Corso di aggiornamento

Progettazione strutturale e Norme Tecniche per le Costruzioni

L'isolamento alla base nella progettazione sismica e nell'intervento sull'esistente

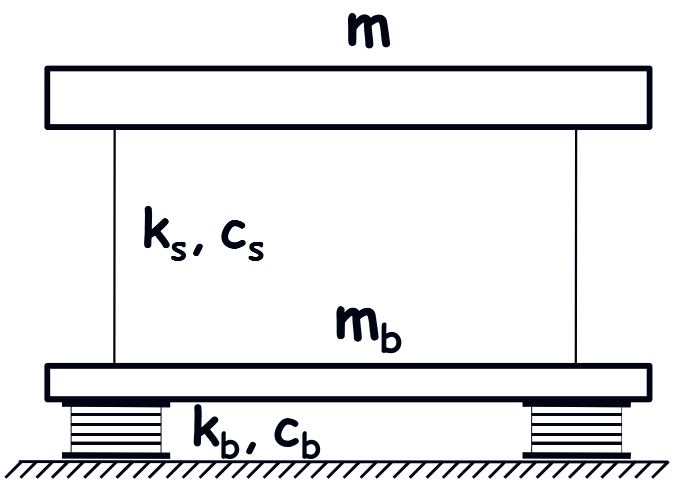
Spoleto

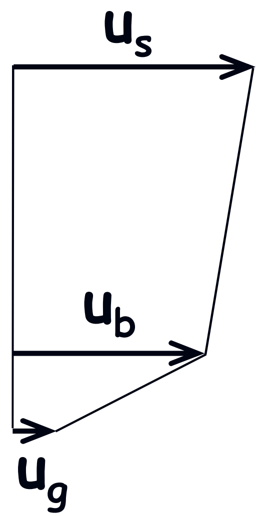
5-6 giugno 2015

05 – Fondamenti teorici dell'isolamento

Quali sono i fondamenti teorici
dell'isolamento alla base ?

Teoria lineare dell'isolamento alla base



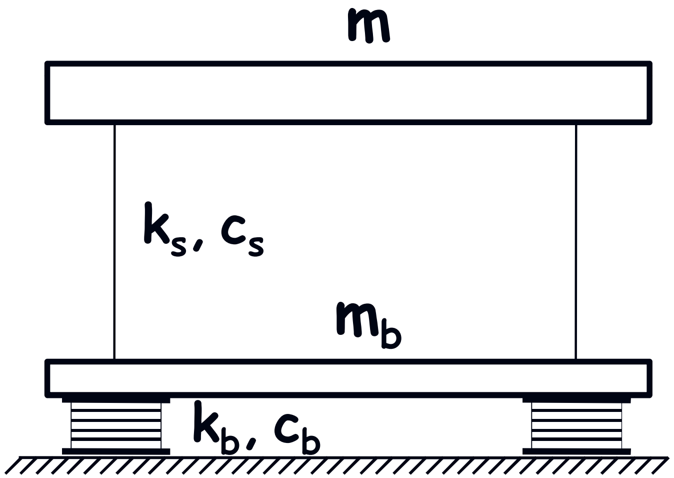


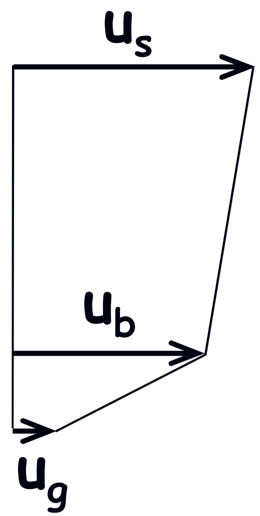
Equazioni assolute del moto

$$m\ddot{u}_s = -c_s(\dot{u}_s - \dot{u}_b) - k_s(u_s - u_b)$$

$$m\ddot{u}_s + m_b\ddot{u}_b = -c_b(\dot{u}_b - \dot{u}_g) - k_b(u_b - u_g)$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base





Spostamenti relativi

$v_s = u_s - u_b$

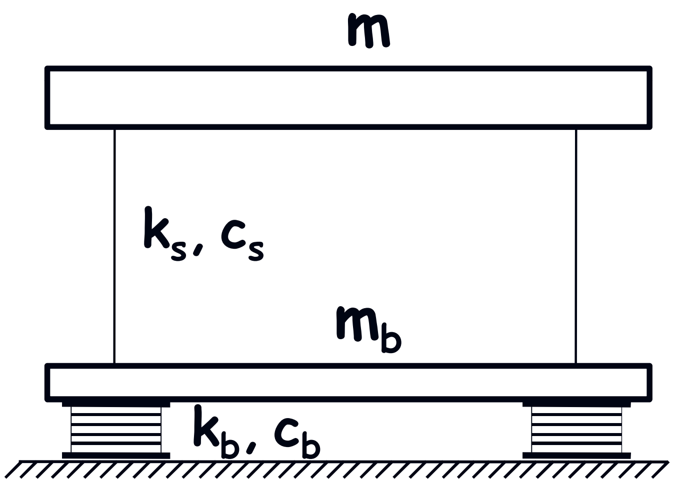
$v_b = u_b - u_g$

Equazioni relative del moto

$$m\ddot{v}_b + m\ddot{v}_s + c_s\dot{v}_s + k_s v_s = -m\ddot{u}_g$$

$$(m+m_b)\ddot{v}_b + m\ddot{v}_s + c_b\dot{v}_b + k_b v_b = -(m+m_b)\ddot{u}_g$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



Posto:

$$\gamma = \frac{m}{m+m_b} = \frac{m}{M}$$

$$\omega_b^2 = \frac{k_b}{m+m_b} \qquad \omega_s^2 = \frac{k_s}{m}$$

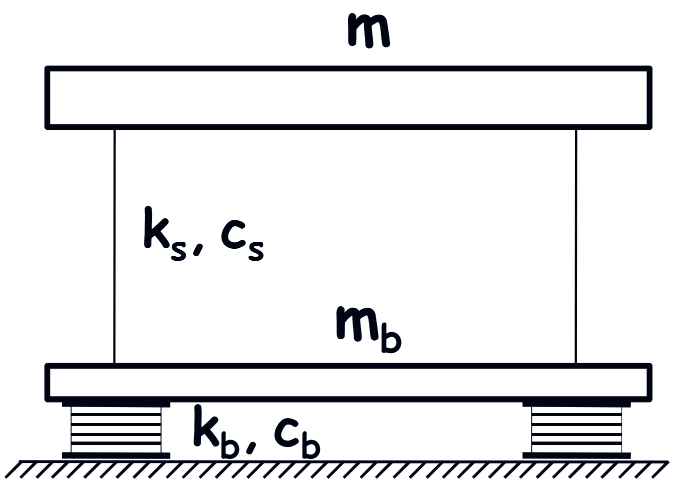
$$2\xi_b\omega_b = \frac{c_b}{m+m_b} \qquad 2\xi_s\omega_s = \frac{c_s}{m}$$

Equazioni relative del moto

$$\gamma\ddot{v}_s + \ddot{v}_b + 2\xi_b\omega_b\dot{v}_b + \omega_b^2 v_b = -\ddot{u}_g$$

$$\ddot{v}_s + \ddot{v}_b + 2\xi_s\omega_s\dot{v}_s + \omega_s^2 v_s = -\ddot{u}_g$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & m \\ m & m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$$

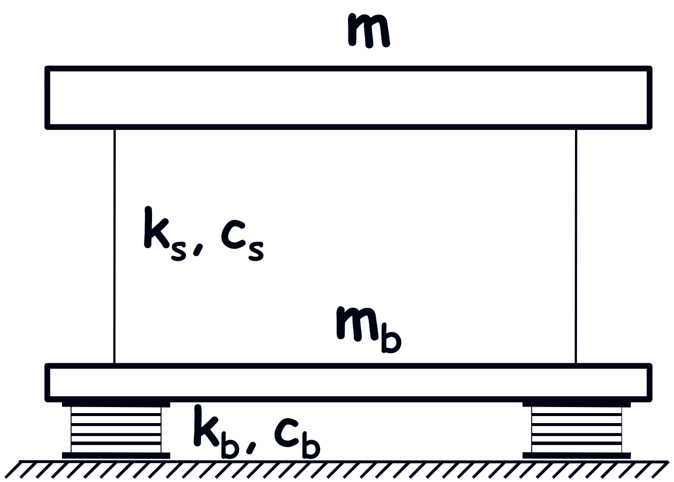
Equazione del moto in forma matriciale (coordinate nodali)

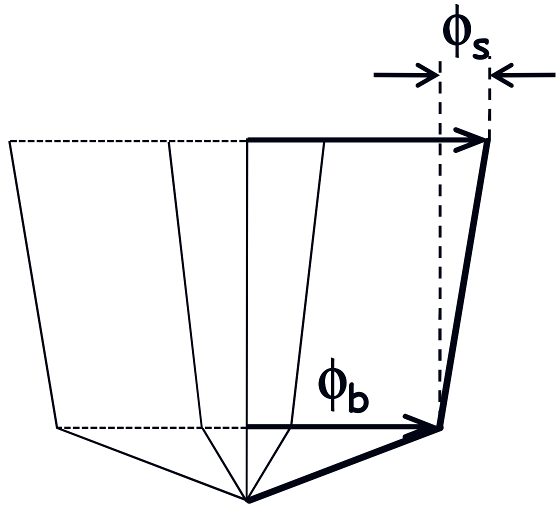
$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\,\mathbf{v} = -\mathbf{M}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

dove: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_b \\ v_s \end{bmatrix}$

Isolamento alla base

Modi di vibrazione





Posto

$$v = \phi\, sen\omega t$$

derivando e sostituendo nell'eq. del moto $\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$

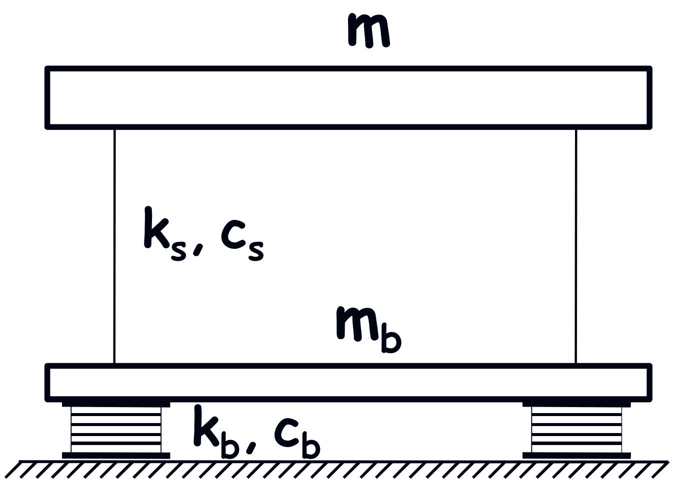
si ha: $\left(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$

Imponendo che il determinante della matrice in parentesi sia nullo si ottiene l'equazione caratteristica delle pulsazioni

$$(1-\gamma)\,\omega^4 + \left(\omega_s^2 + \omega_b^2\right)\omega^2 + \omega_s^2\omega_b^2 = 0$$

Isolamento alla base

Modi di vibrazione



Se si ricercano le radici dell'equazione caratteristica:

$$(1-\gamma)\,\omega^4 + \left(\omega_s^2 + \omega_b^2\right)\omega^2 + \omega_s^2\omega_b^2 = 0$$

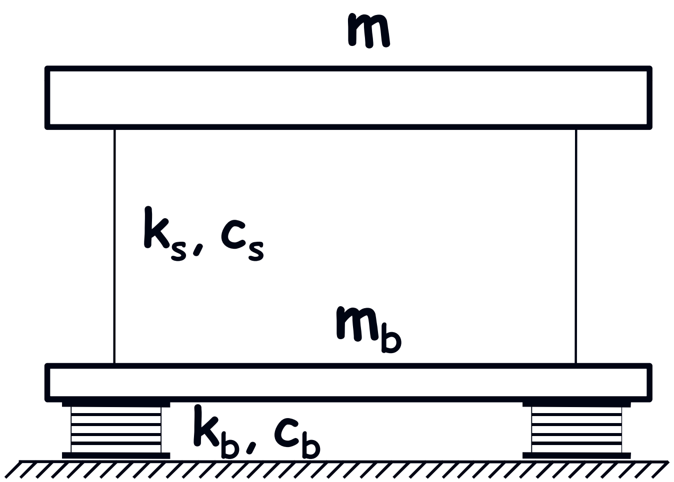
si ottengono

le pulsazioni naturali di vibrazione del sistema isolato

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1-\gamma)}\left\{\omega_b^2 + \omega_s^2 \pm \left[\left(\omega_b^2 - \omega_s^2\right)^2 + 4\gamma\omega_b^2\omega_s^2\right]^{1/2}\right\}$$

Isolamento alla base

Modi di vibrazione



Se si ricercano le radici dell'equazione caratteristica

$$(1-\gamma)\omega^4 + \left(\omega_s^2 + \omega_b^2\right)\omega^2 + \omega_s^2\omega_b^2 = 0$$

e si effettuano alcune approssimazioni si ottengono le pulsazioni naturali di vibrazione approssimate

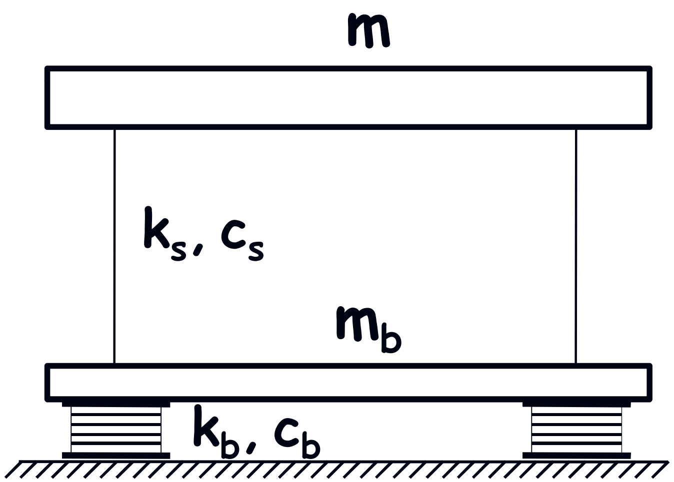
$$\omega_1^2 = \omega_b(1-\gamma\varepsilon)$$

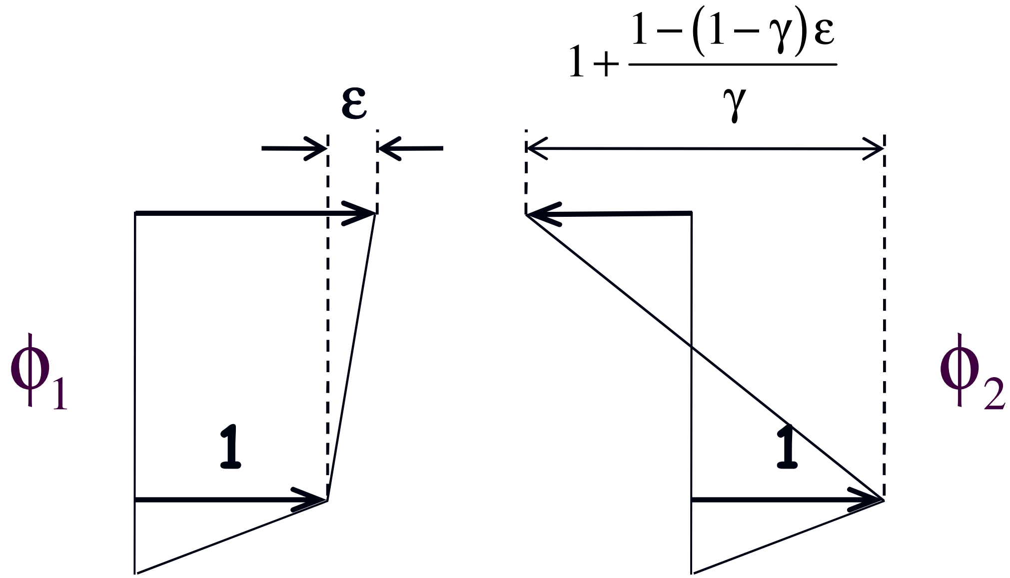
$$\omega_2^2 = \frac{\omega_s^2}{1-\gamma}(1+\gamma\varepsilon)$$

dove: $\varepsilon = \dfrac{\omega_b^2}{\omega_s^2} \ll 1$

Isolamento alla base

Modi di vibrazione

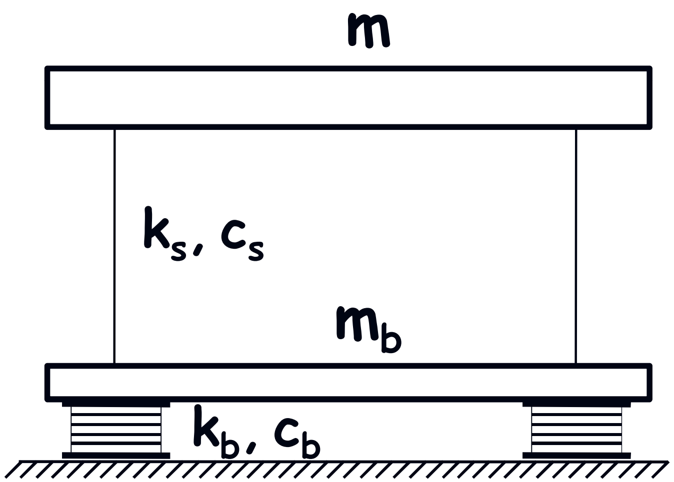


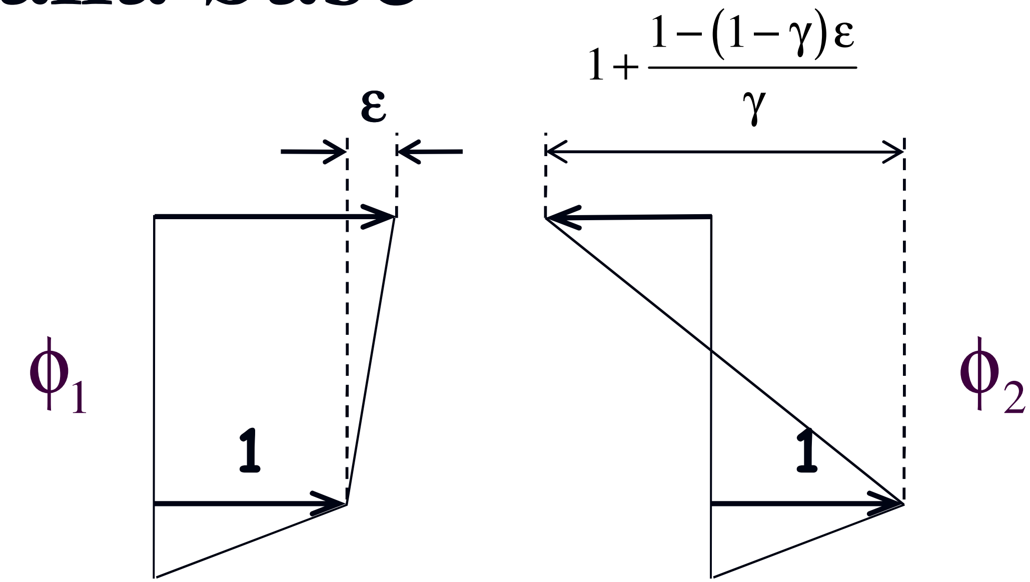


Con riferimento ad ogni pulsazione naturale di vibrazione
si ottengono dall'equazione $\left(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\phi=\mathbf{0}$
le forme naturali di vibrazione

$\phi_1^T=(1,\varepsilon)$ dove: $\varepsilon=\frac{\omega_b^2}{\omega_s^2}\ll 1$ $\phi_2^T=\left\{1,-\frac{1}{\gamma}\left[1-(1-\gamma)\varepsilon\right]\right\}$

Teoria lineare dell'isolamento alla base





Operiamo un cambiamento di base,
ovvero esprimiamo gli spostamenti dei due livelli non in termini di variabili nodali ma modali,

ovvero come

$$\boldsymbol{v} = q_1\phi_1 + q_2\phi_2 = \boldsymbol{q}\,\boldsymbol{\Phi}$$

dove: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,b} & \phi_{2,b} \\ \phi_{1,s} & \phi_{2,s} \end{bmatrix}$

Teoria lineare dell'isolamento alla base

Sostituendo la relazione $v = q\Phi$,
e le sue derivate,
nell`equazione del moto

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\,\mathbf{v} = -\mathbf{M}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

e premoltipolicando per $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$
si ottiene

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}\,\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}\,\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

ovvero

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q} = -\frac{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{I}}{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}}\ddot{u}_g$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base

La singola equazione del sistema

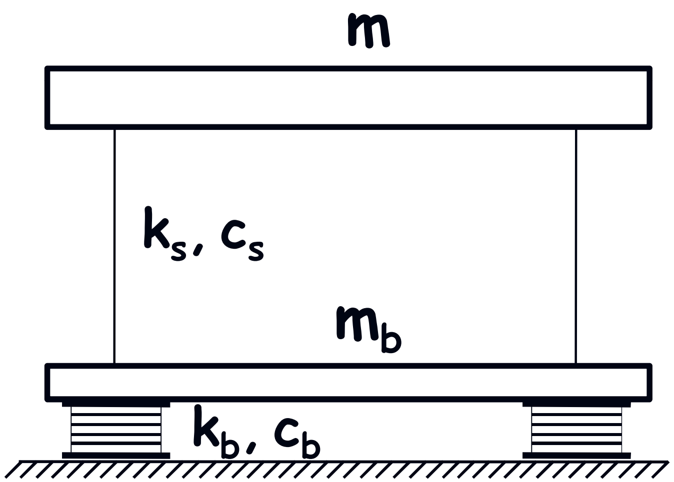
$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}}\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{I}}{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}}\ddot{u}_g$$

presenta la seguente forma

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\Gamma_j\ddot{u}_g$$

dove: $2\xi_j\omega_j = \dfrac{\phi_j^T\mathbf{C}\phi_j}{\phi_j^T\mathbf{M}\phi_j}$, $\omega_j^2 = \dfrac{\phi_j^T\mathbf{K}\phi_j}{\phi_j^T\mathbf{M}\phi_j}$, $\Gamma_j = \dfrac{\phi_j^T\mathbf{M}\mathbf{I}}{\phi_j^T\mathbf{M}\phi_j}$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



Equazioni del moto (coordinate modali)

$$\ddot{q}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\Gamma_1 \ddot{u}_g$$

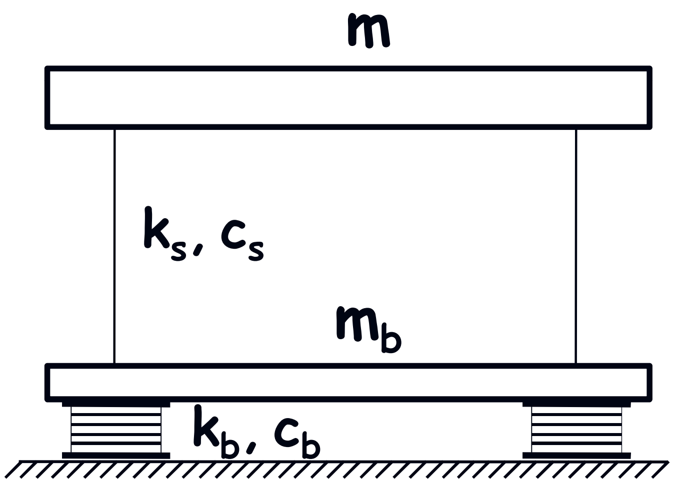
$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\Gamma_2 \ddot{u}_g$$

Coeff. di partecipazione modale

$$\Gamma_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{M}\,\mathbf{I}}{\phi_j^T \mathbf{M}\,\phi_j}$$

$$\Gamma_1 = 1 - \gamma\varepsilon \qquad \Gamma_2 = \gamma\varepsilon$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



Equazioni del moto
(coordinate modali)

$$\ddot{q}_1 + 2\xi_1\omega_1\,\dot{q}_1 + \omega_1^2\,q_1 = -\Gamma_1\,\ddot{u}_g$$

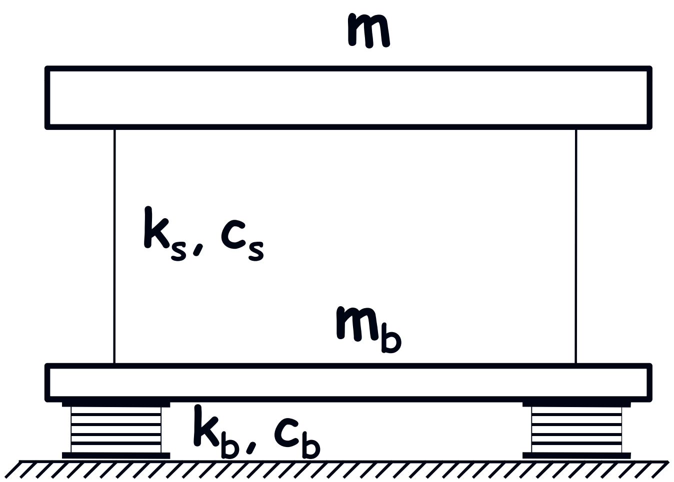
$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2\omega_2\,\dot{q}_2 + \omega_2^2\,q_2 = -\Gamma_2\,\ddot{u}_g$$

Massa modale

$$\mathrm{M}_\mathrm{j}^\mathrm{eff} = \frac{\left(\phi_\mathrm{j}^\mathrm{T}\,\mathrm{M}\,\mathrm{I}\right)^2}{\phi_\mathrm{j}^\mathrm{T}\,\mathrm{M}\,\phi_\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{M}_1^\mathrm{eff} = \mathrm{M}\left[1-\gamma(1-\gamma)\varepsilon^2\right] \qquad \mathrm{M}_2^\mathrm{eff} = \mathrm{M}\left[\gamma(1-\gamma)\varepsilon^2\right]$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



Equazioni del moto
(coordinate modali)

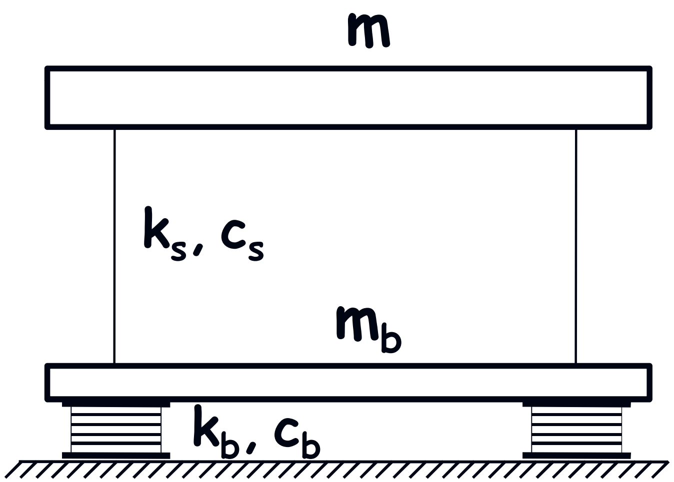
$$\ddot{q}_1 + 2\xi_1\omega_1\,\dot{q}_1 + \omega_1^2\,q_1 = -\Gamma_1\,\ddot{u}_g$$

$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2\omega_2\,\dot{q}_2 + \omega_2^2\,q_2 = -\Gamma_2\,\ddot{u}_g$$

Termine $$2\xi_j\omega_j = \frac{\phi_j^T\,C\,\phi_j}{\phi_j^T\,M\,\phi_j}$$

$$2\xi_1\omega_1 = 2\xi_b\omega_b\,(1-2\gamma\varepsilon) \qquad 2\xi_2\omega_2 = \frac{1}{1-\gamma}\left(2\omega_s\xi_s + 2\gamma\omega_b\xi_b\right)$$

Teoria lineare dell'isolamento alla base



Equazioni del moto
(coordinate modali)

$$\ddot{q}_1 + 2\xi_1\omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\Gamma_1 \ddot{u}_g$$

$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2\omega_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\Gamma_2 \ddot{u}_g$$

Rapporto di smorzamento viscoso equivalente

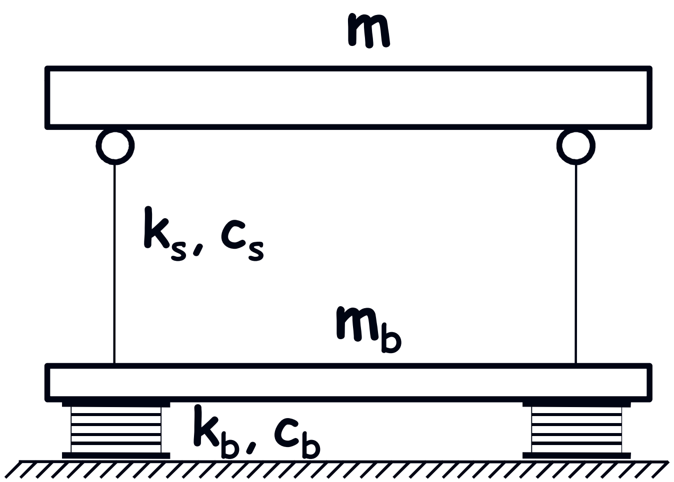
$$\xi_j = \frac{1}{2\omega_j}\frac{\phi_j^T C \phi_j}{\phi_j^T M \phi_j}$$

$$\xi_1 = \xi_b (1 - 1.5\gamma\varepsilon)$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_s}{(1-\gamma)^{1/2}} + \frac{\gamma\xi_b\varepsilon^{1/2}}{(1-\gamma)^{1/2}}$$

Sistema isolato alla base

Esempio



m = 16.29 kN s²/m

m_b = 3.25 kN s²/m

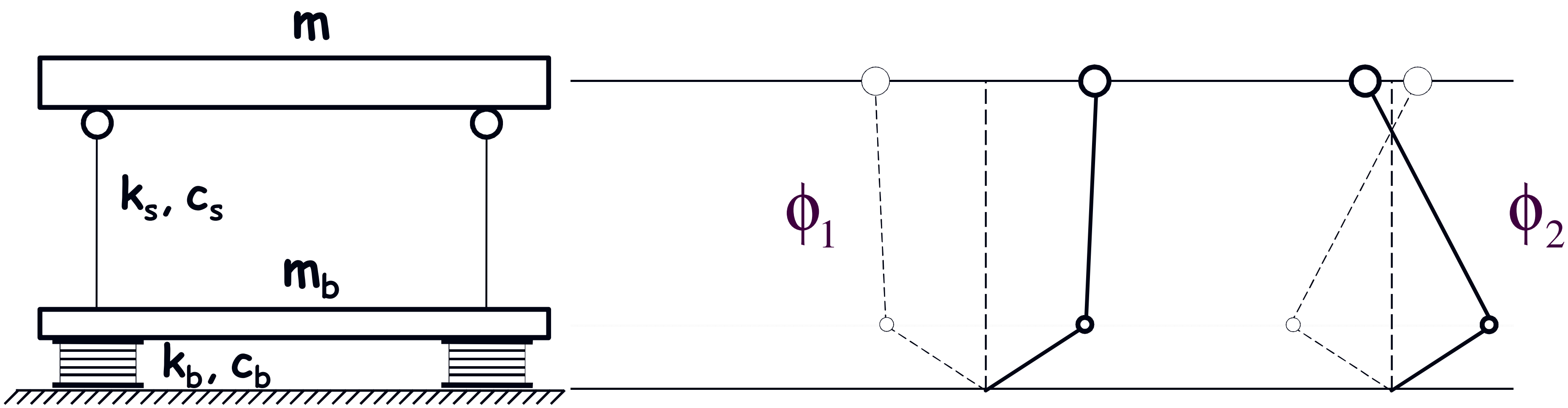
k_s = 2 X 1286.478 kN m

T_{bf} = 0.50 s

	$T_{1\text{-iso}}$ (s)	$T_{2\text{-iso}}$ (s)	ω_b (rad/s)	k_b (kNm^{-1})
Soluzione 1. Blocco rigido isolato	1.56905		4.19	343.06
Soluzione 2. Approssimata	1.49331	0.19416	4.42	382.56
Soluzione 3. Rigorosa	1.50000	0.19426	4.40	378.80

Sistema isolato alla base

Esempio



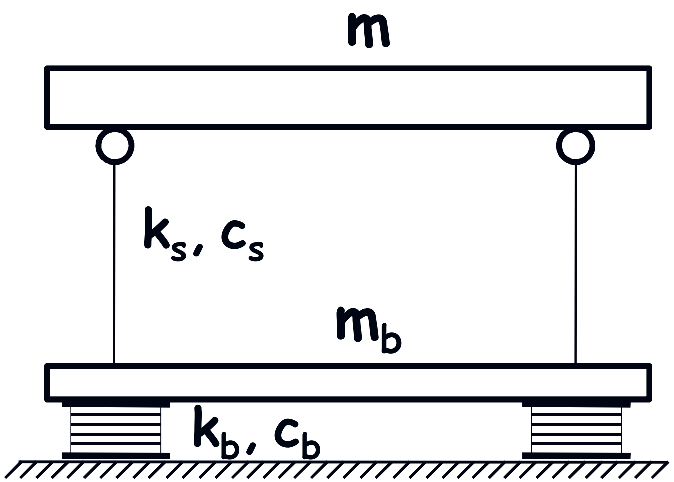
$T_{1\text{-}iso}$ = 1.50 s $\quad$ $T_{2\text{-}iso}$ = 0.19s

(componenti in termini assoluti)	Modo 1	Modo 2
ϕ	0.20464	-0.51478
ϕ	0.23022	0.09152

	Modo 1	Modo 2
Fattore di partecipazione modale	-4.41785	0.186391
Rapporto di massa partecipante modale	0.99822	0.00178

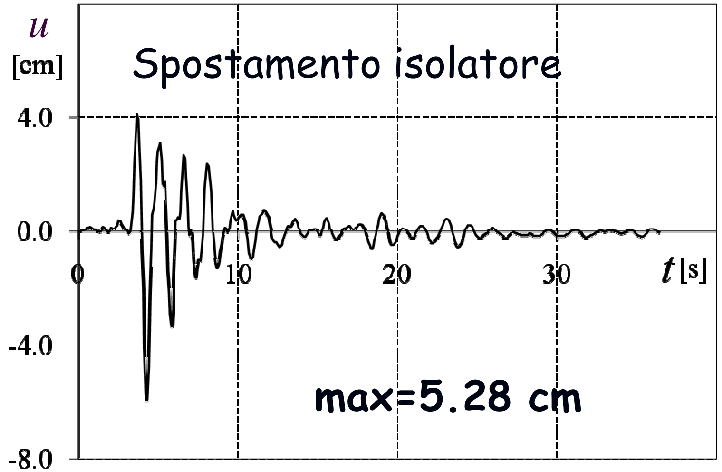
Sistema isolato alla base

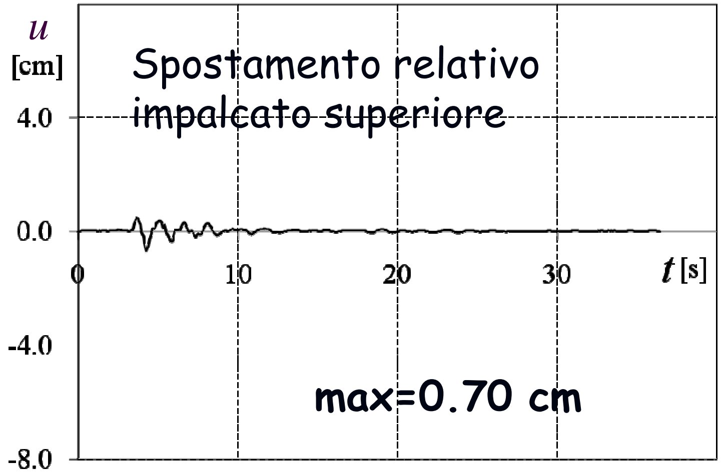
Esempio



$\xi_{1\text{-}iso} = 0.15$

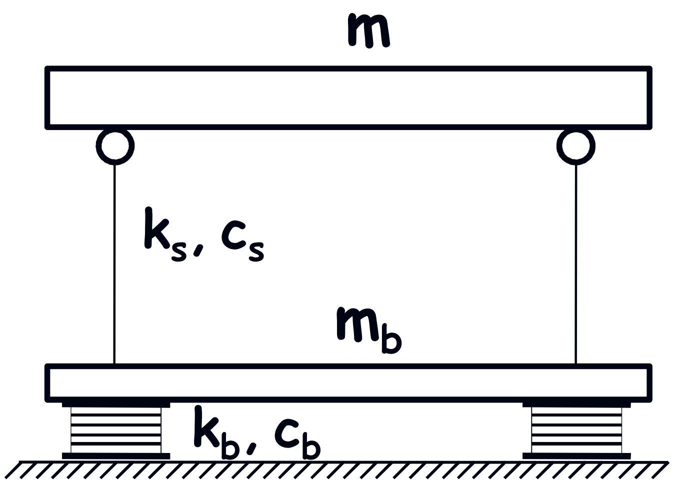
$\xi_{2\text{-}iso} = 0.05$

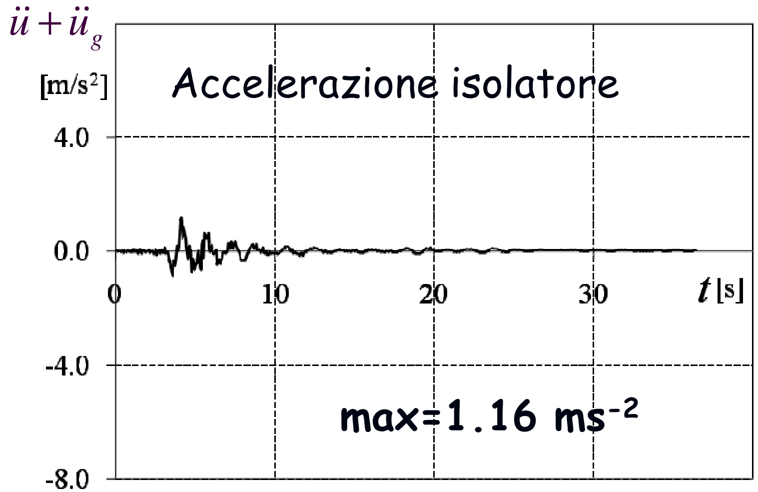


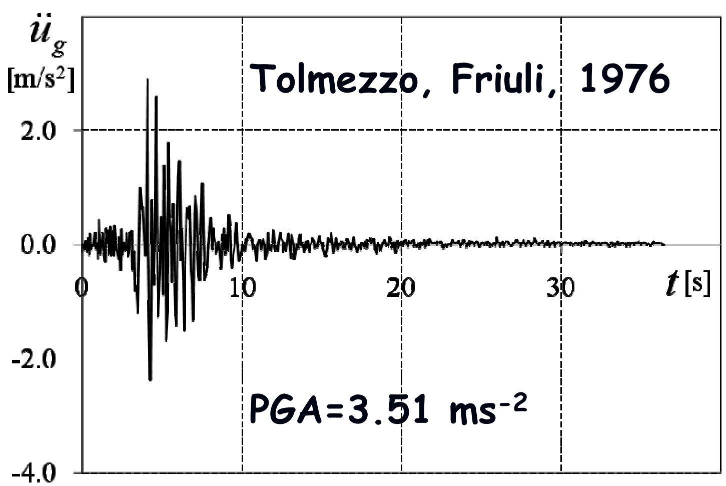


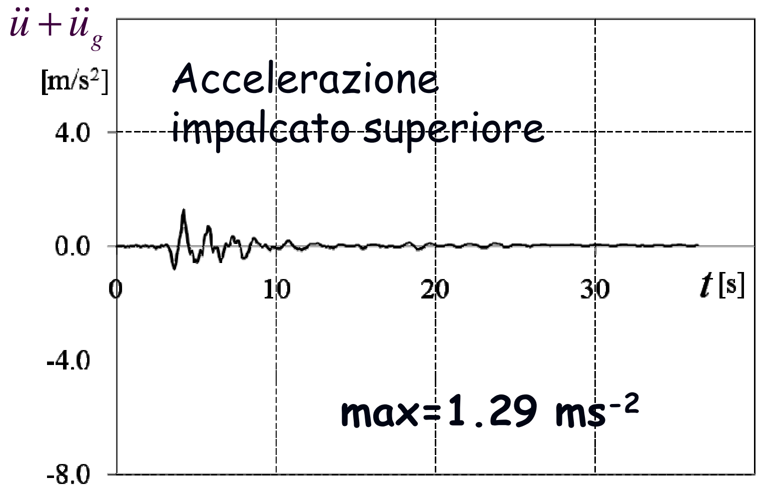
Sistema isolato alla base

Esempio









Sistema isolato alla base

Esempio