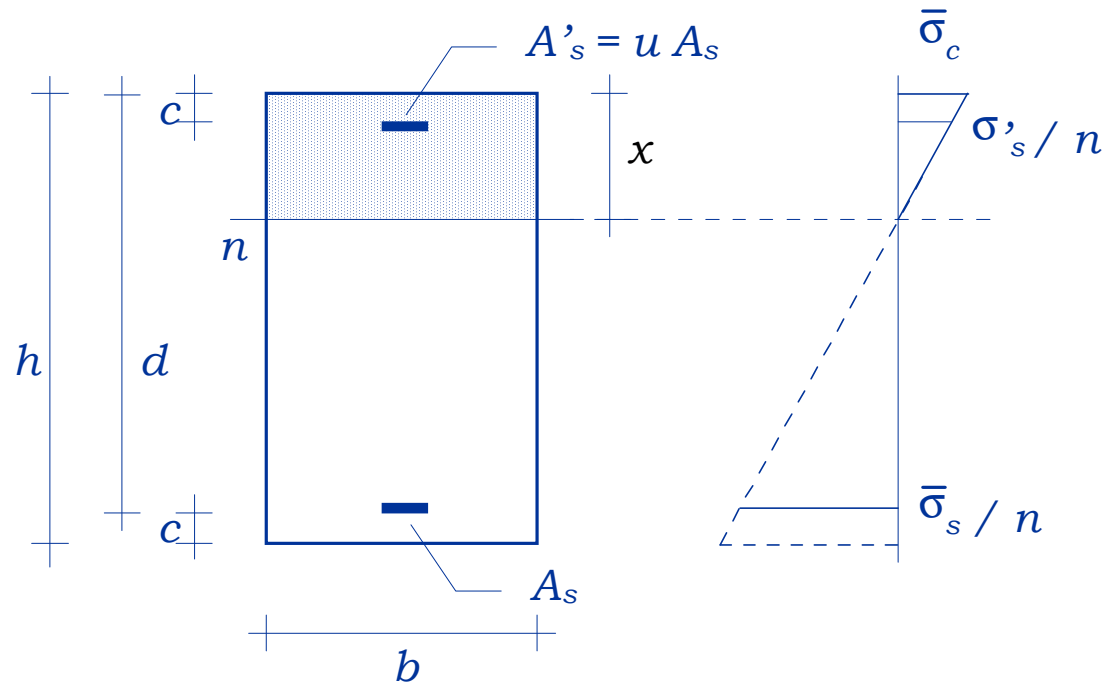
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione
rispetto alla risultante N_c

$$M = N_s z$$

$$M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Progetto - tensioni ammissibili



$$\frac{x}{d} = \frac{\bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_s / n}$$

$$\frac{\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{x - c}{d - x}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Analogamente per sezione
a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

Progetto - stato limite ultimo

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione - esempio

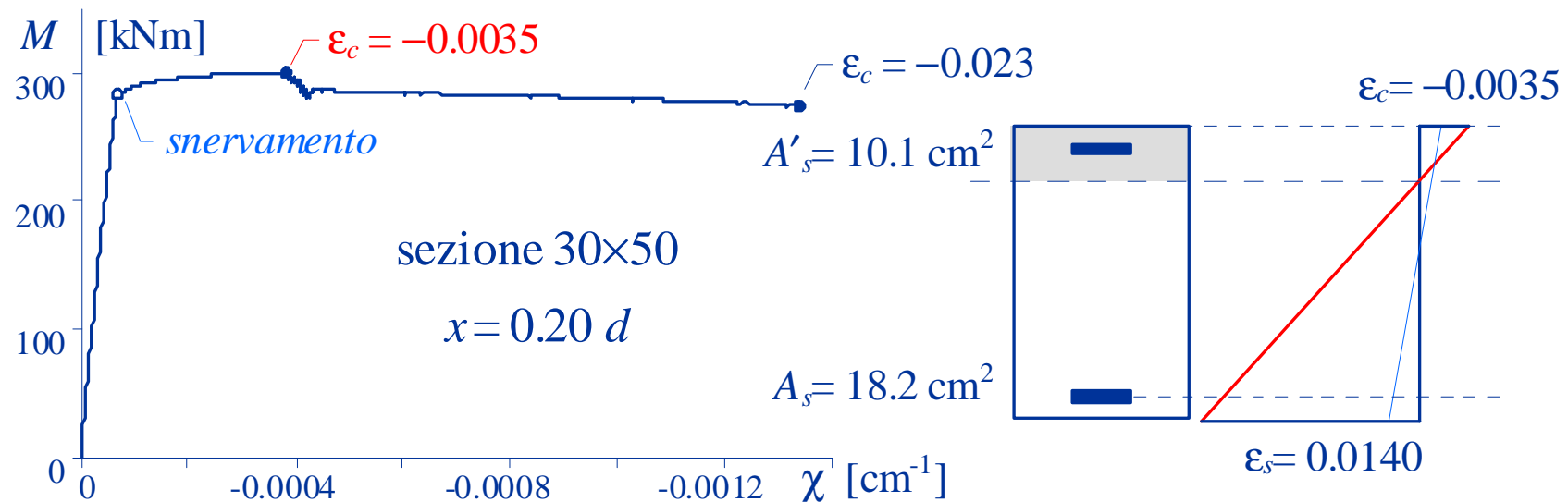
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.20 d$

$\chi_u = -0.00132 \quad \mu \cong 20$

Ottima duttilità



Duttilità della sezione - esempio

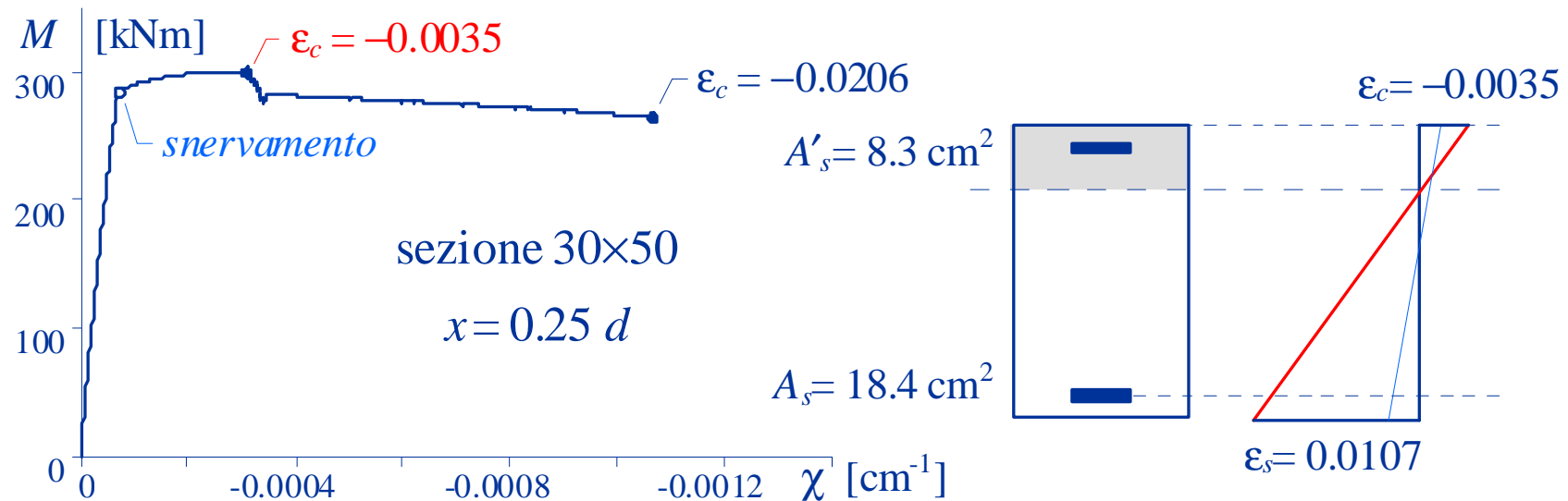
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.25 d$

$\chi_u = -0.00106 \quad \mu \cong 16$

Buona duttilità



Duttilità della sezione - esempio

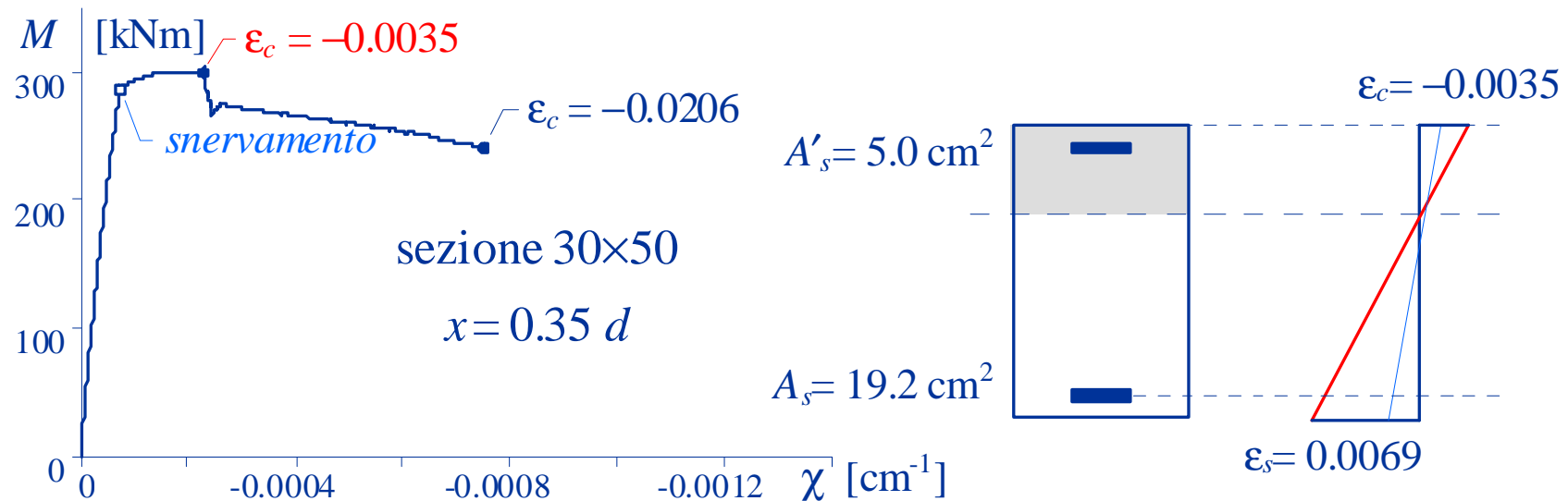
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.35 d$

$\chi_u = -0.00076 \quad \mu \cong 10$

Discreta duttilità



Duttilità della sezione - esempio

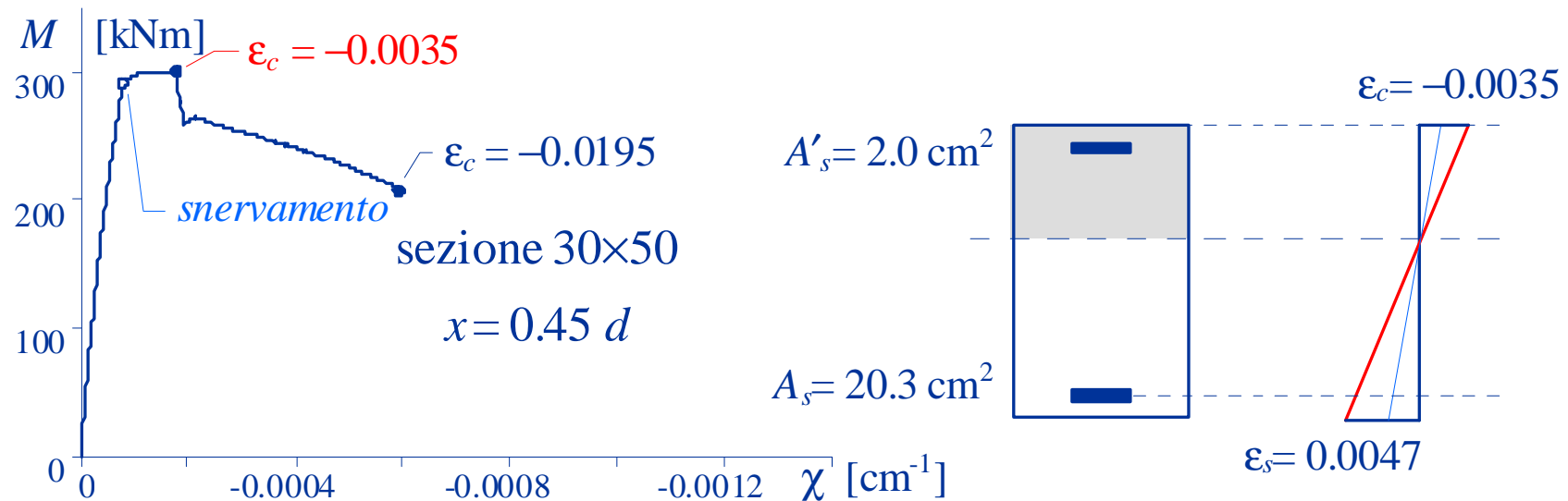
Sezione 30x50

$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$

$x = 0.45 d$

$\chi_u = -0.00059 \quad \mu \cong 7$

Bassa duttilità



Duttilità della sezione

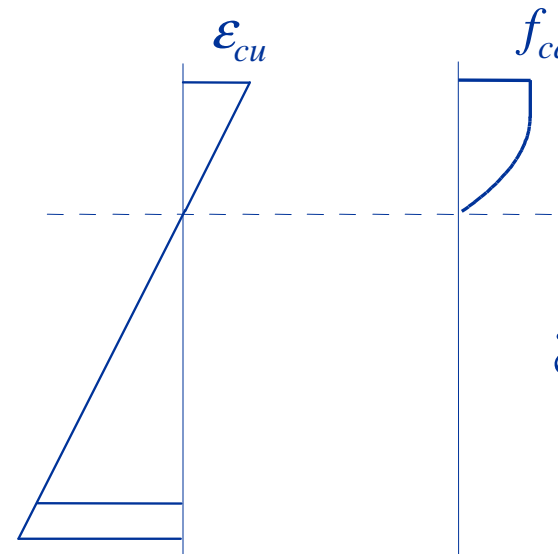
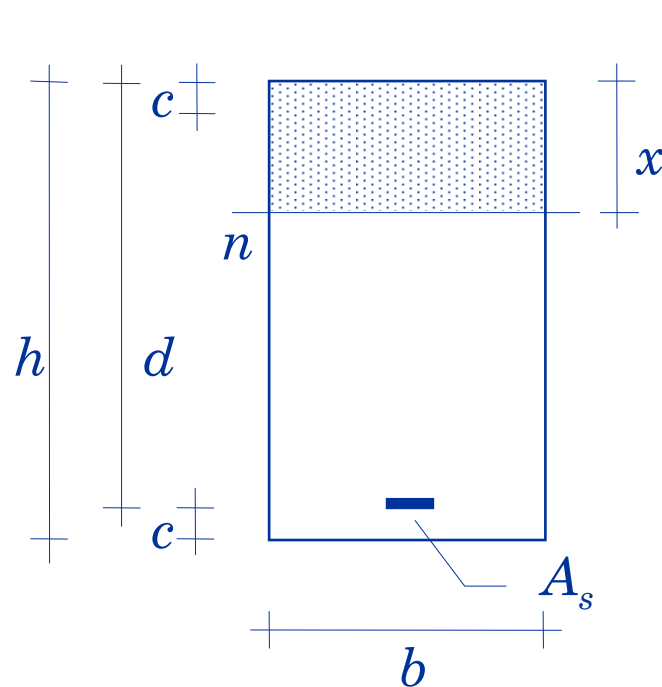
- La duttilità è maggiore se x/d è piccolo e se la deformazione ε_s dell'armatura tesa allo SLU è alta

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

- ad alta duttilità se $\varepsilon_s \geq 0.010$ $x \leq 0.259 d$
- a media duttilità se $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni in c.a. duttili le progetteremo sempre assumendo $\xi = x/d = 0.25$

Progetto - stato limite ultimo



Posso
assumere
 $\xi=0.25$

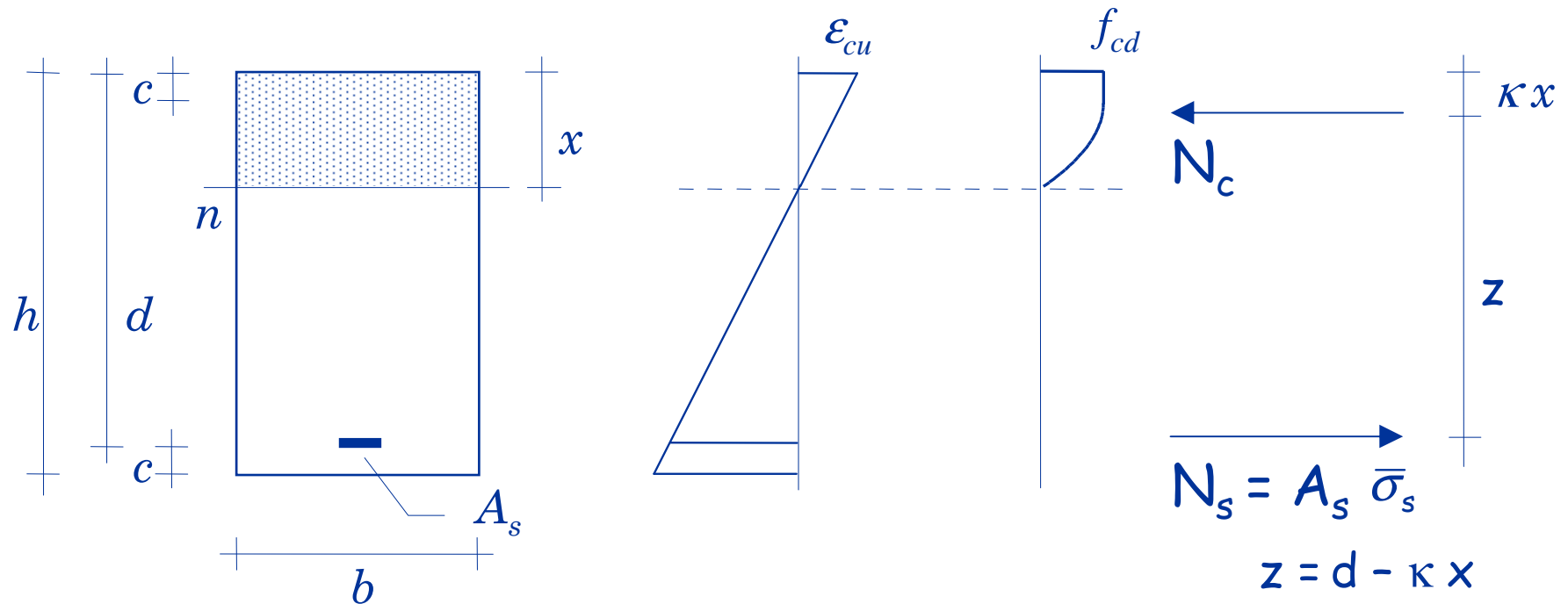
$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_{su}}$$

Il valore scelto per ξ condiziona
la duttilità della sezione

1 - Si assegna il diagramma di deformazioni
che si vuole avere nella sezione

Buona
duttività con
 $\xi=0.25$

Progetto - stato limite ultimo



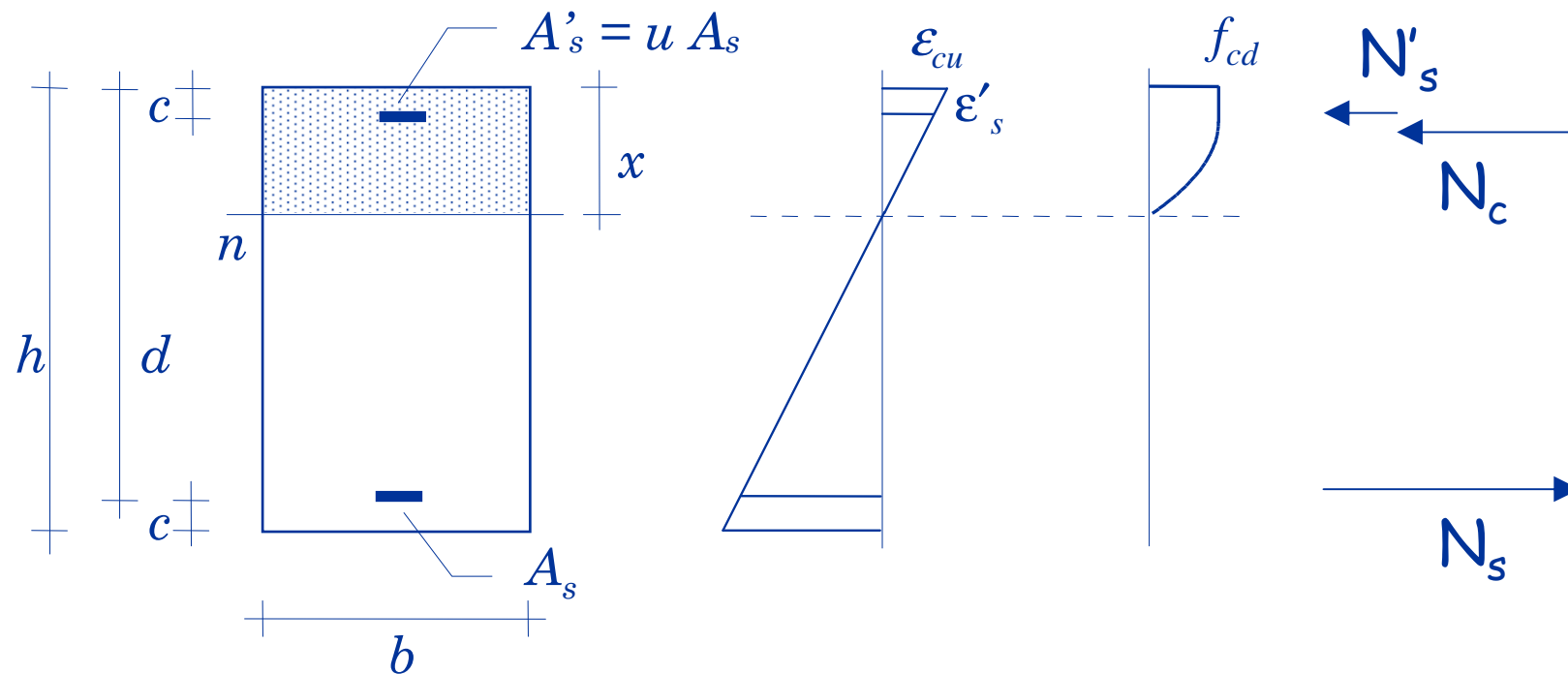
2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

con:

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

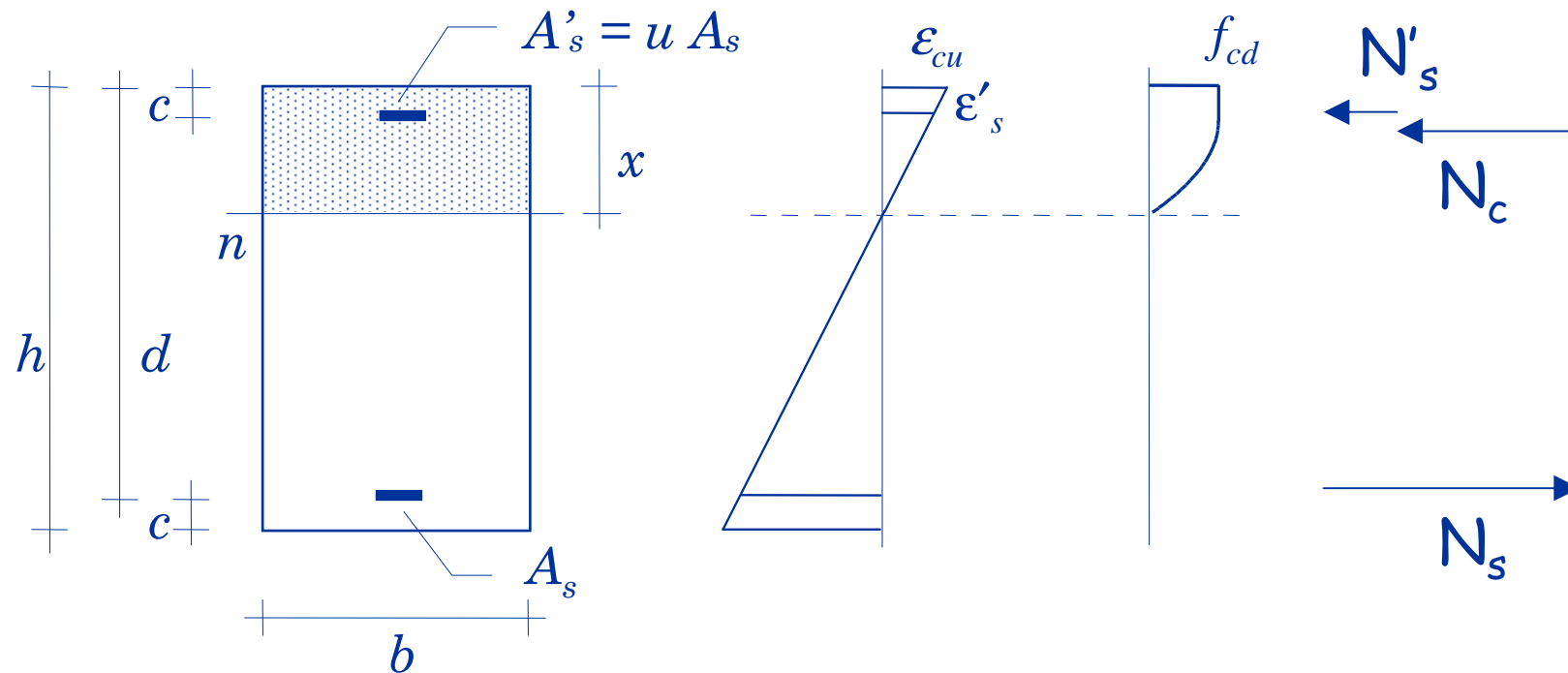
Progetto - stato limite ultimo



ovvero, in presenza di doppia armatura

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto - stato limite ultimo



3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Valori di z/d (C25/30, B450C)

sezioni progettate con $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ ed $\varepsilon_s = 0.010$ ($\xi = 0.259$)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.49$	$s' = 0.42$	$s' = 0.26$
0	0.878		
0.25	0.887	0.881	0.873
0.50	0.896	0.883	0.868
0.75	0.905	0.885	0.863
1.00	0.914	0.888	0.858

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.892		
0.25	0.907	0.894	0.884
0.50	0.921	0.896	0.876

Sempre molto prossimo
a 0.9

Nota: modificare
ponendo $\xi = 0.25$

Quanto vale il coefficiente r ?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per C25/30 e B450C: $r = 0.0256$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30: $r = 0.0197$

Esempio n. 1

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0256 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.50 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.51 \times 255} = 9.41 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0197 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 391} = 9.88 \text{ cm}^2$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Valori di r' (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.42$	$s' = 0.34$	$s' = 0.26$
0	0.0256		
0.25	0.0243	0.0246	0.0249
0.50	0.0229	0.0235	0.0242
0.75	0.0214	0.0223	0.0234
1.00	0.0198	0.0210	0.0226

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota: $\gamma = 0.10$ per travi emergenti
 $\gamma = 0.20$ per travi a spessore

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.2 \div 0.5$)

Le differenze sono significative nel progetto delle travi emergenti e si riducono nel progetto delle travi a spessore

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando $u = A'_s/A_s$ è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.13 \% b d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 3 \% b h$$

$$A'_s \leq 3 \% b h$$

Percentuale massima consigliata: 1 ÷ 1.5%

Limiti alle formule di progetto per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha:
$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}} \quad \begin{array}{l} = 0.0169 \\ \text{se } \rho=0.010 \\ = 0.0138 \\ \text{se } \rho=0.015 \end{array}$$

Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s

Suggerisco per r' un limite tra 0.015 e 0.017

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

era 0.50 m per $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

era 0.45 m per $u=0$

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.51 \times 266} = 9.41 \text{ cm}^2 = 0.6\% b h$$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm^2 per $u=0$

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.50 m per $u=0$
0.48 m per $u=0.25$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = \cancel{0.0139} \sqrt{\frac{160}{0.30}} = \cancel{0.31} \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

0.016 0.37

era 0.45 m per $u=0$
0.39 m per $u=0.25$

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili:

$$M = 115 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 266} = 10.44 \text{ cm}^2$$

era 9.41 cm^2 per $u=0$

Stato limite ultimo:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.016 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.37 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm^2 per $u=0$

Progetto allo stato limite ultimo - commento

Si ottengono sezioni trasversali:

- simili a quelle richieste dal metodo delle tensioni ammissibili se non si considera l'armatura compressa
- sensibilmente più basse quando si considera l'armatura compressa

L'armatura tesa:

- é simile a quella richiesta dal metodo delle tensioni ammissibili per sezioni a semplice armatura
- può divenire eccessivamente grande quando si riduce l'altezza della sezioni sfruttando l'effetto positivo dell'armatura compressa

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
 $r' = 0.018$ o 0.017

(corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori
un po' maggiori

$r' = 0.019$ (corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura
dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$ (ma non andare mai al di sotto di questi)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

Nota:

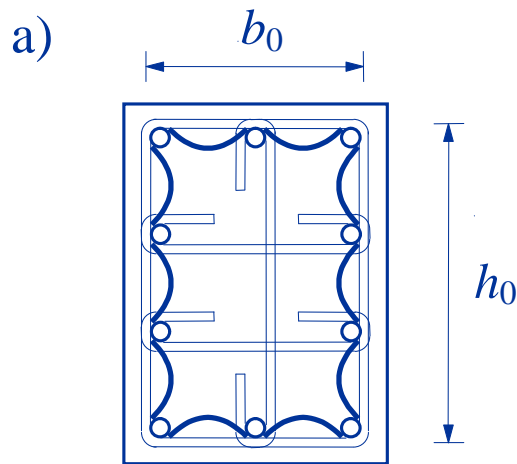
Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna potrebbe essere minore ($0.8 d$)

Duttilità

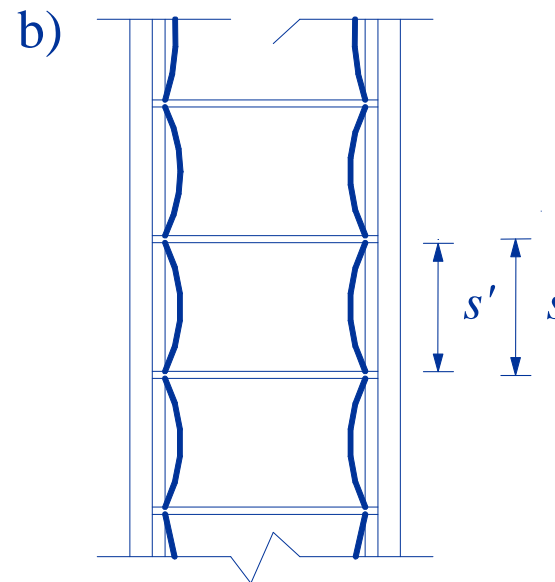
Modello per i materiali calcestruzzo

Problemi:

- Distinzione tra ricoprimento e nucleo confinato
- Efficacia del confinamento



$$\omega_{st} = \frac{\sum A_{st} l_{st}}{b_0 h_0 s} \frac{f_y}{f_c}$$



$$\sigma_{c,trasv} = 0.5 \alpha \omega_{st} f_c$$

Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

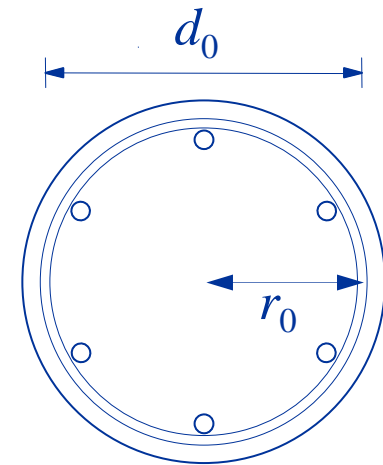
Staffe in una sezione circolare

Quando il calcestruzzo compresso si dilata le staffe danno una compressione trasversale

$$\sigma_{c,transv} = 0.5 \omega_{st} f_c$$

con

$$\omega_{st} = \frac{2 A_{st} f_y}{s r_0 f_c}$$



Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

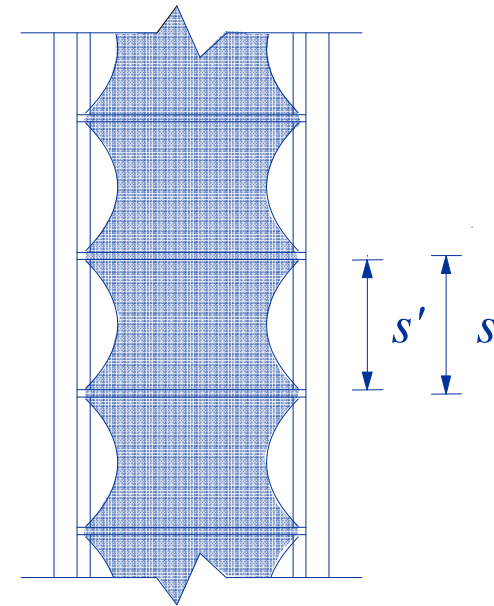
Staffe in una sezione circolare Efficacia del confinamento

Allontanandosi dalla staffa, la zona confinata si riduce

Si considera un coefficiente di efficacia pari al rapporto tra volume effettivamente confinato e volume idealmente racchiuso dalle staffe

$$\alpha_s = \left(1 - \frac{s'}{3 d_0}\right)^2$$

quindi $\sigma_{c,trasv} = 0.5 \alpha_s \omega_{st} f_c$



Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

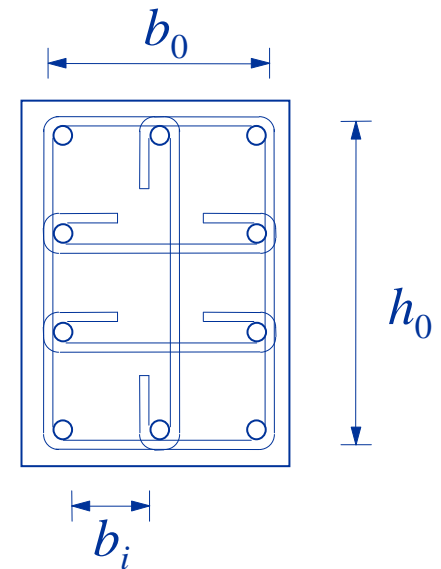
Staffe in una sezione rettangolare

Quando il calcestruzzo compresso si dilata le staffe danno una compressione trasversale

$$\sigma_{c,transv} = 0.5 \omega_{st} f_c$$

con

$$\omega_{st} = \frac{\sum A_{st} l_{st} \frac{f_y}{f_c}}{b_0 h_0 s}$$



Calcestruzzo

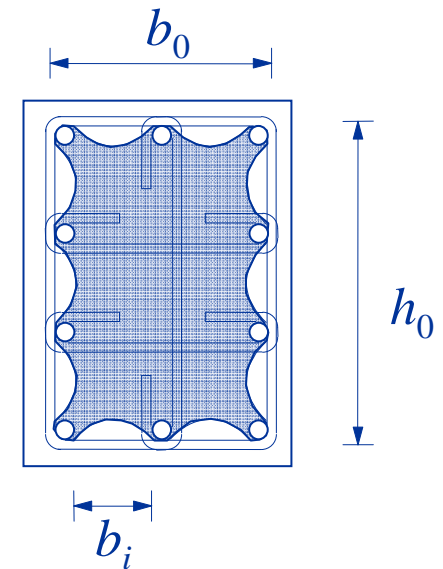
confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una sezione rettangolare Efficacia del confinamento

Staffe e tirantini sono meno efficaci quando ci si allontana dai punti ben bloccati

Si considera un coefficiente di efficacia

$$\alpha_n = 1 - \sum_n \frac{b_i^2}{6 b_0 h_0}$$



Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

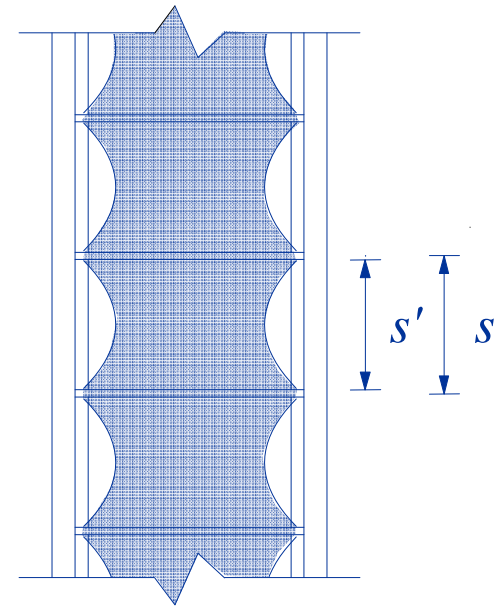
Staffe in una sezione rettangolare Efficacia del confinamento

Anche in senso longitudinale c'è una riduzione dell'efficacia del confinamento

$$\alpha_s = \left(1 - \frac{s'}{3b_0}\right) \left(1 - \frac{s'}{3h_0}\right)$$

quindi $\sigma_{c,trasv} = 0.5 \alpha \omega_{st} f_c$

con $\alpha = \alpha_s \alpha_n$

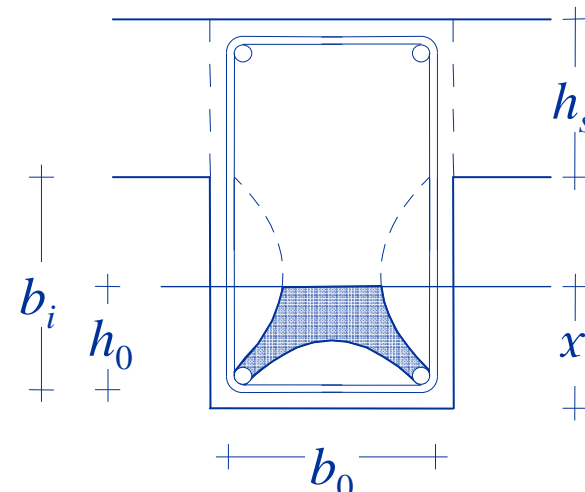
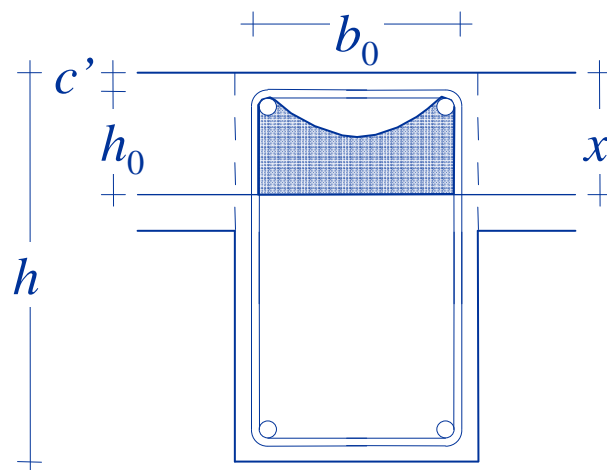


Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una trave a sezione rettangolare Efficacia del confinamento

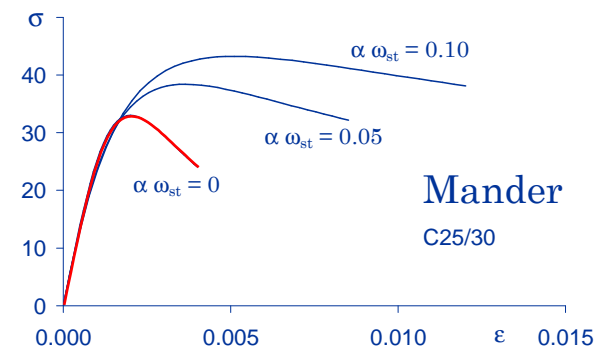
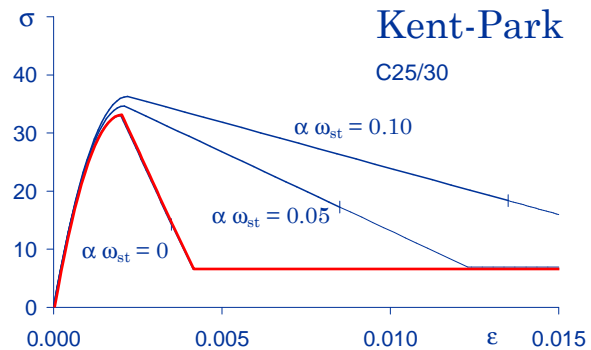
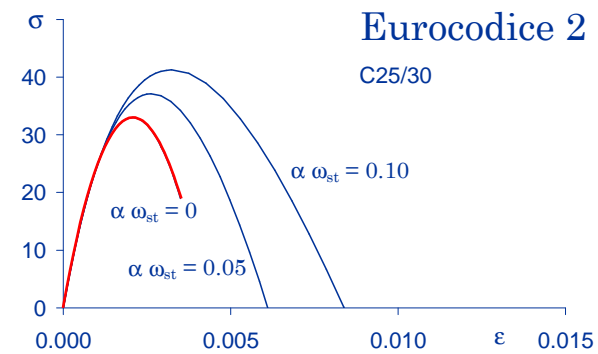
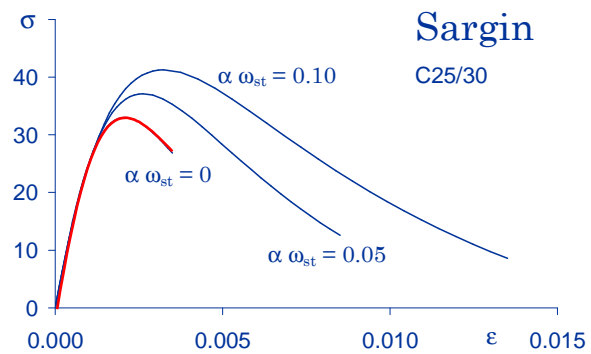
Nel valutare l'efficacia del confinamento bisogna tener conto di qual è la parte compressa e come viene confinata



Modello per i materiali calcestruzzo

Modelli:

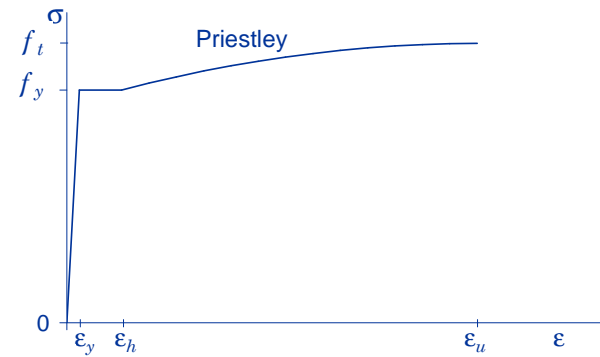
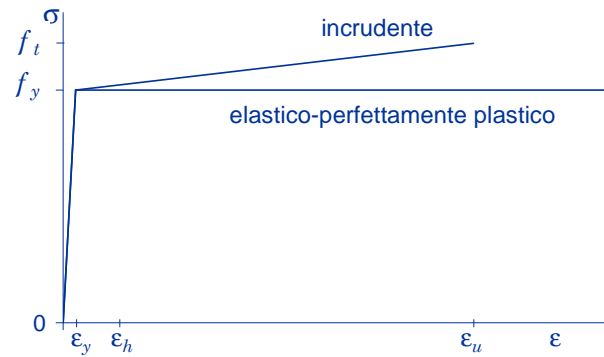
- Esistono numerose proposte, molto diverse



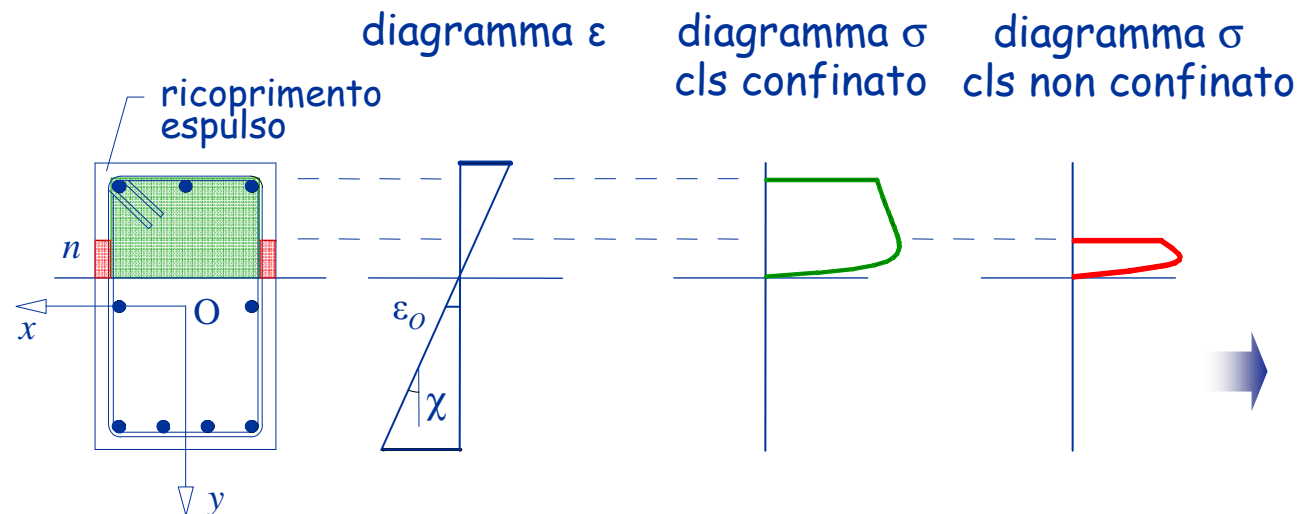
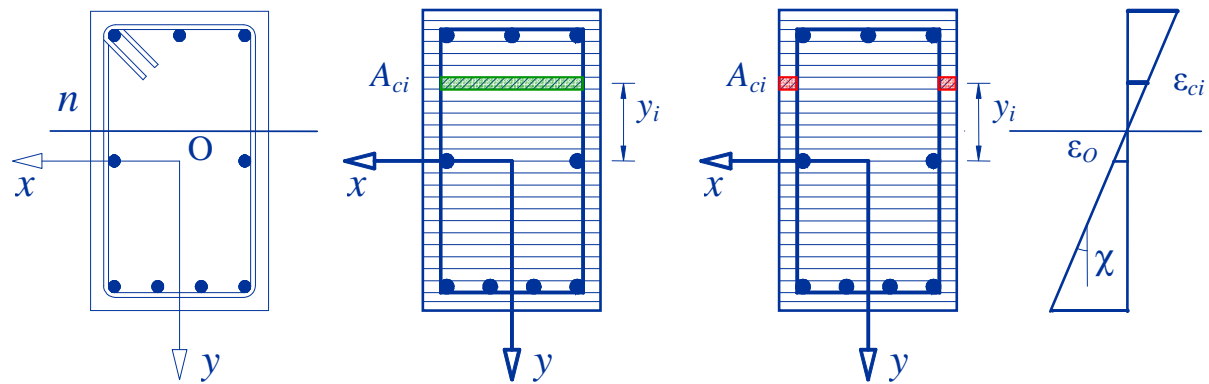
Modello per i materiali acciaio

Modelli:

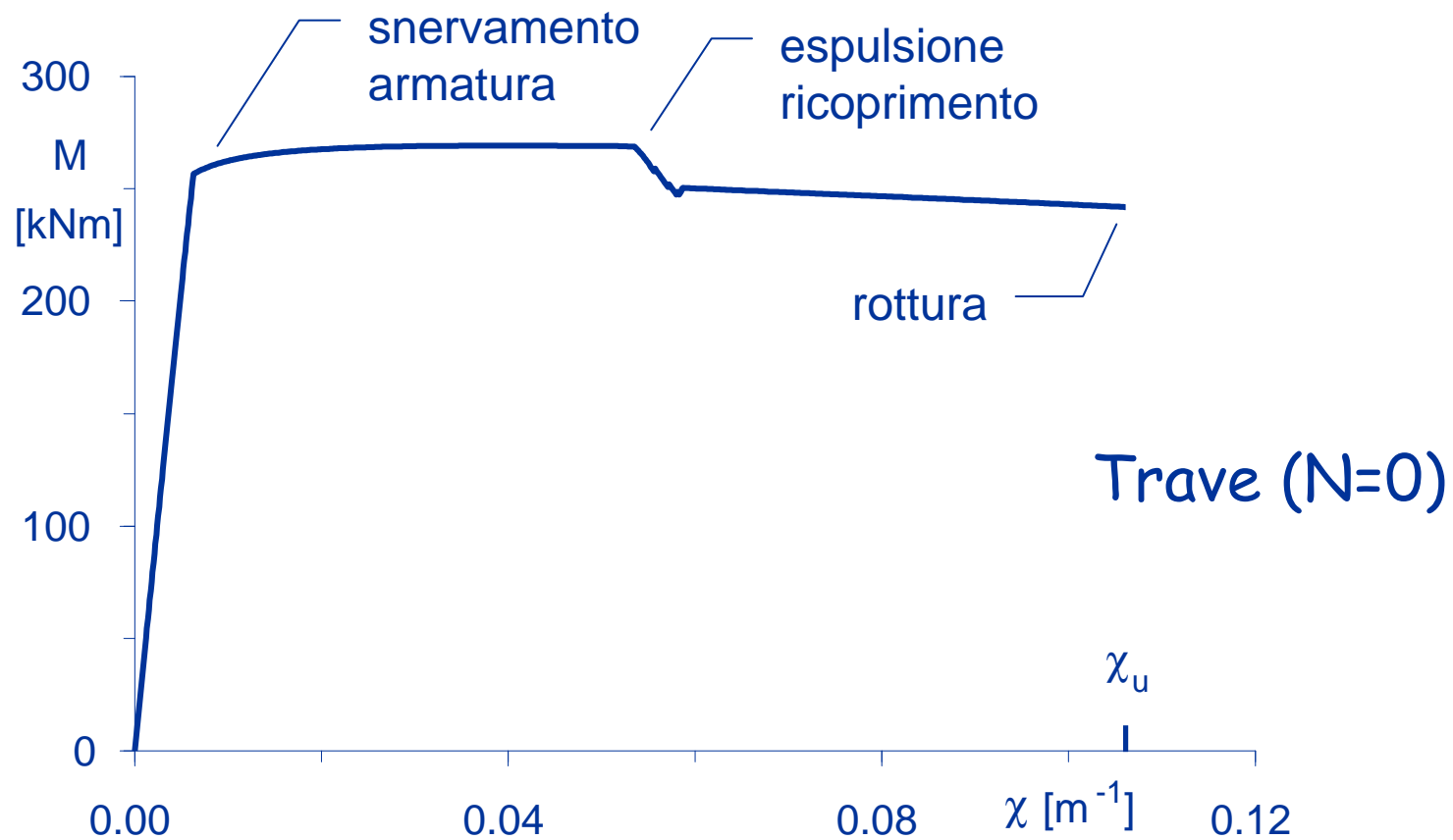
- Esistono alcune proposte, leggermente diverse



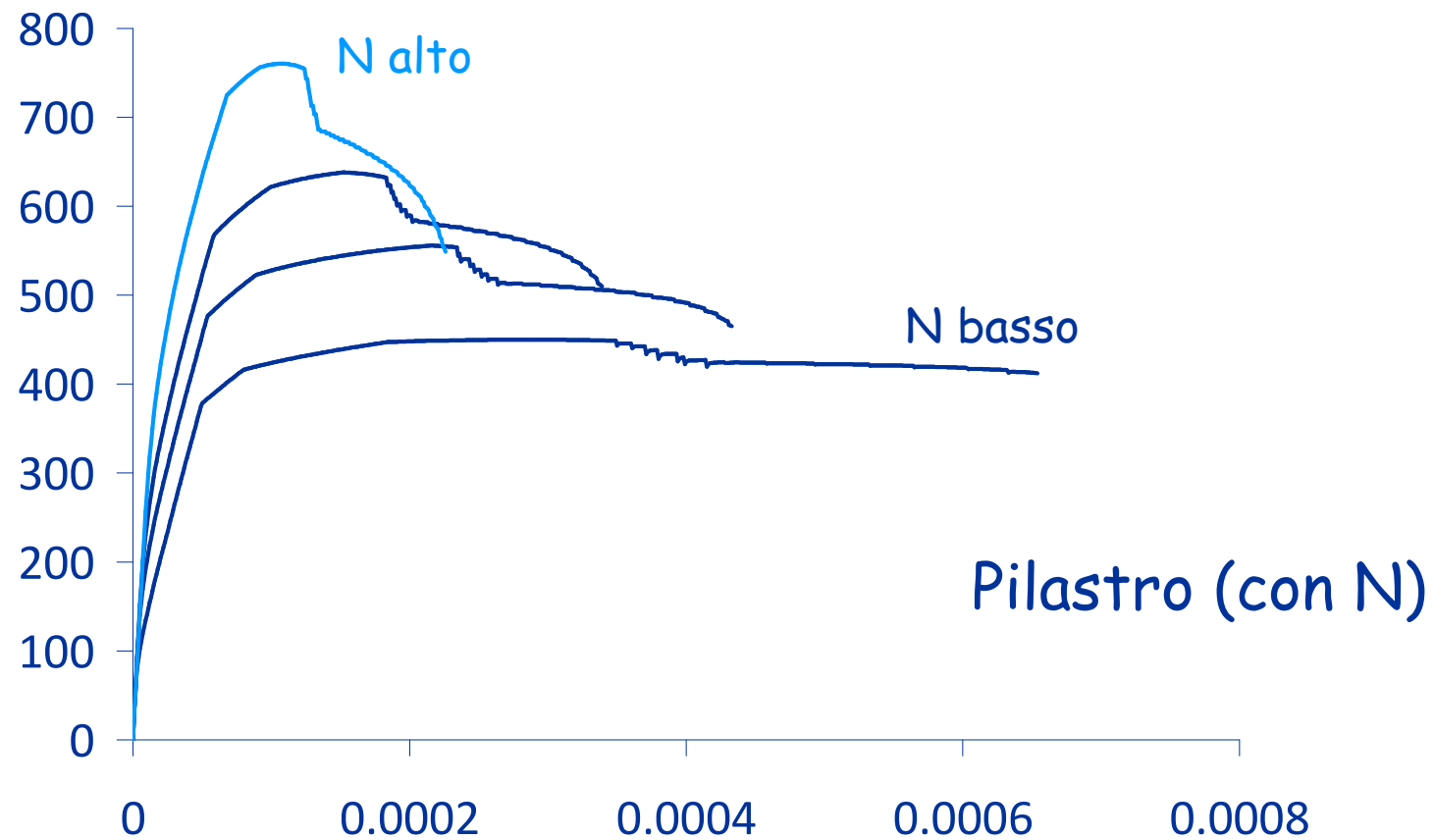
Legame momento-curvatura mediante modello a fibre



Legame momento-curvatura mediante modello a fibre

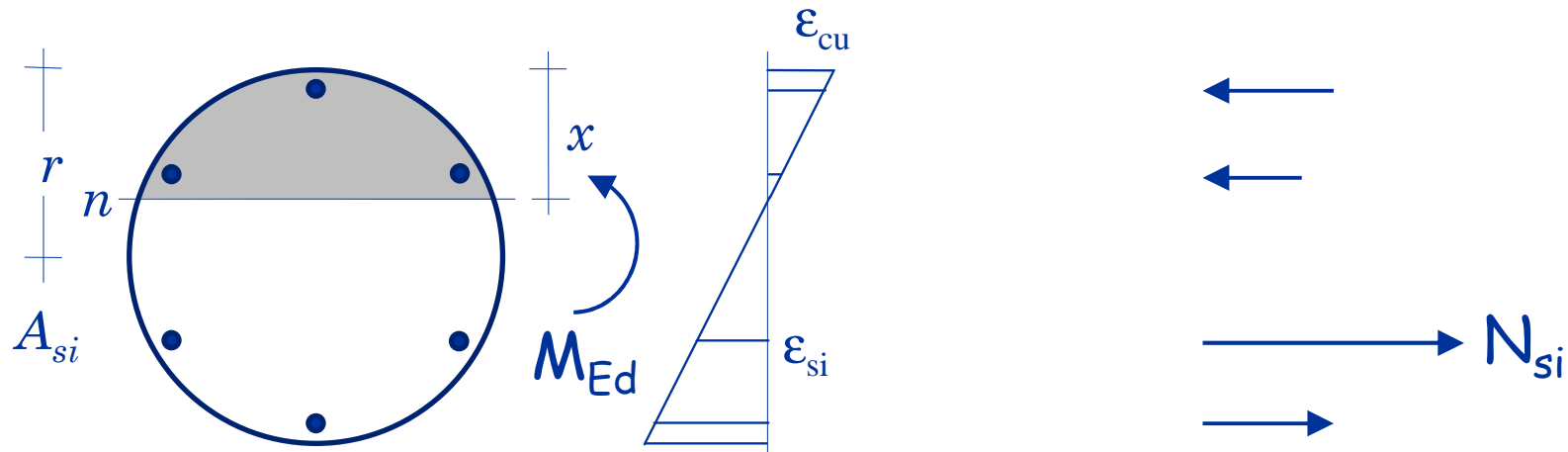


Legame momento-curvatura mediante modello a fibre



Sezioni di forma generica

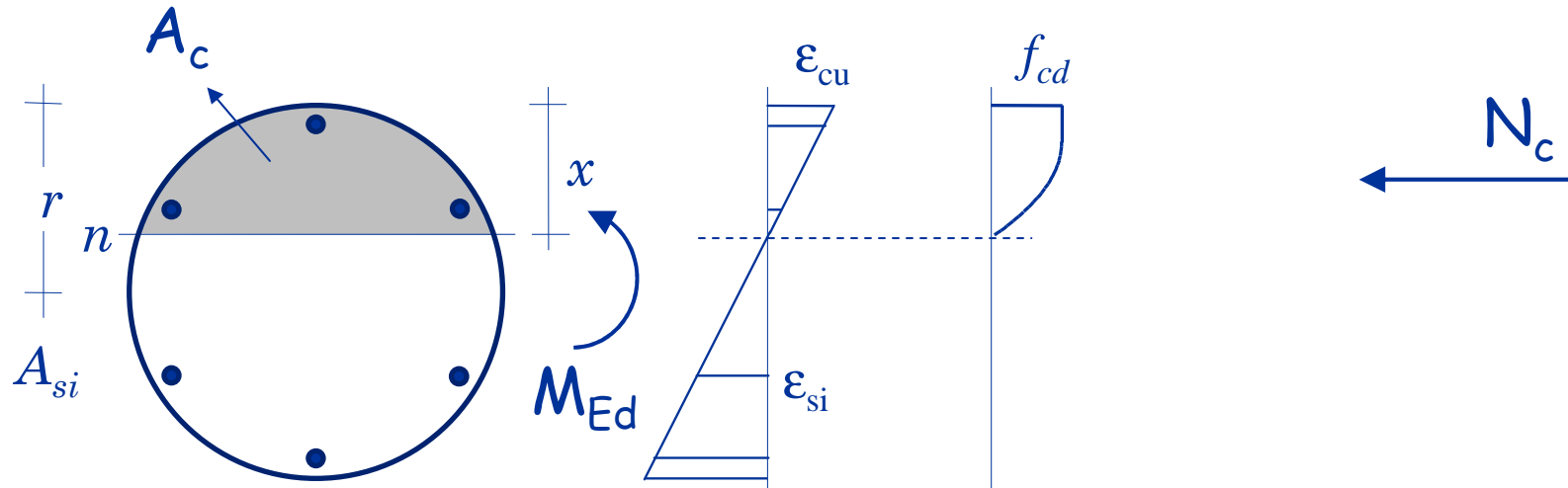
Verifica sezione circolare



Risultanti delle tensioni nelle armature



Verifica sezione circolare



Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

~~$$N_c = \beta A_c f_{cd}$$~~

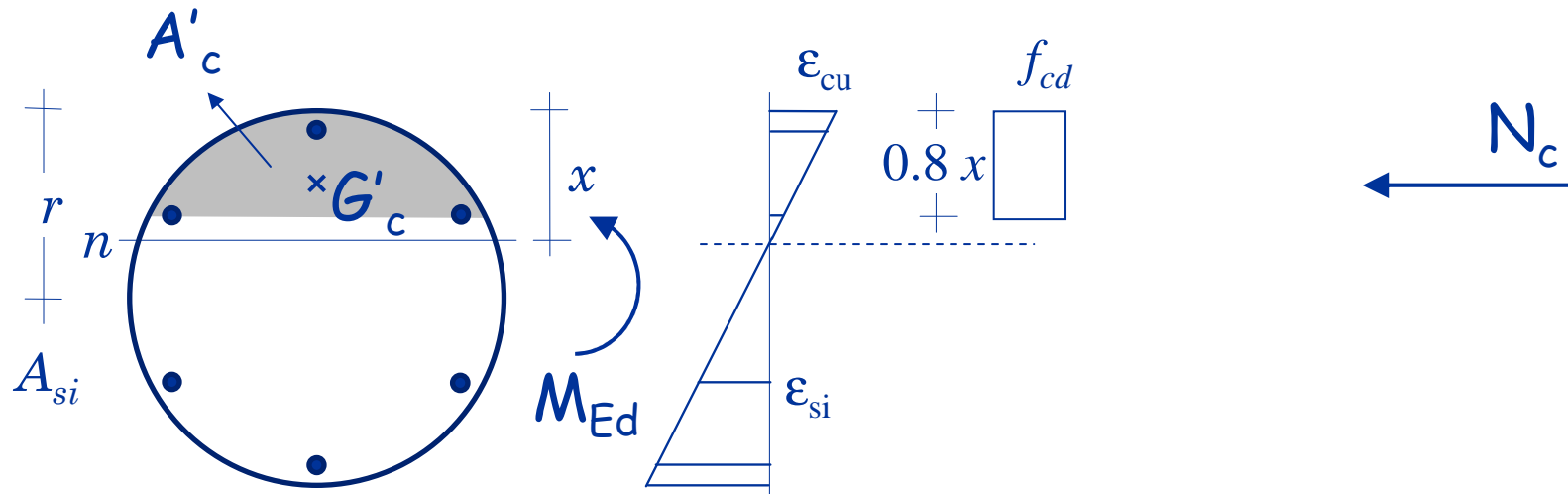
Ma quanto vale β ?

$$N_c = \int_{A_c} \sigma dA$$

A_c = area di calcestruzzo compresso

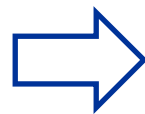
o in alternativa ...

Verifica sezione circolare



Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

~~$$N_c = \int_{A_c} \sigma \, dA$$~~

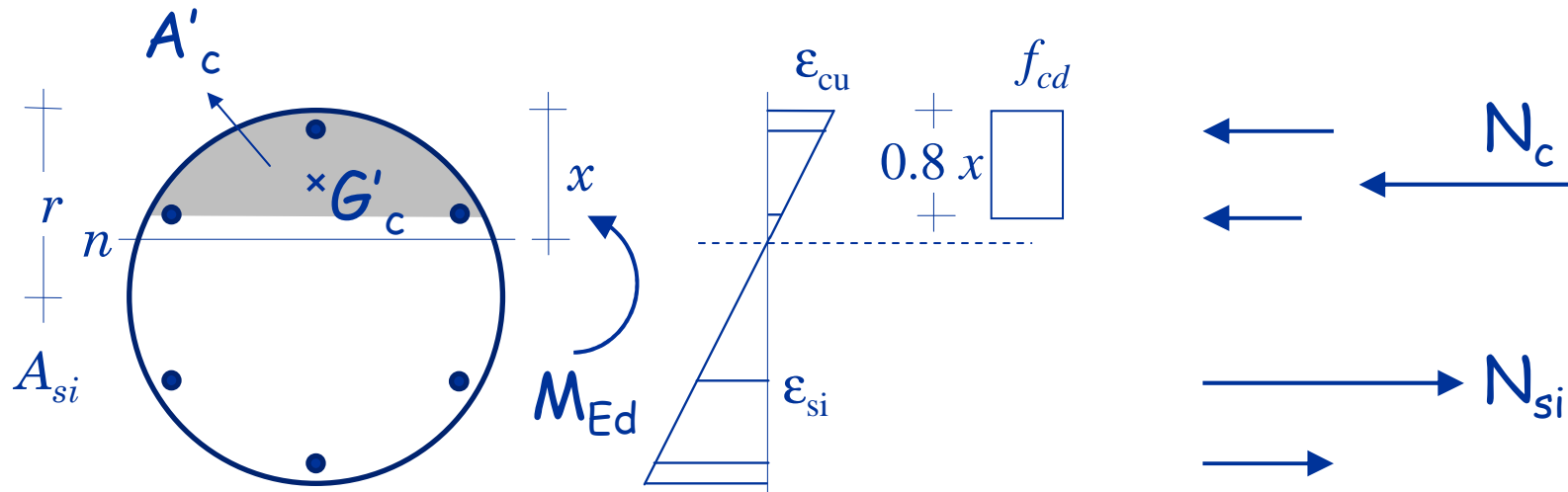


$$N_c = A'_c f_{cd}$$

A'_c = area di calcestruzzo compresso con $\sigma_c \neq 0$

N_c è applicato nel baricentro di A'_c (G'_c)

Verifica sezione circolare

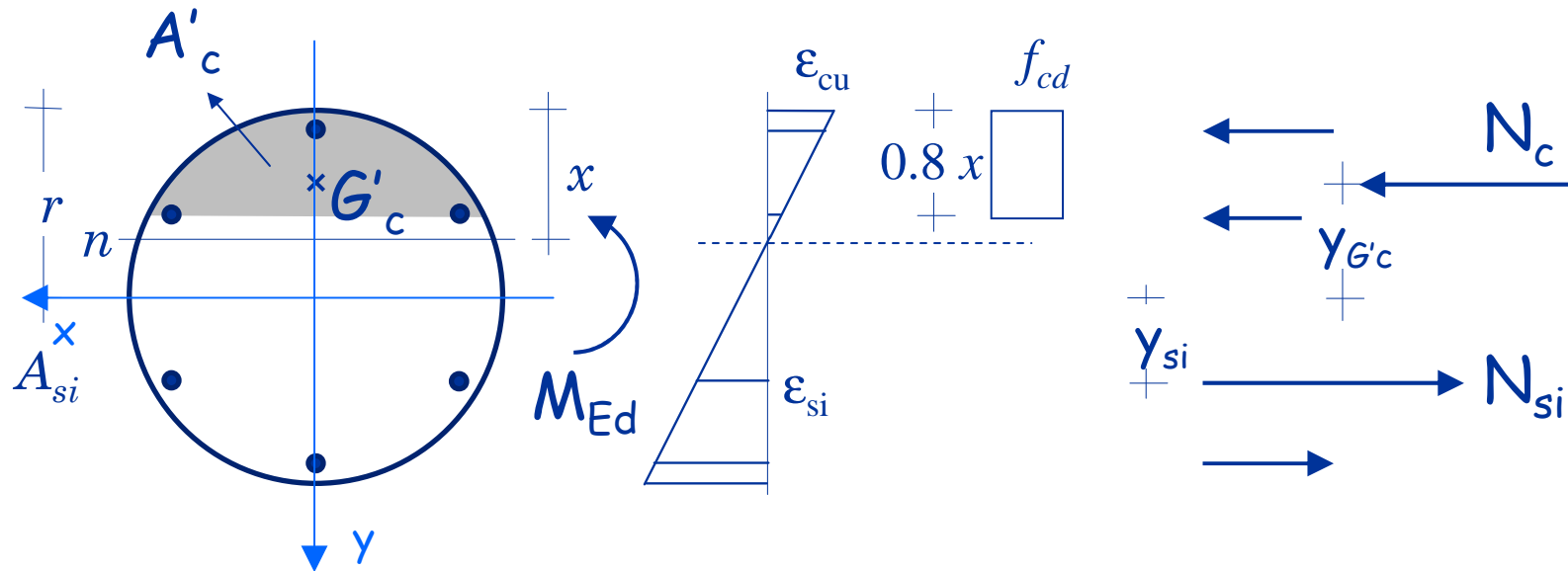


Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \sum N_{si} = 0$$

Posso ricavare x per tentativi

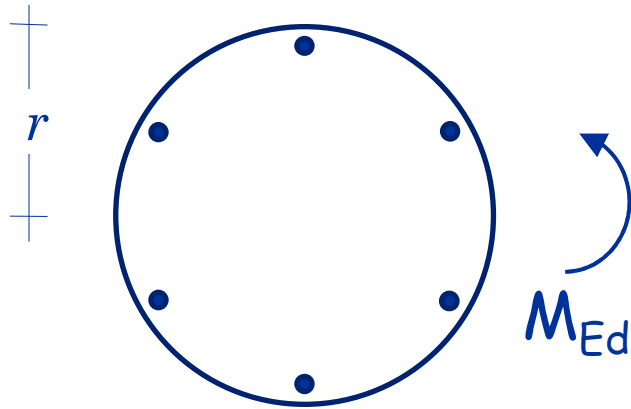
Verifica sezione circolare



Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c y_{G'c} + \sum N_{si} y_{si}$$

Esempio



Dati:

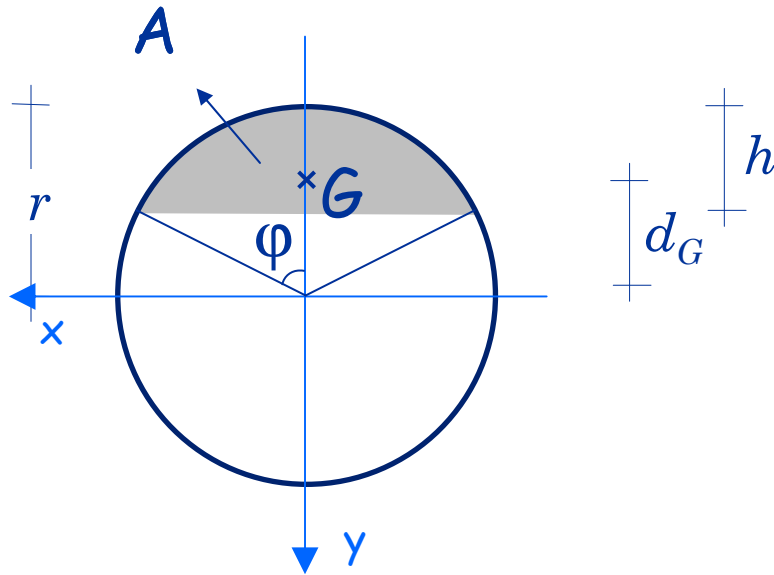
Sezione	$r = 20 \text{ cm}$ $c = 4 \text{ cm}$
Armature	$6\varnothing 14$
Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

$M_{Ed} = 45 \text{ kNm}$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro per tentativi
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Calcolo di N_c

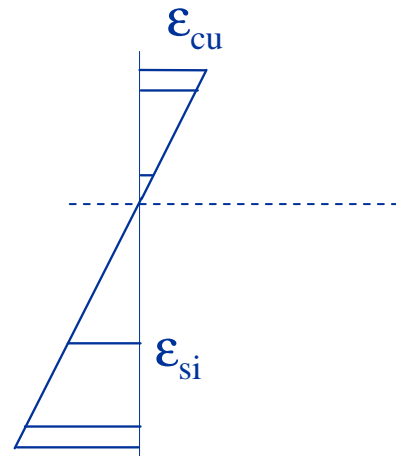
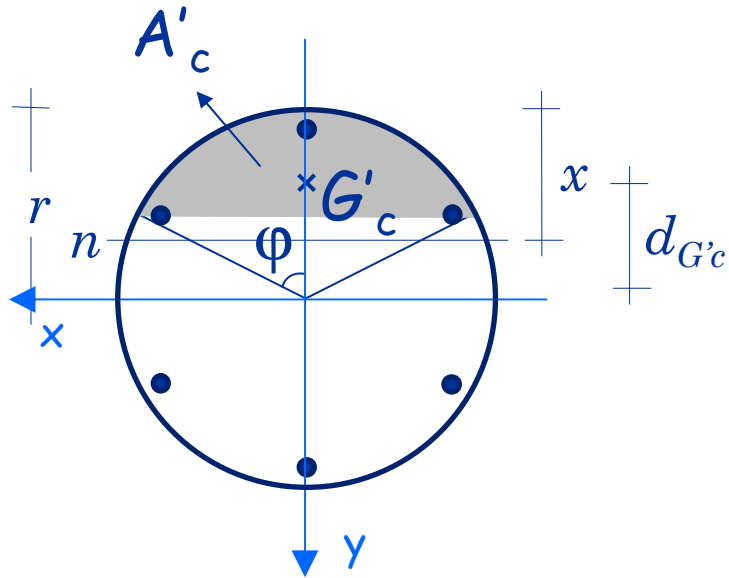


$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

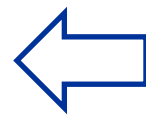
$$A = \frac{1}{2}r^2(2\varphi - \text{sen } 2\varphi)$$

$$d_G = \frac{2}{3} \frac{r^3 \text{sen}^3 2\varphi}{A}$$

Calcolo di N_c



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r - 0.8x}{r}\right)$$



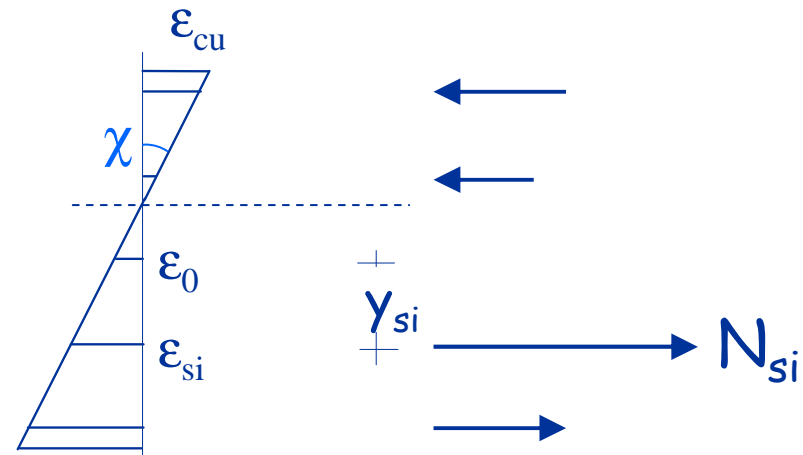
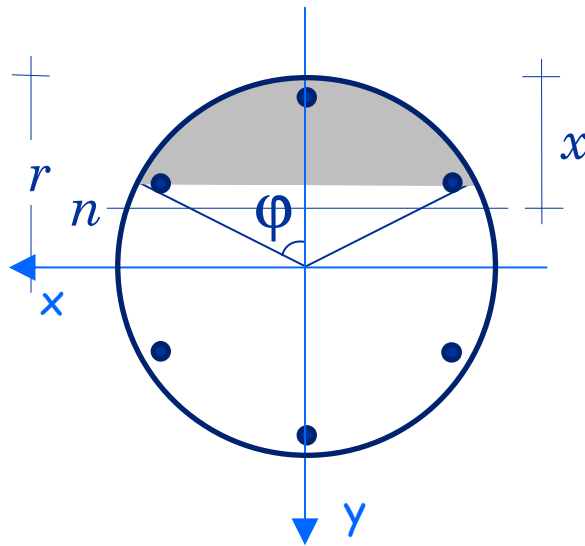
$$h = 0.8x$$

$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$N_c = A'_c f_{cd}$$

$$y_{G'_c} = -d_{G'_c} = -\frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A'_c}$$

Calcolo di N_{si}

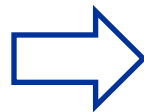


$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

$$\epsilon_0 = -\epsilon_{cu} \left(1 - \frac{r}{x} \right)$$

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{x}$$

$$\epsilon_{si} = \epsilon_0 + \chi y_{si}$$



$$\sigma_{si} = -f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \leq -\epsilon_{yd}$$

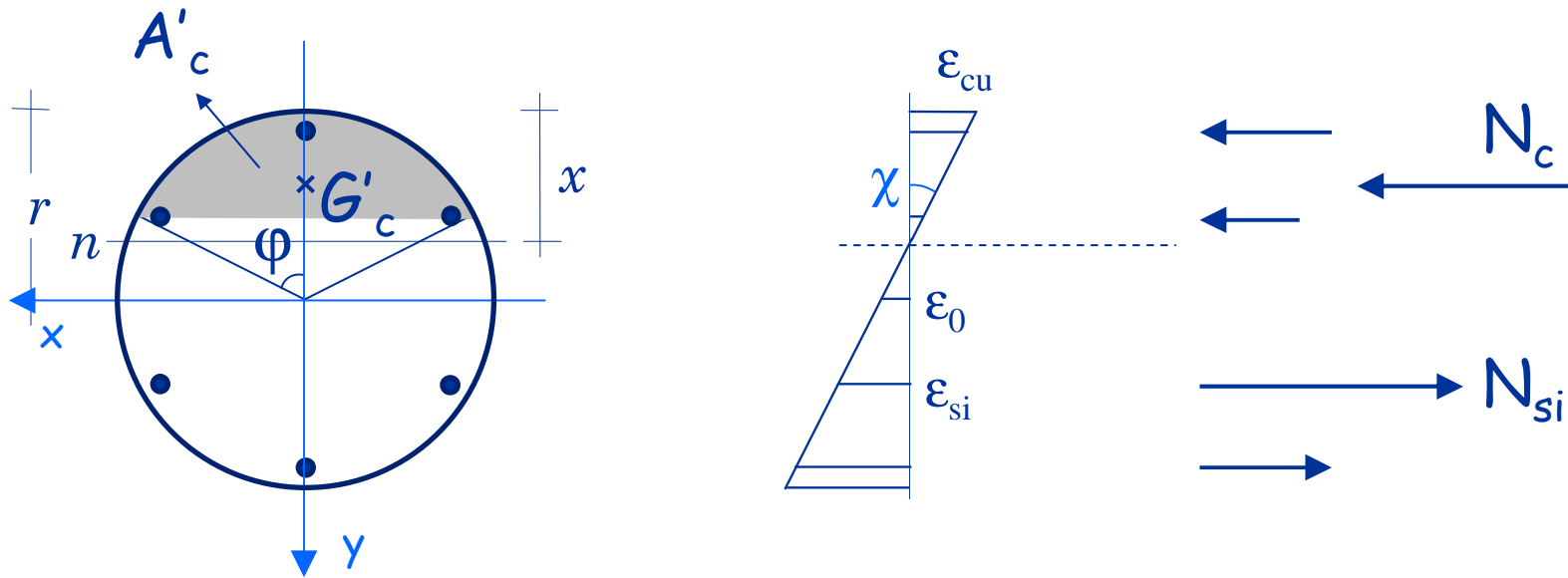
$$\sigma_{si} = E \epsilon_{si}$$

$$-\epsilon_{yd} < \epsilon_{si} < \epsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \geq \epsilon_{yd}$$

Determinazione di x



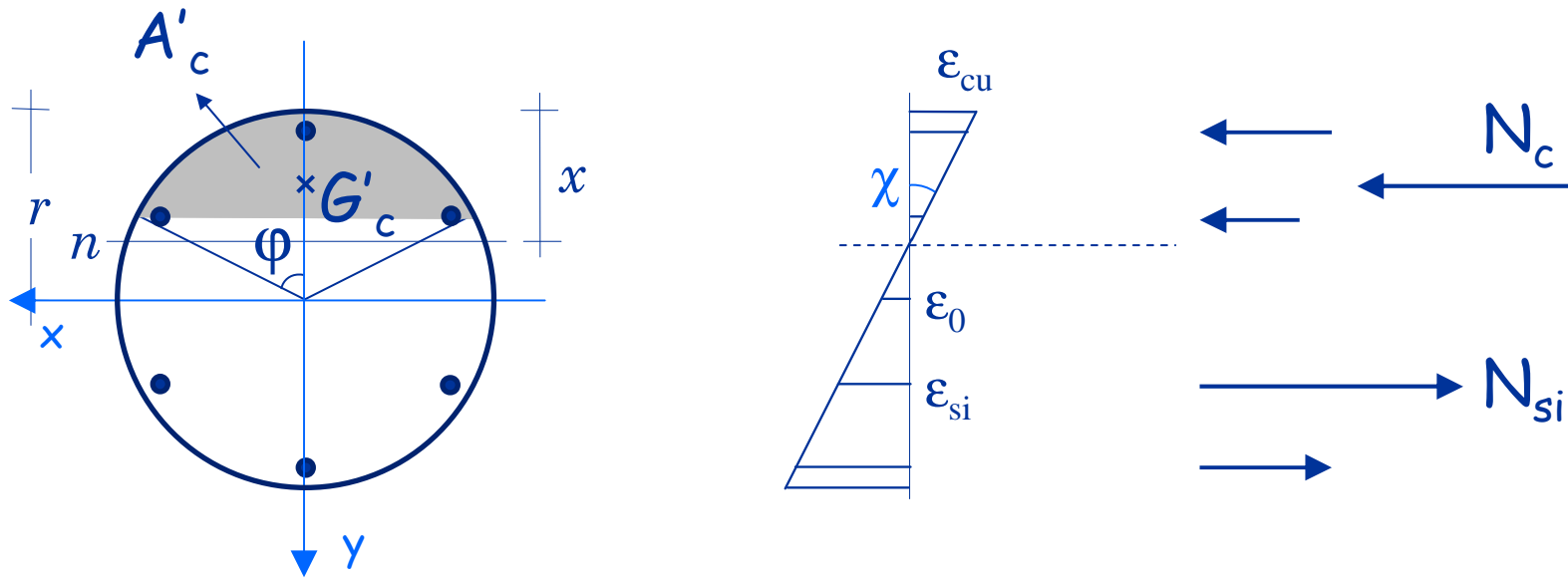
Scelgo $x = 10 \text{ cm}$ (ad esempio)

$$N_c = -254.1 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 45.3 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = -88.3 \text{ kN}$$

Determinazione di x



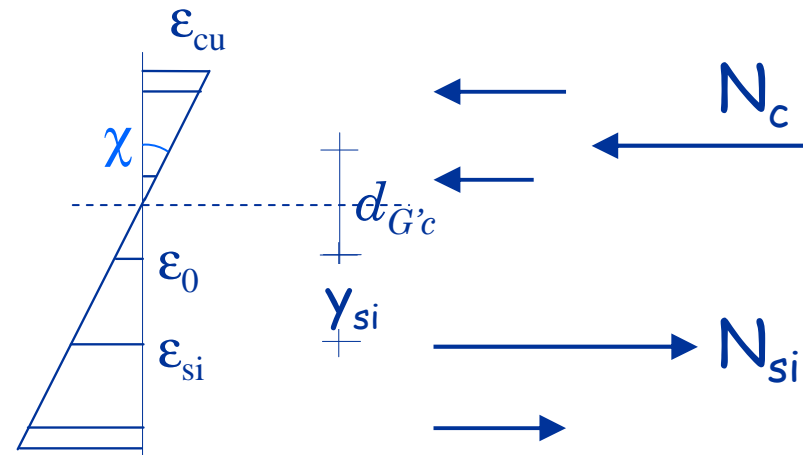
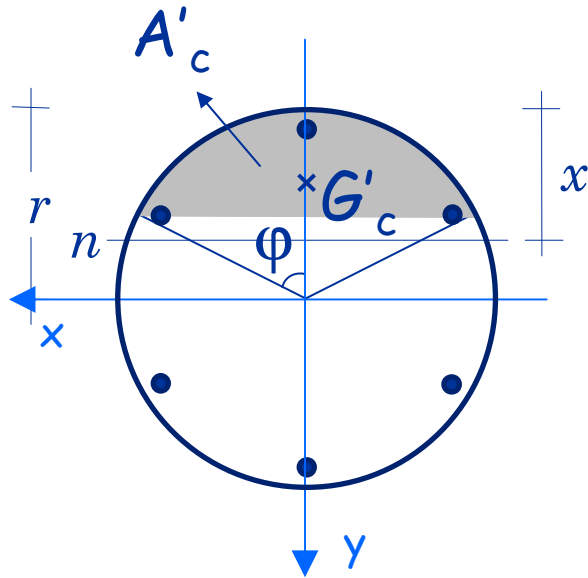
Per tentativi determino $x = 8.68 \text{ cm}$

$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 86.7 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = 0$$

Determinazione di M_{Rd}



$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = 86.7 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = 120.5 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$y_{G'_c} = -15.9 \text{ cm}$$

$$y_{s1} = -16 \text{ cm}$$

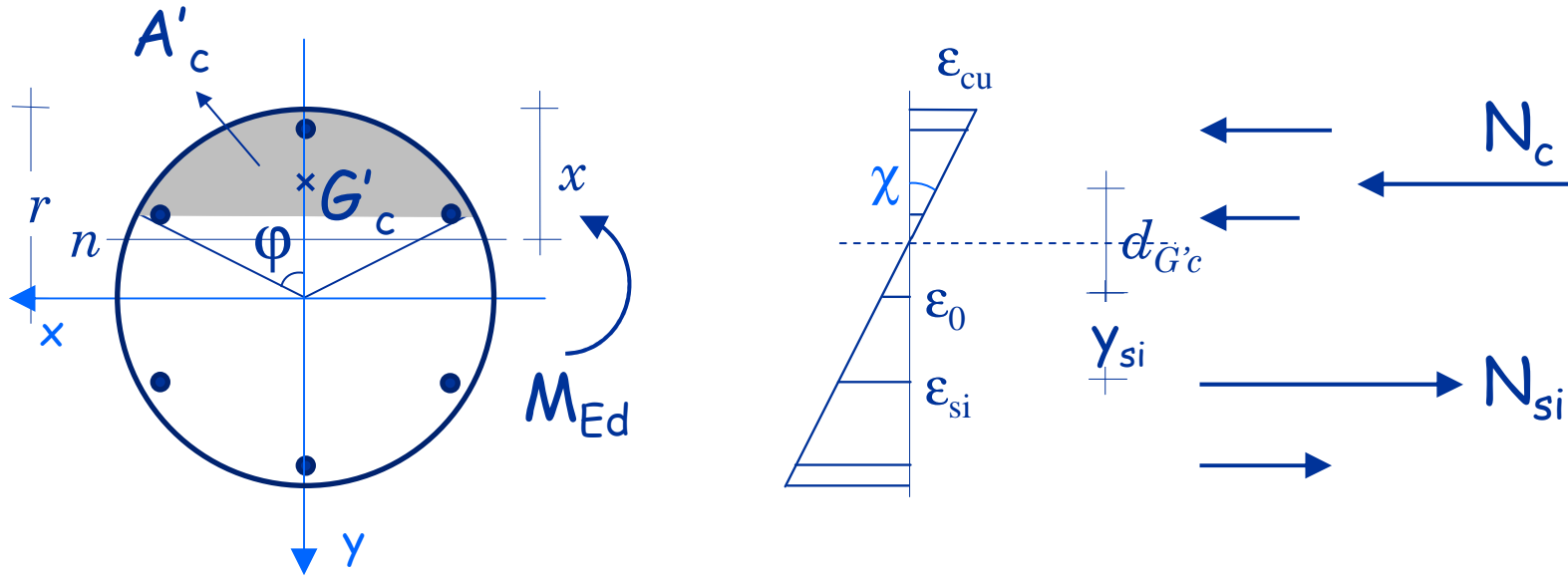
$$y_{s2} = -8 \text{ cm}$$

$$y_{s3} = 8 \text{ cm}$$

$$y_{s4} = 16 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

Verifica



$$M_{Ed} = 45 \text{ kNm} < M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata