

Corso di aggiornamento  
Progettazione strutturale  
e Norme Tecniche per le Costruzioni

**Verifica sismica di edifici esistenti in c.a.**

10 - Analisi lineare: verifica in termini di deformazioni

Imola  
16-18 maggio 2013  
Aurelio Ghersi

**Verifica in termini di deformazioni**  
analisi lineare e analisi statica non lineare

- La verifica può essere fatta con analisi lineare (in genere modale) o con analisi statica non lineare
  - La prima è un'approssimazione della seconda (ed ha limiti di applicabilità)
  - L'una e l'altra consentono di valutare il comportamento della struttura al crescere dell'azione sismica ed a valutare quando si raggiungono i limiti corrispondenti allo SL di interesse
  - Occorre sempre controllare preliminarmente se la struttura ha collasso fragile per accelerazioni non elevate. Per fare questo basta in genere una analisi lineare

		Modello Lineare		Modello Non Lineare	
		Domanda	Capacità	Domanda	Capacità
Tipo di elemento o meccanismo (c/m)	Duttile / Fragile	Accettazione del Modello Lineare (ML) (per il controllo dei valori di $p_1 = D_1/C_1$ )	Dall'analisi. Usare i valori medi nel modello.	In termini di deformazione. Usare i valori medi divisi per il FC.	In termini di resistenza. Usare i valori medi divisi per il FC.
		Dall'analisi. Usare i valori medi dei moduli nel modello.	In termini di resistenza. Usare i valori medi.		
		Verifiche (se il ML è accettato)			
	Duttile	Dall'analisi.	In termini di deformazione. Usare i valori medi divisi per il FC.		
	Fragile	Verifiche (se il ML è accettato)		In termini di resistenza. Usare i valori medi divisi per il FC e per il coefficiente parziale.	
		Se $p_1 \leq 1$ , dall'analisi.			
		Se $p_1 > 1$ , dall'equilibrio con la resistenza degli c/m duttili. Usare i valori medi moltiplicati per FC.	In termini di resistenza. Usare i valori medi divisi per il FC e per il coefficiente parziale.		

**Verifica in termini di deformazioni**

Cosa significa ?

- Durante il terremoto la struttura va in campo plastico
  - Le caratteristiche di sollecitazioni non possono crescere oltre un certo limite
  - Si hanno deformazioni plastiche; la rottura avviene per superamento della deformazione plastica (rotazione delle cerniere plastiche)
- Occorre prevedere e controllare l'entità delle deformazioni plastiche

**Verifica in termini di deformazioni**  
problemi di base

Problemi concettuali:

- Scelta di modelli per il legame costitutivo del materiale
- Definizione dell'ampiezza della cerniera plastica
- Valutazione corretta del comportamento in 3D (interazione  $N-M_x-M_y$  e relative curvature)

**Verifica in termini di deformazioni**  
problemi di base

Problemi operativi:

- Solo l'analisi dinamica non lineare fornisce le rotazioni plastiche per un dato sisma; ma:
  - quali e quanti accelerogrammi usare ?
- Una analisi statica non lineare fornisce rotazioni plastiche; ma queste:
  - corrispondono a quelle ottenute dall'analisi dinamica ?
  - e a quale valore di  $a_g$  corrispondono ?
- Una analisi lineare (modale) non fornisce rotazioni plastiche; come fare a prevederle ?

### Verifica in termini di deformazioni considerazioni

- Le travi hanno molto spesso una buona duttilità, anche se non progettate espressamente per questo

Problemi per:

- Strutture irregolari (campate molto corte, schemi con forti rotazioni planimetriche) perché portano alla plasticizzazione precoce di qualche elemento
- Sezioni sottodimensionate con armatura tesa molto forte e armatura compressa quasi inesistente
- Sezioni non ben armate per carichi verticali
- Difetti di esecuzione e deterioramento nel tempo

Se non si verificano queste condizioni le travi potrebbero non dare problemi di duttilità

### Verifica in termini di deformazioni considerazioni

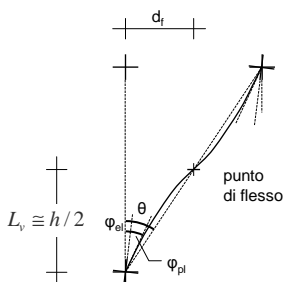
- I pilastri possono essere più o meno resistenti a flessione e duttili, in funzione dell'armatura disposta e del valore dello sforzo normale

Problemi particolari per:

- Strutture irregolari (pilastri molto corte, schemi con forti rotazioni planimetriche) perché portano alla plasticizzazione precoce di qualche elemento
- Pilastri con tensione media molto elevata
- Pilastri con armatura longitudinale molto bassa
- Difetti di esecuzione e deterioramento nel tempo

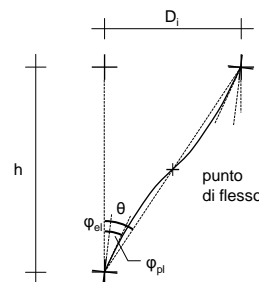
È opportuno concentrarsi soprattutto sui pilastri nella verifica di duttilità

### Deformazioni dei pilastri



$\varphi_{el}$  rotazione elastica del nodo  
 $\varphi_{pl}$  rotazione della cerniera plastica  
 $\theta$  rotazione rispetto alla corda  
 $\theta = \frac{d_f}{L_v} \cong \frac{d_f}{h/2}$

### Deformazioni dei pilastri



Se la situazione è uguale in testa e al piede

$\theta = \frac{D_i}{h}$   
 $D_i = \theta h$   
 $\theta$  rotazione rispetto alla corda  
 $\theta = \frac{d_f}{L_v} \cong \frac{d_f}{h/2}$

### Rotazione alla corda

- Valore limite della rotazione alla corda a collasso (CO, ovvero SLC):  
Può essere calcolato partendo dalla rotazione della cerniera plastica

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \left( \theta_y + (\phi_u - \phi_y) L_{pl} \left( 1 - \frac{0,5L_{pl}}{L_v} \right) \right)$$

Non è molto agevole utilizzarla, per la complessità nel determinare la rotazione ultima della cerniera plastica

### Rotazione alla corda

- Valore limite della rotazione alla corda a collasso (CO, ovvero SLC)

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,01; \omega)}{\max(0,01; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 \rho_d})$$

- Moltiplicare per 0.85 negli elementi non dotati di adeguati dettagli antisismici
- Moltiplicare per 0.75 in presenza di barre lisce o ancoraggi non sufficienti

- Valore limite per DS (SLV):  
moltiplicare per 0.75

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$\gamma_{el} = 1.5$  per gli elementi primari

$$\frac{1}{\gamma_{el}} = 0.6667$$

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$$f_c = \frac{f_{cm}}{FC \gamma_c} = \frac{19}{1,2 \times 1,5} = 10.56 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{N}{A_c f_c} = \frac{400 \times 10^3}{900 \times 10^2 \times 10.56} = 0.4211$$

$$0.3^v = 0.6023$$

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b h f_c} \quad \omega' = \frac{A'_s f_y}{b h f_c} \quad \text{per pilastri } \omega = \omega'$$

$$\left[ \frac{\max(0,01, \omega')}{\max(0,01, \omega)} f_c \right]^{-0,225} = 10.56^{0,225} = 1.6994$$

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

$L_v = 135 \text{ cm}$

luce di taglio = distanza dal punto di flesso  
(metà della lunghezza netta del pilastro)

$h = 30 \text{ cm}$

$$\left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} = \left( \frac{135}{30} \right)^{0,35} = 1.6929$$

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

Contributo delle staffe: per staffatura modesta viene circa 1

Più precisamente, in questo caso, 1.0057 - lo trascuro

Contributo di ferri piegati - non ce ne sono

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

### Rotazione alla corda esempio

Sezione 30x30 con 4Ø12, N=400 kN

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3^v) \left[ \frac{\max(0,0 \text{ l}; \omega)}{\max(0,0 \text{ l}; \omega)} f_c \right]^{-0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} (1,25^{100 p_d})$$

Quindi, per DS (SLV):

$$\theta_{u(DS)} = 0.75 \times 0.85 \times 0.6667 \times 0.0160 \times 0.6023 \times 1.6994 \times 1.6929 = 0.0118$$

File Edificio 2012.xls - foglio Rot corda

## Spostamento relativo limite di interpiano

- Se le rotazioni alla corda in testa e al piede del pilastro sono uguali e se si trascura la rotazione dei nodi si ha:

$$u_{rel} = \theta_{u,DS} \times 2 L_v = \theta_{u,DS} \times h_p$$

Nell'esempio:

$$u_{rel} = 0.0118 \times 2700 = 31.8 \text{ mm}$$

Nota: si è considerata come distanza tra le cerniere l'altezza netta (2700 mm)

## Spostamento relativo limite di interpiano

- Lo spostamento limite dipende dallo sforzo normale, che varia per effetto del sisma

pilastro	piano	Nq	b	h	sfo u per Nq	sg			
						0.1	0.2	0.3	0.4
1	6	66.1	30	30	54.72	54.09	53.46	52.84	52.23
1	5	163.7	30	30	50.39	49.23	48.15	44.17	42.28
1	4	261.3	30	30	46.40	42.38	38.71	35.35	32.29
1	3	358.9	30	30	42.73	36.95	31.95	27.63	23.89
1	2	456.5	30	30	39.35	32.11	26.20	21.38	17.45
1	1	556.4	40	30	48.67	33.55	27.68	22.84	18.84

Considerando il sisma nel verso peggiore si ha sempre una riduzione di spostamento limite

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

pilastro	piano	Nq	b	h	sfo u per Nq	sg			
						0.1	0.2	0.3	0.4
1	6	66.1	30	30	54.72	54.09	53.46	52.84	52.23
1	5	163.7	30	30	50.39	48.23	46.15	44.17	42.28
1	4	261.3	30	30	46.40	42.38	38.71	35.35	32.29
1	3	358.9	30	30	42.73	36.95	31.95	27.63	23.89
1	2	456.5	30	30	39.35	32.11	26.20	21.38	17.45
1	1	556.4	40	30	40.67	33.55	27.68	22.84	18.84
2	6	108.0	30	30	52.82	52.58	52.34	52.10	51.87
2	5	244.0	30	30	47.08	46.79	46.49	46.20	45.91
2	4	380.0	30	30	41.97	41.54	41.12	40.70	40.28
2	3	518.2	30	40	37.68	37.36	37.05	36.74	36.44
2	2	658.7	30	50	34.65	34.35	34.05	33.76	33.47
2	1	801.4	30	60	32.36	31.77	31.20	30.63	30.07
3	6	108.0	30	30	52.82	52.59	52.37	52.14	51.92
3	5	244.0	30	30	47.08	46.78	46.49	46.19	45.90
3	4	380.0	30	30	41.97	41.49	41.02	40.56	40.09
3	3	518.2	30	40	37.68	37.12	36.57	36.03	35.49
3	2	658.7	30	50	34.65	34.11	33.58	33.06	32.54
3	1	801.4	30	60	32.36	31.86	31.36	30.88	30.40
6		51.23	50.89	50.54	50.20	49.86			
5		45.37	44.31	43.04	41.15	39.35			
4		40.17	38.30	34.94	31.88	29.09			
3		36.27	32.85	28.31	24.40	21.03			
2		33.48	30.03	26.02	21.38	17.45			
1		31.34	27.57	23.49	20.01	16.94			

File Edificio.xls - PilX (AnLin)

Lo spostamento limite del piano è quello del pilastro che ha un limite più basso

## Analisi lineare Ordinanza 3431 e Circolare 2/2/09

## Analisi lineare

- Si ipotizza che gli spostamenti reali per un qualsiasi  $a_g$  siano uguali a quelli forniti dall'analisi lineare
- Si giudica la struttura confrontando gli spostamenti di calcolo con quelli limite

## Analisi lineare

Nota:

- La previsione dello spostamento in testa con l'analisi lineare è abbastanza accettabile
- Quello che può cambiare molto, e non è colto dall'analisi lineare, è la variazione della deformata al progredire della plasticizzazione:  
se si forma un meccanismo di piano lo spostamento si concentra tutto a quel piano, con valori molto maggiori di quelli previsti dall'analisi lineare

Per questo motivo occorre verificare l'applicabilità dell'analisi lineare

## Applicabilità dell'analisi lineare (1)

- Calcolare per tutte le sezioni il momento resistente (con valori medi di  $f_c$  e  $f_y$  - non divisi per il fattore di confidenza né per il coefficiente parziale di sicurezza)  
 $C$  = capacità
- Per un assegnato  $a_g$  calcolare il momento sollecitante  
 $D$  = domanda
- Calcolare il rapporto  $\rho = D / C$

## Applicabilità dell'analisi lineare (2)

- Esaminare tutte le sezioni in cui  $\rho > 2$ ; tra queste:
  - Trovare il minimo  $\rho_{\min}$
  - Trovare il massimo  $\rho_{\max}$
  - Calcolare il rapporto  $\rho_{\max} / \rho_{\min}$
- L'analisi è applicabile se  $\rho_{\max} / \rho_{\min} \leq 2.5$

Si può trovare il valore massimo di  $a_g$  per il quale l'analisi è applicabile

## Applicabilità dell'analisi lineare

basso						min	2 037
						max	2 397
						rapp	1.638
X						ag	0.150
per 0.25							
pilastro	piano	Misma	Mres	M(ag)			
1	6	89.92	29.03	53.95	1.86		
1	5	154.46	39.03	92.88	2.37		
1	4	203.44	47.35	122.06	2.58		
1	3	184.94	53.88	110.96	2.06		
1	2	175.33	64.58	105.20	1.63		
1	1	152.73	87.72	91.64	1.04		
2	6	130.59	33.53	78.35	2.34		
2	5	215.70	46.00	129.42	2.81		
2	4	263.48	55.05	158.09	2.87		
2	3	426.34	101.89	255.80	2.51		
2	2	516.45	151.81	309.87	2.04		
2	1	722.63	210.92	433.58	2.06		
3	6	131.79	33.53	79.07	2.36		
3	5	216.58	46.00	129.95	2.82		
3	4	265.58	55.05	159.35	2.89		
3	3	446.64	101.89	267.98	2.63		
3	2	555.63	151.81	339.38	2.24		
3	1	746.51	210.92	447.91	2.12		

File Edificio 2012.xls - foglio applicabil.

## Applicabilità dell'analisi lineare

						min	2 623
						max	6 385
						rapp	2.434
X						ag	0.207
per 0.25							
pilastro	piano	Misma	Mres	M(ag)			
1	6	89.92	29.03	103.23	3.56		
1	5	154.46	39.03	177.32	4.54		
1	4	203.44	47.35	233.55	4.93		
1	3	184.94	53.88	212.31	3.94		
1	2	175.33	64.58	201.28	3.12		
1	1	152.73	87.72	175.33	2.00		
2	6	130.59	33.53	149.92	4.47		
2	5	215.70	46.00	247.62	5.38		
2	4	263.48	55.05	302.46	5.49		
2	3	426.34	101.89	489.44	4.80		
2	2	516.45	151.81	592.88	3.91		
2	1	722.63	210.92	829.58	3.93		
3	6	131.79	33.53	151.29	4.51		
3	5	216.58	46.00	248.63	5.40		
3	4	265.58	55.05	304.89	5.54		
3	3	446.64	101.89	512.74	5.03		
3	2	555.63	151.81	649.34	4.28		
3	1	746.51	210.92	856.99	4.06		

File Edificio 2012.xls - foglio applicabil.

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

direzione x				spostamento relativo limite per rotazione corda				accelerazione sopportabile			
traverso				per Nq				per Nq			
spostamento assoluto (mm)				spostamento relativo (mm)				spostamento relativo (mm)			
6	119.282	14.166		51.23				0.994			
5	107.605	23.586		45.37				0.481			
4	86.782	29.592		40.17				0.339			
3	58.958	25.488		36.27				0.355			
2	33.862	21.990						0.392			
1	11.999	11.999		31.34				0.653			

File Edificio 2012.xls - foglio Spo

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

direzione x				spostamento relativo limite per rotazione corda				accelerazione sopportabile			
traverso				per Nq				per Nq			
spostamento assoluto (mm)				spostamento relativo (mm)				spostamento relativo (mm)			
6	119.282	14.166	5.67	51.23	50.89			0.994	0.898		
5	107.605	23.586	9.43	45.37	44.31			0.481	0.470		
4	86.782	29.592	11.84	40.17	38.30			0.339	0.324		
3	58.958	25.488	10.20	36.27	32.85			0.355	0.322		
2	33.862	21.990	8.76		33.48	30.03		0.392	0.343		
1	11.999	11.999	4.80	31.34	27.57			0.653	0.574		

File Edificio 2012.xls - foglio Spo

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione x

direzione x		ag = 0.25		ag = 0.2556		spostamento relativo limite per rotazione corda					accelerazione sopportabile				
traverso	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	
	assoluto (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	per Nq	ag	0.1	0.2	0.3	0.4	ag	0.1	0.2	0.3	0.4
						0.2	0.3	0.4	0.2556						0.2556
6	119 282	14 166	14.48	51.23	50.89	50.54	50.20	49.86	50.35	0.904	0.898	0.892	0.886	0.880	0.889
5	107 606	23 586	24.11	45.37	44.31	43.04	41.15	39.35	41.98	0.481	0.470	0.456	0.436	0.417	0.445
4	86 782	29 592	30.25	40.17	38.30	34.94	31.88	29.09	32.21	0.339	0.324	0.295	0.269	0.244	0.266
3	58 958	25 488	26.06	36.27	32.85	28.31	24.40	21.01	26.06	0.356	0.322	0.278	0.239	0.206	0.256
2	33 862	21 890	22.40	33.48	30.03	26.02	21.38	17.45	22.40	0.382	0.343	0.297	0.244	0.199	0.247
1	11 999	11 999	12.27	31.34	27.57	23.49	20.01	16.94	21.49	0.653	0.574	0.489	0.417	0.353	0.448

La rotazione limite si raggiunge per  
 $a_g = 0.256 \text{ g}$

File Edificio 2012.xls - foglio Spo

## Spostamento relativo limite di interpiano - direzione y

direzione y		ag = 1		ag = 0.1629		spostamento relativo limite per rotazione corda					accelerazione sopportabile					
traverso	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento	spostamento		
assoluto (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)	relativo (mm)		
				per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.1629	per Nq	0.1	0.2	0.3	0.4	0.1629
6	186 971	24 067	15.68	51.23	50.41	49.60	48.80	48.02	49.90	0.532	0.524	0.515	0.507	0.499	0.518	
5	168 612	34 841	22.70	45.37	42.99	40.74	38.61	36.59	41.56	0.326	0.308	0.292	0.277	0.263	0.298	
4	139 445	42 230	27.52	40.17	36.31	32.82	29.67	26.81	34.07	0.238	0.215	0.194	0.176	0.159	0.202	
3	100 777	43 865	28.58	36.27	32.16	28.51	24.34	20.36	29.82	0.207	0.183	0.163	0.139	0.116	0.170	
2	58 056	38 803	25.28	33.48	29.22	23.04	17.92	13.94	25.28	0.216	0.188	0.148	0.115	0.090	0.163	
1	19 354	19 354	12.61	31.34	27.16	22.25	17.56	13.86	24.29	0.405	0.351	0.287	0.227	0.179	0.314	

La rotazione limite si raggiunge per  
 $a_g = 0.163 \text{ g}$

File Edificio 2012.xls - foglio Spo

## Conclusioni per analisi lineare (con $\rho$ )

- L'analisi mostra che il moltiplicatore di collasso potrebbe arrivare a

$$a_g = 0.163 \text{ g}$$

raggiunto per sisma in direzione y

L'analisi è applicabile in tale direzione fino a un valore

$$a_g = 0.186 \text{ g}$$

quindi il valore 0.163 g può essere assunto come moltiplicatore di collasso