

Corso di aggiornamento  
 Progettazione strutturale e  
 Norme Tecniche per le Costruzioni

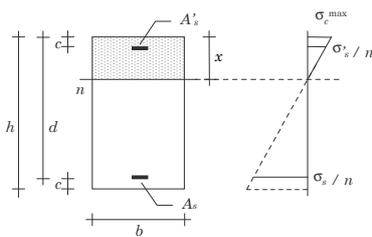
Progetto di elementi strutturali in c.a.

Flessione semplice, duttilità

Spoletto  
 30 novembre - 1 dicembre 2012  
 Aurelio Ghersi

Verifica di sezioni inflesse

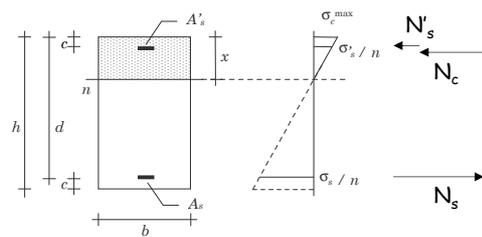
Verifica - tensioni ammissibili



Dati:  
 Geometria della sezione  
 Armature

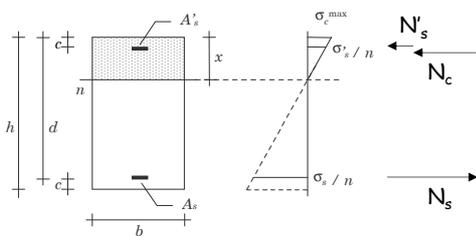
Incognite:  
 Posizione dell'asse neutro  
 Tensioni massime

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:  $N_c + N'_s + N_s = 0$   
 (equilibrio alla traslazione)  
 oppure ...

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro:  $S_n = 0$   
 (l'asse neutro è baricentrico  
 per la sezione omogeneizzata)

Verifica - tensioni ammissibili

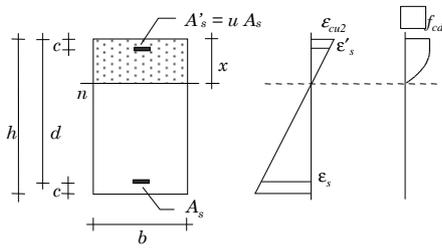
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

E poi:  $\sigma = -\frac{M}{I} y$

con:  $I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$

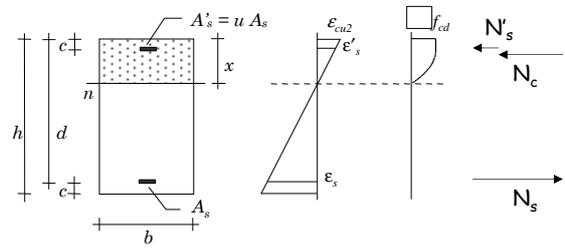
### Verifica - stato limite ultimo



**Dati:**  
Geometria della sezione  
Armature

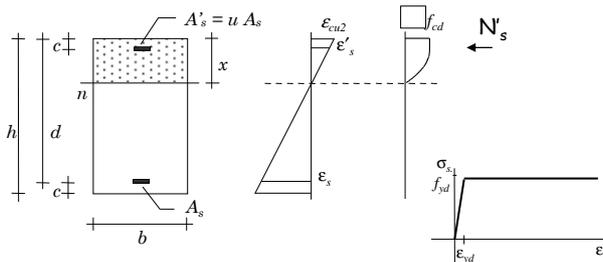
**Incognite:**  
Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente

### Verifica - stato limite ultimo



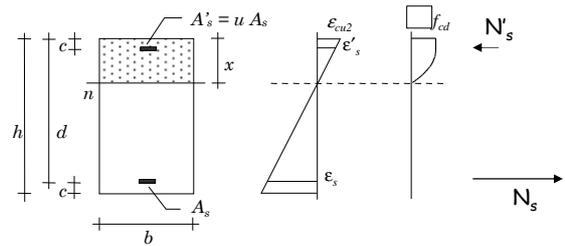
Per trovare l'asse neutro:  $N_c + N'_s + N_s = 0$   
(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:



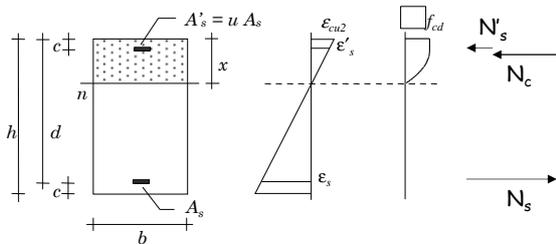
in molti casi  $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$   
se  $\epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre  $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente  $\beta$  tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta \cdot b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

### Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$



$$\beta b \times f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd} = 0$$

### Individuazione dell'asse neutro

Se  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado:

$$\beta b x f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

### Individuazione dell'asse neutro

Se  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado

$$\beta b x f_{cd} + A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

### Individuazione dell'asse neutro

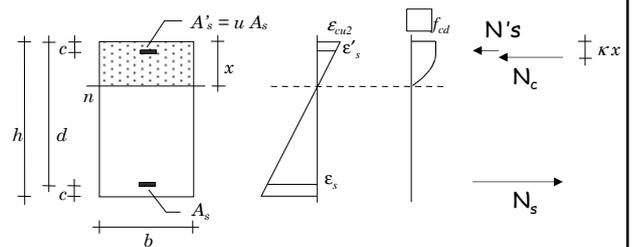
Se  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c}{\beta b f_{cd}} f_{yd}}$$

### Momento resistente



Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

### Esempio n. 1 verifica di sezione rettangolare

Dati:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$   
 Sezione  $30 \times 50 \text{ cm}$   $c=4$  Calcestruzzo C25/30  
 Armature  $A_s = 4\varnothing 20$  Acciaio B450C  
 $A'_s = 2\varnothing 14$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro  
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

### Esempio n. 1 individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.74 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu2} = \frac{10.74 - 4}{10.74} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.19 \times 10^{-3}$$

Poiché  $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$  ( $1.86 \times 10^{-3}$ ) la posizione trovata è esatta

### Esempio n. 1 individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu2} \geq \varepsilon_{yd}$$

Si ottiene la profondità minima dell'asse neutro affinché l'armatura compressa sia snervata:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu2}|}{|\varepsilon_{cu2}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.14 c$$

Per acciaio B450C

Nell'esempio si è ottenuto:

$$x = 10.74 \text{ cm} \geq 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

### Esempio n. 1 calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 3.08 \times 391 \times 10^{-1} = 120.4 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 10.74) + 120.4 \times (0.416 \times 10.74 - 4)] \times 10^{-2}$$

$$M_{Rd} = 204.5 \text{ kNm}$$

Si noti che  
 $\kappa x \leq c$

Poiché  $M_{Ed}$  è minore di  $M_{Rd}$  la sezione è verificata

### Esempio n. 2 verifica di sezione rettangolare

Dati:		$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$
Sezione	30x50 c=4	Calcestruzzo C25/30
cm		Acciaio B450C
Armature	$A_s = 4\phi 20$	
	$A'_s = 3\phi 20$	

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro  
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

### Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 9.42) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 3.56 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 3.56 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

### Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s}{\varepsilon_{yd}} \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s}{\varepsilon_{yd}} \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s c f_{yd}}{\varepsilon_{yd} \beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 6.51 \text{ cm} < 2.14 c = 8.56 \text{ cm}$$

### Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s}{\varepsilon_{yd}} \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s}{\varepsilon_{yd}} \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu2} A'_s c f_{yd}}{\varepsilon_{yd} \beta b f_{cd}}} = 6.51 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu2} \varepsilon_{yd} f_{yd} = 283 \text{ MPa}$$

### Esempio n. 2 calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 9.42 \times 283 \times 10^{-1} = 266.6 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (46 - 0.416 \times 6.51) + 266.6 \times (0.416 \times 6.51 - 4)] \times 10^{-2}$$

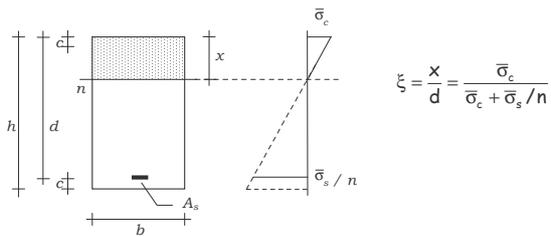
$$M_{Rd} = 209.2 \text{ kNm}$$

Si noti che  
 $\kappa x \cong c$

Poiché  $M_{Ed}$  è minore di  $M_{Rd}$  la sezione è verificata

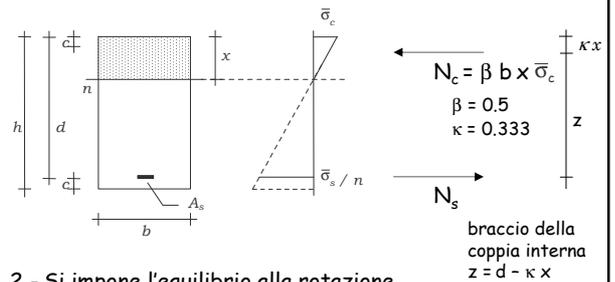
### Progetto di sezioni inflesse

#### Progetto - tensioni ammissibili



1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

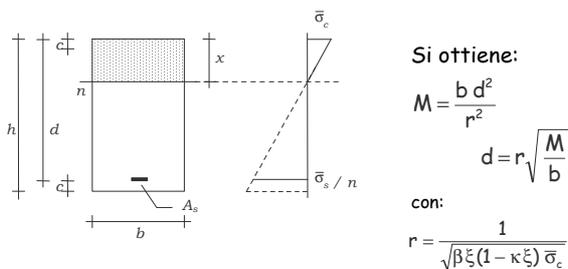
#### Progetto - tensioni ammissibili



2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z \quad M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

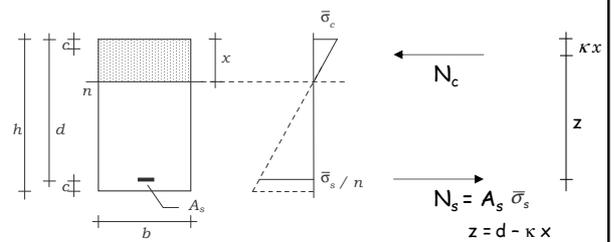
#### Progetto - tensioni ammissibili



2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z \quad M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

#### Progetto - tensioni ammissibili

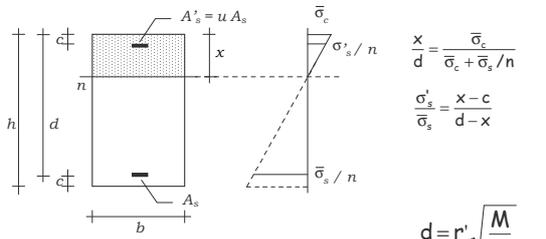


3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante  $N_c$

$$M = N_s z \quad M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

## Progetto - tensioni ammissibili



Analogamente per sezione a doppia armatura

$r'$  dipende da  $u$  (e da  $c/d$ )

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

## Progetto - stato limite ultimo Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

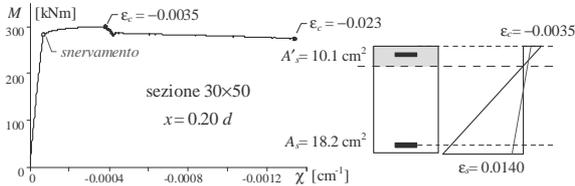
In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

## Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50  $M_{Rd} = 300$  kNm

$x = 0.20 d$   $\chi_u = -0.00132$   $\mu \cong 20$

Ottima duttilità

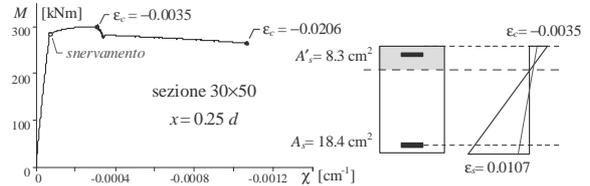


## Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50  $M_{Rd} = 300$  kNm

$x = 0.25 d$   $\chi_u = -0.00106$   $\mu \cong 16$

Buona duttilità

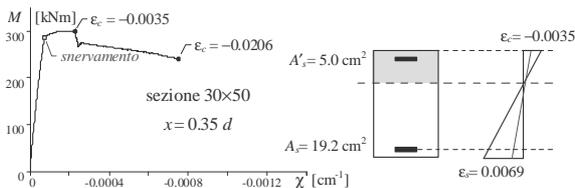


## Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50  $M_{Rd} = 300$  kNm

$x = 0.35 d$   $\chi_u = -0.00076$   $\mu \cong 10$

Discreta duttilità

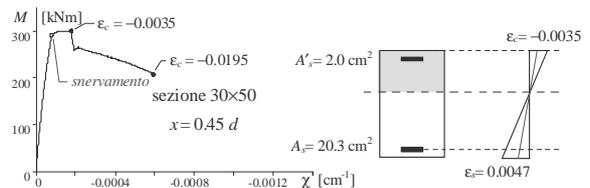


## Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50  $M_{Rd} = 300$  kNm

$x = 0.45 d$   $\chi_u = -0.00059$   $\mu \cong 7$

Bassa duttilità



## Duttività della sezione

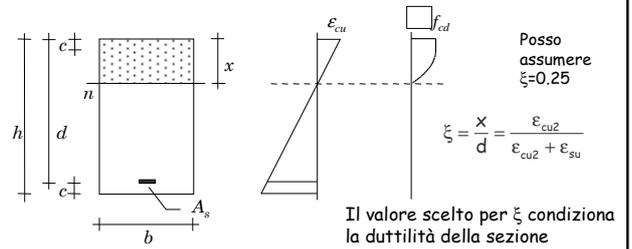
- La duttilità è maggiore se  $x/d$  è piccolo e se la deformazione  $\epsilon_s$  dell'armatura tesa allo SLU è alta

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

- ad alta duttilità se  $\epsilon_s \geq 0.010$   $x \leq 0.259 d$
- a media duttilità se  $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se  $\epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$

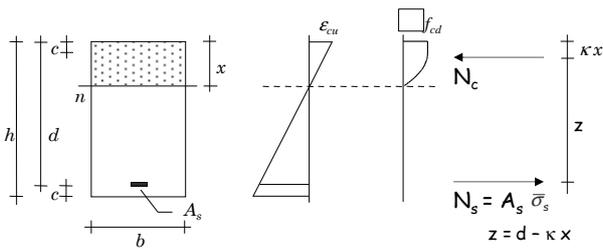
Per ottenere sezioni in c.a. duttili le progetteremo sempre assumendo  $\xi = x/d = 0.25$

## Progetto - stato limite ultimo



- 1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione
- Buona duttilità con  $\xi = 0.25$

## Progetto - stato limite ultimo

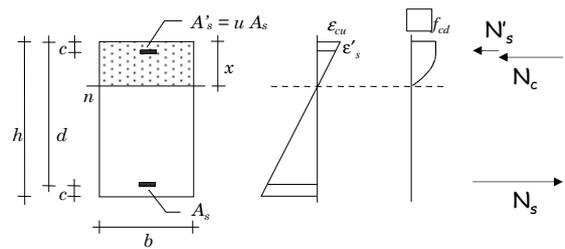


- 2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura si ottiene

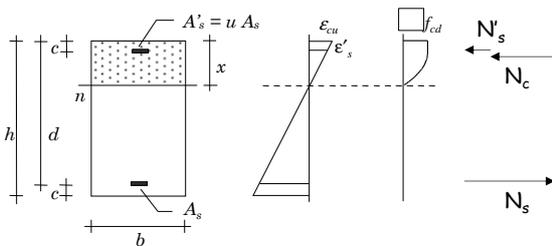
$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

con:  $r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$

## Progetto - stato limite ultimo



## Progetto - stato limite ultimo



- 3 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

## Valori di $z/d$ (C25/30, B450C)

sezioni progettate con  $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$  ed  $\epsilon_s = 0.010$  ( $\xi = 0.259$ )

### Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.49$	$s' = 0.42$	$s' = 0.26$
0	0.878		
0.25	0.887	0.881	0.873
0.50	0.896	0.883	0.868
0.75	0.905	0.885	0.863
1.00	0.914	0.888	0.858

### Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.892		
0.25	0.907	0.894	0.884
0.50	0.921	0.896	0.876

Sempre molto prossimo a 0.9

Nota: modificare ponendo  $\xi = 0.25$

## Quanto vale il coefficiente r?

Tensioni ammissibili:  
dipende da calcestruzzo e acciaio

per C25/30 e B450C:  $r = 0.0256$

Stato limite ultimo:  
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30:  $r = 0.0197$

## Esempio n. 1

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili:  $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0256 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.50 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10^3}{0.9 \times 0.51 \times 255} = 9.41 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0197 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10^3}{0.9 \times 0.46 \times 391} = 9.88 \text{ cm}^2$$

## Che relazione c'è tra r ed r'?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s, \max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che  $s'$  dipende principalmente dal copriferro  $c$  (o meglio, dal rapporto  $\gamma = c/d$ )

Ma per TA  $s'$  è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU  $s'$  è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

## Valori di r' (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.42$	$s' = 0.34$	$s' = 0.26$
0	0.0256		
0.25	0.0243	0.0246	0.0249
0.50	0.0229	0.0235	0.0242
0.75	0.0214	0.0223	0.0234
1.00	0.0198	0.0210	0.0226

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota:  $\gamma = 0.10$  per travi emergenti  
 $\gamma = 0.20$  per travi a spessore

## Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ( $s' \cong 1$ ) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ( $s' \cong 0.2 \div 0.5$ )

Le differenze sono significative nel progetto delle travi emergenti e si riducono nel progetto delle travi a spessore

## Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando  $u = A'_s/A_s$  è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

Armatura massima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_y} b d \geq 0.13 \% b d$$

- 0.15% per C25/30 e B450C

$$A_s \leq 3 \% b h$$

$$A'_s \leq 3 \% b h$$

Percentuale massima consigliata:  $1 \div 1.5\%$

### Limiti alle formule di progetto per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha:  $A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}} \quad \begin{array}{l} = 0.0169 \\ \text{se } \rho=0.010 \\ = 0.0138 \\ \text{se } \rho=0.015 \end{array}$$

Non si può utilizzare un valore di  $r'$  inferiore a  $r_s$

Suggerisco per  $r'$  un limite tra 0.015 e 0.017

### Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ( $u=0.25$ ,  $\gamma=0.10$ )

Tensioni ammissibili:  $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

era 0.50 m per  $u=0$

Stato limite ultimo:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

era 0.45 m per  $u=0$

### Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ( $u=0.25$ ,  $\gamma=0.10$ )

Tensioni ammissibili:  $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0243 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.48 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.51 \times 266} = 9.41 \text{ cm}^2 = 0.6\% b h$$

Stato limite ultimo:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0171 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm<sup>2</sup> per  $u=0$

### Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ( $u=0.50$ ,  $\gamma=0.10$ )

Tensioni ammissibili:  $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.50 m per  $u=0$   
0.48 m per  $u=0.25$

Stato limite ultimo:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = \frac{0.0139 \sqrt{160}}{0.016} = \frac{0.37}{0.81} \text{ m} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

era 0.45 m per  $u=0$   
0.39 m per  $u=0.25$

### Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ( $u=0.50$ ,  $\gamma=0.10$ )

Tensioni ammissibili:  $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 266} = 10.44 \text{ cm}^2$$

era 9.41 cm<sup>2</sup> per  $u=0$

Stato limite ultimo:  $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.016 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.37 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.41 \times 391} = 11.09 \text{ cm}^2$$

era 9.88 cm<sup>2</sup> per  $u=0$

### Progetto allo stato limite ultimo - commento

Si ottengono sezioni trasversali:

- simili a quelle richieste dal metodo delle tensioni ammissibili se non si considera l'armatura compressa
- sensibilmente più basse quando si considera l'armatura compressa

L'armatura tesa:

- è simile a quella richiesta dal metodo delle tensioni ammissibili per sezioni a semplice armatura
- può divenire eccessivamente grande quando si riduce l'altezza della sezioni sfruttando l'effetto positivo dell'armatura compressa

## Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore  $r' = 0.018$  o  $0.017$

(corrisponde a  $0 < \rho < 25\%$  per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori un po' maggiori

$r' = 0.019$  (corrisponde a  $0 < \rho < 25\%$  per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$  (ma non andare mai al di sotto di questi)

## Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a  $0.9 d$

Nota:

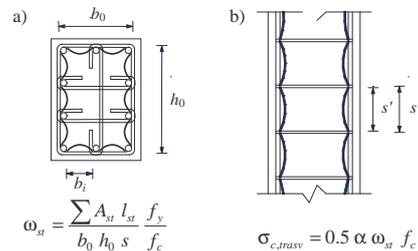
Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna potrebbe essere minore ( $0.8 d$ )

## Duttilità

## Modello per i materiali calcestruzzo

Problemi:

- Distinzione tra ricoprimento e nucleo confinato
- Efficacia del confinamento



$$\omega_{st} = \frac{\sum A_{st} I_{st} f_y}{b_0 h_0 s f_c}$$

$$\sigma_{c,trasv} = 0.5 \alpha \omega_{st} f_c$$

## Calcestruzzo

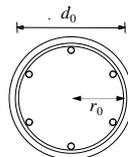
confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una sezione circolare

Quando il calcestruzzo compresso si dilata le staffe danno una compressione trasversale

$$\sigma_{c,trasv} = 0.5 \omega_{st} f_c$$

con 
$$\omega_{st} = \frac{2 A_{st} f_y}{s r_0 f_c}$$



## Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

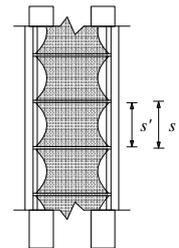
Staffe in una sezione circolare  
Efficacia del confinamento

Allontanandosi dalla staffa, la zona confinata si riduce

Si considera un coefficiente di efficacia pari al rapporto tra volume effettivamente confinato e volume idealmente racchiuso dalle staffe

$$\alpha_s = \left(1 - \frac{s'}{3 d_0}\right)^2$$

quindi 
$$\sigma_{c,trasv} = 0.5 \alpha_s \omega_{st} f_c$$



## Calcestruzzo

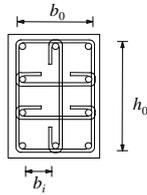
confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una sezione rettangolare

Quando il calcestruzzo compresso si dilata le staffe danno una compressione trasversale

$$\sigma_{c,transv} = 0.5 \omega_{st} f_c$$

con 
$$\omega_{st} = \frac{\sum A_{st} l_{st} f_y}{b_0 h_0 s f_c}$$



## Calcestruzzo

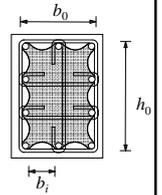
confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una sezione rettangolare  
Efficacia del confinamento

Staffe e tirantini sono meno efficaci quando ci si allontana dai punti ben bloccati

Si considera un coefficiente di efficacia

$$\alpha_n = 1 - \sum \frac{b_i^2}{6 b_0 h_0}$$



## Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

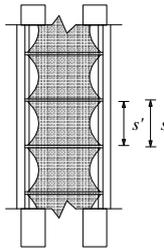
Staffe in una sezione rettangolare  
Efficacia del confinamento

Anche in senso longitudinale c'è una riduzione dell'efficacia del confinamento

$$\alpha_s = \left(1 - \frac{s'}{3b_0}\right) \left(1 - \frac{s'}{3h_0}\right)$$

quindi 
$$\sigma_{c,transv} = 0.5 \alpha \omega_{st} f_c$$

con 
$$\alpha = \alpha_s \alpha_n$$

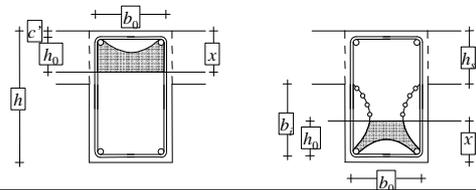


## Calcestruzzo

confinamento dovuto alle staffe

Staffe in una trave a sezione rettangolare  
Efficacia del confinamento

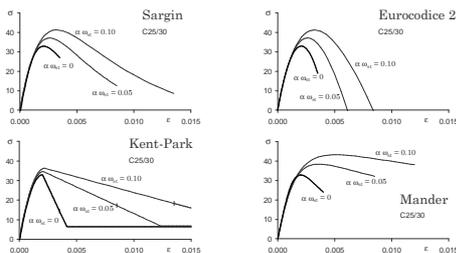
Nel valutare l'efficacia del confinamento bisogna tener conto di qual è la parte compressa e come viene confinata



## Modello per i materiali calcestruzzo

Modelli:

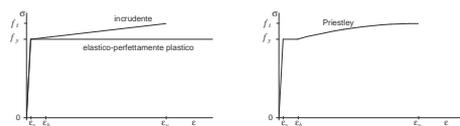
- Esistono numerose proposte, molto diverse



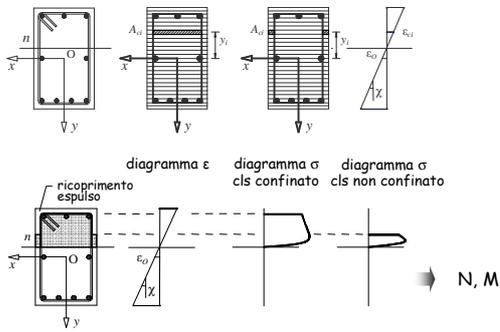
## Modello per i materiali acciaio

Modelli:

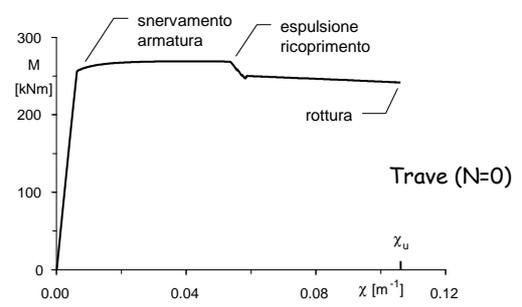
- Esistono alcune proposte, leggermente diverse



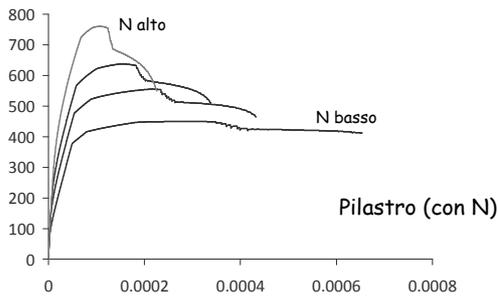
### Legame momento-curvatura mediante modello a fibre



### Legame momento-curvatura mediante modello a fibre

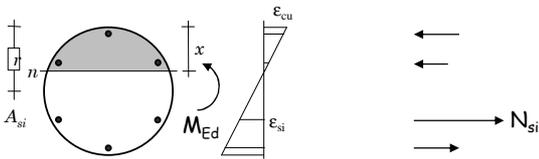


### Legame momento-curvatura mediante modello a fibre



### Sezioni di forma generica

### Verifica sezione circolare

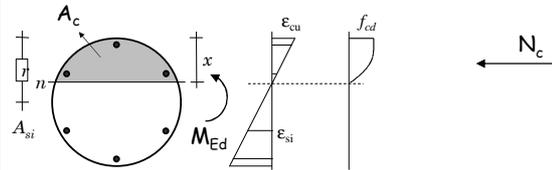


Risultanti delle tensioni nelle armature

$$\epsilon_{si} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{si} \quad \Rightarrow \quad N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

(Diagramma ε)                      (Legame σ-ε)

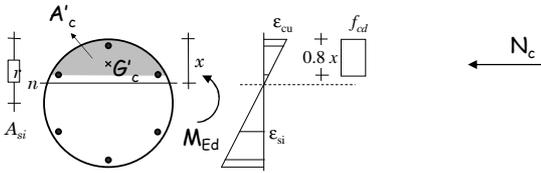
### Verifica sezione circolare



Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

~~$N_c = \beta A_c f_{cd}$~~     Ma quanto vale β?     $N_c = \int_{A_c} \sigma \, dA$   
 $A_c$  = area di calcestruzzo compresso  
 o in alternativa ...

### Verifica sezione circolare



Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

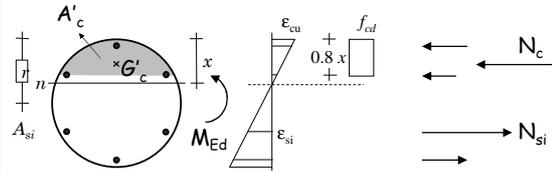
$$N_c = \int_{A_c} \sigma_c dA \Rightarrow N_c = A'_c f_{cd}$$

$A'_c$  = area di calcestruzzo compresso con  $\sigma_c \neq 0$

$N_c$  è applicato nel baricentro di  $A'_c$  ( $G'_c$ )

73/70

### Verifica sezione circolare



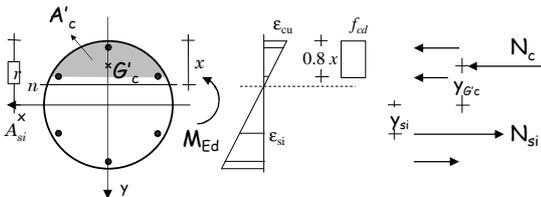
Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \sum N_{si} = 0$$

Posso ricavare x per tentativi

74/70

### Verifica sezione circolare

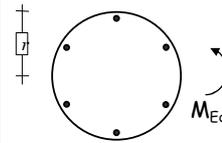


Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c y_{G'_c} + \sum N_{si} y_{si}$$

75/70

### Esempio



Dati:

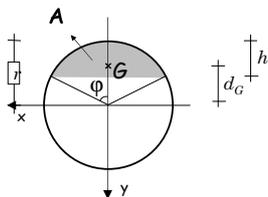
Sezione  $r = 20$  cm  
 $c = 4$  cm  
 Armature  $6\varnothing 14$   
 Calcestruzzo C25/30  
 Acciaio B450C  
 $M_{Ed} = 45$  kNm

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro per tentativi
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

76/70

### Calcolo di $N_c$



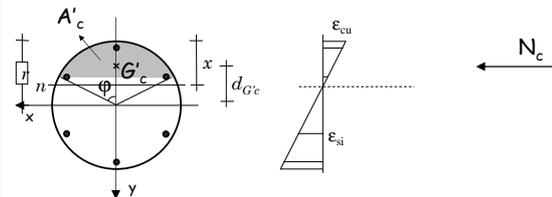
$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$d_G = \frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A}$$

77/70

### Calcolo di $N_c$



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-0.8x}{r}\right) \quad \leftarrow h = 0.8x$$

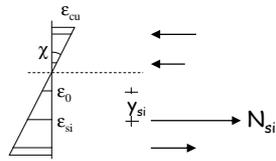
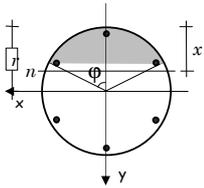
$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$N_c = A'_c f_{cd}$$

$$y_{G'_c} = -d_{G'_c} = -\frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A'_c}$$

78/70

### Calcolo di $N_{si}$



$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

$$\epsilon_0 = -\epsilon_{cu} \left(1 - \frac{r}{x}\right)$$

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{x}$$

$$\epsilon_{si} = \epsilon_0 + \chi Y_{si}$$

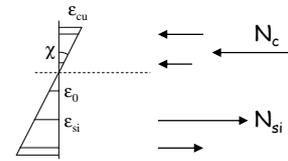
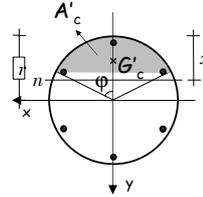
$$\sigma_{si} = -f_{yd} \quad \epsilon_{si} \leq -\epsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = E \epsilon_{si} \quad -\epsilon_{yd} < \epsilon_{si} < \epsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd} \quad \epsilon_{si} \geq \epsilon_{yd}$$

79/70

### Determinazione di $x$



Scelgo  $x = 10$  cm (ad esempio)

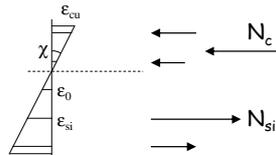
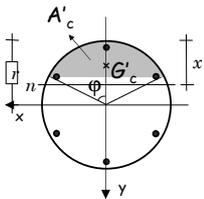
$$N_c = -254.1 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 45.3 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = -88.3 \text{ kN}$$

80/70

### Determinazione di $x$



Per tentativi determino  $x = 8.68$  cm

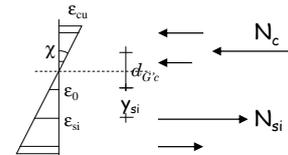
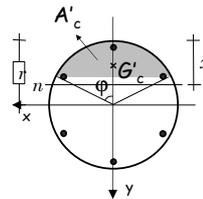
$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 86.7 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = 0$$

81/70

### Determinazione di $M_{Rd}$



$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = 86.7 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = 120.5 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$y_{G'_c} = -15.9 \text{ cm}$$

$$y_{S1} = -16 \text{ cm}$$

$$y_{S2} = -8 \text{ cm}$$

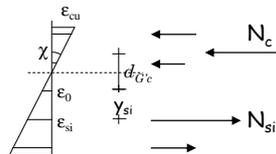
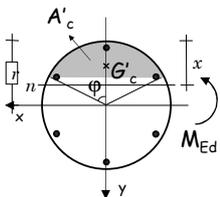
$$y_{S3} = 8 \text{ cm}$$

$$y_{S4} = 16 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

82/70

### Verifica



$$M_{Ed} = 45 \text{ kNm} < M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

83/70