

Corso di aggiornamento  
Progettazione strutturale e  
Norme Tecniche per le Costruzioni

**Le pareti in c.a. nella progettazione sismica  
e nell'intervento sull'esistente**

Spoletto  
4-5 giugno 2015

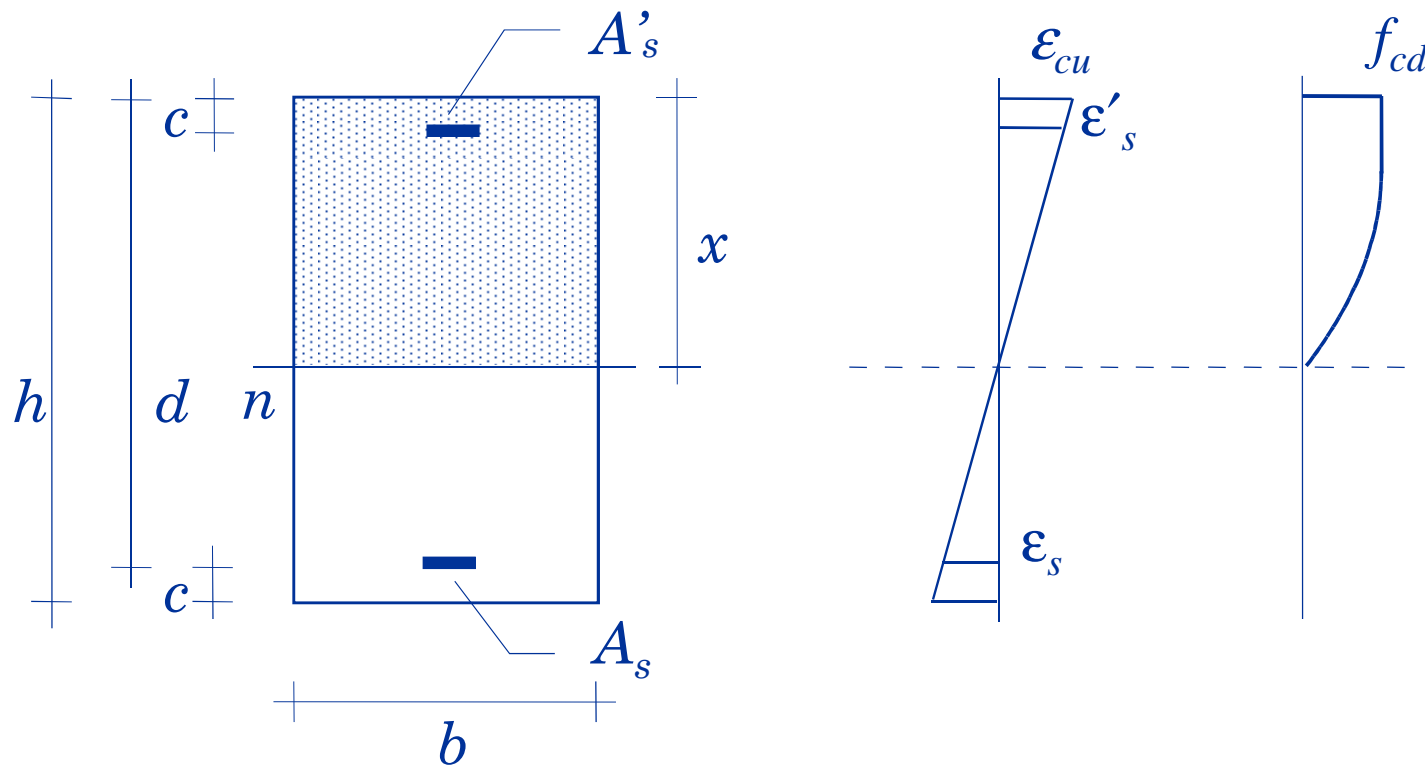
**3 - L'elemento parete: flessione composta**

# Flessione composta

## brevi richiami

1. Determinare il momento resistente  $M_{N,Rd}$  in funzione dello sforzo normale sollecitante  $N_{Ed}$ 
  - Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
  - Determinare la risultante delle tensioni e quindi  $N$
  - Variare il diagramma di deformazioni in modo da avere  $N = N_{Ed}$
  - Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni

# Verifica a flessione composta procedimento



Dati:

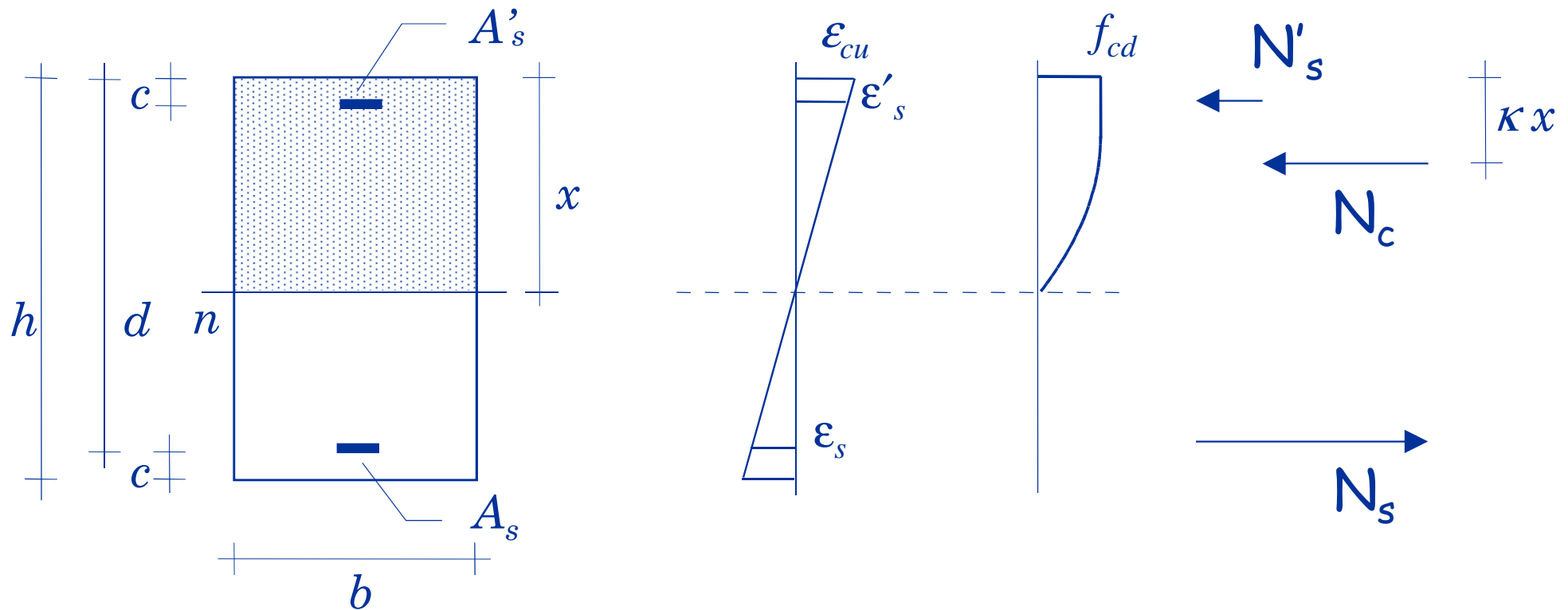
Geometria della sezione  
Armature

Coppia  $M_{Ed}-N_{Ed}$

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente  $M_{Rd}$   
corrispondente a  $N_{Ed}$

# Verifica a flessione composta procedimento



Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

Poi calcolare  $M_{Rd}$ , con equilibrio alla rotazione

# Flessione composta

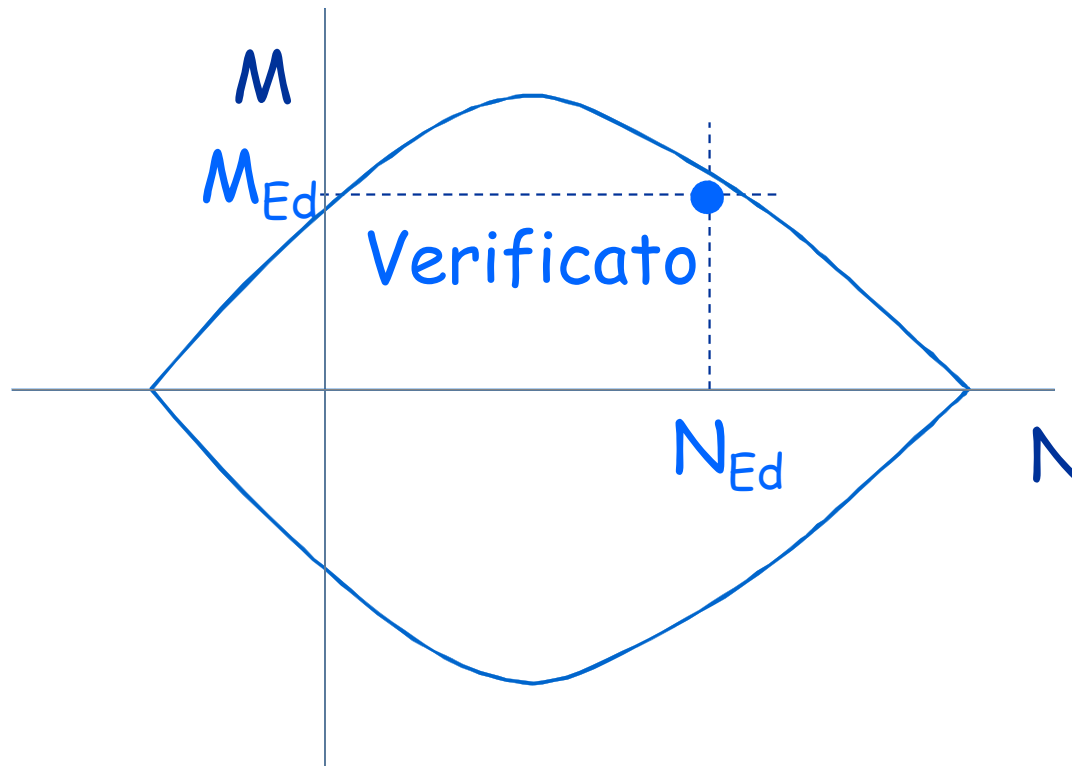
## brevi richiami

2. Determinare il dominio di resistenza (o curva di interazione)  $M_{Rd} - N_{Rd}$

- Assegnare un diagramma limite di deformazioni ed il corrispondente diagramma di tensioni
- Determinare la risultante delle tensioni e quindi  $N_{Rd}$
- Determinare il momento resistente corrispondente a questo diagramma di deformazioni,  $M_{Rd}$
- Variare il diagramma di deformazioni in modo da ottenere tutte le coppie  $M_{Rd} - N_{Rd}$

# Dominio di resistenza per la verifica

- La sezione è verificata se il punto che rappresenta la coppia  $M_{Ed} - N_{Ed}$  è interno al dominio



# Flessione composta

## brevi richiami

### 3. Utilizzare formule approssimate

(vedi A. Ghersi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = A_c f_{cd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 A_c h f_{cd}$$

$$N_{s,max} = A_{s,tot} f_{yd}$$

$$M_{s,max} = 0.5 A_{s,tot} (h - 2c) f_{yd}$$

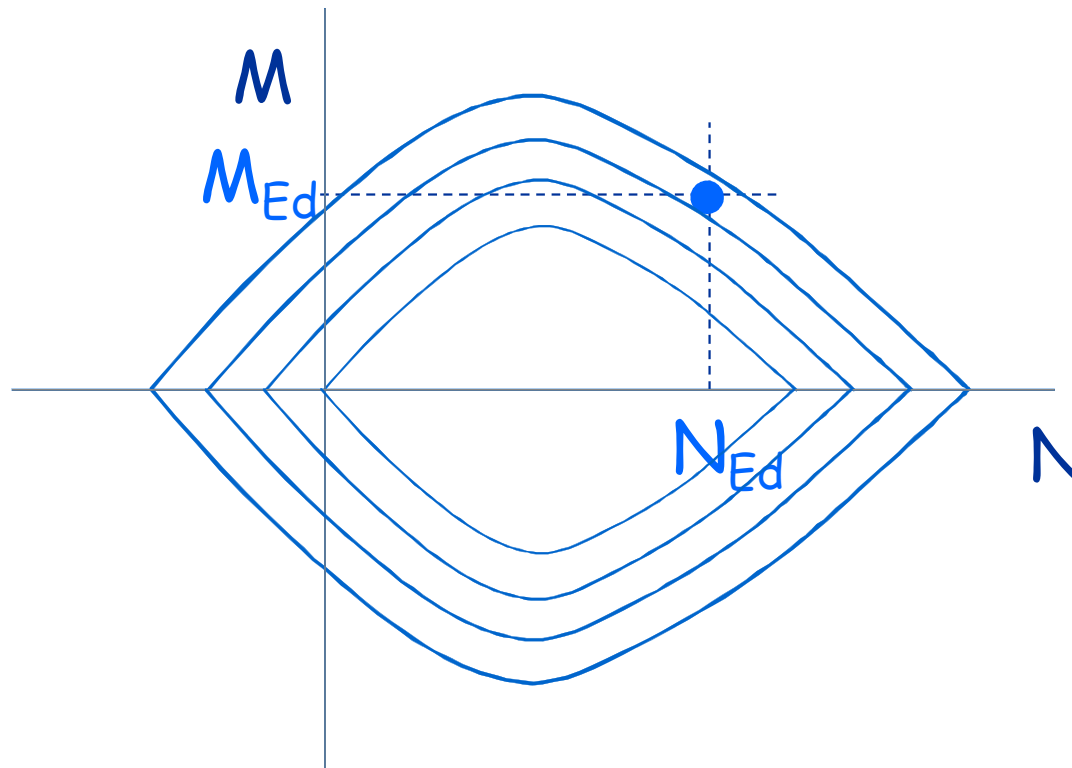
$$v_M = 0.48$$

$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

per sezione rettangolare con armatura simmetrica  
( $A_s = A'_s$ ;  $A_{s,tot} = 2 A_s$ )

# Dominio di resistenza per il progetto delle armature

- Tracciando il dominio con più curve, che rappresentano diverse quantità di armatura, è possibile determinare l'armatura necessaria per una assegnata coppia  $M_{Ed} - N_{Ed}$





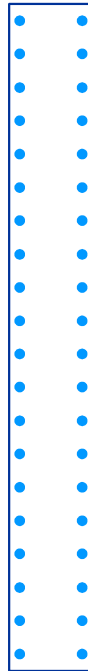
# Flessione composta per le pareti

Cosa cambia?

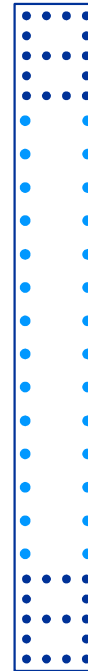
- L'armatura è costituita da tante barre: occorre decidere come disporle



concentrata  
agli estremi  
(su più strati)



distribuita  
uniformemente



un po' distribuita e  
un po' concentrata

# Distribuzione dell'armatura e proprietà della parete

- Resistenza  
Capacità di portare momento flettente
- Duttilità  
Capacità di deformarsi plasticamente  
Duttilità = rapporto tra curvatura ultima e curvatura allo snervamento dell'armatura tesa
- Influenza della distribuzione dell'armatura:  
Studio di Cardenas e Magura, 1973

# Studio di Cardenas e Magura

Riproduce (analiticamente) il comportamento della parete sotto l'effetto di un momento flettente crescente fino al collasso per valutare

- Momento resistente
- Duttilità disponibile

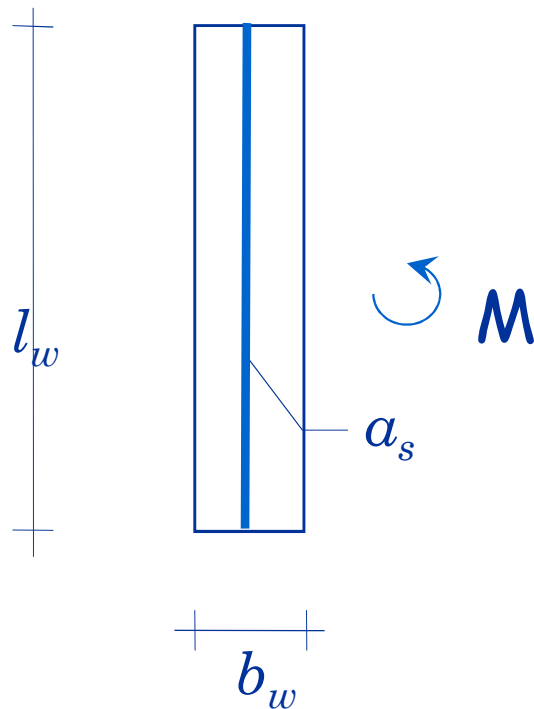
Considera sezioni con diverse quantità d'armatura

Considera due distribuzioni di armature

- Distribuita uniformemente
- Concentrata prevalentemente alle estremità

# Studio di Cardenas e Magura procedimento

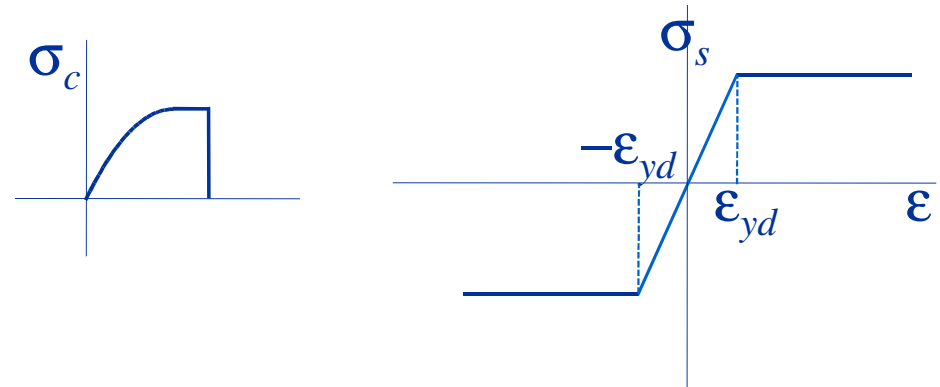
- Si considera nullo lo sforzo normale
- Si fa crescere il momento flettente fino al collasso



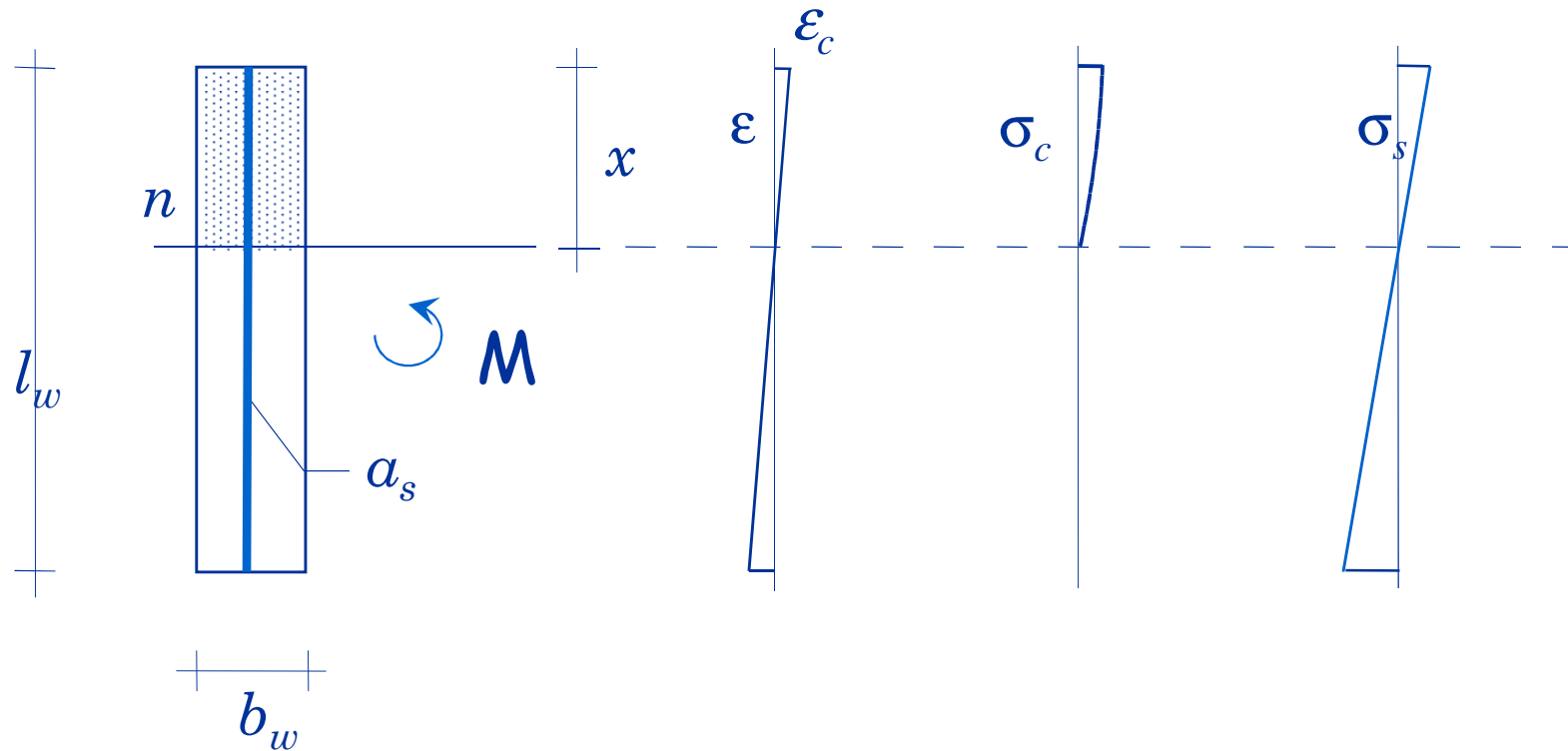
Sezione:  $b_w=20$  cm,  $l_w=500$  cm

Materiali: Calcestruzzo C25/30  
Acciaio B450

Legami  $\sigma$ - $\epsilon$

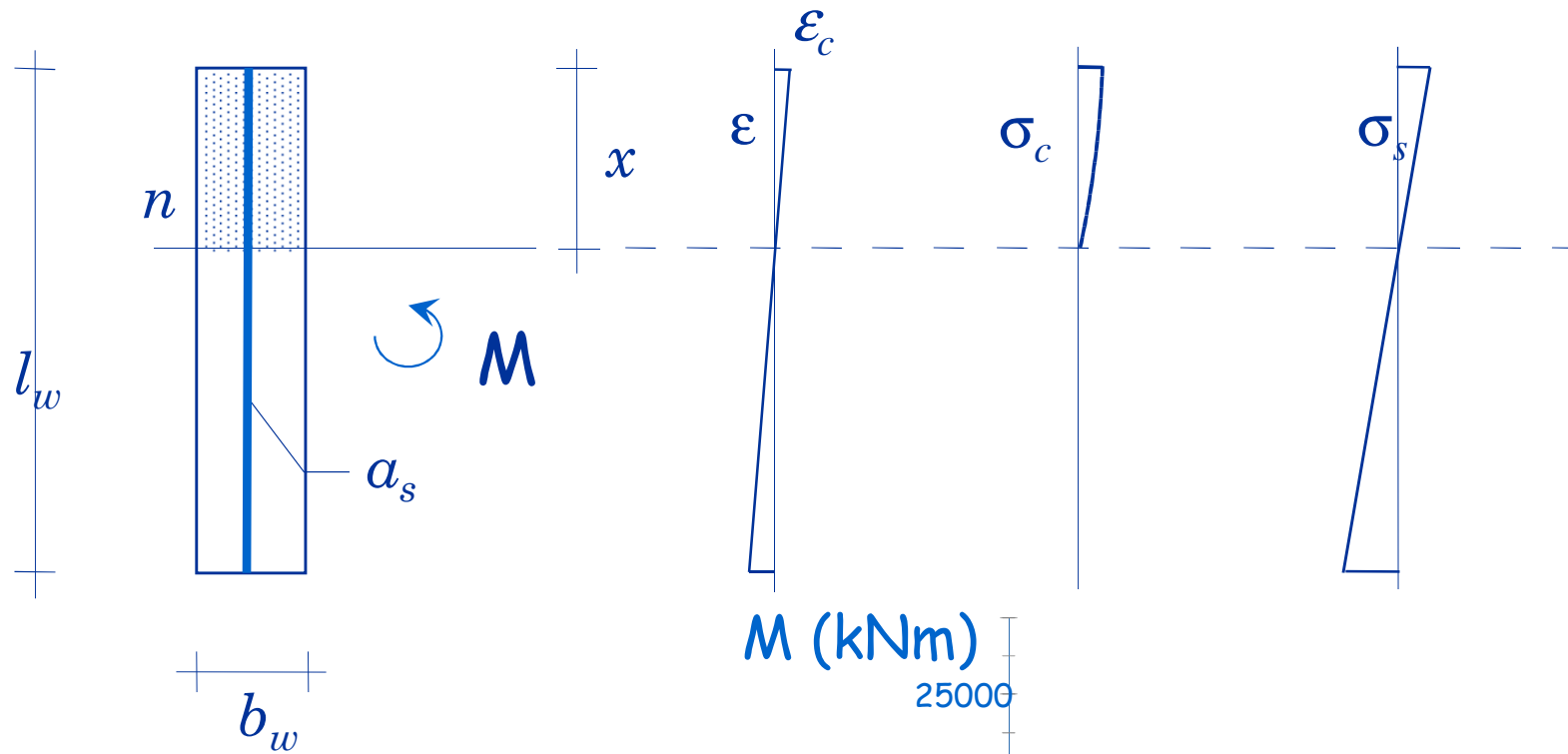


# Studio di Cardenas e Magura procedimento

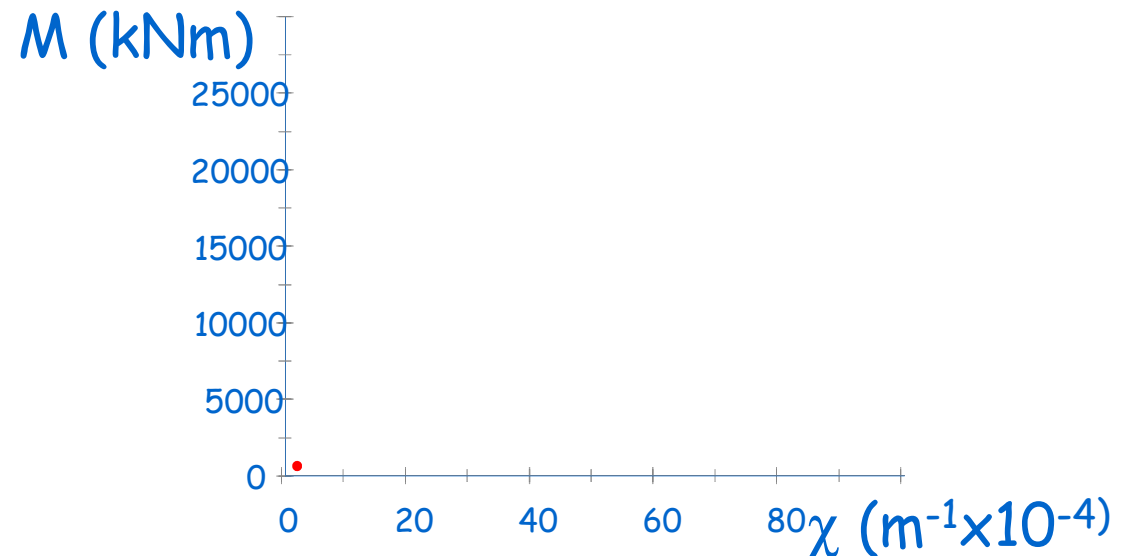


- si assegna  $\epsilon_c$ ;
- si determina  $x$  con equilibrio alla traslazione;
- si calcola il momento  $M$  corrispondente.

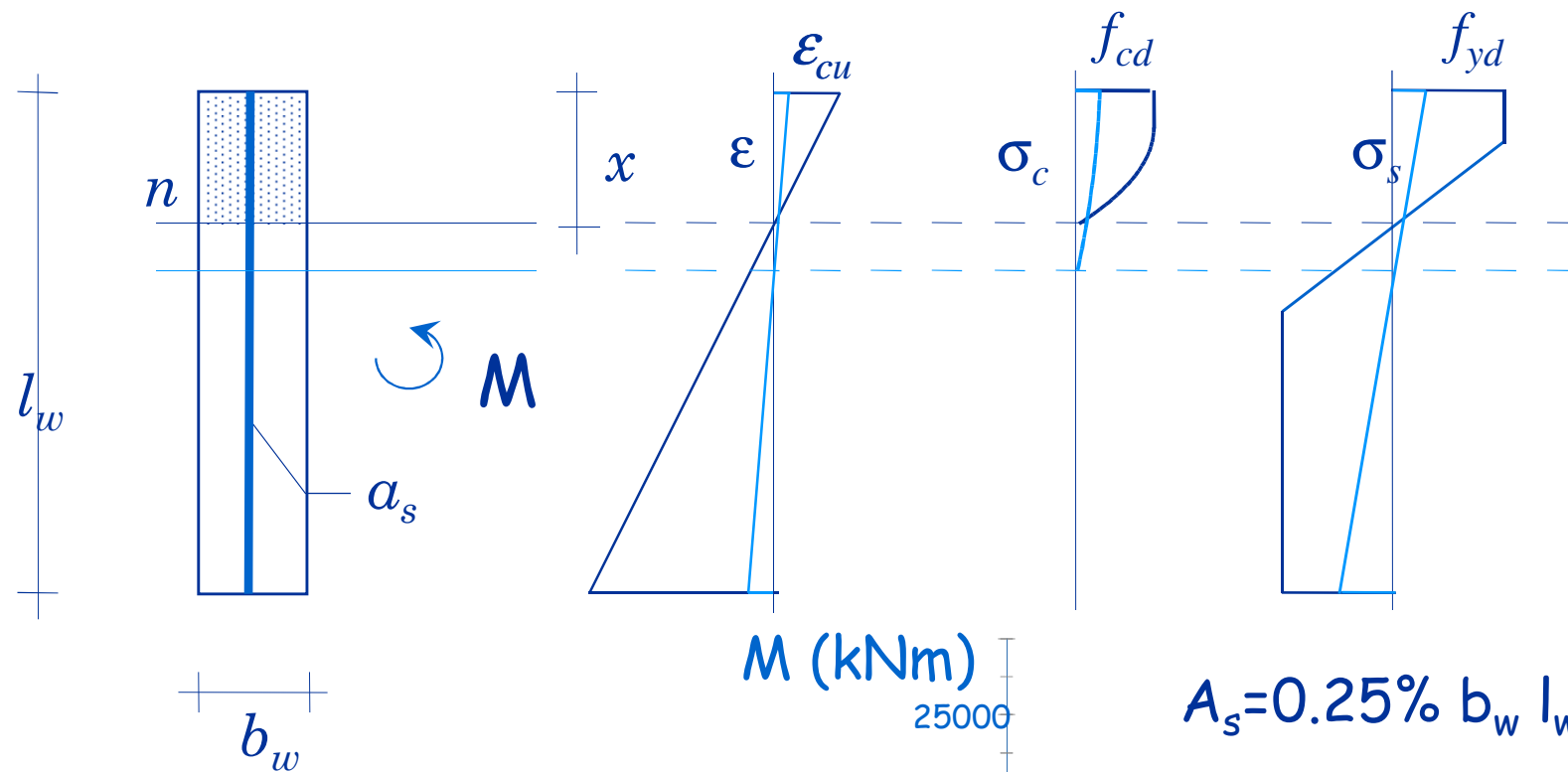
# Studio di Cardenas e Magura procedimento



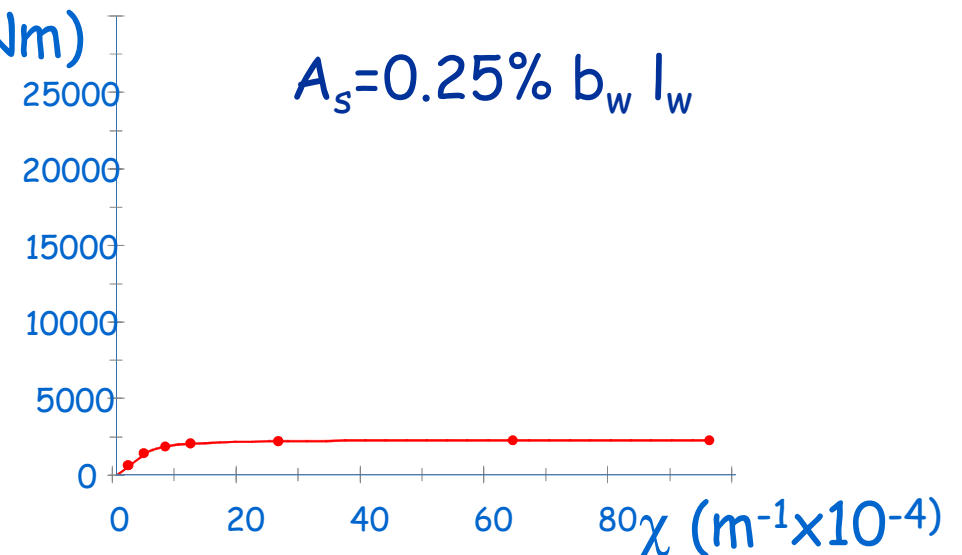
- si calcola  $\chi = \epsilon_c / x$



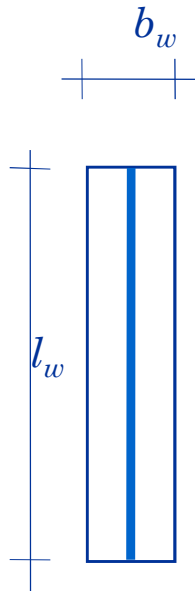
# Studio di Cardenas e Magura procedimento



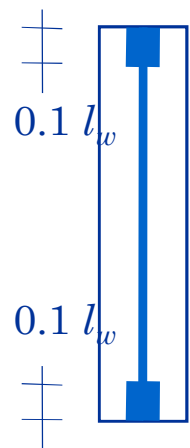
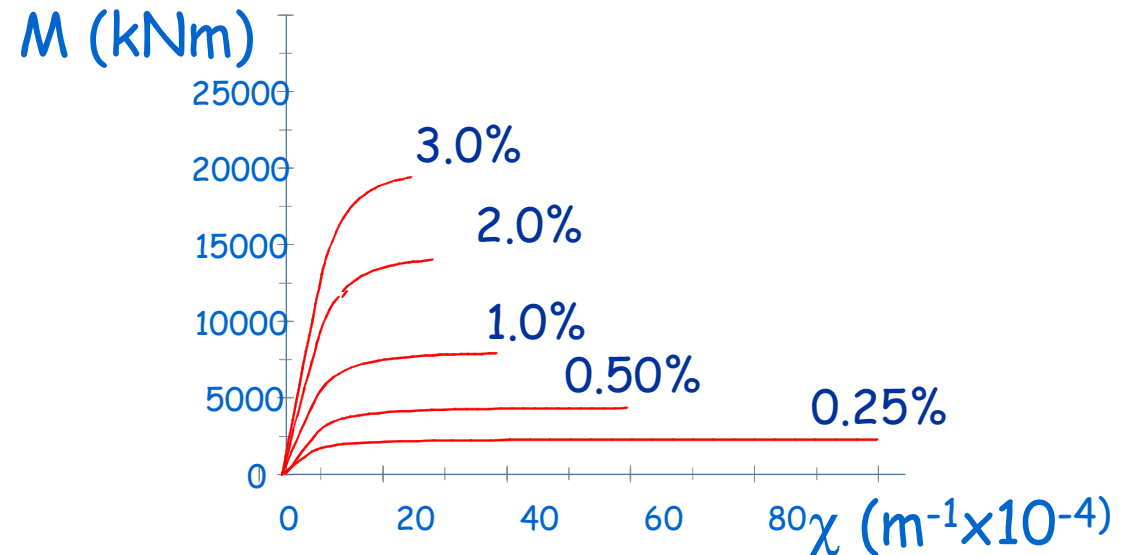
- si calcola  $\chi = \epsilon_c / x$
- si fa crescere  $\epsilon_c$  fino al valore  $\epsilon_{cu} = 3.5 \times 10^{-3}$



# Studio di Cardenas e Magura risultati

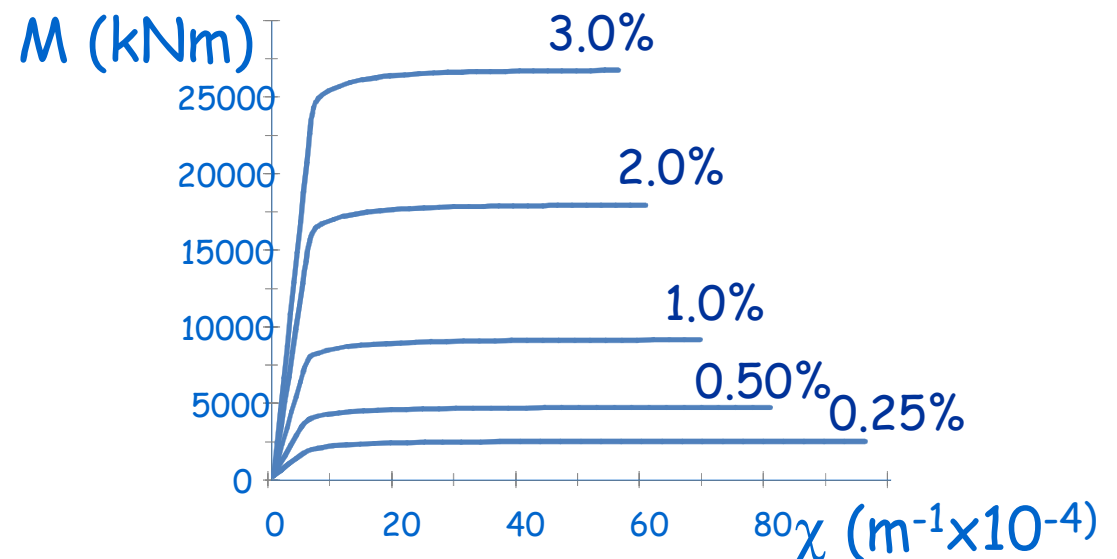


$A_s$  uniformemente  
distribuita lungo  
la sezione



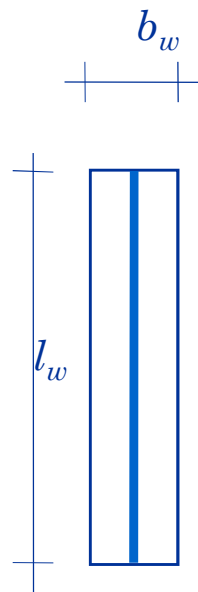
$A_s = 0.25\% b_w l_w$   
uniformemente  
distribuita

Il resto di  $A_s$   
concentrato agli  
estremi

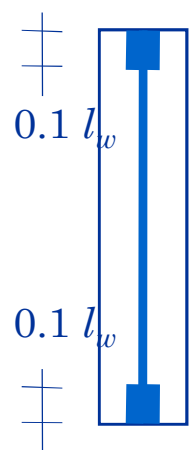




# Studio di Cardenas e Magura risultati

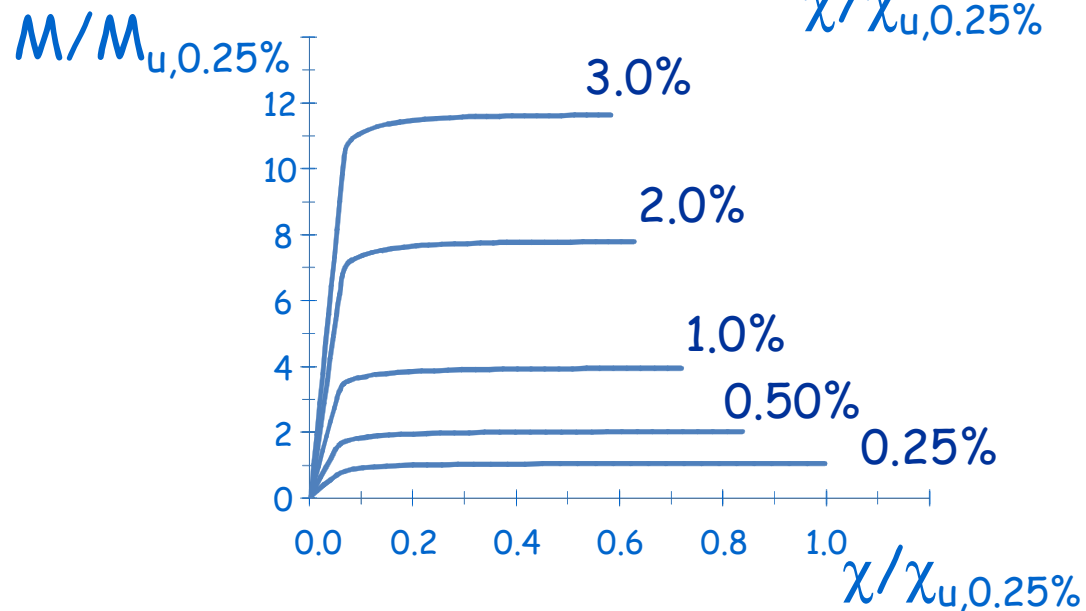
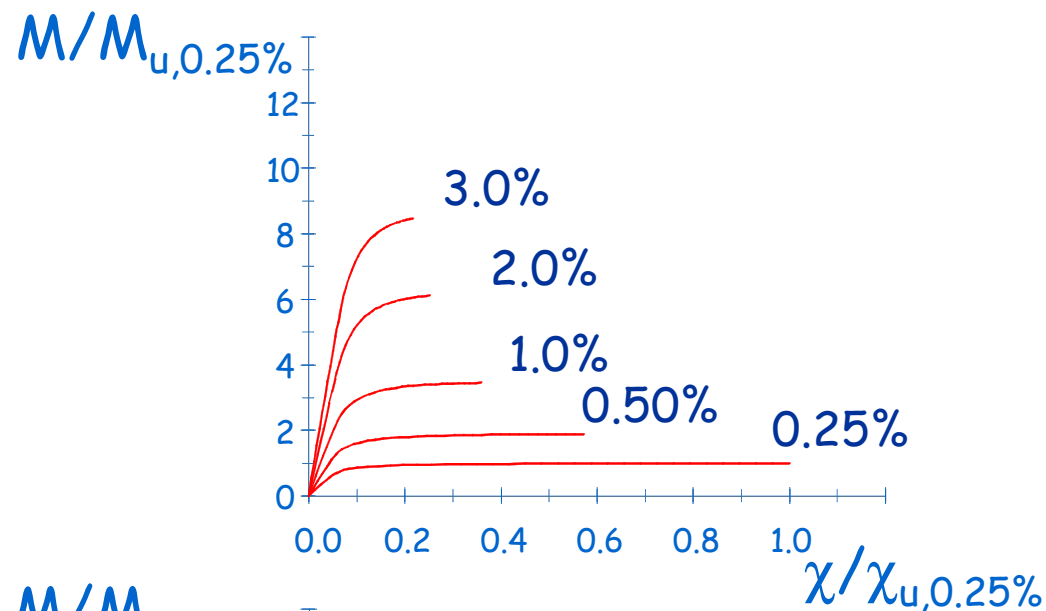


$A_s$  uniformemente  
distribuita lungo  
la sezione



$A_s = 0.25\% b_w l_w$   
uniformemente  
distribuita

Il resto di  $A_s$   
concentrato agli  
estremi



# Studio di Cardenas e Magura

## risultati

- Armatura con distribuzione uniforme
  - Aumentando la quantità di armatura si aumenta il momento resistente ma si riduce pesantemente la duttilità
- Armatura prevalentemente alle estremità
  - A parità di armatura complessiva si ottiene un momento resistente superiore a quella precedente
  - All'aumentare della quantità di armatura la riduzione di duttilità disponibile è inferiore



Conviene concentrare l'armatura alle estremità

# Indicazioni di normativa

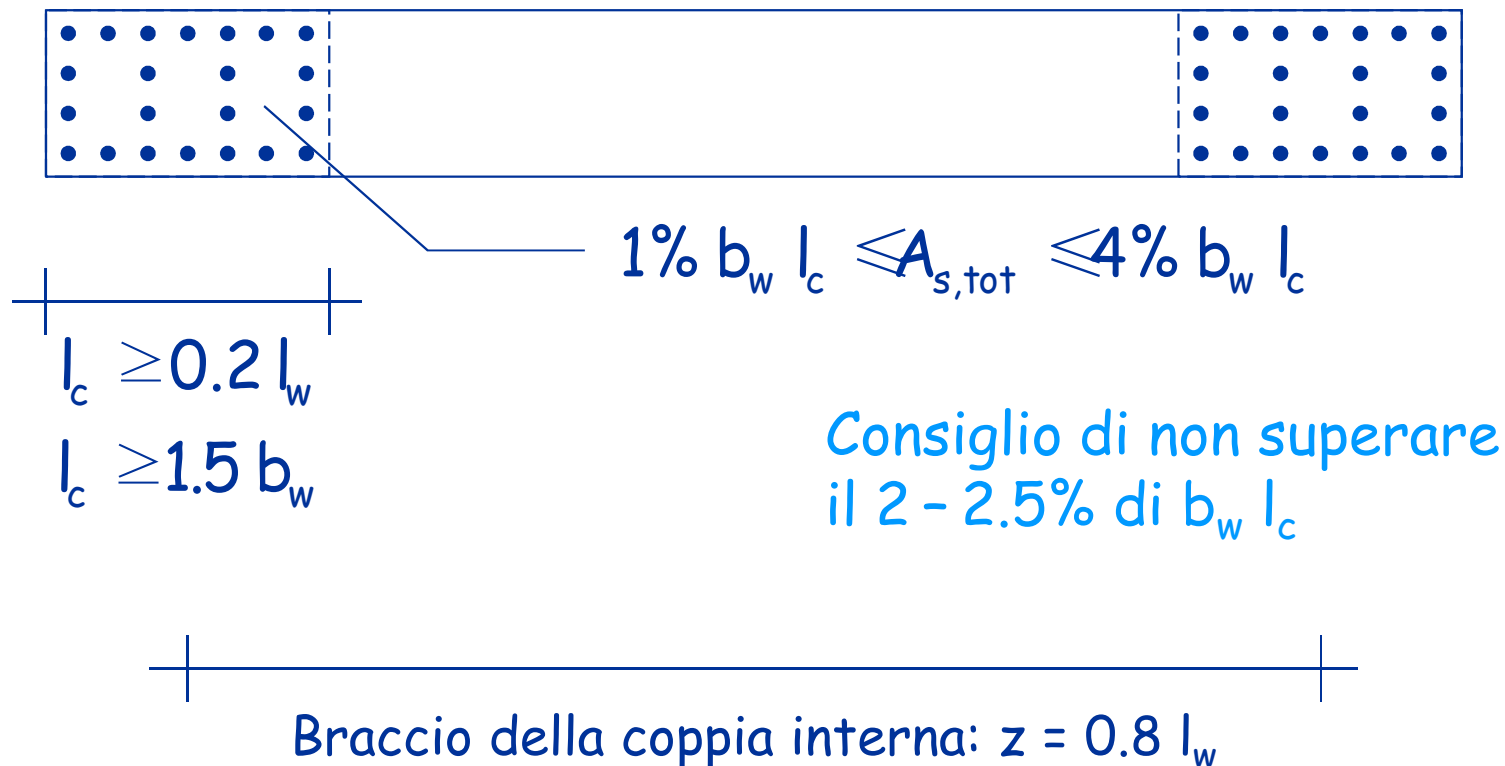
## zone di estremità

- Individuare zone alle estremità della sezione della parete, nelle quali è disposta una buona quantità di armatura longitudinale, ben confinata
  - La zona confinata deve estendersi per un tratto  $l_c$  fino a raggiungere il "punto dove il calcestruzzo non confinato può frantumarsi ed essere espulso per le grandi deformazioni di compressione"  
Eurocodice 8, punto 5.4.3.4.2(6)
  - La zona confinata deve estendersi per un tratto  $l_c$  "pari al 20% della lunghezza  $l_w$  in pianta della parete stessa e comunque non inferiore a 1.5 volte lo spessore della parete"  
NTC08, punto 7.4.6.2.4

# Indicazioni di normativa

## zone di estremità

- Nella zona confinata si deve disporre una armatura longitudinale adeguata



# Indicazioni di normativa

## zone di estremità

- Nella zona critica si individuano alle estremità della parete due zone confinate aventi per lati lo spessore della parete e una lunghezza "confinata"  $l_c$  pari al 20% della lunghezza in pianta  $l$  della parete stessa e comunque non inferiore a 1,5 volte lo spessore della parete. In tale zona il rapporto geometrico  $\rho$  dell'armatura totale verticale, riferito all'area confinata, deve essere compreso entro i seguenti limiti:

$$1\% \leq \rho \leq 4\%$$

# Indicazioni di normativa

## zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



# Instabilità delle barre



27-02-2010 , Cile



Foto P. Fajfar



# Le staffe si possono aprire o rompere



27-02-2010 , Cile

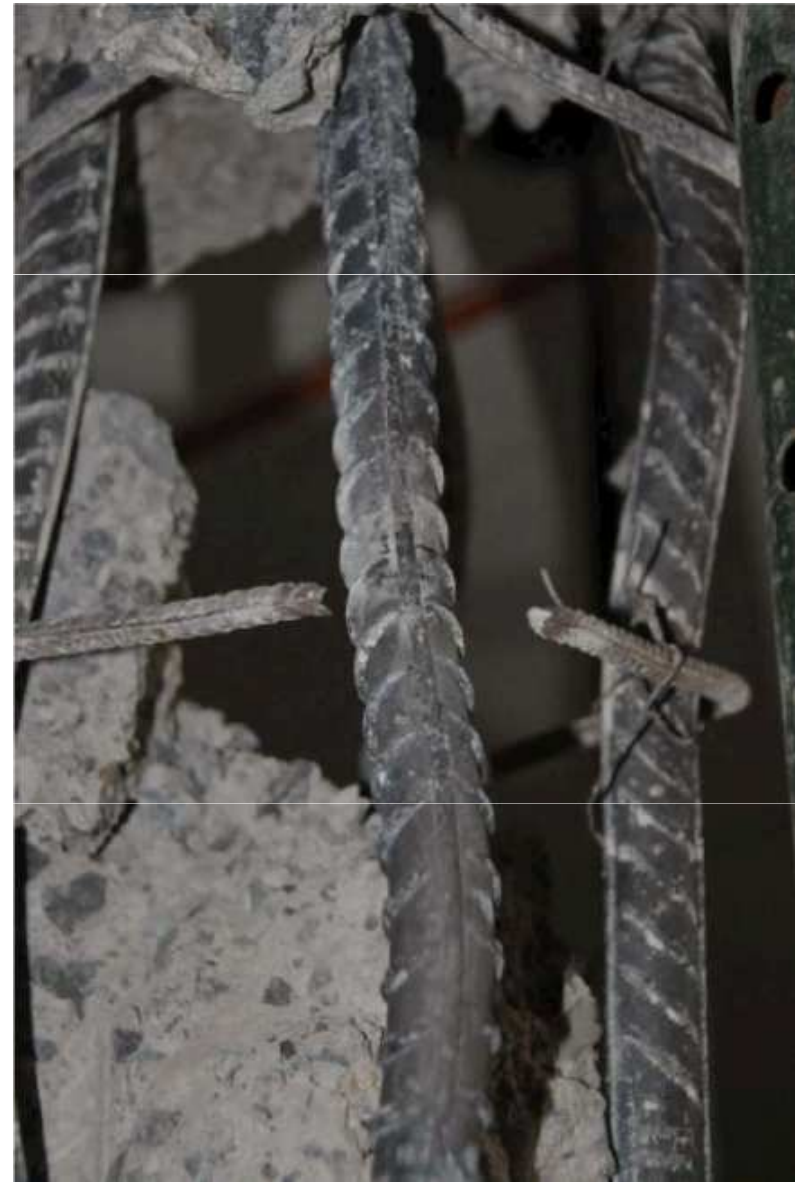


Foto P. Fajfar



# Disgregamento del nucleo di calcestruzzo



27-02-2010 , Cile



Foto P. Fajfar

# Indicazioni di normativa

## zone di estremità

- Durante il sisma la compressione che le zone confinate della parete devono sostenere ciclicamente è elevata



Per prevenire l'instabilità delle barre delle zone confinate e la disgregazione del nucleo di calcestruzzo occorre disporre una buona staffatura



Nelle zone confinate l'armatura trasversale deve essere costituita da barre di diametro **non inferiore a 6 mm**, disposti in modo da fermare una barra verticale ogni due con un passo non superiore a **8 volte il diametro della barra o a 10 cm**. Le barre non fissate devono trovarsi a **meno di 15 cm** da una barra fissata.

# Indicazioni di normativa

## zone di estremità

- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

### Zona critica

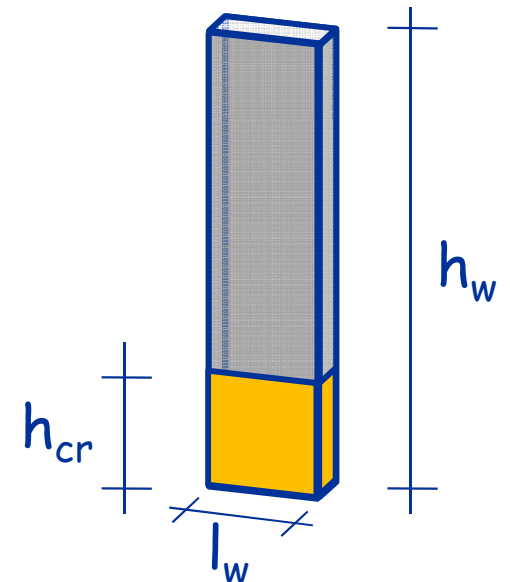
È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche, ovvero ...

... la porzione di parete di altezza  $h_{cr}$  al di sopra dell'incastro

$$h_{cr} = \max (l_w, h_w / 6)$$

$$h_{cr} \leq h_{1 \text{ piano}} \quad \text{per edifici fino a 6 piani}$$

$$h_{cr} \leq h_{2 \text{ piani}} \quad \text{edifici con più di 6 piani}$$



# Indicazioni di normativa zone di estremità

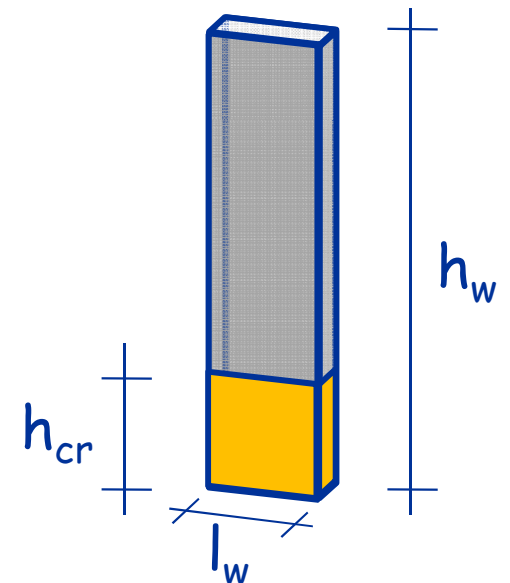
- Le prescrizioni valgono per la "zona critica" della parete

## Zona critica

È quella parte della parete che sarà interessata dalle deformazioni plastiche

## Al di fuori della zona critica

È comunque opportuno tenere presente le indicazioni precedenti, sia pure in maniera più blanda

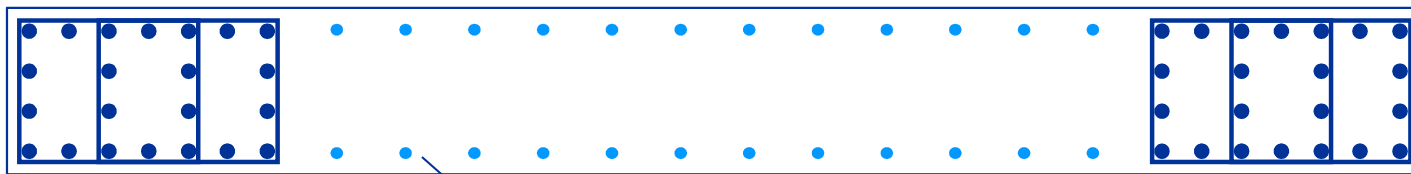


# Indicazioni di normativa

## zona centrale

- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

Questa armatura è sufficiente anche per la fessurazione da flessione nel piano di maggior rigidezza



$$A_s \geq 0.2\% A_c$$

Per flessione nel piano debole è tesa solo una fila di barre ed il minimo sarebbe  $0.15\% A_{c,tesa}$ , ovvero  $0.3\% A_{c,tot}$   
Questa flessione è però in genere trascurabile

# Indicazioni di normativa altre prescrizioni

## Nella zona centrale

- Nella rimanente parte della parete, in pianta ed in altezza, vanno seguite le regole delle condizioni non sismiche, con un'armatura minima orizzontale e verticale pari allo 0.2%, per controllare la fessurazione da taglio

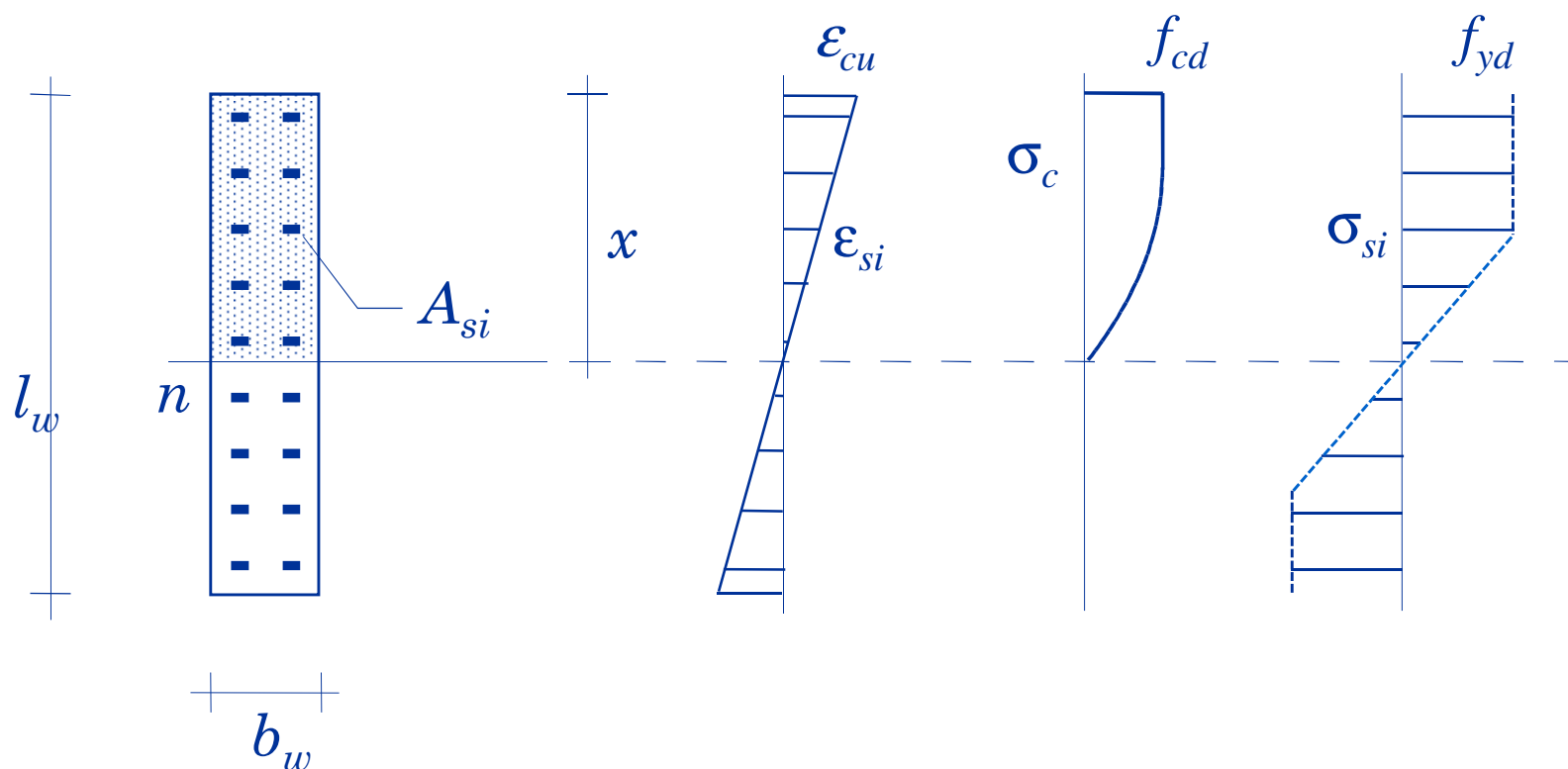
## In tutta la parete

- Le armature, sia orizzontali che verticali, devono avere diametro non superiore ad  $1/10$  dello spessore della parete, devono essere disposte su entrambe le facce della parete, ad un passo non superiore a 30 cm, devono essere collegate con legature, in ragione di almeno nove ogni metro quadrato



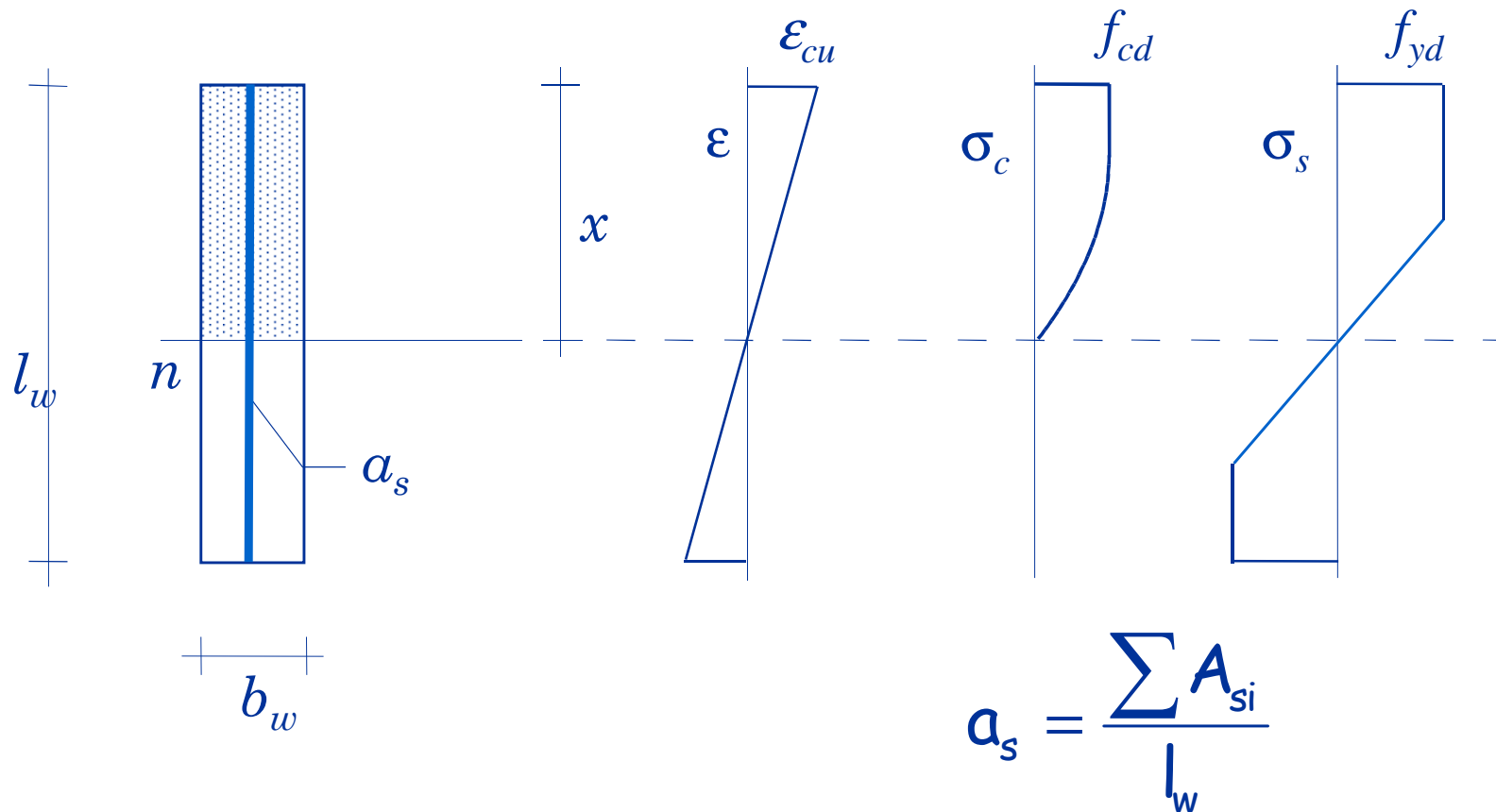
# Verifica a flessione composta per le pareti

- Il procedimento rimane quello generale, ma occorre tener conto del fatto che ci sono molte barre di armatura



# Verifica a flessione composta per le pareti

- Se vi è solo **armatura diffusa** lungo la parete, per semplificare i calcoli questa può essere pensata come uniformemente distribuita

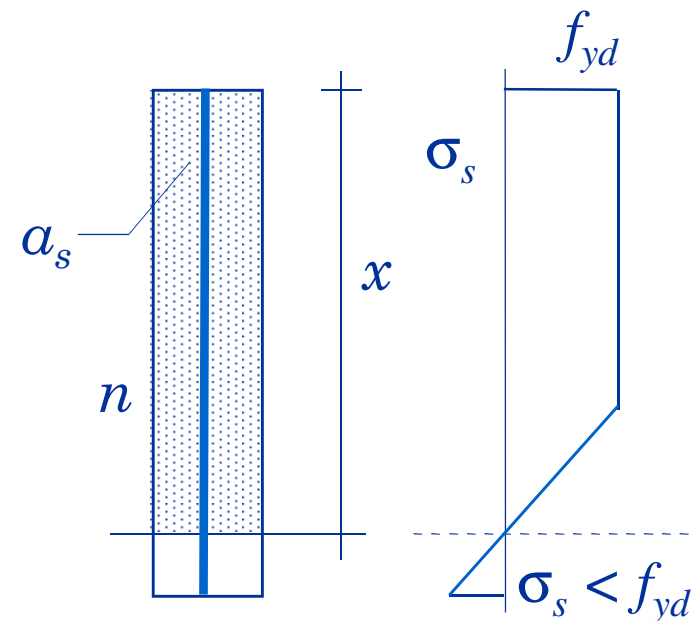
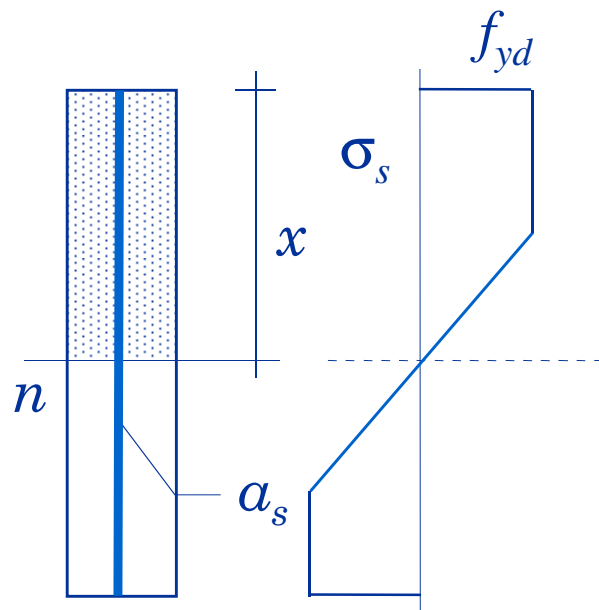




# Verifica a flessione composta per le pareti

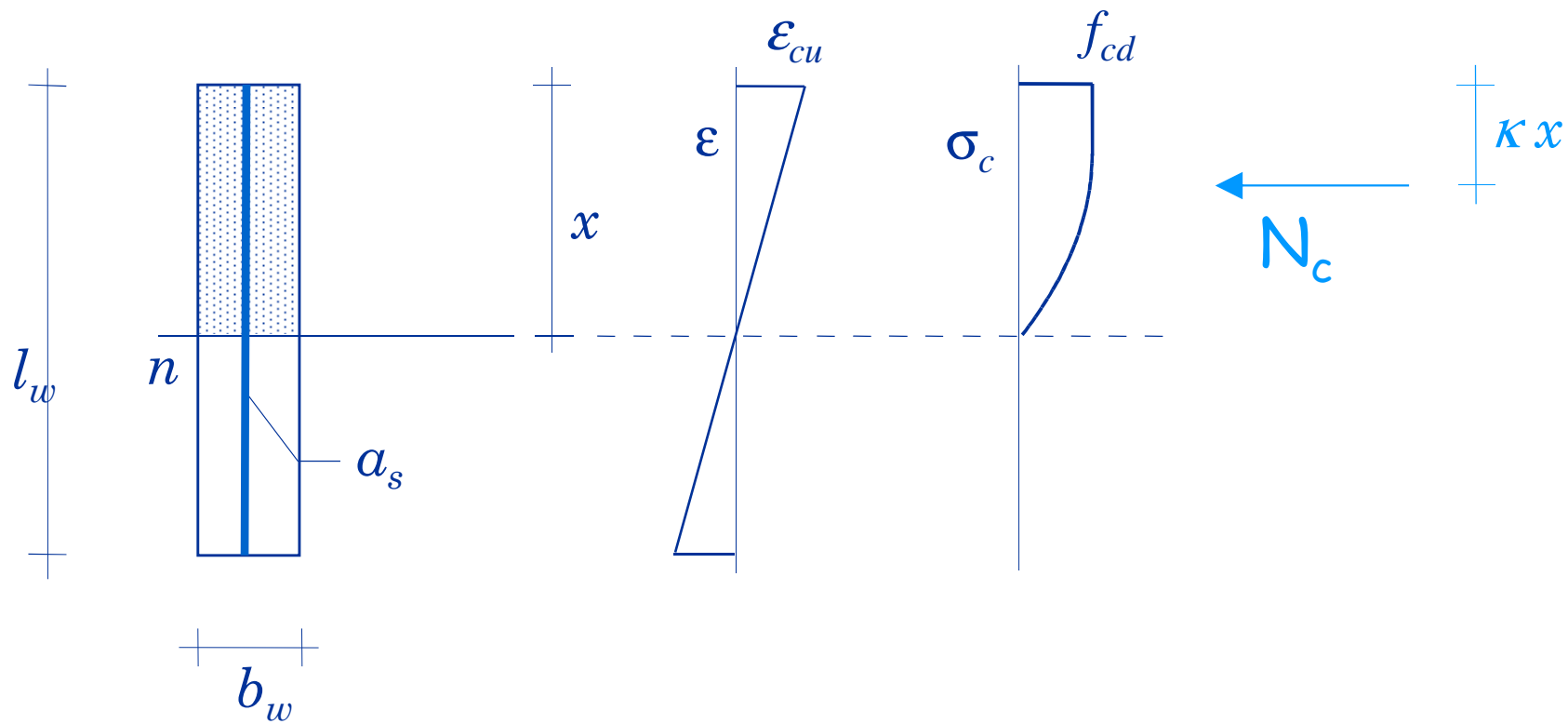
Possono verificarsi due casi

- L'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa (quasi sempre è così)
- L'armatura tesa è tutta in campo elastico



# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata

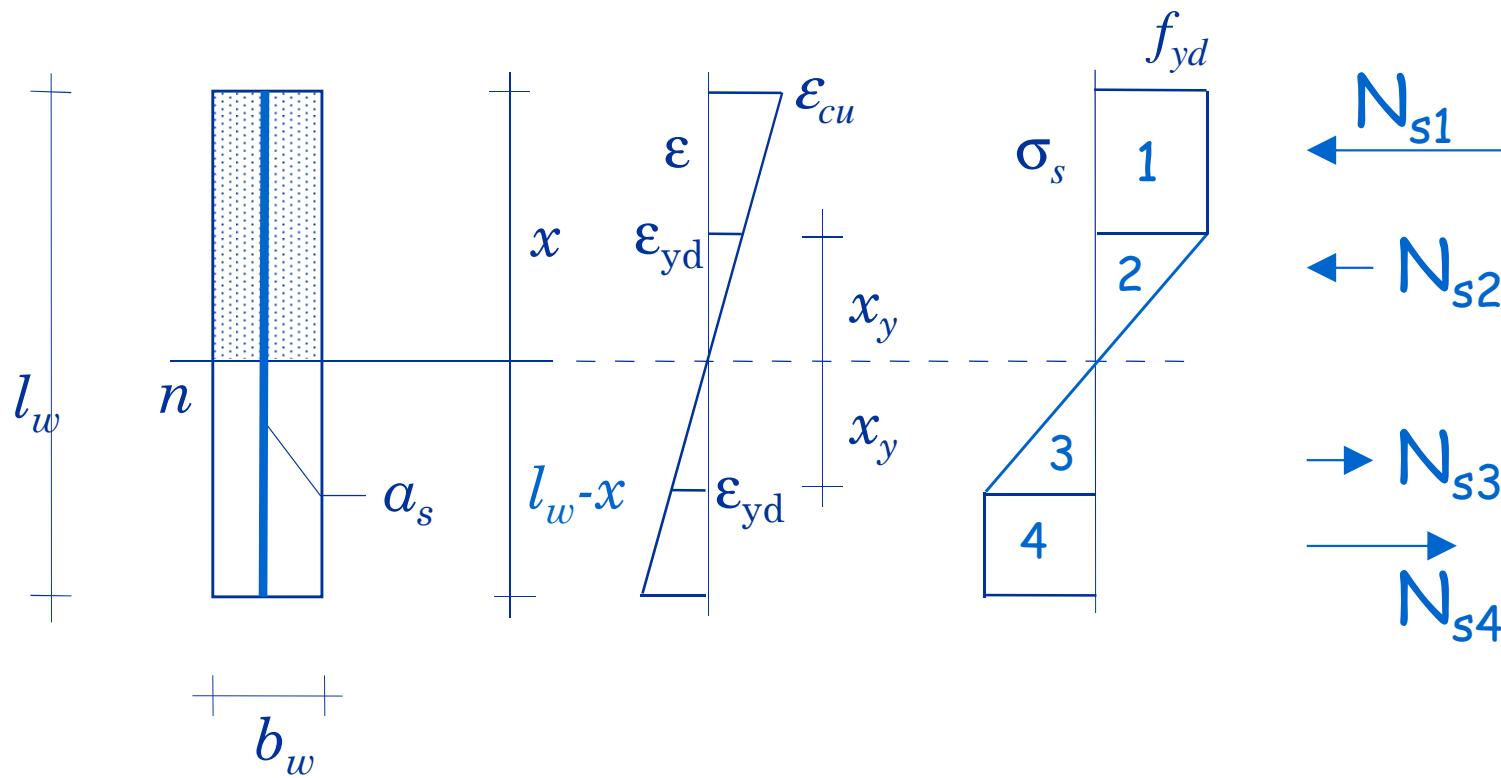


$$N_c = - \beta \ b \ x \ f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata

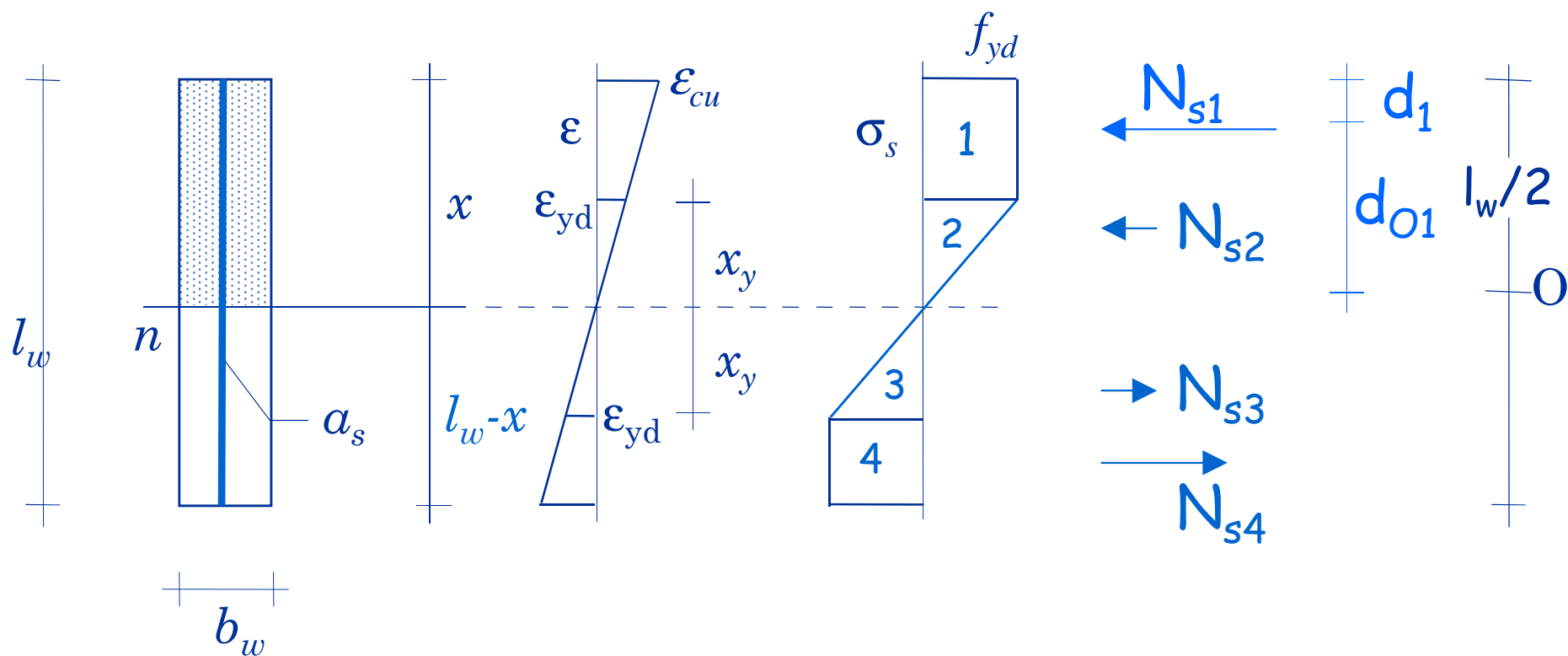


$x_y$  si può esprimere in funzione di  $x$

$$x_y = \frac{\epsilon_{yd}}{\epsilon_{cu}} x$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata



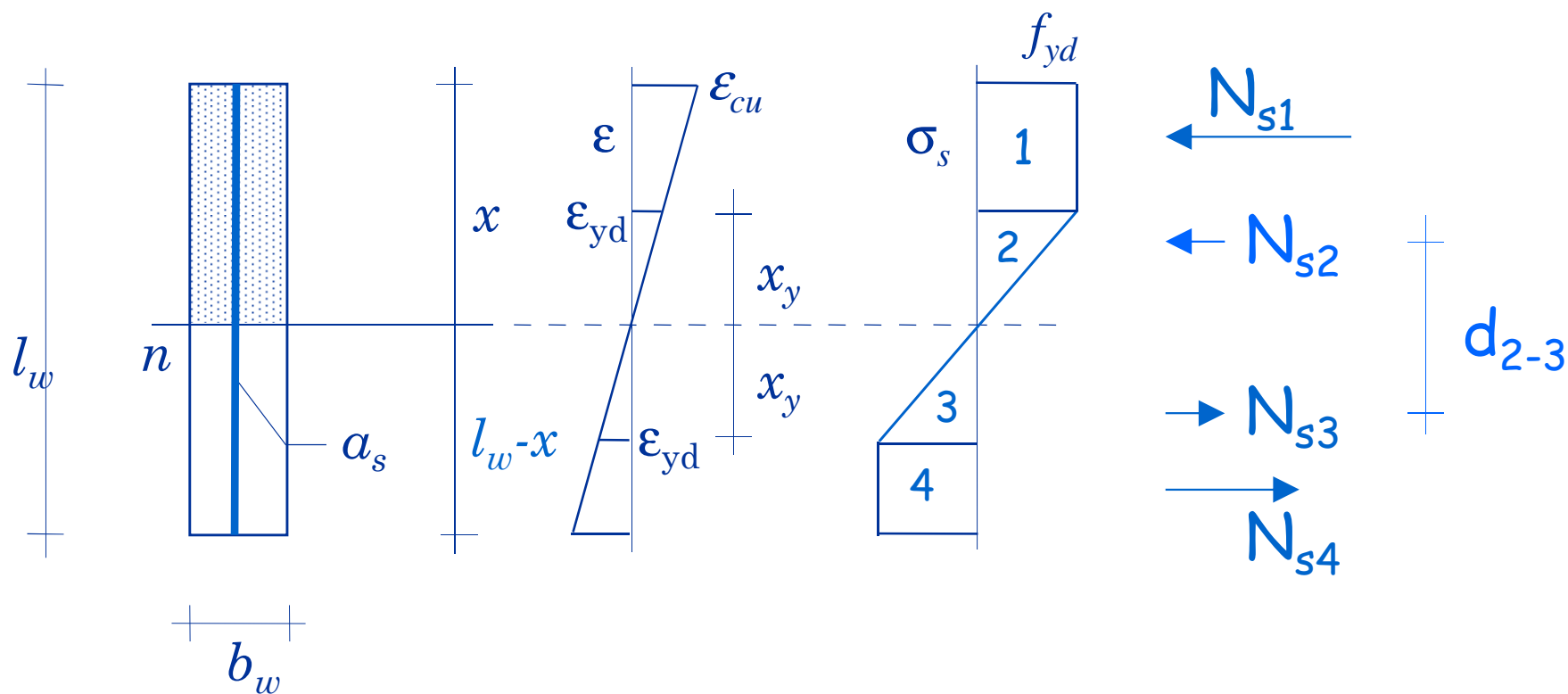
$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd}$$

$$d_1 = \frac{x - x_y}{2}$$

$$d_{O1} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata



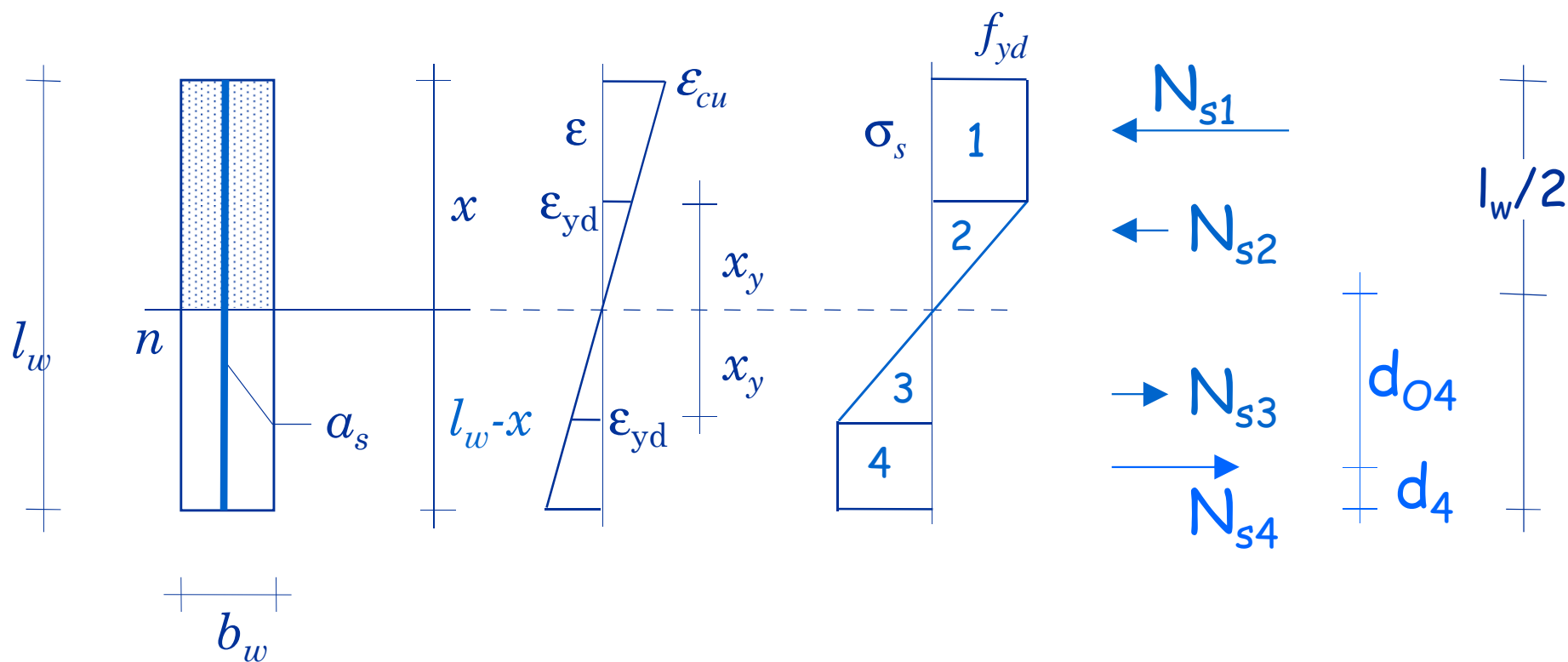
$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd}$$

$$N_{s3} = -N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd}$$

$$d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y$$

# Verifica a flessione composta

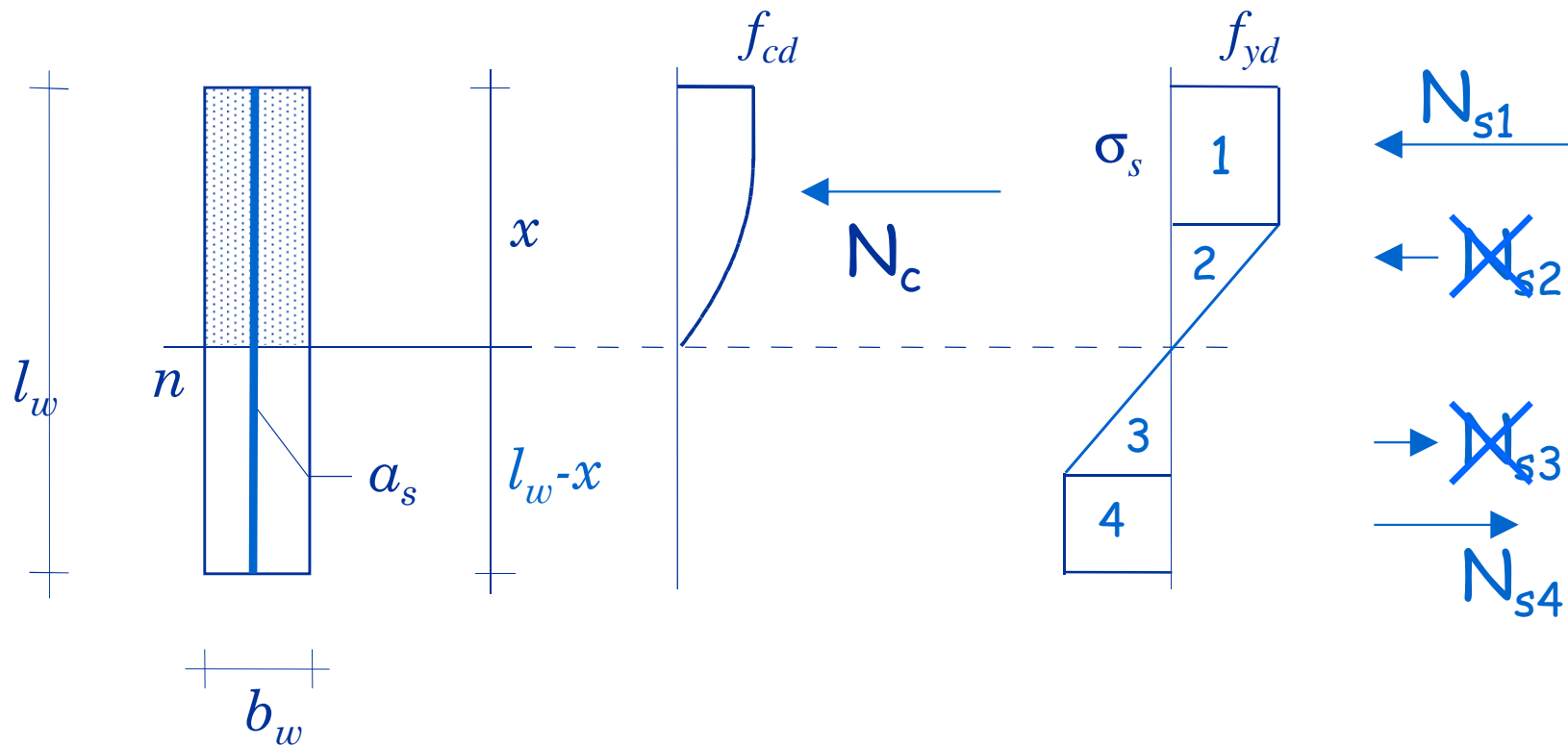
## armatura in zona tesa snervata



$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} \quad d_4 = \frac{l_w - x - x_y}{2} \quad d_{O4} = \frac{x + x_y}{2}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata

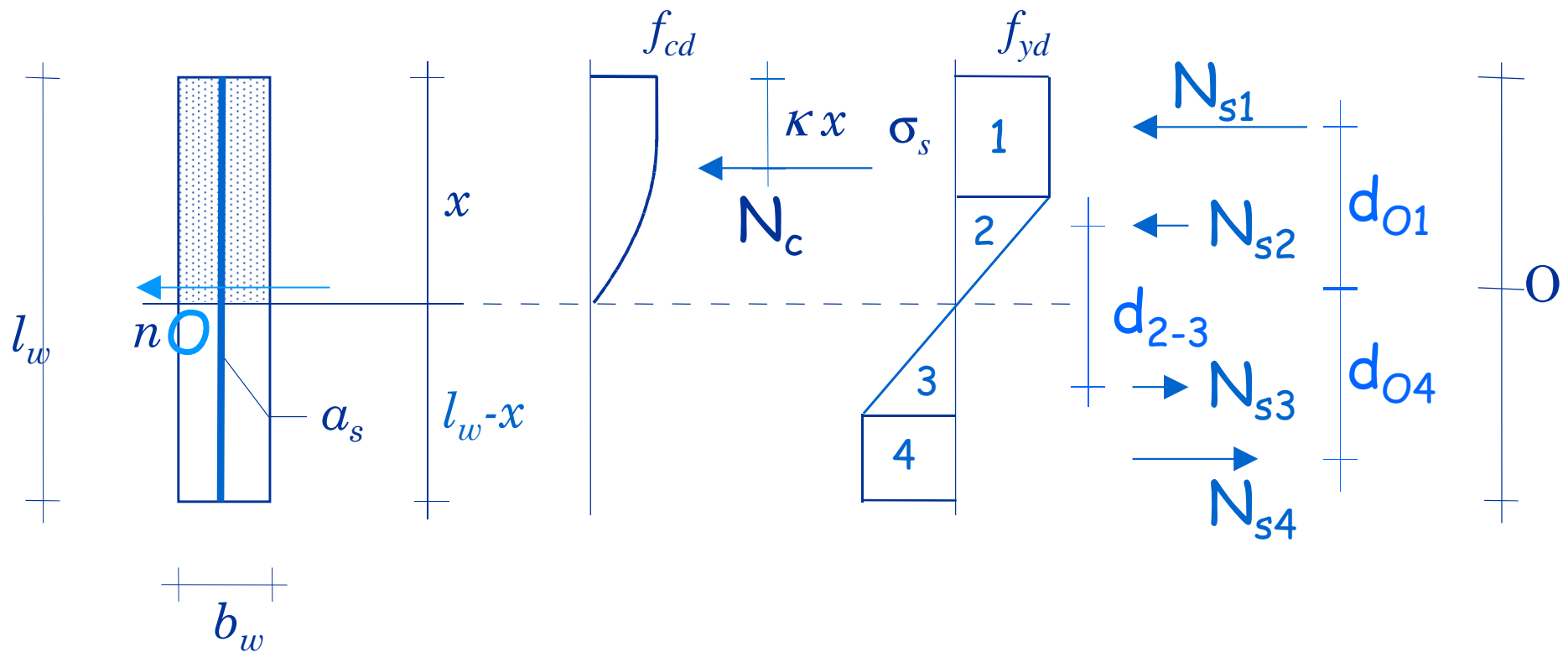


La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s4} = N_{Ed} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa snervata



Il momento resistente vale:

$$M_{Rd} = N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{O1} + N_{s4} d_{O4} - N_c (l_w / 2 - k x)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$



# Esempio 1

## armatura in zona tesa snervata

Parete 30x400

30  $\varnothing$  12

$A_{s,tot} = 33.9 \text{ cm}^2$

$a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

$N_{Ed} = -2000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

# Esempio 1

## individuazione dell'asse neutro

- Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} - N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} =$$
$$= \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 2000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 810 \text{ mm} = 81.0 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 81.0}{81.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 13.8 \times 10^{-3}$$

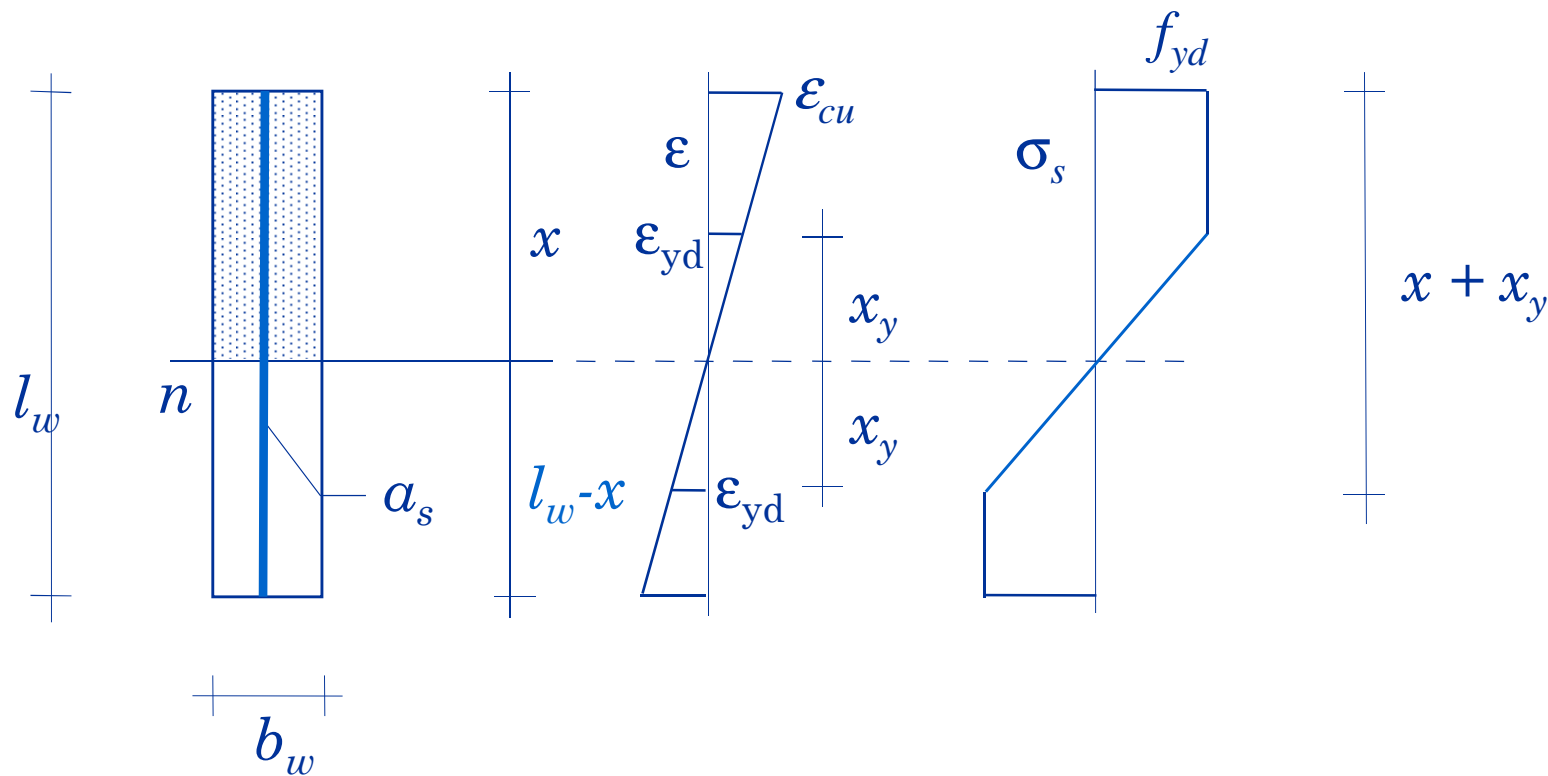
Poiché  $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$  ( $1.86 \times 10^{-3}$ ) la posizione trovata è esatta

Si ha inoltre

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 81.0 = 43.1 \text{ cm}$$

# Esempio 1

## individuazione dell'asse neutro



Nota: l'armatura in zona tesa è snervata se  $x + x_y < l_w$

$$x + x_y = 81.0 + 43.1 = 124.1 \text{ cm} < l_w = 400 \text{ cm}$$

Poiché  $x + x_y < l_w$  l'armatura è snervata e la posizione trovata è esatta

# Esempio 1

## calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$N_c = -\beta b_w \times f_{yd} = -0.81 \times 20 \times 81.0 \times 14.1 / 10 = -2789.7 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 37.9 \times 391.3 / 10 = -125.8 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 43.1 \times 391.3 / 10 = -71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = -N_{s2} = 71.6 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = a_s (l_w - x - x_y) f_{yd} = 8.48 \times 275.8 \times 391.3 / 10 = 915.5 \text{ kN}$$

# Esempio 1

## calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$d_{O1} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{81.0 - 43.1 - 500}{2} = -181.1 \text{ cm}$$

$$d_{2-3} = \frac{4}{3} x_y = \frac{4}{3} 43.1 = 57.5 \text{ cm}$$

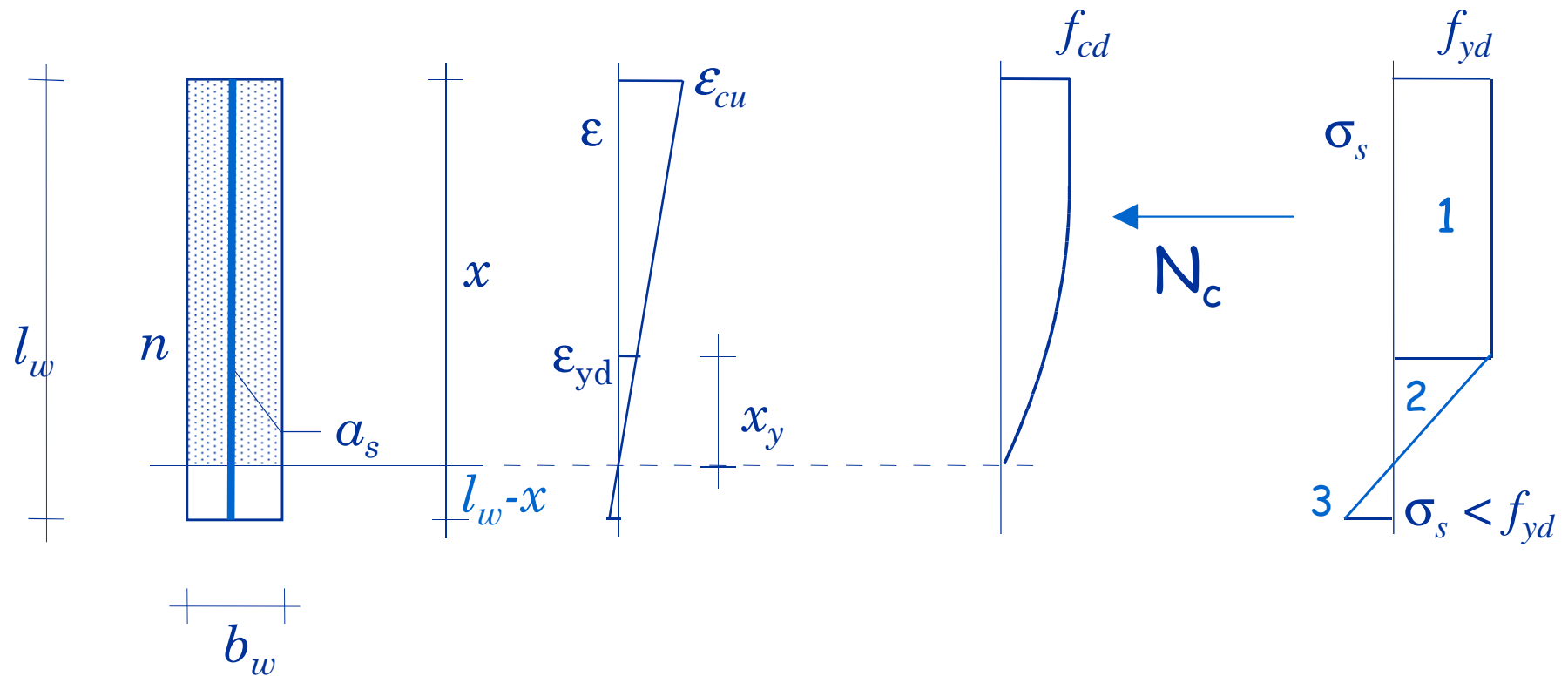
$$d_{O4} = \frac{x + x_y}{2} = \frac{81.0 + 43.1}{2} = 62.1 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= N_{s3} d_{2-3} + N_{s1} d_{O1} + N_{s4} d_{O4} - N_c (l_w / 2 - k x) = \\ &= 5476.3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

la sezione è verificata

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata



$x_y$  ed  $N_c$  si calcolano come nel caso precedente

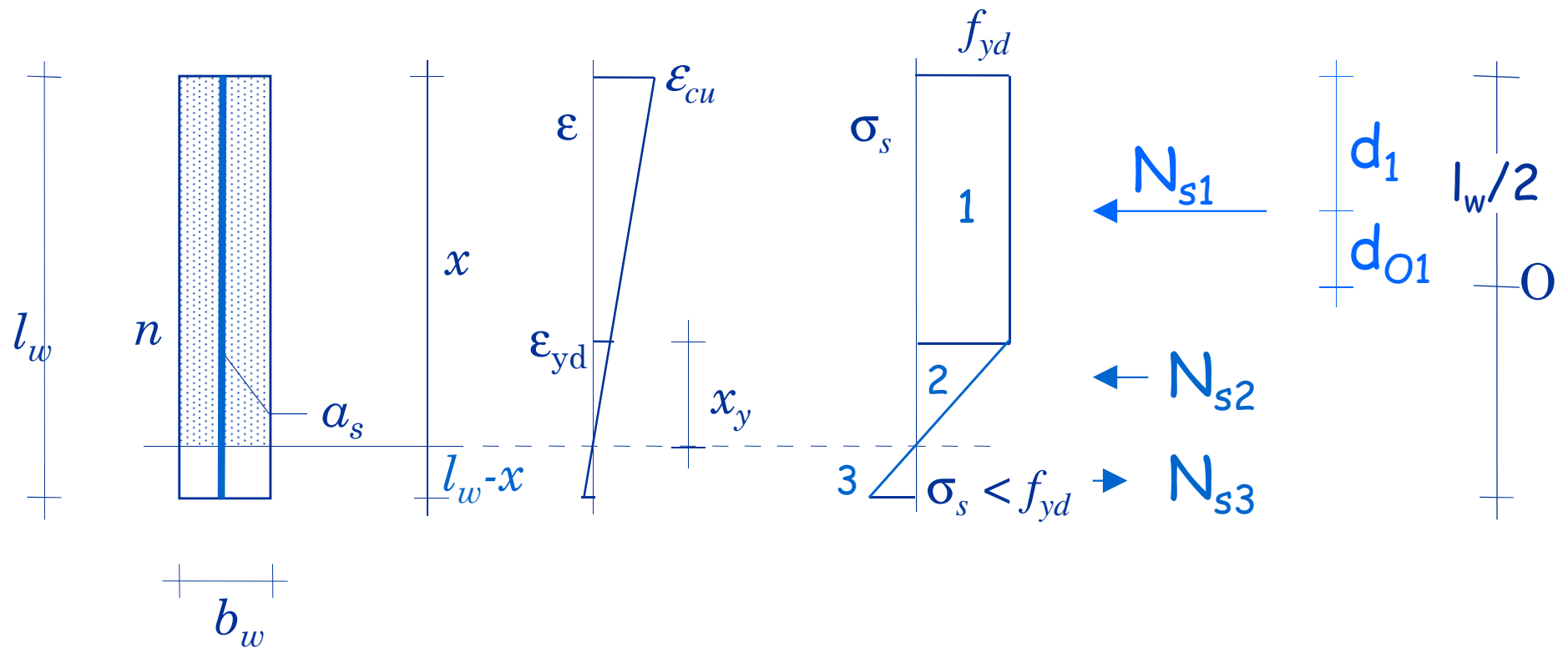
$$x_y = \frac{\epsilon_{yd}}{\epsilon_{cu}} x$$

$$N_c = - \beta \ b \ x \ f_{cd}$$

$$\beta = 0.810$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata

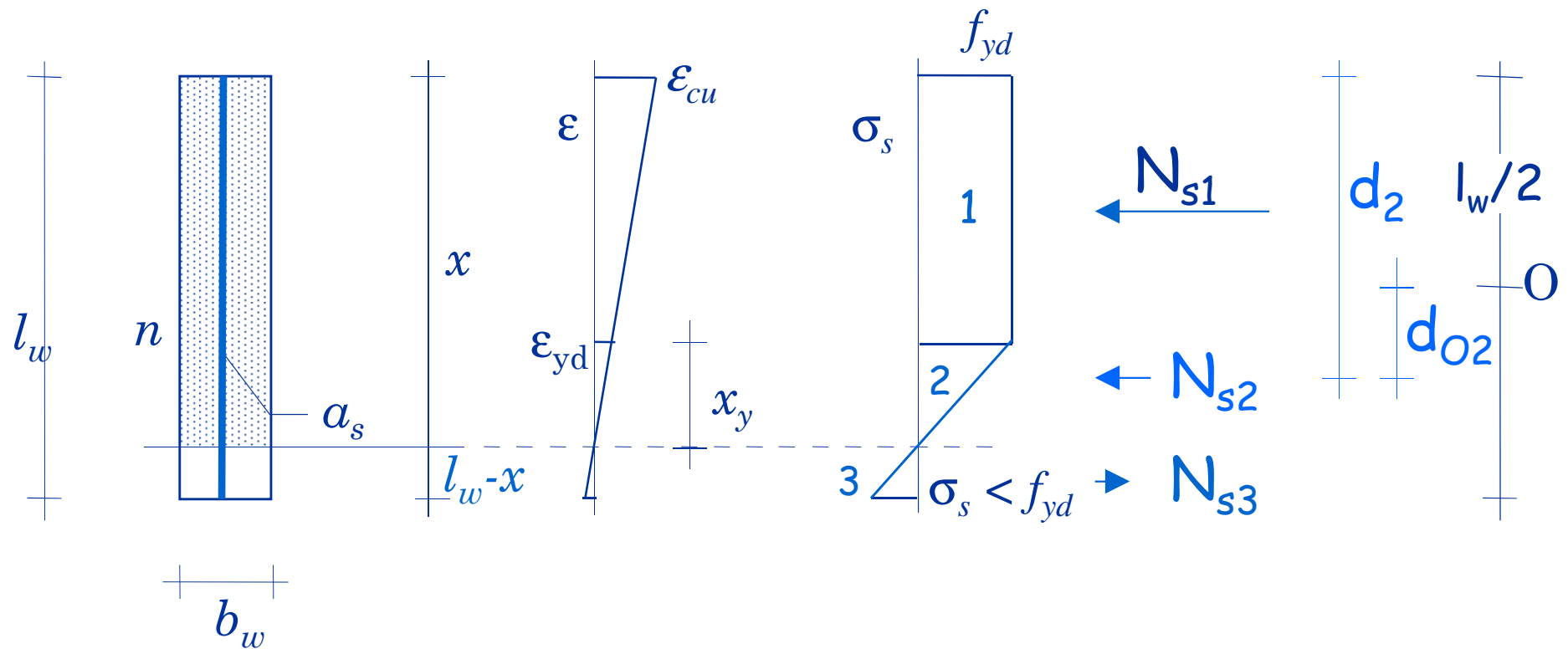


$N_{s1}$ ,  $d_1$  e  $d_{O1}$  si calcolano come nel caso precedente

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} \quad d_1 = \frac{x - x_y}{2} \quad d_{O1} = \frac{x - x_y - l_w}{2}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata



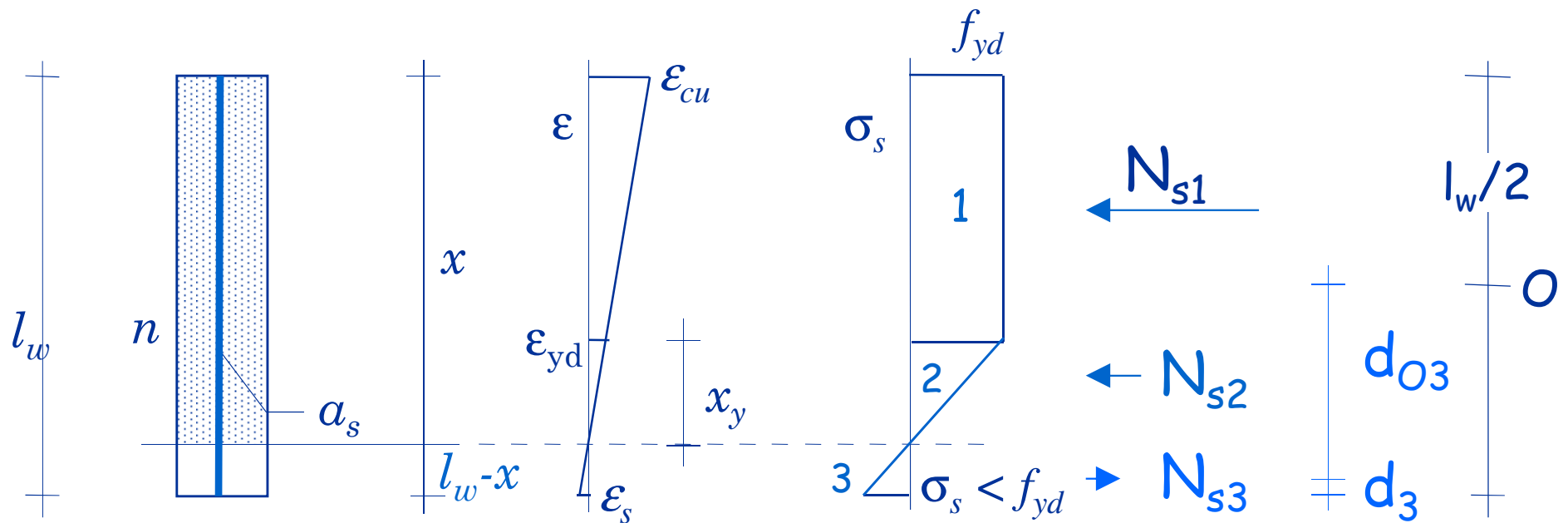
$N_{s2}$  e  $d_2$  si calcolano come nel caso precedente

$$N_2 = -\frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} \quad d_2 = x - \frac{2}{3} x_y \quad d_{o2} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2}$$



# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata



$$N_{s3} = \frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s$$

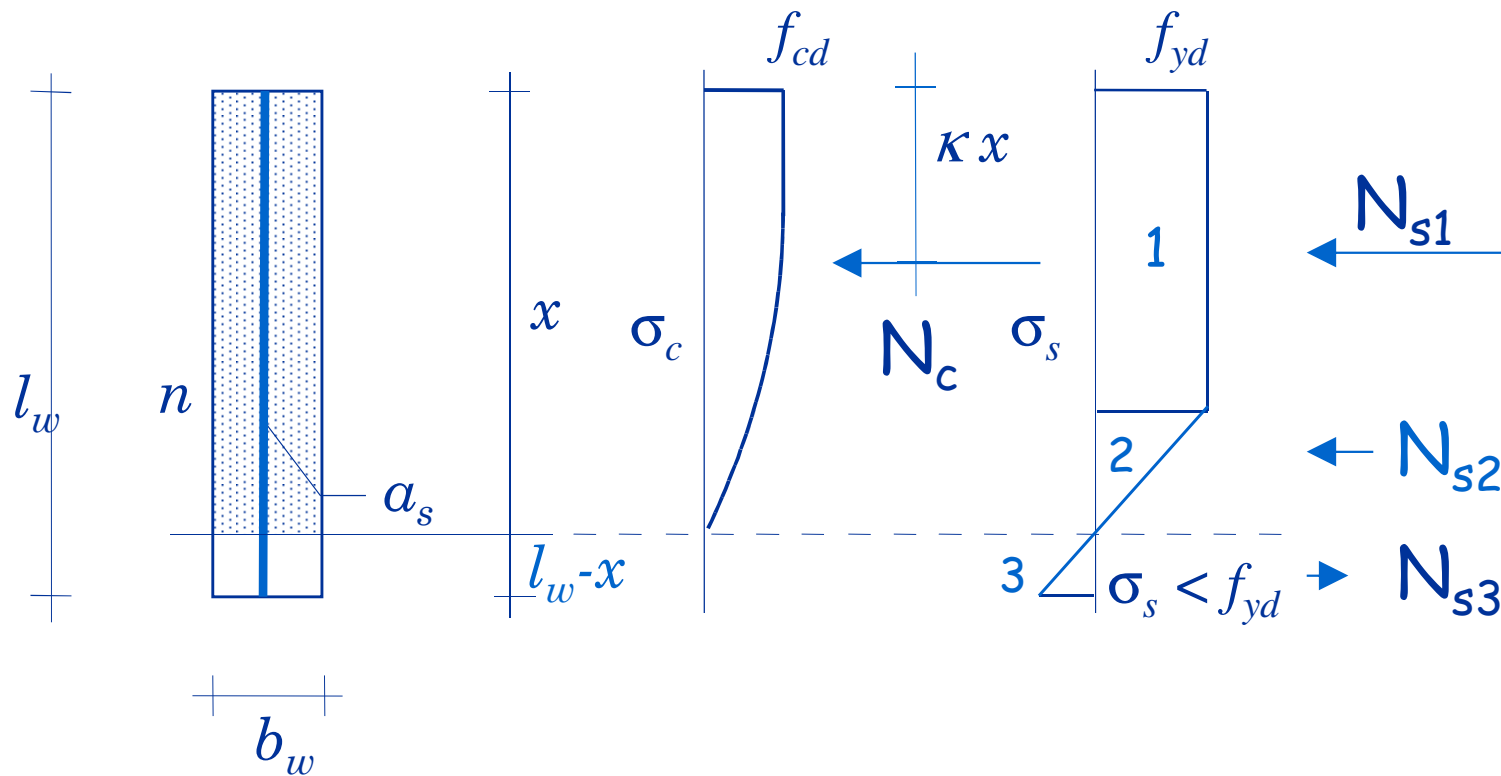
$$\sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{l_w - x}{x_y} f_{yd}$$

$$d_3 = \frac{l_w - x}{3}$$

$$d_{03} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata



La posizione dell'asse neutro si ricava risolvendo l'equazione:

$$N_c + N_{s1} + N_{s2} + N_{s3} = N_{Ed}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata

... che con qualche passaggio diventa:

$$\left\{ a_s \left[ \frac{1}{2} - \left( 1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2 \varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \right\} x^2 - \left( a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right) x + \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd} = 0$$

ovvero  $A x^2 + B x + C = 0$

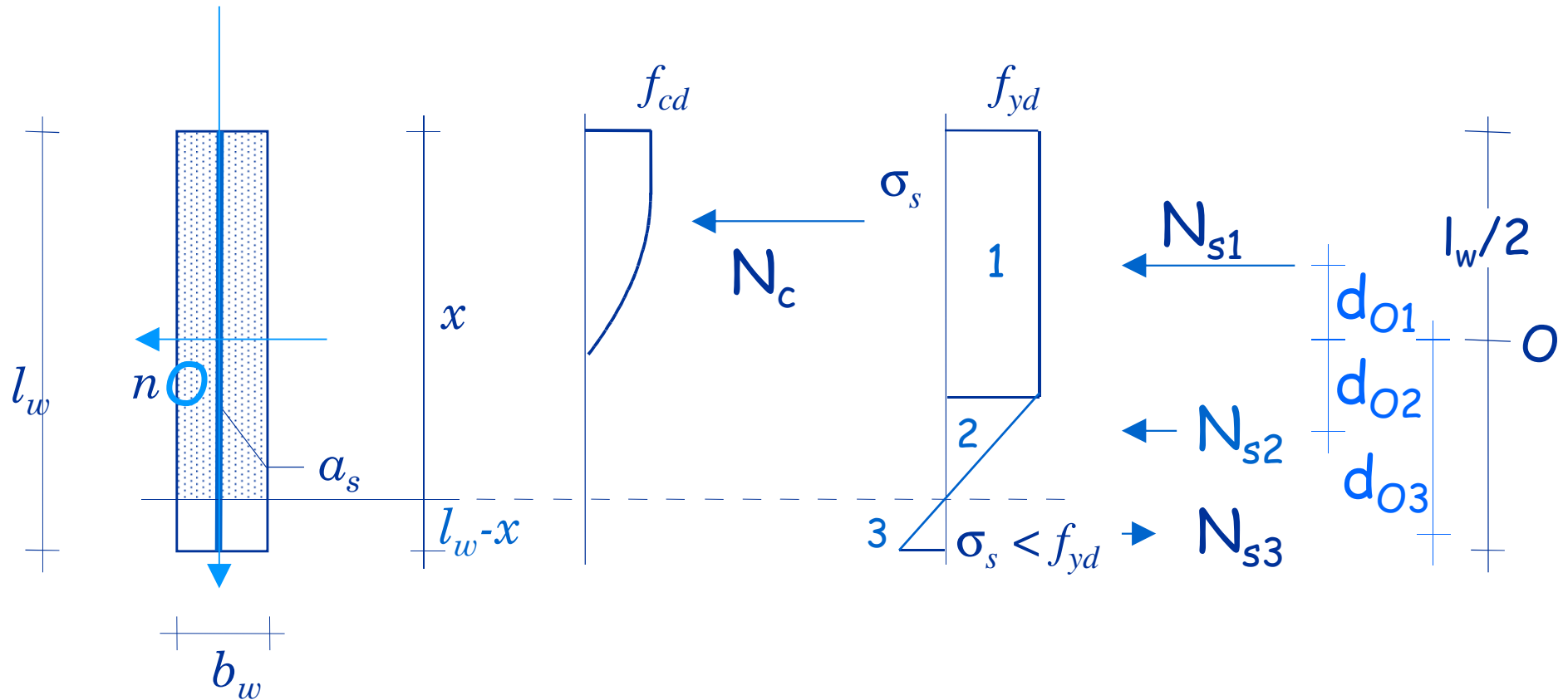
con

$$A = a_s \left[ \frac{1}{2} - \left( 1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{2 \varepsilon_{cu}} \right) \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right] f_{yd} - \beta b_w \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} f_{cd}$$

$$B = - \left( a_s l_w f_{yd} + \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} N_{Ed} \right) \quad C = \frac{1}{2} a_s l_w^2 f_{yd}$$

# Verifica a flessione composta

## armatura in zona tesa non snervata



$$M_{Rd} = N_{s1} d_{O1} + N_{s2} d_{O2} + N_{s3} d_{O3} + N_c (-l_w/2 + \kappa x)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

# Esempio 2

armatura in zona tesa non snervata ?

Parete 30x400

30  $\varnothing$  12

$A_{s,tot} = 33.9 \text{ cm}^2$

$a_s = 8.48 \text{ cm}^2/\text{m}$

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

$N_{Ed} = -10000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 4500 \text{ kNm}$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si ipotizza che l'armatura è snervata sia in zona tesa che in zona compressa, si controlla se è vero e in caso contrario si passa all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

Vedere foglio Excel "Flessione composta"

# Esempio 2

## individuazione dell'asse neutro

- Se l'armatura tesa è snervata

$$x = \frac{a_s l_w f_{yd} N_{Ed}}{2 a_s f_{yd} + \beta b_w f_{cd}} =$$
$$= \frac{8.48 \times 400 \times 391.3 + 10000 \times 10^3}{2 \times 8.48 \times 391.3 \times 10^{-1} + 0.81 \times 30 \times 14.1 \times 10^1} = 2759 \text{ mm} = 275.9 \text{ cm}$$

## Esempio 2

individuazione dell'asse neutro

- Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene  
 $x = 276.0 \text{ cm}$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon_s = \frac{l_w - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{400 - 276.0}{276.0} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.57 \times 10^{-3}$$

$$x_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} x = \frac{1.86}{3.5} \times 276.0 = 146.9 \text{ cm}$$

$$x + x_y = 276.0 + 146.9 = 422.9 \text{ cm} > 400 \text{ cm}$$

... dunque adesso la posizione dell'asse neutro è corretta

## Esempio 2

### calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$N_c = -\beta b_w \times f_{yd} = -0.81 \times 30 \times 276.0 \times 14.1 / 10 = -9501.4 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -a_s (x - x_y) f_{yd} = -8.48 \times 129.1 \times 391.3 / 10 = -428.4 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = \frac{1}{2} a_s x_y f_{yd} = -0.5 \times 8.48 \times 146.9 \times 391.3 / 10 = -243.9 \text{ kN}$$

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{1.57}{1.86} \times 391.3 = 330.2 \text{ MPa}$$

$$N_{s3} = -\frac{1}{2} a_s (l_w - x) \sigma_s = -0.5 \times 8.48 \times 124.0 \times 330.2 / 10 = 173.7 \text{ kN}$$



## Esempio 2

calcolo del momento resistente

- Si ha:

$$d_{O1} = \frac{x - x_y - l_w}{2} = \frac{276.0 - 129.1 - 400}{2} = -135.5 \text{ cm}$$

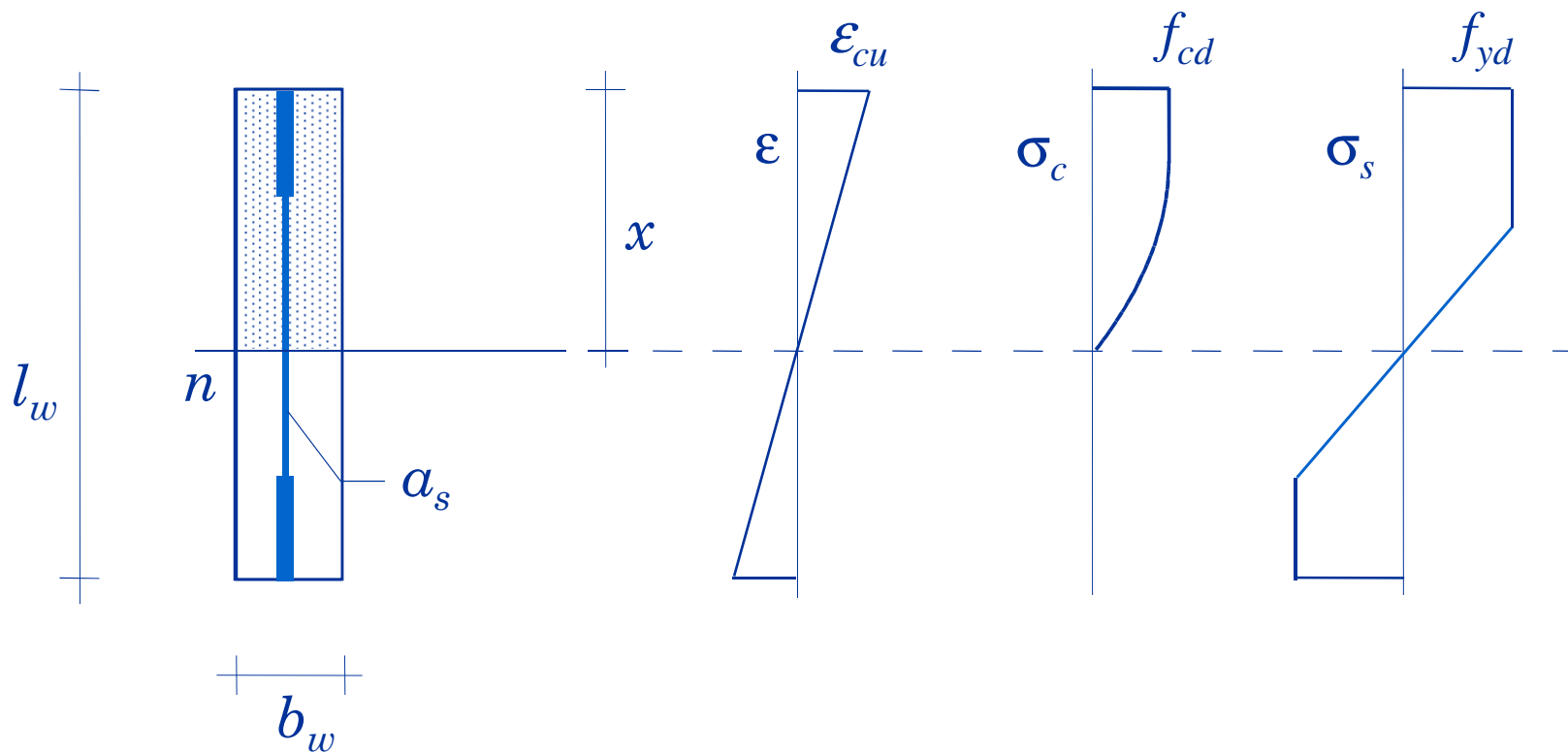
$$d_{O2} = x - \frac{2}{3} x_y - \frac{l_w}{2} = 276.0 - \frac{2}{3} 146.9 - \frac{400}{2} = -22.0 \text{ cm}$$

$$d_{O3} = \frac{l_w}{6} + \frac{x}{3} = \frac{400}{6} + \frac{276.0}{3} = 158.7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= N_{s1} d_{O1} + N_{s2} d_{O2} + N_{s3} d_{O3} + N_c (-l_w / 2 + k x) = \\ &= 9002.9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

la sezione è verificata

# Parete con armatura non uniforme



Le relazioni analitiche per il calcolo della posizione dell'asse neutro e del momento resistente diventano complesse, ma si può operare per via numerica

# Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura diffusa lungo tutta la parete fornisce un contributo flessionale ridotto a circa il 40% rispetto al caso di armatura concentrata agli estremi

# Verifica a flessione composta con armatura diffusa - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione  $b_w l_w$ ) con armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s,max} = 0.4 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

$$m = 2$$

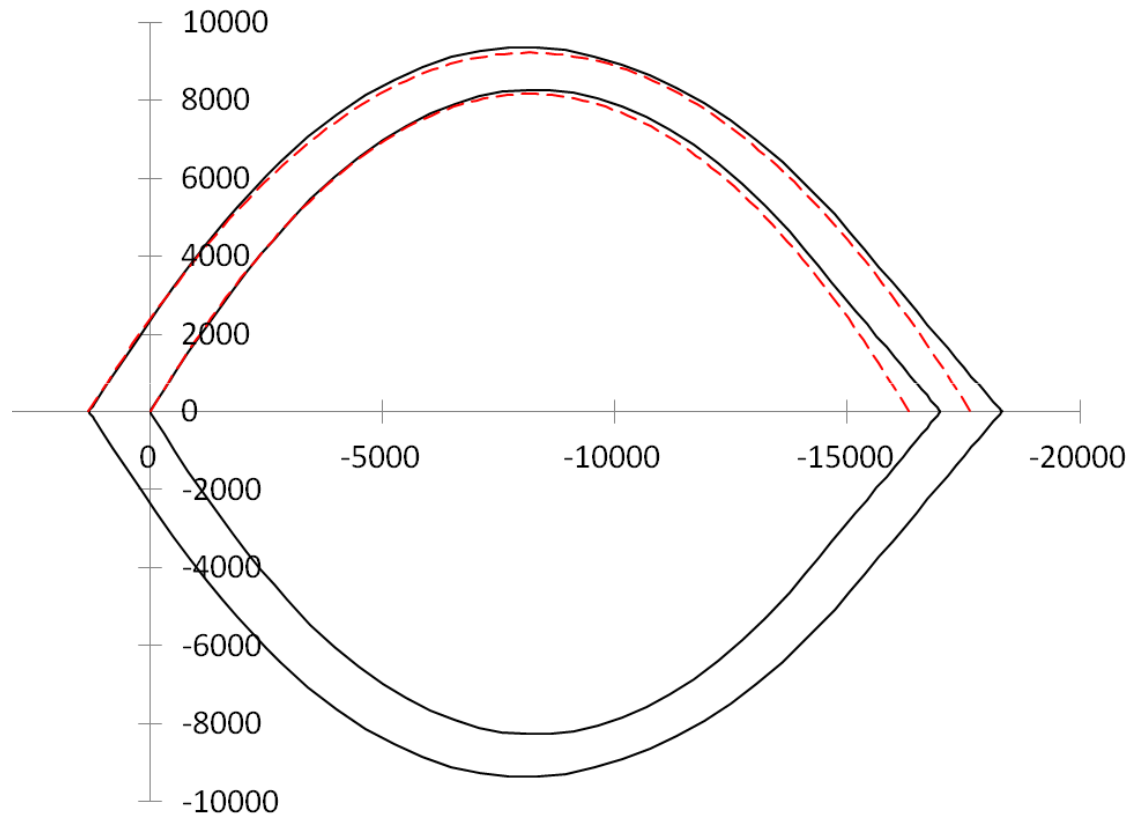
Nota:  
per armatura diffusa meglio  
usare sempre  $m=2$

con  $A_{s,par}$  = armatura distribuita (lungo un lato della parete)

# Confronto per armatura diffusa

## formula approssimata - valori esatti

- Sezione usata come esempio:  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e  
valori esatti (in nero)



# Verifica a flessione composta con armatura concentrata - formule approssimate

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto  $0.2 l_w$

# Verifica a flessione composta con armatura concentrata - formule approssimate

Formule semplificate nel caso di parete (di sezione  $b_w l_w$ ) con armatura concentrata in  $0.2 l_w$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48$$

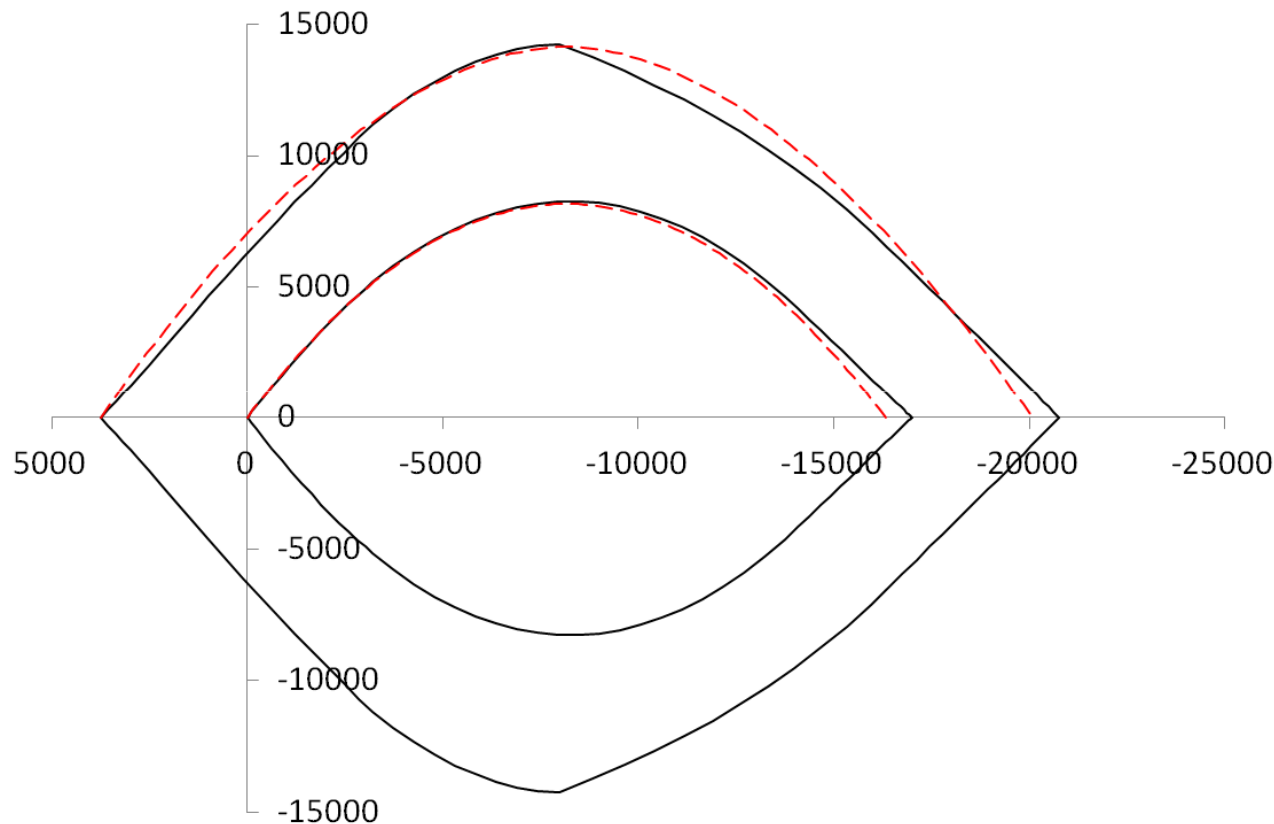
$$m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s,max} / N_{c,max}}$$

con  $A_{s,estr}$  = armatura all'estremità (nel singolo estremo)

# Confronto per armatura concentrata

## formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con  $A_{s,estr}=2\%$ :  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e  
valori esatti (in nero)





# Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

È possibile utilizzare formule approssimate

(vedi: A. Gherzi, Il cemento armato, 2010, pag. 306 e seguenti;  
A. Gherzi, P. Lenza, Edifici antisismici in c.a., 2009, pag. 217-218)

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

L'espressione generale è modificata tenendo conto che:

- L'armatura concentrata è disposta in un tratto  $0.2 l_w$
- L'armatura diffusa è disposta nel tratto centrale  $0.6 l_w$

# Verifica a flessione composta con armatura concentrata e distribuita

Formule semplificate nel caso di parete con  
armatura diffusa

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd}$$

$$N_{s-e,max} = 2 A_{s,estr} f_{yd}$$

$$N_{s-p,max} = 2 A_{s,par} f_{yd}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd}$$

$$M_{s-e,max} = 0.8 A_{s,estr} l_w f_{yd}$$

$$M_{s-p,max} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

$$v_M = 0.48 \quad m = 1 + \frac{1}{1 + 2 N_{s-e,max} / N_{c,max}}$$

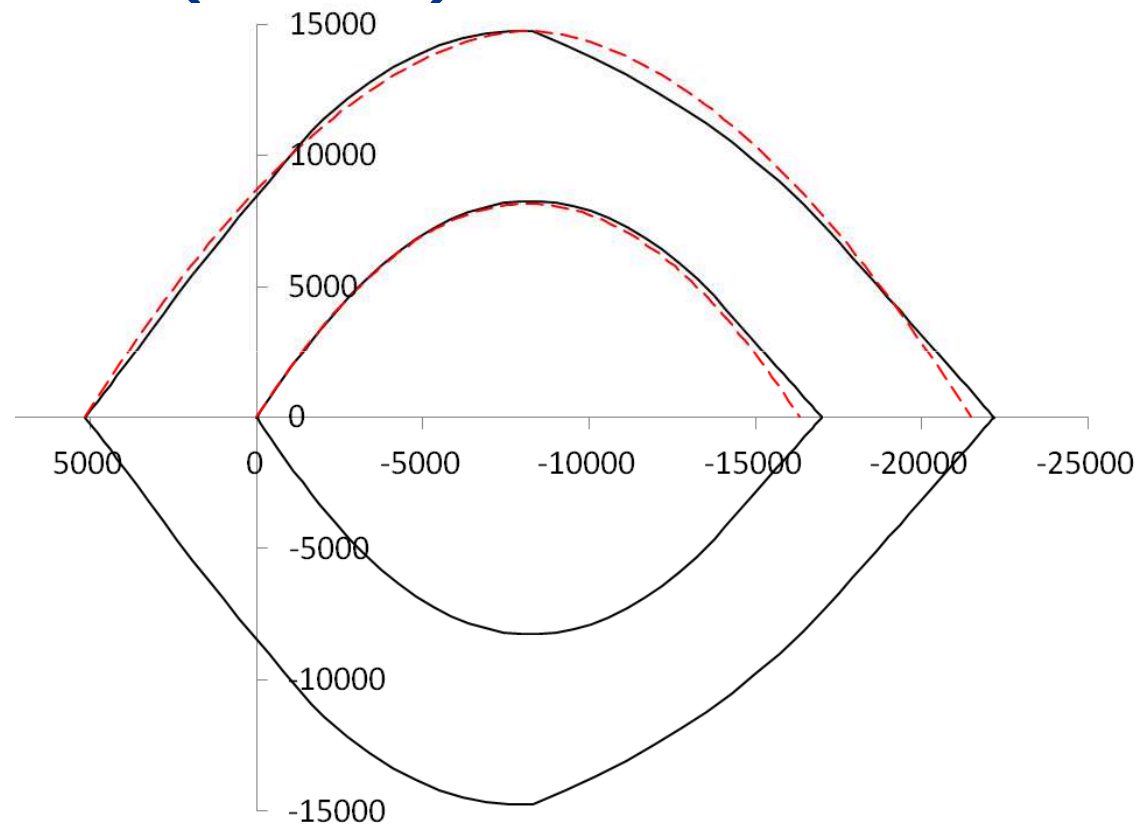
con  $A_{s,estr}$  = armatura all'estremità (nel singolo estremo)

$A_{s,par}$  = armatura nel tratto  $0.6 l_w$  della parete (su un lato)

# Confronto per armatura concentrata

## formula approssimata - valori esatti

- Sezione 30x400, con  $A_{s,estr}=2\%$  e armatura distribuita 12Ø16:  
differenze tra formula approssimata (in rosso) e valori esatti (in nero)



# Progetto dell'armatura a flessione composta

- Si suppone assegnata:
  - la dimensione della sezione
  - l'armatura disposta nel tratto centrale (se non impegnata per altre sollecitazioni)
- Si calcola il momento flettente che può portare il calcestruzzo e l'armatura del tratto centrale
- Si calcola l'armatura di estremità necessaria per portare la restante parte del momento flettente

# Progetto dell'armatura a flessione composta

- Momento flettente che può portare il calcestruzzo

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} \quad N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} \quad v_M = 0.48 \cong 0.5$$

- Momento flettente che può portare l'armatura del tratto centrale

$$M_{Rd(s-p)} = 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd}$$

# Progetto dell'armatura a flessione composta

- Armatura di estremità necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 I_w f_{yd}}$$

# Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a  
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con  
armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)
  - Momento flettente portato dal calcestruzzo

$$N_{c,max} = b_w l_w f_{cd} = 30 \times 550 \times 14.2 \times 10^{-1} = 23430 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = 0.12 b_w l_w^2 f_{cd} = 0.12 \times 30 \times 550^2 \times 14.2 \times 10^{-3} = 15464 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd(c,N)} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} + v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right] = 6111 \text{ kNm}$$

# Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Sezione soggetta a  
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con  
armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)
  - Momento flettente portato dalle barre di parete

$$\begin{aligned} M_{Rd(s-p)} &= 0.2 A_{s,par} l_w f_{yd} = \\ &= 0.2 \times 14.7 \times 550 \times 391.3 \times 10^{-3} = 633 \text{ kNm} \end{aligned}$$



# Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

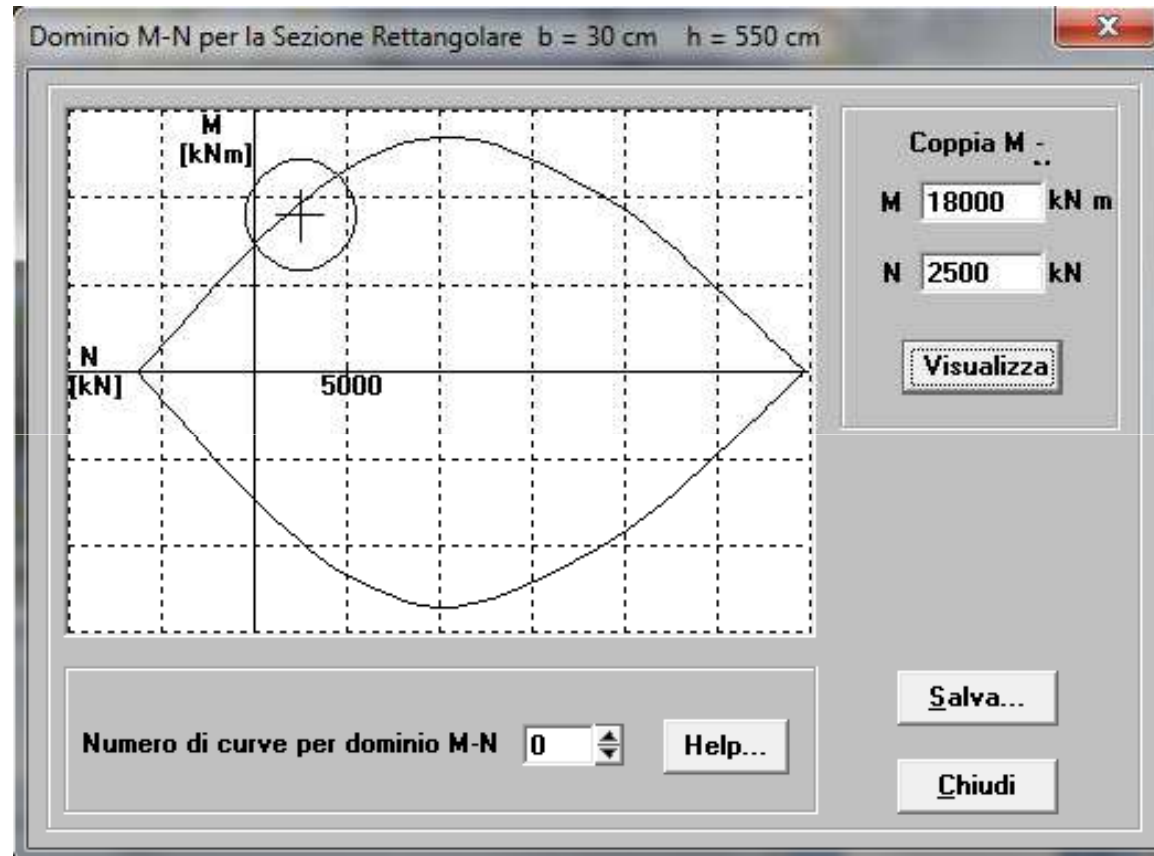
- Sezione soggetta a  
 $M_{Ed} = 18000 \text{ kNm}$ ,  $N_{Ed} = -2500 \text{ kNm}$  (compressione)
- Ho scelto di usare una sezione 30x550 con  
armatura di parete  $\varnothing 12/25$  ( $14.7 \text{ cm}^2$  per lato)
  - Armatura necessaria

$$A_{s,estr} = \frac{M_{Ed} - M_{Rd(c,N)} - M_{Rd(s-p)}}{0.8 l_w f_{yd}} =$$
$$= \frac{18000 - 6111 - 633}{0.8 \times 5.50 \times 391.3} \times 10 = 65.4 \text{ cm}^2$$

Zona cerchiata 30x110; l'armatura è l'1.98%

# Progetto dell'armatura a flessione composta - esempio

- Il confronto col programma EC2 conferma la correttezza del progetto



# Indicazioni bozza NTC 2015

## zone di estremità

Valgono i limiti stabiliti per i pilastri

	CD "A"	CD "B"
Diametro staffe:	$\phi_w \geq \max(6 \text{ mm}, 0.4 \phi_{l \max})$	$\phi_w \geq 6 \text{ mm}$
Passo staffe:	$s \leq 1/3 \text{ lato minore}$	$s \leq 1/2 \text{ lato minore}$
Per barre $\phi 20$ e $b_w = 30 \text{ cm}$	$s \leq 12.5 \text{ cm}$ $s \leq 6 \phi_l$	$s \leq 17.5 \text{ cm}$ $s \leq 8 \phi_l$

Ed inoltre ...

# Indicazioni bozza NTC 2015

## zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\omega_{wd}$  rapporto meccanico di armatura trasversale

$$\omega_{wd} = \frac{\text{volume staffe}}{\text{volume nucleo di calcestruzzo}} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

# Indicazioni bozza NTC 2015

## zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\alpha$  Coefficiente di efficacia del confinamento

$$\alpha = \alpha_n \alpha_s \quad \alpha_n = 1 - \frac{\sum b_i^2}{6 b_o h_o} \quad \alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right) \left(1 - \frac{s}{2 h_o}\right)$$

$b_o, h_o$  dimensioni del nucleo confinato

$b_i$  distanza tra due barre consecutive "contenute"

$s$  passo delle staffe

# Indicazioni bozza NTC 2015

## zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$\mu_{\phi}$       domanda di duttilità attesa

$$\mu_{\phi} = \begin{cases} 1.5 (2 q - 1) & \text{se } T_1 \geq T_c \\ 1.5 \left( 1 + 2(q - 1) \frac{T_c}{T_1} \right) & \text{se } T_1 < T_c \end{cases}$$

# Indicazioni bozza NTC 2015

## zone di estremità

... se si vuole evitare una verifica esplicita di duttilità

$$\alpha \omega_{wd} \geq 30 \mu_{\phi} (v_d + \omega_v) \varepsilon_{yd} \frac{b_c}{b_o} - 0.035$$

$v_d$  sforzo normale adimensionalizzato

$$v_d = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}$$

$\omega_v$  rapporto meccanico di armatura longitudinale al di fuori degli elementi di bordo

$$\omega_v = \rho_v \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

# Verifica esplicita di duttilità

## Indicazioni bozza NTC 2015

Nella zona critica della parete, la domanda di duttilità attesa:

$$\mu_{\phi} = \begin{cases} 1.5 (2 q - 1) & \text{se } T_1 \geq T_c \\ 1.5 \left( 1 + 2(q - 1) \frac{T_c}{T_1} \right) & \text{se } T_1 < T_c \end{cases}$$

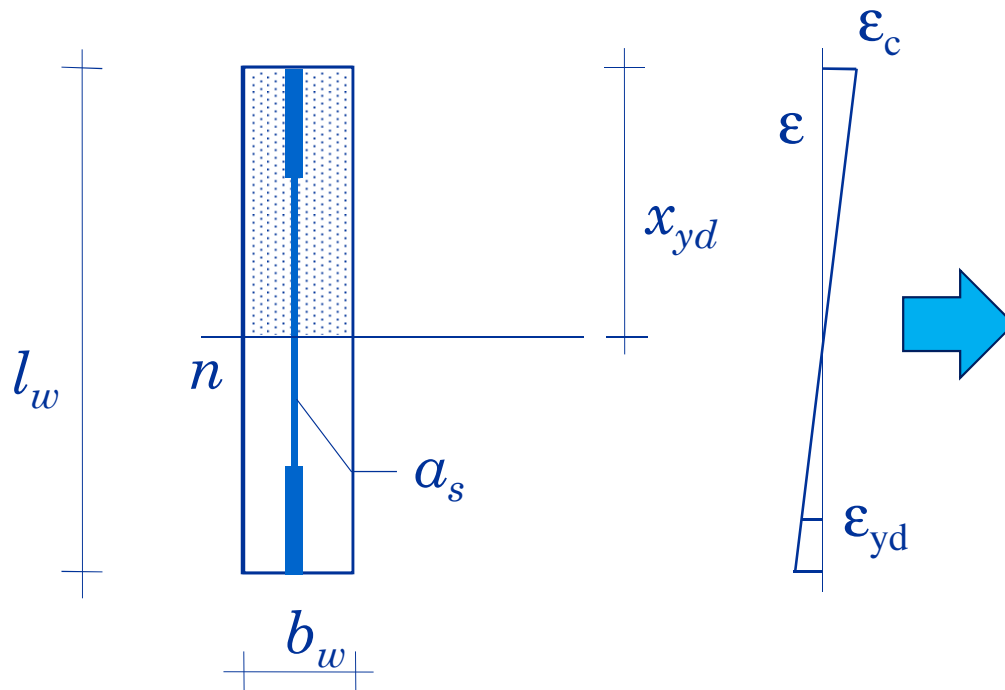
Deve essere inferiore alla duttilità disponibile:

$$\mu_{\phi u} = \frac{\phi_u}{\phi_{yd}}$$



# Duttilità disponibile

## Indicazioni bozza NTC 2015



Tensioni attraverso i legami  $\sigma$ - $\epsilon$  validi per verifiche di resistenza



$x_{yd}$  da equilibrio alla traslazione

Curvatura allo snervamento

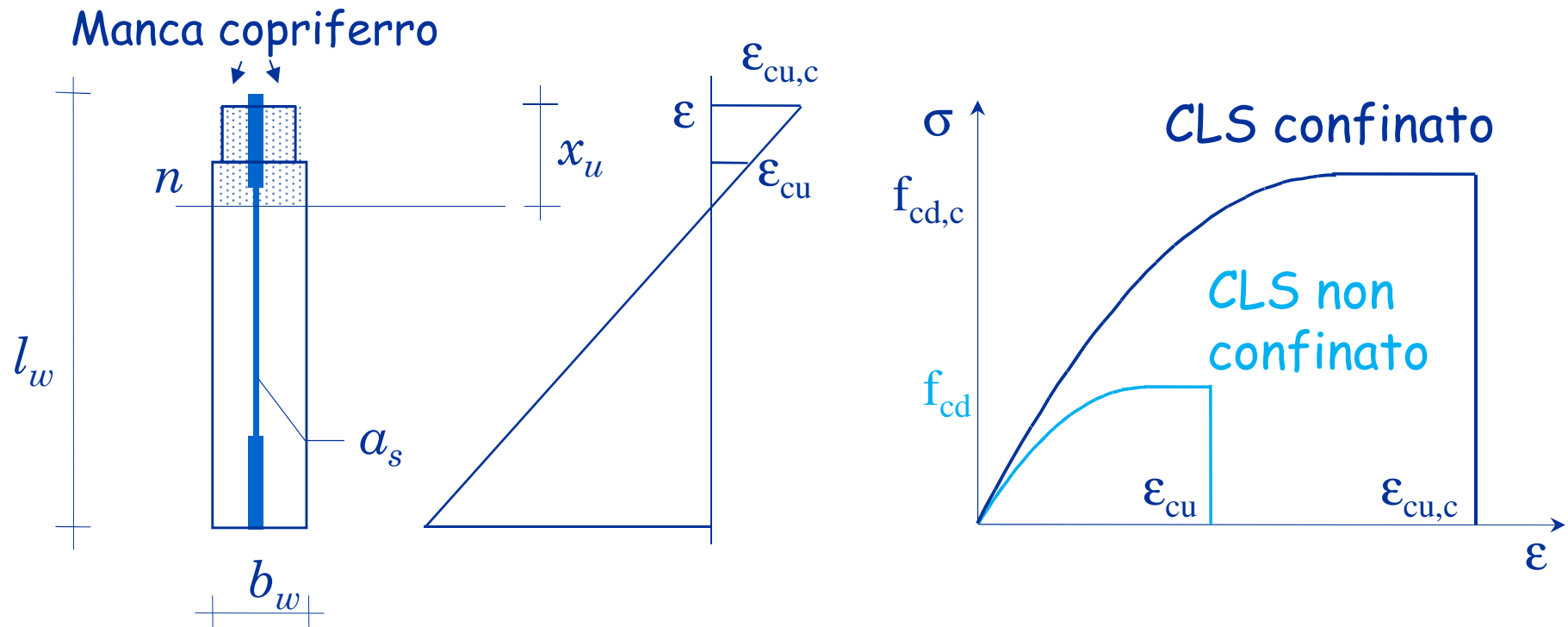
$$\phi'_{yd} = \frac{\epsilon_c}{x_{yd}}$$



$$\phi_{yd} = \frac{M_{Rd}}{M_{yd}} \phi'_{yd}$$

# Duttilità disponibile

## Indicazioni bozza NTC 2015



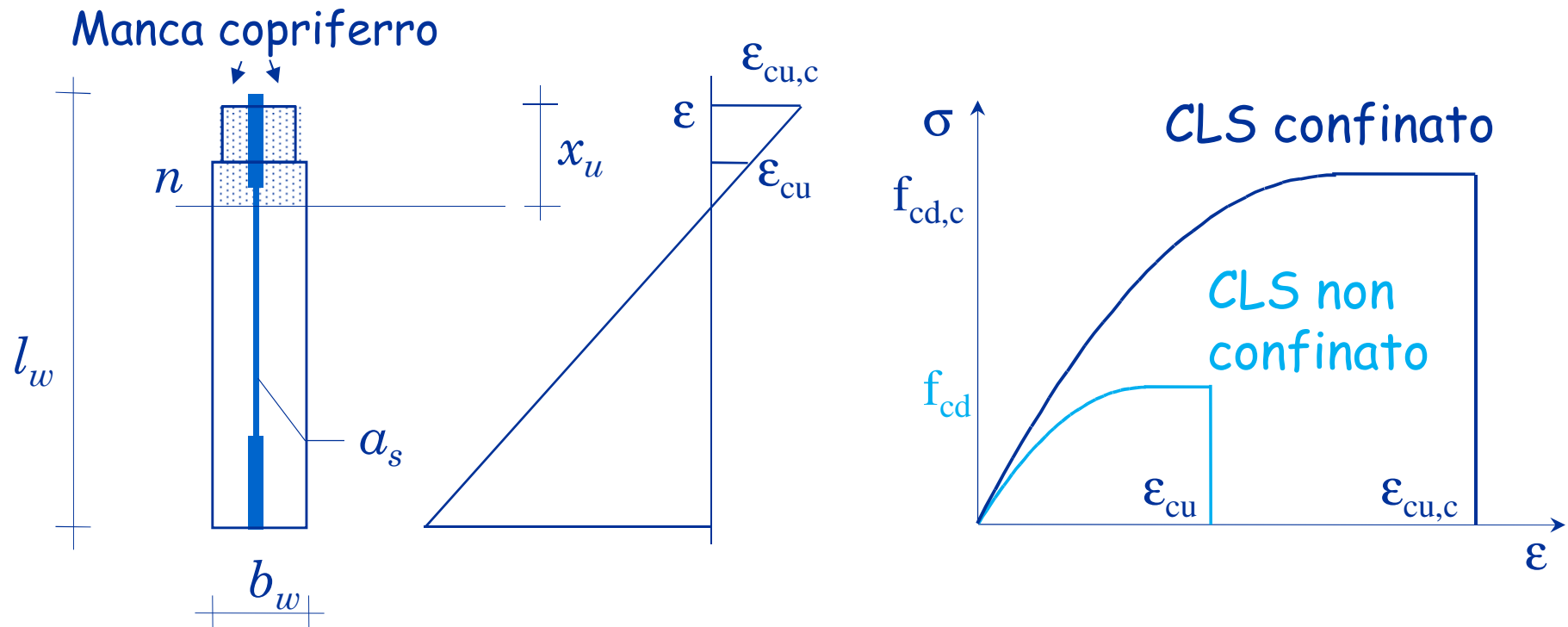
$$f_{cd,c} = f_{cd} (1 + 5.0 \sigma_2 / f_{ck}) \quad \text{per } \sigma_2 \leq 0.05 f_{ck}$$

$$f_{cd,c} = f_{cd} (1.125 + 2.5 \sigma_2 / f_{ck}) \quad \text{per } \sigma_2 > 0.05 f_{ck}$$

$\sigma_2$  tensione di confinamento

# Duttilità disponibile

## Indicazioni bozza NTC 2015



$$\epsilon_{c2,c} = \epsilon_{c2} \left( f_{ck,c} / f_{ck} \right)^2$$

$$\epsilon_{cu,c} = \epsilon_{cu} + 0.2 \sigma_2 / f_{ck}$$

$\sigma_2$  tensione di confinamento

# Tensione di confinamento

## Indicazioni bozza NTC 2015

$$\sigma_2 = \alpha \sigma_1$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{l,x} \cdot \sigma_{l,y}}$$

$$\sigma_{l,x} = \frac{A_{st,x} f_{yk}}{b_y s}$$

$$\sigma_{l,y} = \frac{A_{st,y} f_{yk}}{b_x s}$$

$A_{st,x}$  e  $A_{st,y}$

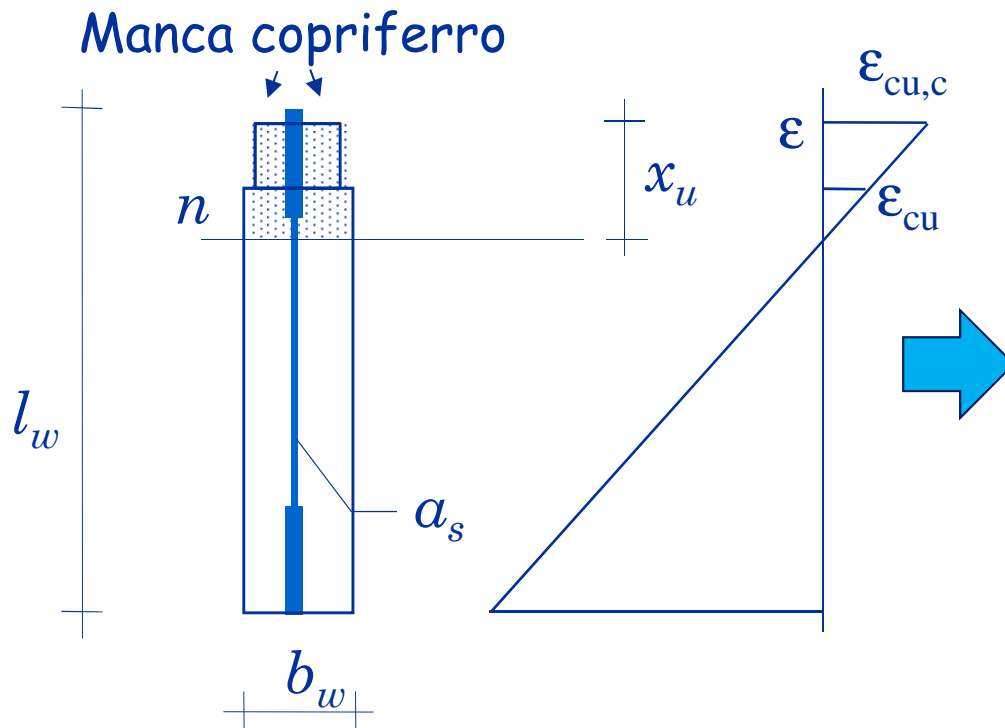
Area dei bracci delle staffe paralleli ad x ed y

$b_y$  e  $b_x$

Dimensioni del nucleo confinato nelle direzioni corrispondenti ai bracci

# Duttilità disponibile

## Indicazioni bozza NTC 2015



Tensioni attraverso i legami  $\sigma$ - $\epsilon$  considerando anche il confinamento

$x_u$  da equilibrio alla traslazione

Curvatura  
ultima

$$\phi_u = \frac{\epsilon_{cu,c}}{x_u}$$

# Esempio numerico

Parete 30x400

$A_{sw}$  12  $\varnothing$  16

$A_{sc}$  = 20  $\varnothing$  18

$l_c$  = 80 cm

Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

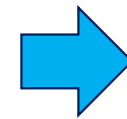
$N_{Ed}$  = -10000 kN

Duttilità attesa ( $q=3$ ,  $T_1 = 0.4$  s,  $T_c=0.5$  s)

$$\mu_\phi = \begin{cases} 1.5 (2q - 1) \\ 1.5 \left( 1 + 2(q - 1) \frac{T_c}{T_1} \right) \end{cases}$$

se  $T_1 \geq T_c$

se  $T_1 < T_c$



$\mu_\phi = 9$

Vedere foglio Excel "CalcoloDuttilità"

# Esempio numerico

## Proprietà del calcestruzzo confinato

fck	25	MPa	EpsCu	0.00350	fck,c	29.4	MPa	EpsCu,c	0.01052
fcd	14.2	MPa	EpsC2	0.00200	fcd,c	16.7	MPa	EpsC2,c	0.00276
fyk	450	MPa	EpsYd	0.00186	$\sigma_2$	0.88	MPa		
fyd	391.3	MPa			$\alpha$	0.6			
Es	210000	MPa			$\sigma_l$	1.46	MPa		
					$\sigma_{l,x}$	1.20	MPa		
					$\sigma_{l,y}$	1.79	MPa		
					Ast,x	2.00	cm <sup>2</sup>		
					Ast,y	1.00	cm <sup>2</sup>		
					s	10	cm		
					by	75.2	cm		
					bx	25.2	cm		
					ricop.	20	mm		
					$\phi_{st}$	8	mm		

Vedere foglio Excel "CalcoloDuttilità"

# Esempio numerico

## Calcolo della duttilità disponibile e verifica

Per calcolo MRd			Per calcolo $\phi_y$			Per calcolo $\phi_u$				
X	73.9	cm	X	146.2	cm	Xu	66.3	cm		
			EpsC	-0.0013					Duttilità attesa	
								q		3 s
								T <sub>1</sub>		0.4 s
								T <sub>c</sub>		0.5
Nc	-2541.3	kN	Nc	-3120.1	kN	Nc	-2430.7	kN		
Ns1	-1349.3	kN	Ns1	-629.0	kN	Ns1	-1603.9	kN		
Ns2	2890.6	kN	Ns2	2749.1	kN	Ns2	3034.6	kN		
Somma	-1000.0	kN	Somma	-1000.0	kN	Somma	-1000.0	kN		
								Capacità		
MRd	9850.5	kNm	$\phi'y$	0.00087	m <sup>-1</sup>	$\phi_u$	0.01586	m <sup>-1</sup>		
			Myd	9524.2	kNm	$\epsilon_c(l_c)$	0.00154			
			$\phi_y$	0.00090	m <sup>-1</sup>	$\epsilon_s(l_w)$	0.0523			
								$\mu_{\phi_u}$		17.6

Vedere foglio Excel "CalcoloDuttilità"