

Corso di aggiornamento

## Elementi strutturali e collegamenti in acciaio

4 - Instabilità locale

Villa Redenta, Spoleto

2-4 marzo 2017

Aurelio Ghersi

# Riferimenti

## Normativa

- EN 1993-1-3, Eurocodice 3, parte 1-3:  
Regole generali - Regole supplementari per l'impiego dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo
- EN 1993-1-5, Eurocodice 3, parte 1-5:  
Elementi strutturali a lastra

## Testi

- A.C. Walker, Design and Analysis of Cold-formed Sections, London, Intertext books, 1975
- A. Gherzi, R. Landolfo, F.M. Mazzolani, Design of Metallic Cold-formed Thin-walled Members, Spon Press, London and New York, 2002
- V. Dipaola, G. Prete, F. Prete, I profili formati a freddo nelle opere di carpenteria metallica, Aracne editrice, 2010

Instabilità locale

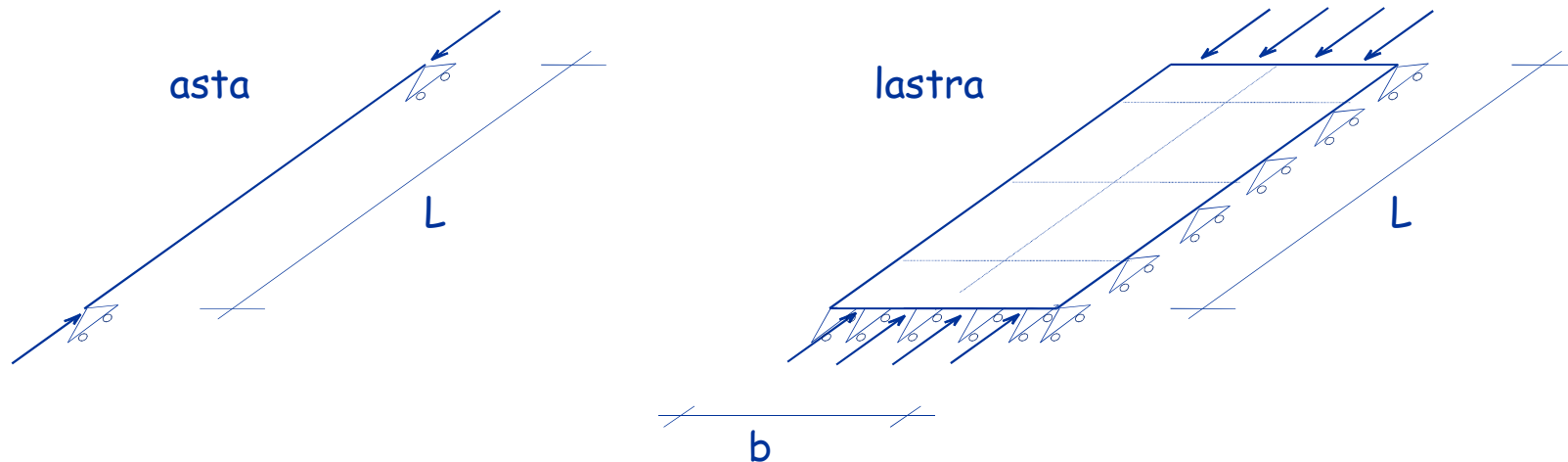
# Instabilità di un'asta o una lastra compressa

asta

elemento monodimensionale  
vincolata agli estremi in modo da consentire  
spostamenti solo nella direzione del carico

lastra

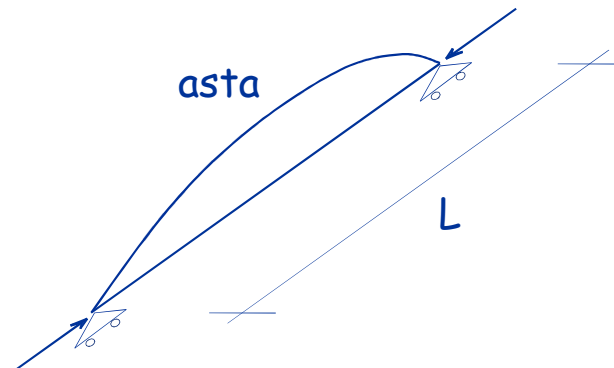
elemento bidimensionale  
vincolata lungo i bordi in modo da consentire  
spostamenti solo nella direzione del carico



# Carico critico di un'asta compressa

asta ideale     priva di imperfezioni e costituita da  
materiale linearmente elastico

- la deformata critica  
è un'unica onda, con  
semi-lunghezza  
d'onda pari alla  
lunghezza dell'asta  $l$



# Carico critico di un'asta compressa

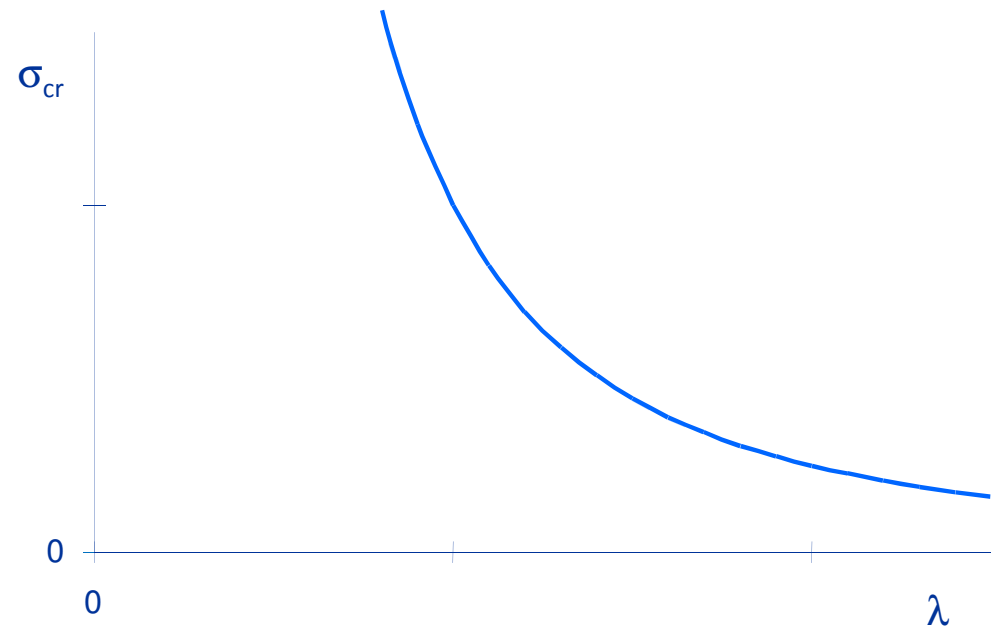
asta ideale     priva di imperfezioni e costituita da  
materiale linearmente elastico

La teoria, sviluppata da Eulero, fornisce

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

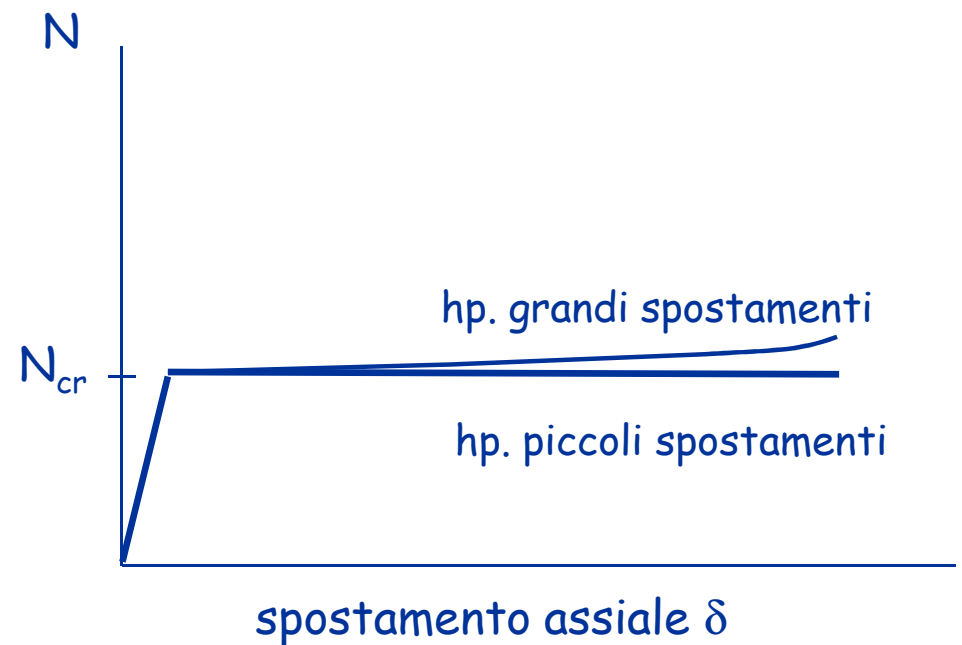
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \lambda = \frac{l}{i}$$



# Comportamento post-critico di un'asta compressa

asta ideale     priva di imperfezioni e costituita da  
materiale linearmente elastico

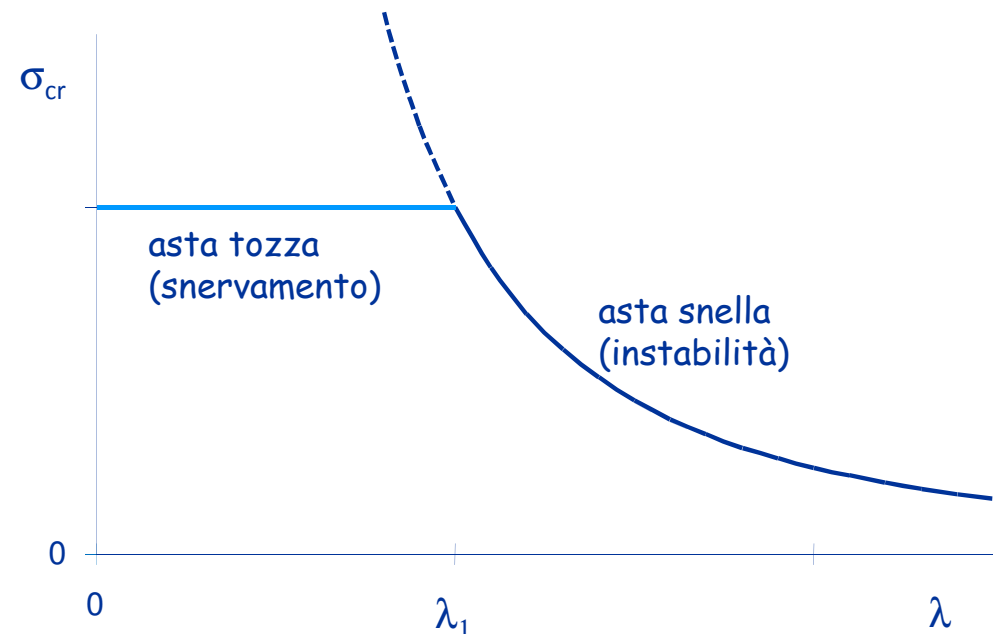
- quando si raggiunge il carico critico si hanno spostamenti trasversali molto grandi per piccolissimi incrementi di carico
- in pratica il carico non può aumentare ulteriormente e la rigidità assiale si può considerare nulla



# Carico critico di un'asta compressa

asta perfetta      ma di materiale elastico-  
perfettamente plastico

- la tensione critica non può superare la tensione di snervamento
- **aste tozze**: si snervano prima di instabilizzarsi  
**aste snelle**: si instabilizzano in campo elastico
- il limite è costituito dalla snellezza  $\lambda_1$  che corrisponde alla tensione di snervamento  $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

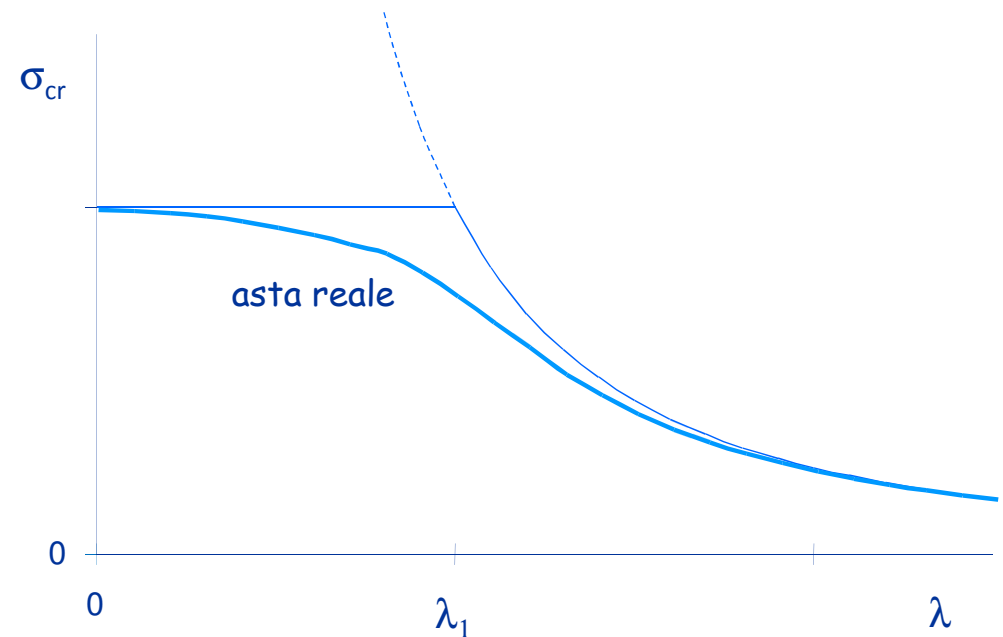




# Carico critico di un'asta compressa

asta reale con imperfezioni e costituita da materiale elastico-perfettamente plastico

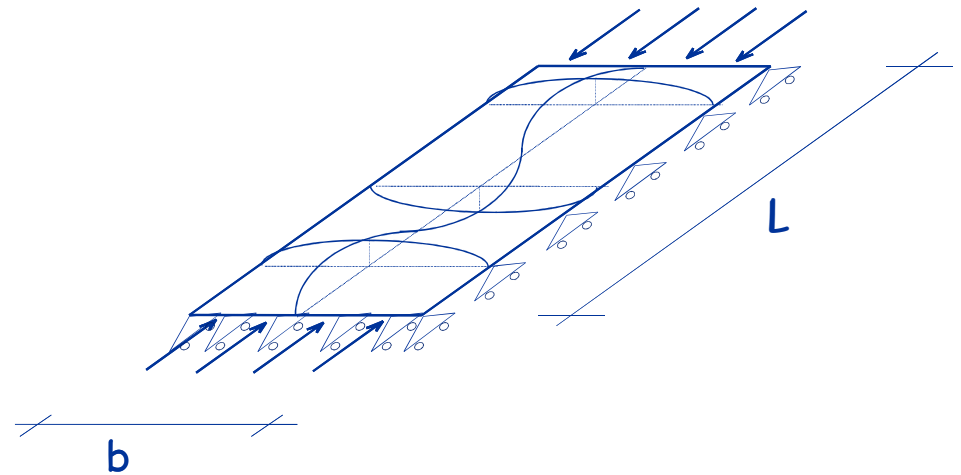
- la tensione critica è minore di quella che si avrebbe nel caso di asta perfetta
- il comportamento post-critico è comunque analogo a quello dell'asta perfetta



# Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- le ondulazioni che si formano hanno una lunghezza della semi-onda comparabile con la larghezza  $b$



# Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- tenendo conto che

$$A = b t \qquad I = \frac{b t^3}{12}$$

si ha

$$N_{cr} = \frac{k \pi^2 E I}{(1 - \nu^2) b^2} = \frac{k \pi^2 E t^3}{12 (1 - \nu^2) b}$$

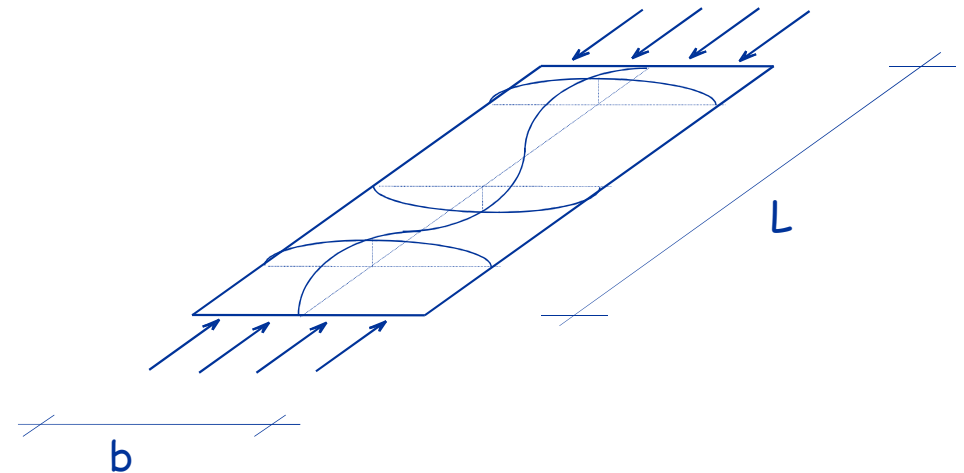
$$\sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b/t)^2}$$

$$k = \left( \frac{l}{m b} \right)^2 + 2 + \left( \frac{m b}{l} \right)^2$$

m = numero di  
semi-onde

per  $l > 4 b$

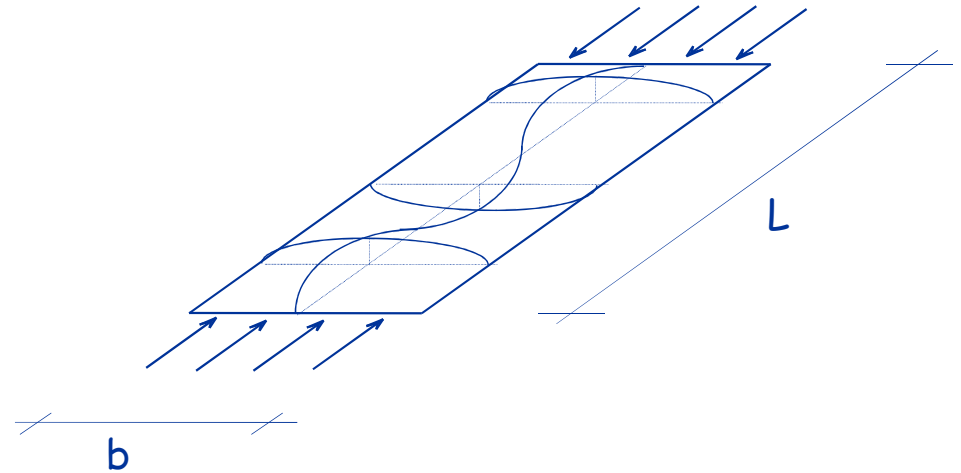
$k \rightarrow 4$



# Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidità estensionale

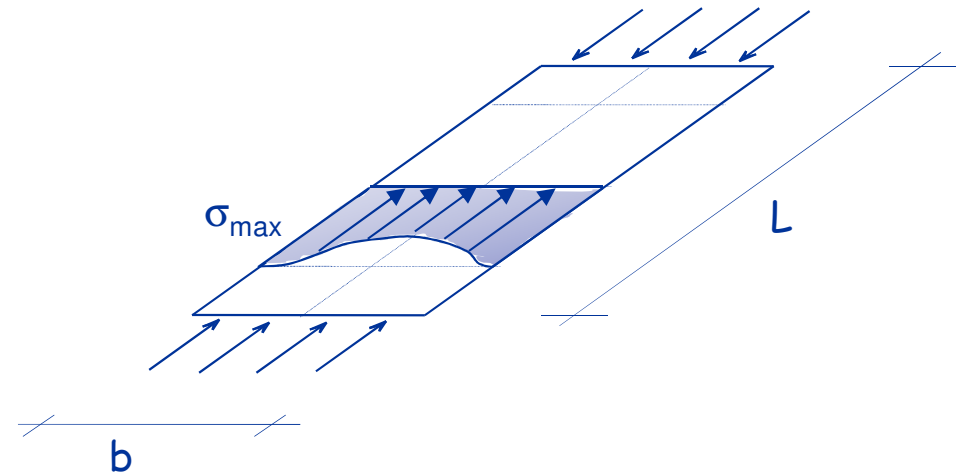


- per questo motivo:
  - è possibile aumentare ulteriormente il carico

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- per  $N > N_{cr}$ 
  - le fibre longitudinali più vicine al bordo, più vincolate, sono più rigide di quelle centrali e portano un carico maggiore
  - il diagramma delle tensioni in mezzeria non è uniforme, ma ha un valore massimo in prossimità dei bordi e minimo al centro



$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

Walker, 1975

# Tensione massima ( $\sigma_{max}$ ) rispetto a quella critica ( $\sigma_{cr}$ ) calcolata in funzione di N (diviso Ncr)

$\sigma_{max}/\sigma_{cr}$     $N/N_{cr}$     $\Delta N/\Delta s$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

0.0000	0.00	
1.0000	1.00	1.00
1.1928	1.05	0.26
1.3882	1.10	0.26
1.5862	1.15	0.25
1.7868	1.20	0.25
1.9900	1.25	0.25
2.1958	1.30	0.24
2.4042	1.35	0.24
2.6152	1.40	0.24
2.8288	1.45	0.23
3.0450	1.50	0.23
3.2638	1.55	0.23
3.4852	1.60	0.23
3.7092	1.65	0.22
3.9358	1.70	0.22
4.1650	1.75	0.22
4.3968	1.80	0.22
4.6312	1.85	0.21
4.8682	1.90	0.21
5.1078	1.95	0.21
5.3500	2.00	0.21
5.5948	2.05	0.20
5.8422	2.10	0.20
6.0922	2.15	0.20
6.3448	2.20	0.20
6.6000	2.25	0.20
6.8578	2.30	0.19
7.1182	2.35	0.19
7.3812	2.40	0.19
7.6468	2.45	0.19

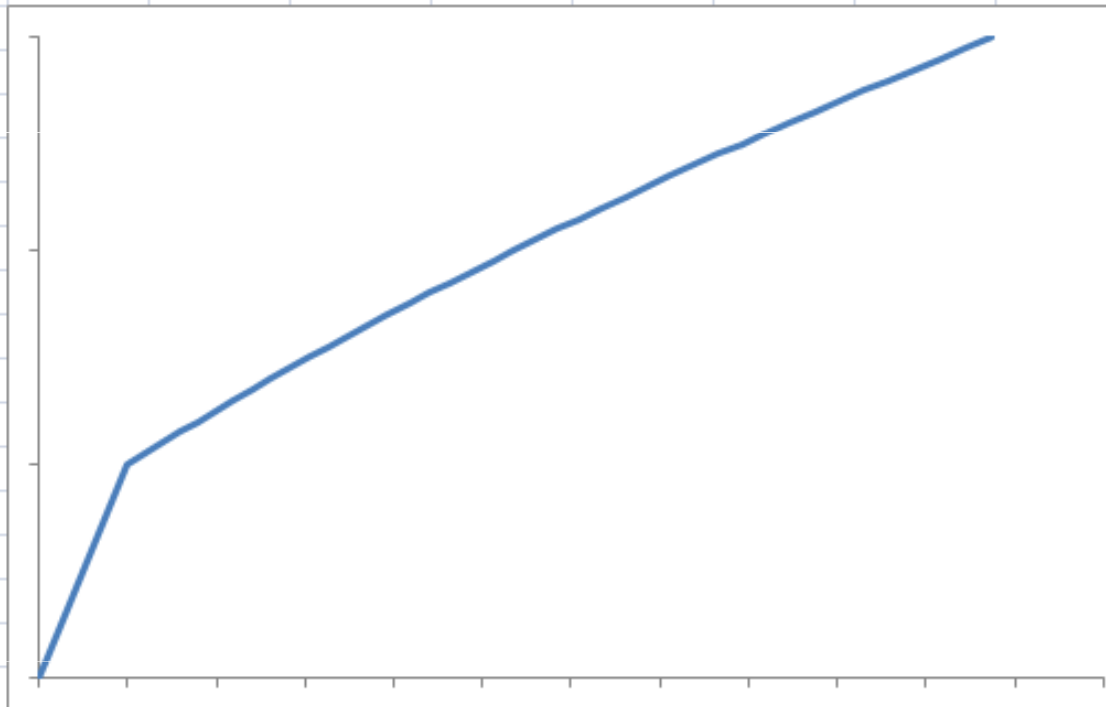


Diagramma di  $N/N_{cr}$  in funzione di  $\sigma_{max}/\sigma_{cr}$

Si può ritenere che l'accorciamento  $\epsilon_{ps}$  max sia proporzionale a  $\sigma_{max}$   
quindi il diagramma mostra anche N in funzione di  $\epsilon_{ps}$

Si nota la brusca riduzione di rigidezza dopo  $N_{cr}$

Il tratto post critico non è esattamente lineare (ma quasi)

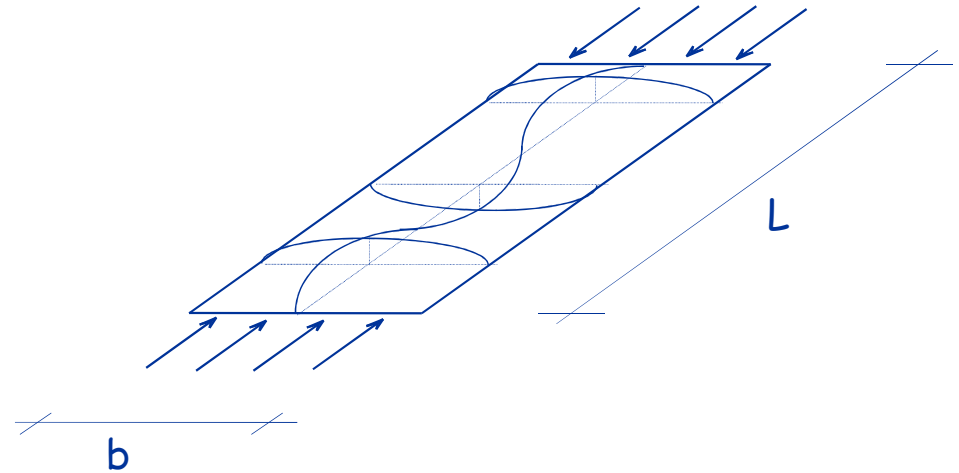
la pendenza (rigidezza) post-critica è qui circa il 20% di quella elastica

Vedi file Instabilità locale, foglio sigma max

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidità estensionale

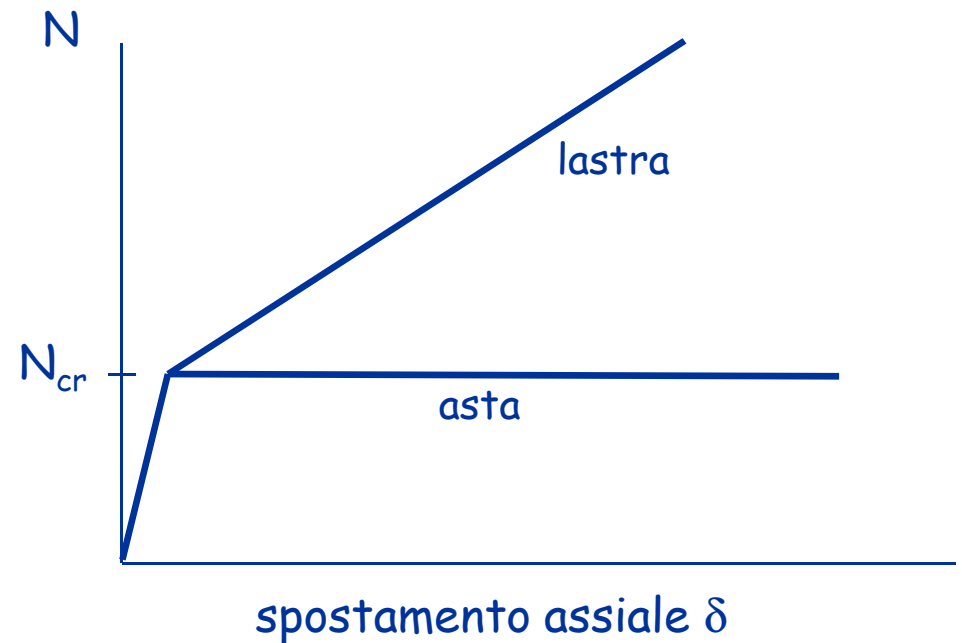


- per questo motivo:
  - è possibile aumentare ulteriormente il carico
  - la rigidità assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidità estensionale



- per questo motivo:
  - è possibile aumentare ulteriormente il carico
  - la rigidità assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla



# Carico massimo di una lastra compressa

lastra perfetta ma di materiale elastico-  
perfettamente plastico

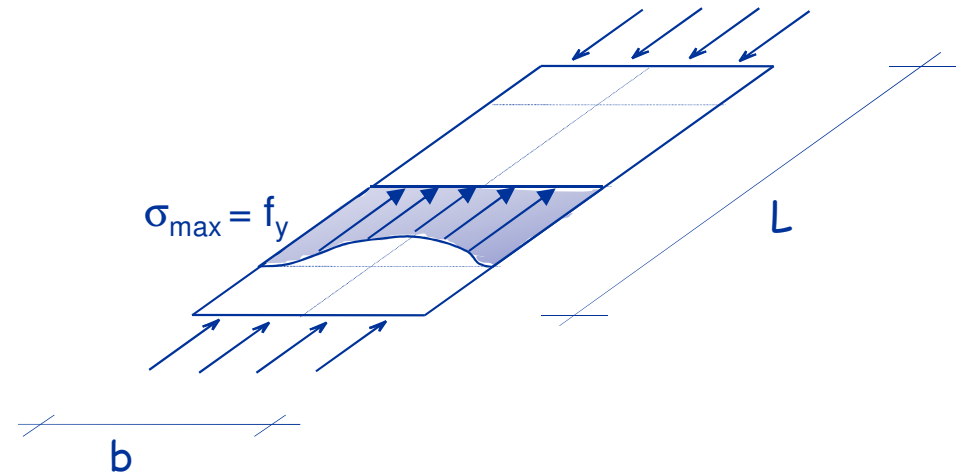
- il carico massimo  
corrisponde al  
raggiungimento della  
tensione di snervamento  
nella fibra più sollecitata

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left( \frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

$$\sigma_{\max} = f_y \quad \downarrow$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

Walker, 1975



$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[ -2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

# Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

Ncr/Ny	Nu/Ny	err	Nu/Ny
0.00	0.000		0.000
0.005	0.086	0.0000	0.086
0.01	0.116	-0.0008	0.116
0.02	0.153	-0.0001	0.154
0.05	0.219	0.0000	0.220
0.10	0.287	-0.0004	0.287
0.15	0.339	-0.0002	0.339
0.20	0.385	-0.0002	0.385
0.25	0.428	0.0010	0.428
0.30	0.469	0.0000	0.470
0.35	0.510	-0.0002	0.510
0.40	0.549	0.0000	0.549
0.45	0.588	0.0001	0.588
0.50	0.626	-0.0001	0.626
0.55	0.664	-0.0001	0.664
0.60	0.702	0.0000	0.702
0.65	0.740	-0.0003	0.739
0.70	0.777	0.0000	0.777
0.75	0.815	-0.0010	0.814
0.80	0.852	0.0000	0.851
0.85	0.889	0.0001	0.889
0.90	0.926	-0.0002	0.926
0.95	0.963	0.0000	0.963
1.00	1.000	0.0000	1.000

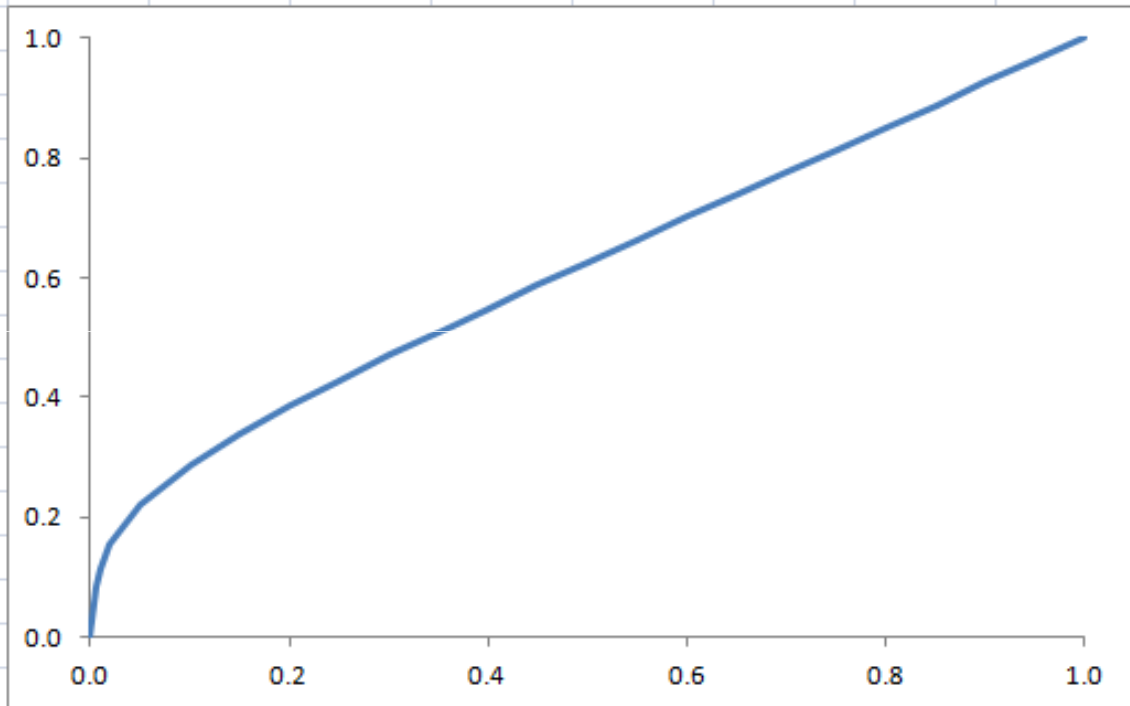


Diagramma di Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[ -2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

Vedi file Instabilità locale, foglio N ult

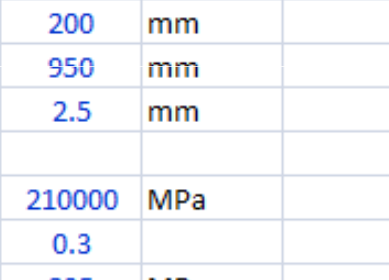
## Esempio

Determinazione di Ncr e Nult		
b	200	mm
l	950	mm
t	2.5	mm
E	210000	MPa
v	0.3	
fy	235	MPa
l/b	4.75	
b/t	80.00	
m	5	
k	4.011	
$\sigma_{cr}$	118.9	
Ncr	59.5	kN
Ny	117.5	kN
Ncr/Ny	0.506	
Nult/Ny	0.631	
Nult	74.1	kN

$$k = \left( \frac{l}{m b} \right)^2 + 2 + \left( \frac{m b}{l} \right)^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b/t)^2}$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[ -2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

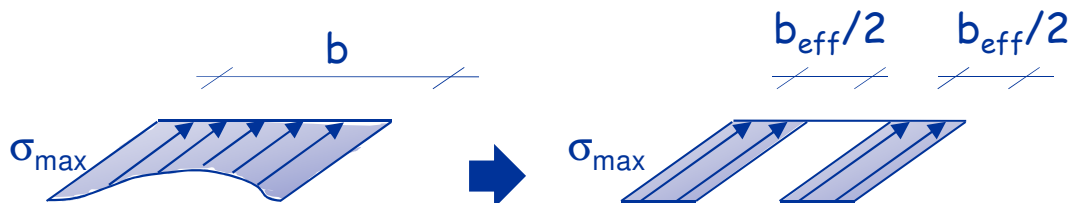
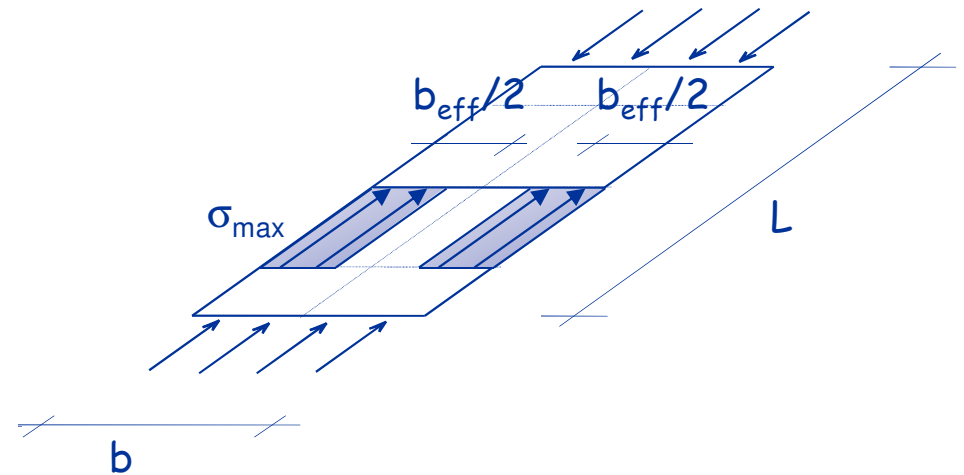


Vedi file Instabilità locale, foglio esempio

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932

- per  $N > N_{cr}$ 
  - si assume che il diagramma delle tensioni sia costante (pari a  $\sigma_{max}$ ) ma agisca solo su una parte  $b_{eff}$  della lastra
  - la larghezza  $b_{eff}$  è tale da mantenere invariata la risultante delle tensioni



$b_{eff}$  è detta  
larghezza efficace

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

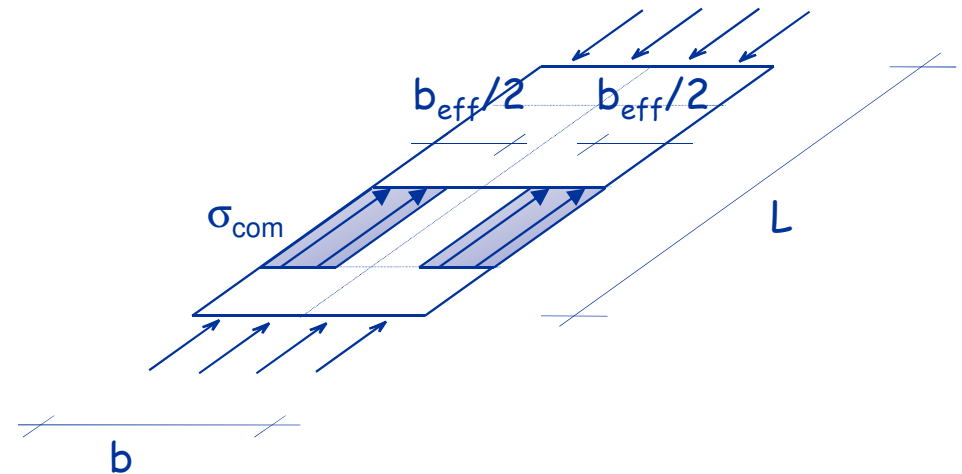
Approccio semplificato: Von Karman, 1932  
(asta perfetta)

- la larghezza efficace potrebbe essere calcolata dalle espressioni mostrate in precedenza

es. per  $N=N_{ult}$  
$$\frac{b_{eff}}{b} = \frac{N_{ult}}{N_y}$$

- ma si preferisce assumere che, per un dato  $\sigma_{com}$ ,  $b_{eff}$  sia la larghezza per la quale questa tensione è critica

$$\sigma_{cr}(b_{eff}) = \sigma_{com} \quad \sigma_{com} = \sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b_{eff}/t)^2} \quad \rightarrow \quad b_{eff}$$



# Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 - EC3  
(asta perfetta)

$$\sigma_{com} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b_{eff}/t)^2}$$



$$\sigma_{com} = \frac{k \pi^2 E (b/b_{eff})^2}{12 (1 - \nu^2) (b/t)^2}$$



$$\frac{b}{b_{eff}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2) \sigma_{com}}{k \pi^2 E}}$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$



$$\bar{\lambda}_p = \frac{b/t}{28.4 \varepsilon \sqrt{k}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$



$$\bar{\lambda}_p \quad (\text{per } \sigma_{com} = f_y)$$

Si noti che è anche  $\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}}$

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 - EC3

lastra perfetta:

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$

lastra reale, con imperfezioni:

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.22}{\bar{\lambda}_p^2}$$

L'espressione viene  
generalizzata  
nell'Eurocodice 3  
per tener conto di vincoli  
differenti e distribuzioni  
di tensioni non uniformi

- internal compression elements:

$$\rho = 1,0$$

$$\text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,673, \text{ where } (3 + \psi) \geq 0$$

- outstand compression elements:

$$\rho = 1,0$$

$$\text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,748$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,748$$

# Indicazioni di normativa

Eurocodice 3, parte 1-5, punto 4.4

**Table 4.1: Internal compression elements**

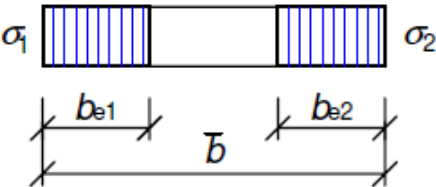
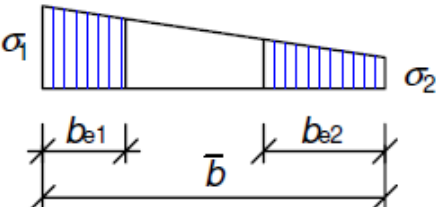
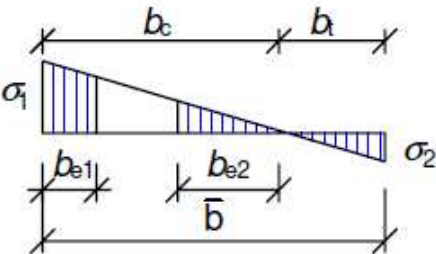
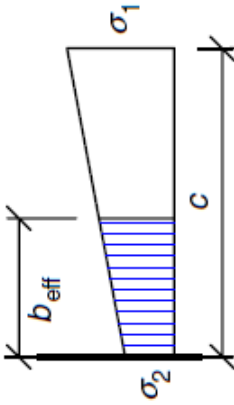
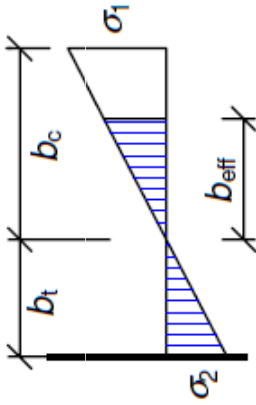
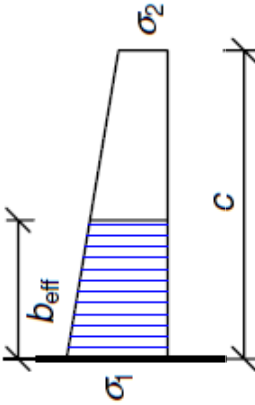
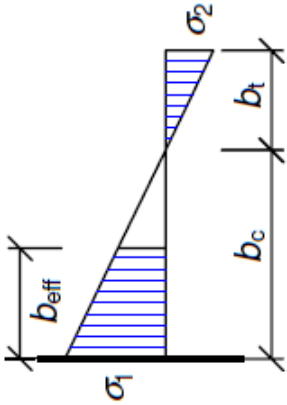
Stress distribution (compression positive)				Effective <sup>p</sup> width $b_{eff}$		
				$\psi = 1$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,5 b_{eff}$		
				$1 > \psi \geq 0$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\psi < 0$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Buckling factor $k_\sigma$	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$



Table 4.2: Outstand compression elements

Stress distribution (compression positive)		Effective <sup>p</sup> width $b_{\text{eff}}$		
	$1 > \underline{\psi} \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ c$			
	$\underline{\psi} < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ b_c = \rho \ c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$
Buckling factor $k_\sigma$	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$
	$1 > \underline{\psi} \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ c$			
	$\underline{\psi} < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ b_c = \rho \ c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$
Buckling factor $k_\sigma$	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$
				23,8

# Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 - EC3

Per elementi soggetti a tensioni  $< f_y$  si usa

$$\bar{\lambda}_{p,red} = \bar{\lambda}_p \sqrt{\frac{\sigma_{com,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}}$$

con la stessa espressione di  $\rho$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2}$$

precedenti versioni dell'EC3 consideravano troppo cautelativa l'espressione e suggerivano

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2} + 0.18 \frac{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p,red}}{\bar{\lambda}_p - 0.6}$$

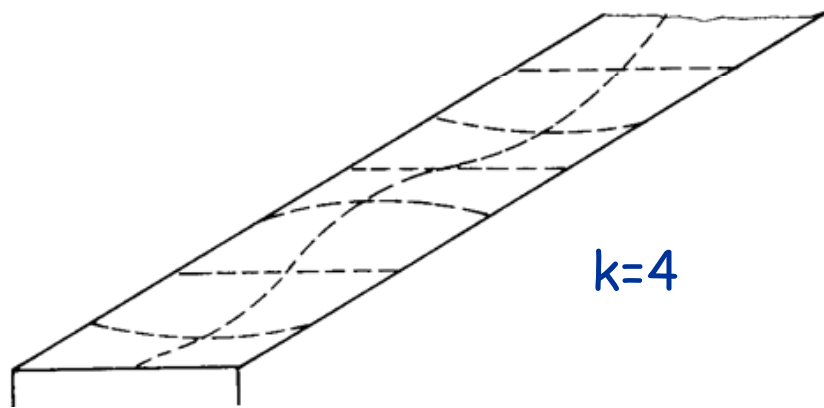
# Comportamento post-critico di una lastra compressa

Differenti possibili approcci semplificati:

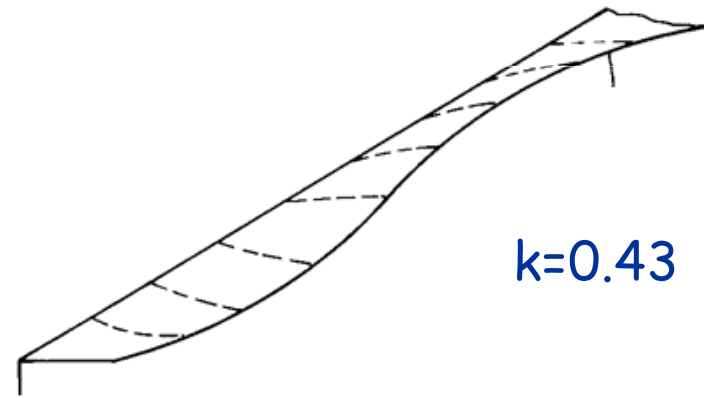
- larghezza efficace
  - è l'approccio base, il più utilizzato
- spessore efficace
  - è usato per ridurre il contributo degli irrigidimenti nella parte 1-3 dell'Eurocodice 3
  - è usato diffusamente nell'Eurocodice 9 (alluminio)
- area efficace
  - è citato come approccio generale nella parte 1-5 dell'Eurocodice 3
- tensione ridotta
  - era usato nel passato

# Lastra con un bordo longitudinale libero

- il comportamento è analogo a quello della lastra in cui entrambi i bordi longitudinali sono vincolati, ma il suo carico critico è molto più basso
- la tensione critica può essere calcolata con le stesse espressioni valide per lastra vincolata a entrambi i bordi, ponendo però  $k=0.43$



vincolata su due lati



vincolata su un solo lato

# Esempio

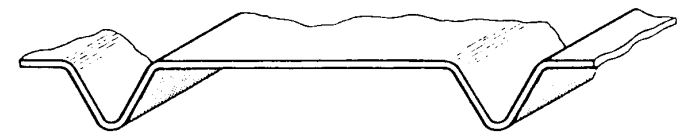
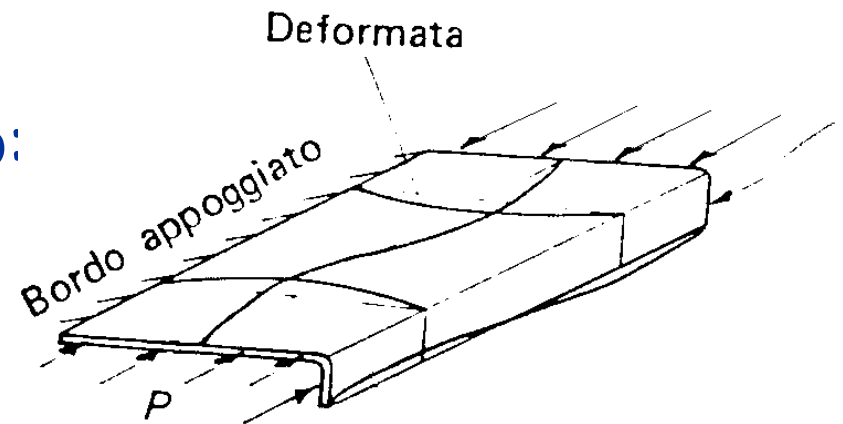
Larghezza efficace				
lastra vincolata su due bordi longitudinali				
b	200	mm		
t	2.5	mm		
k	4			
E	210000	MPa		
$\nu$	0.3			
$f_y$	235	MPa		
b/t	80			
$\sigma_{cr}$	118.6	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
$\lambda_p$	1.408			
$b_{eff}/b$	0.710		0.599	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	0.996			
$b_{eff}/b$	1.000		0.782	

lastra con un bordo longitudinale libero				
b	100	mm		
t	2.5	mm		
k	0.43			
E	210000	MPa		
$\nu$	0.3			
$f_y$	235	MPa		
b/t	40			
$\sigma_{cr}$	51.0	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
$\lambda_p$	2.148			
$b_{eff}/b$	0.466		0.418	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	1.519			
$b_{eff}/b$	0.658		0.563	

Vedi file Instabilità locale, foglio b eff

# Lastre molto snelle

- per annullare o limitare la riduzione del carico critico (e quindi della capacità portante) si possono aggiungere degli irrigidimenti
  - per lastre con un bordo libero: irrigidimenti di bordo
  - per tutte le lastre : irrigidimenti intermedi



occorre verificare l'efficacia degli irrigidimenti  
(controllare che non vadano in carico critico)