

Corso di aggiornamento

**Progetto di edifici antisismici
con struttura a telaio in acciaio**

4 - Effetto $P-\delta$ e carico critico

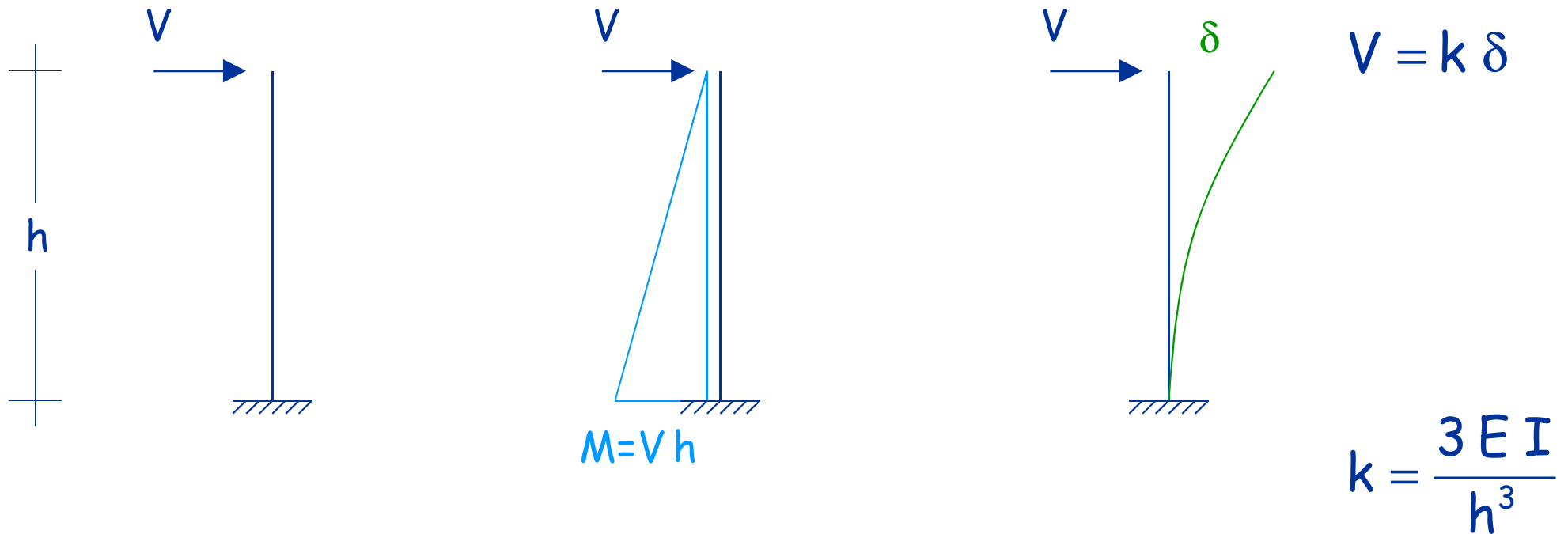
Villa Redenta, Spoleto

23-24 marzo 2017

Aurelio Ghersi

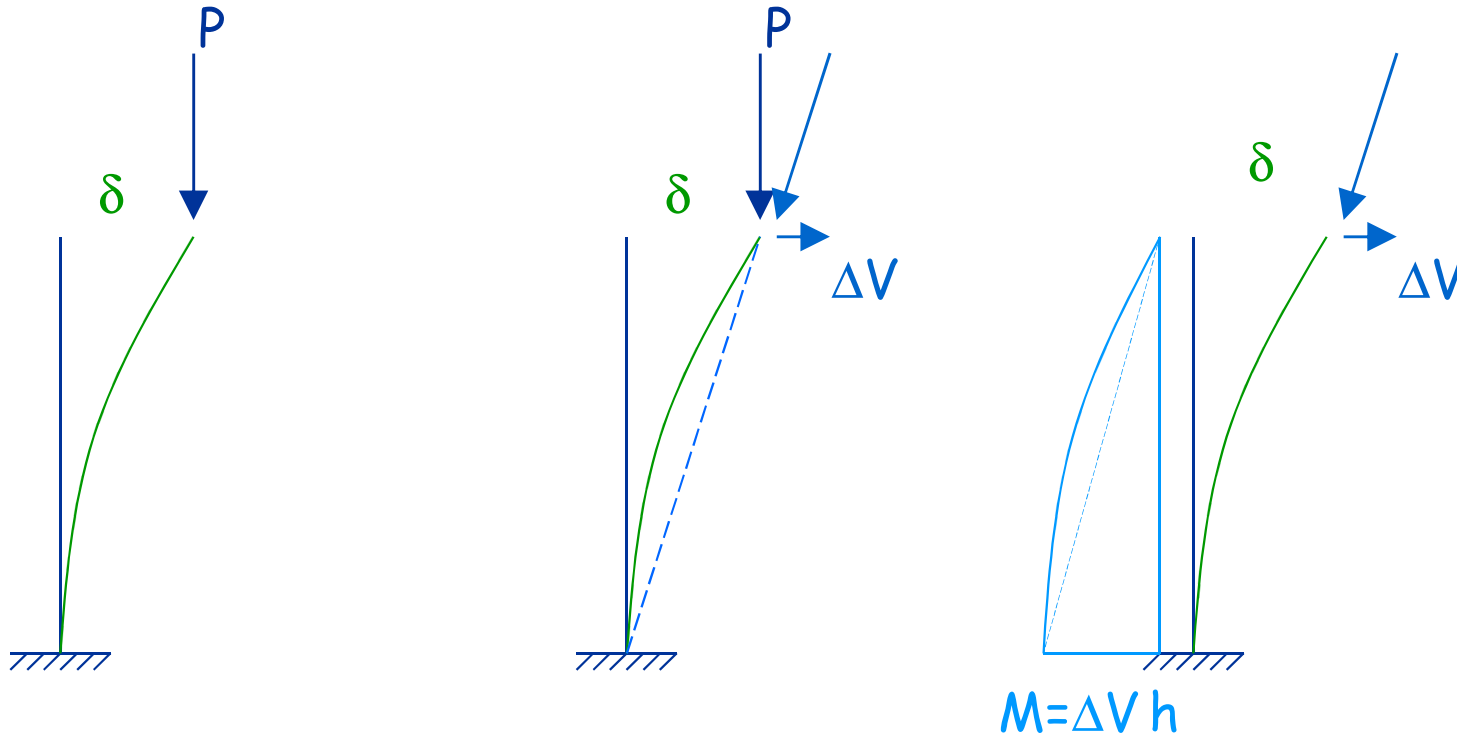
In campo elastico

Schema monopiano, comportamento elastico



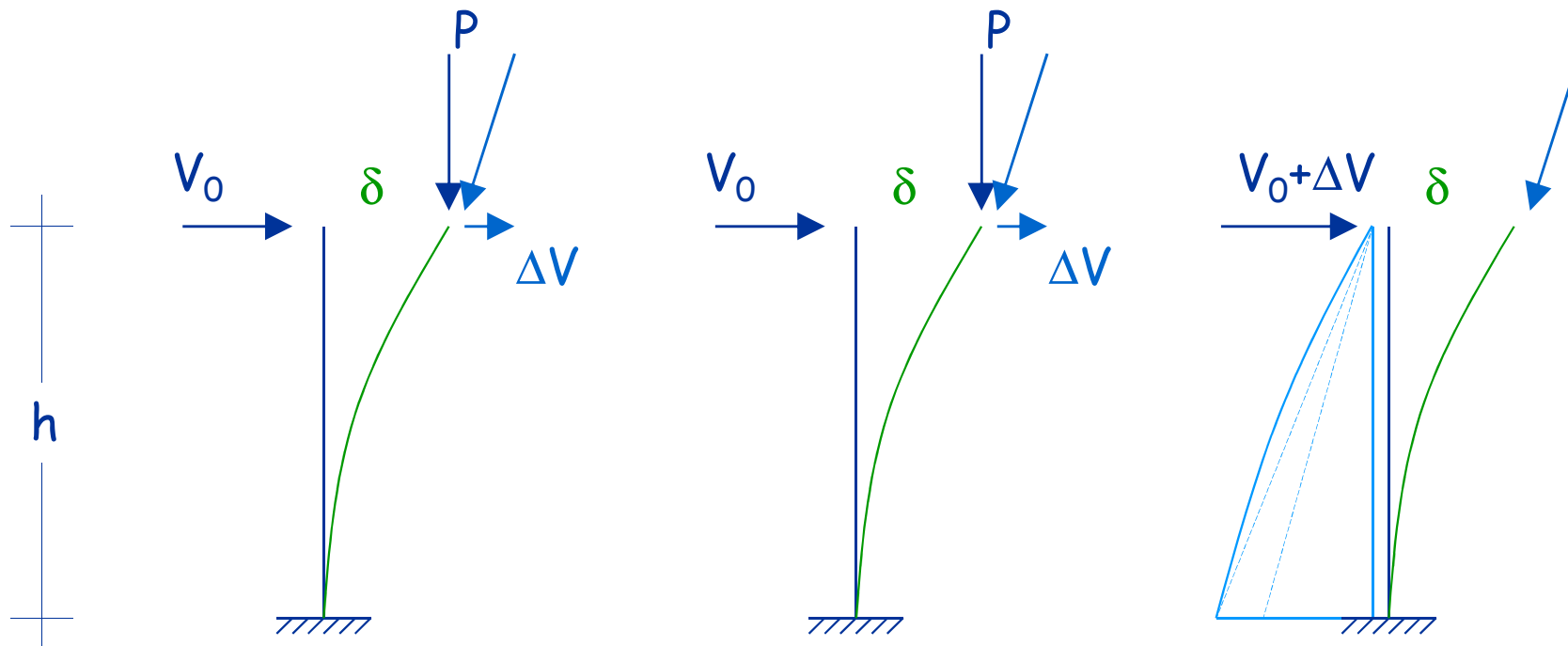
Relazione lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

Schema monopiano, comportamento elastico



$$\Delta V = \frac{P \delta}{h}$$

Schema monopiano, comportamento elastico

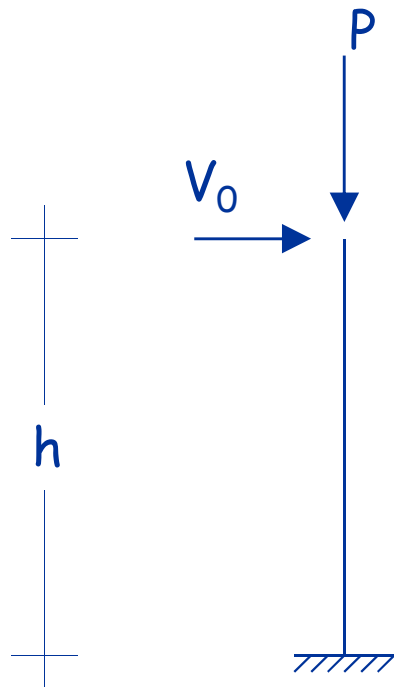


$$V = V_0 + \Delta V$$

$$M = (V_0 + \Delta V) h$$

$$\delta = \frac{V}{k}$$

Schema monopiano, comportamento elastico



$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + \frac{P \delta}{h}$$

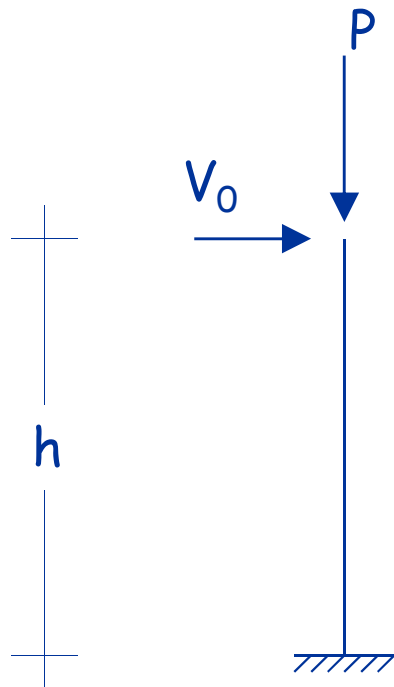
$$\delta = \frac{V}{k}$$

$$k \delta = V_0 + \frac{P \delta}{h}$$

$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

Relazione non lineare tra carichi - sollecitazioni - spostamenti

Schema monopiano, comportamento elastico



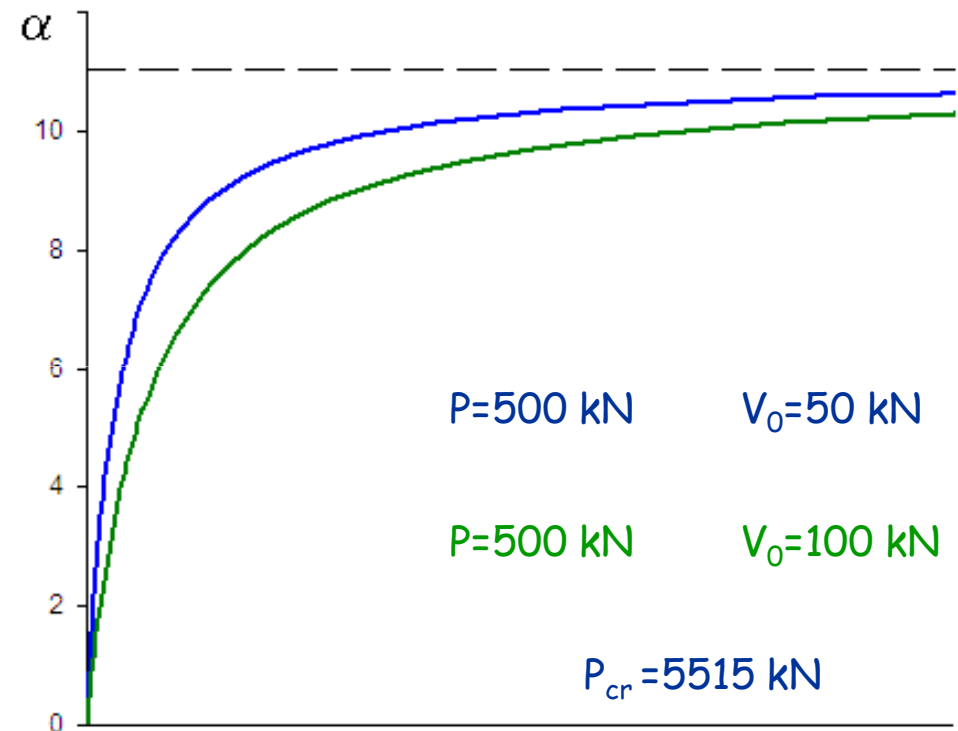
$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

$$\delta = \frac{\alpha V_0 / k}{1 - \frac{\alpha P}{k h}}$$

Asintoto per
 $\alpha P = k h$

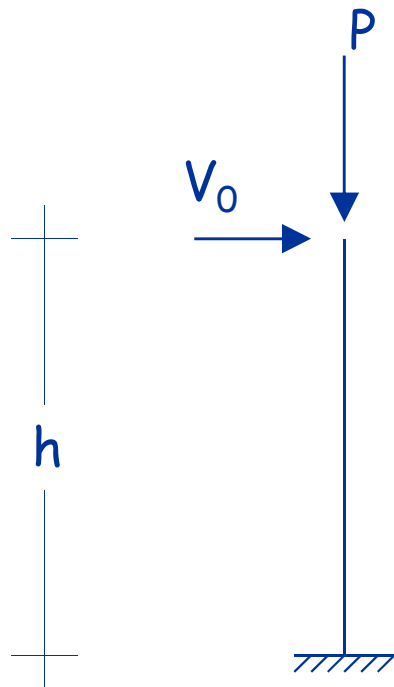
$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

Al crescere di V_0 e P
(contemporaneamente)
 α moltiplicatore di V_0 e P



Vedi file Excel Instabilità (mensola)

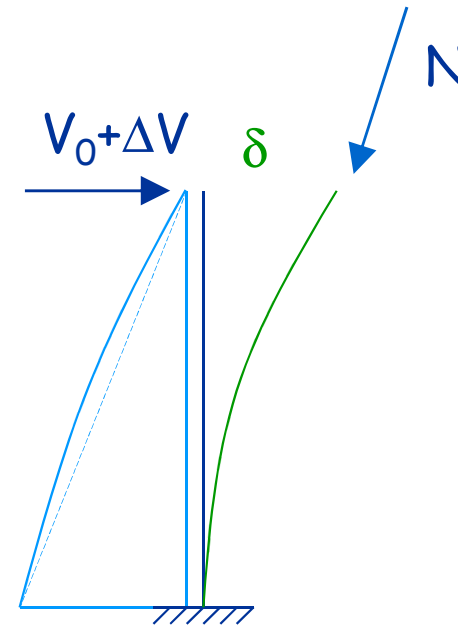
Schema monopiano, carico critico in campo elastico



$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

indipendentemente da V_0

ma la presenza di sforzo
normale aumenta la
deformazione dell'asta e
riduce la rigidezza



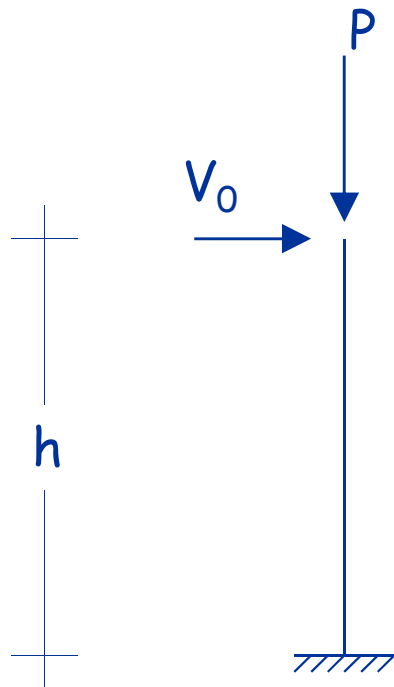
Per la mensola

$$k h = \frac{3 E I}{h^2} = \frac{12 E I}{(2h)^2}$$

ma in realtà
(Eulero)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2h)^2} \cong \frac{9.87 E I}{(2h)^2}$$

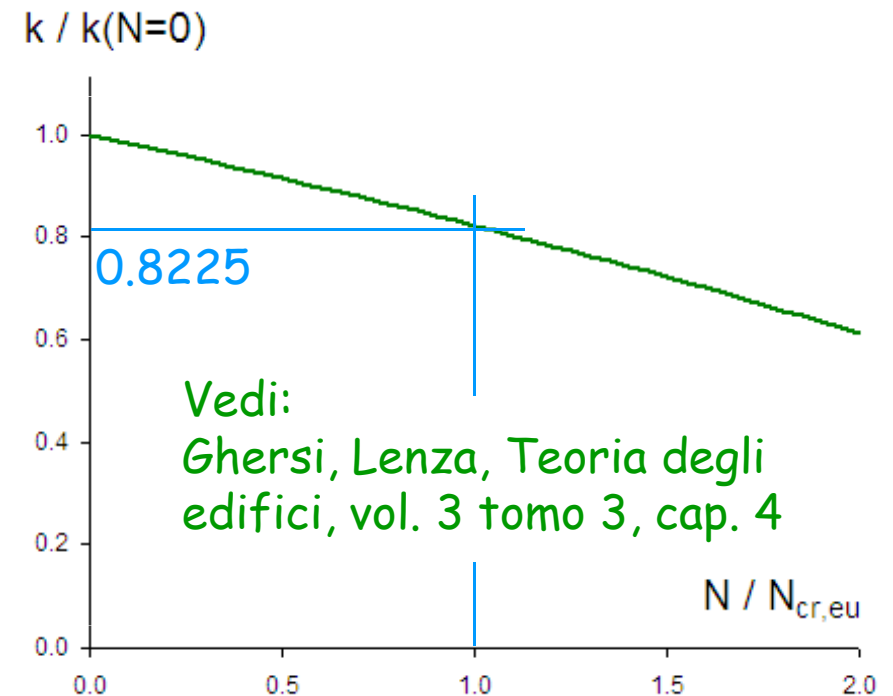
Schema monopiano, carico critico in campo elastico



$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

indipendentemente da V_0

ma la presenza di sforzo
normale aumenta la
deformazione dell'asta e
riduce la rigidezza



Per la mensola

$$12 \times 0.8225 = 9.87$$

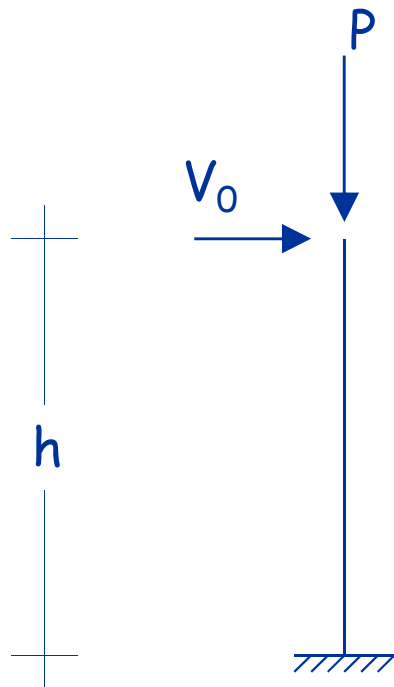
$$k h = \frac{3 E I}{h^2} = \frac{12 E I}{(2h)^2}$$

ma in realtà
(Eulero)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2h)^2} \cong \frac{9.87 E I}{(2h)^2}$$

variando così la rigidezza
si ottengono i valori di Eulero

Schema monopiano, comportamento elastico



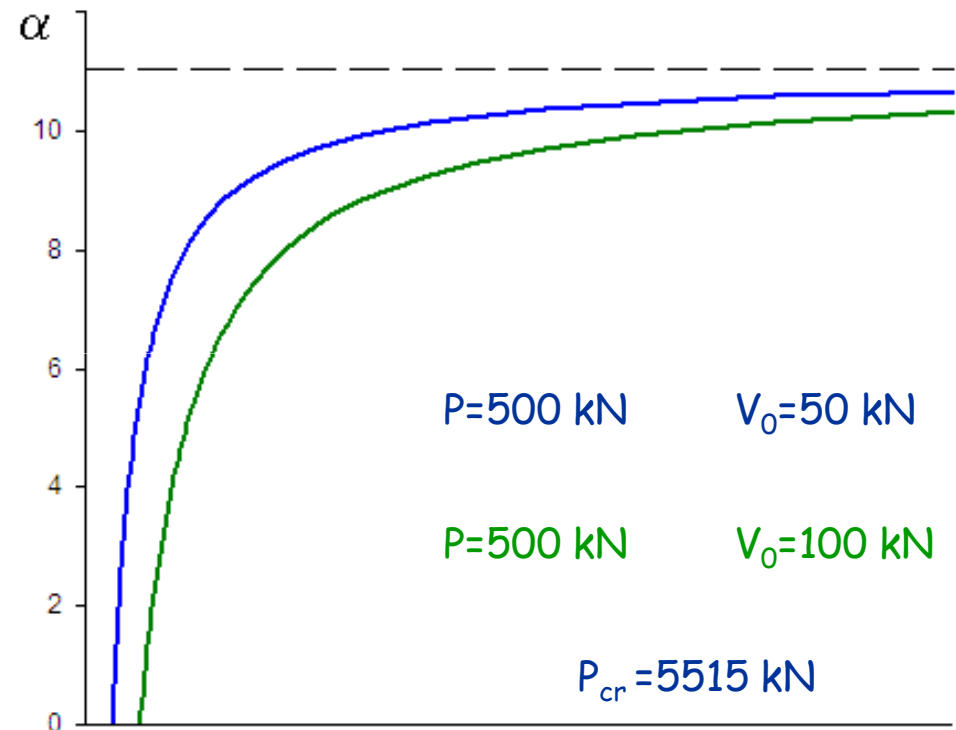
$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{\alpha P}{k h}}$$

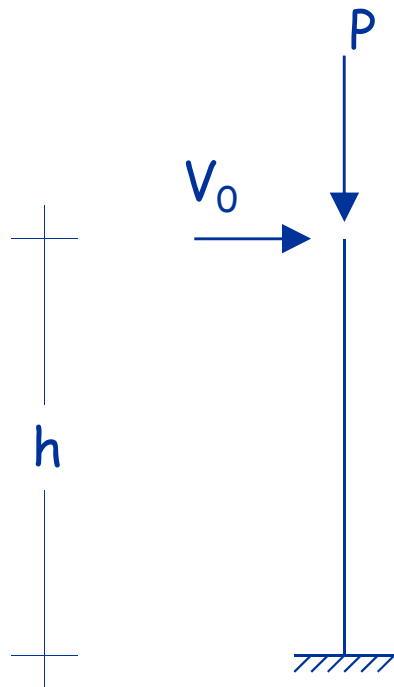
Asintoto per
 $\alpha P = k h$

$$P_{cr} = \alpha_{cr} P = k h$$

Al crescere di P
(con V_0 costante)
 α moltiplicatore di P



Schema monopiano, comportamento elastico

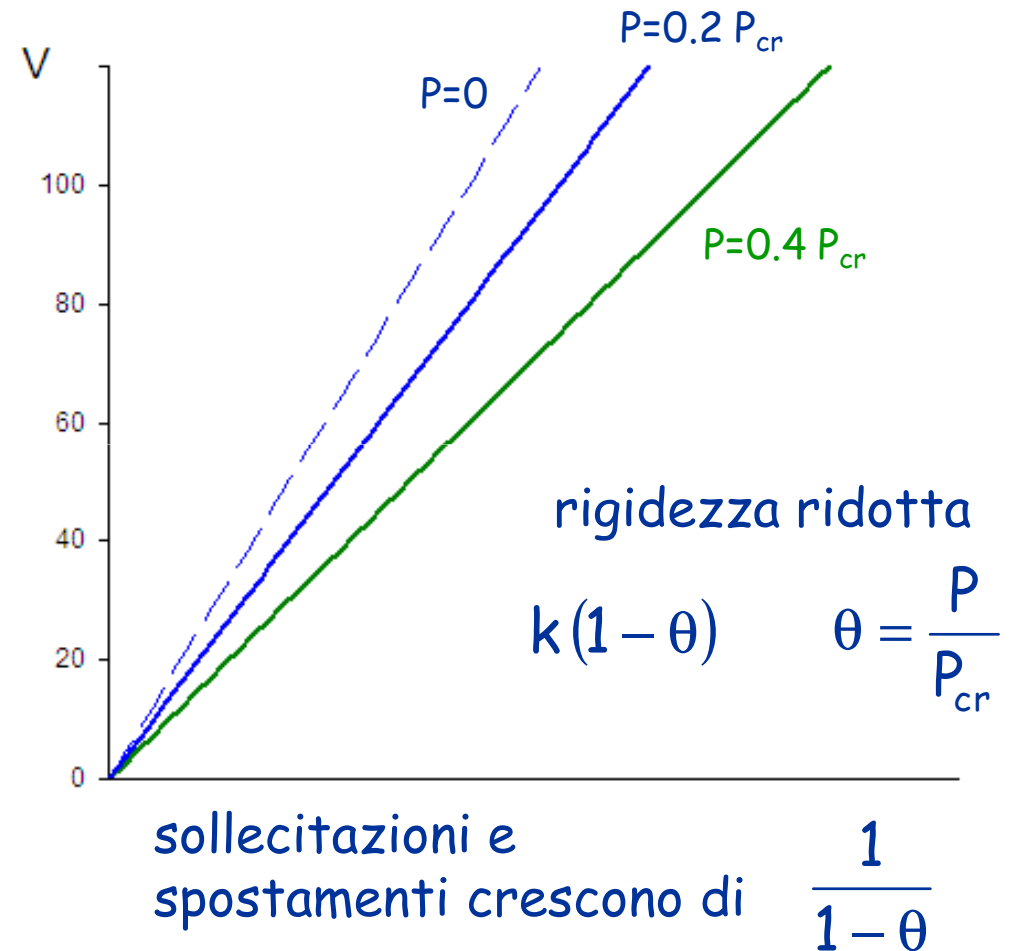


$$\delta = \frac{V_0 / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

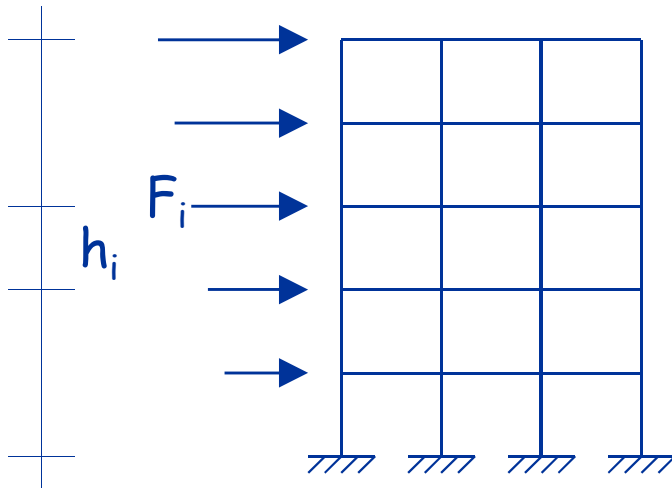
$$\delta = \frac{V / k}{1 - \frac{P}{k h}}$$

Comportamento lineare,
ma l'effetto di P cresce in
maniera non lineare con P

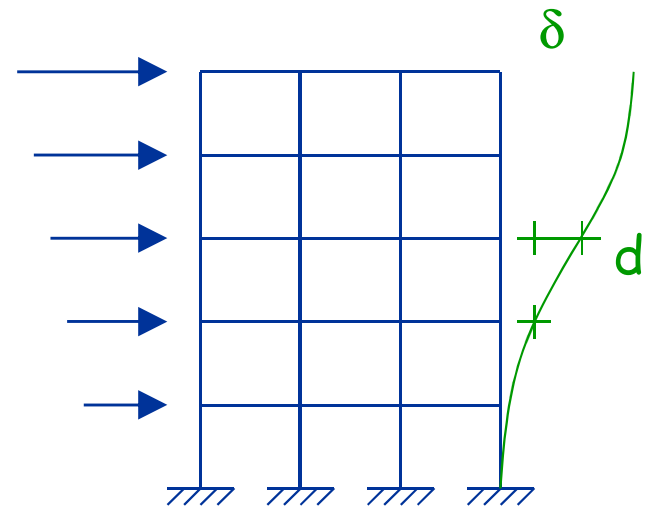
Al crescere di V
(con P costante)



Telaio multipiano, comportamento elastico



F_i forza di piano
 V_i taglio di piano (somma
forze al di sopra)

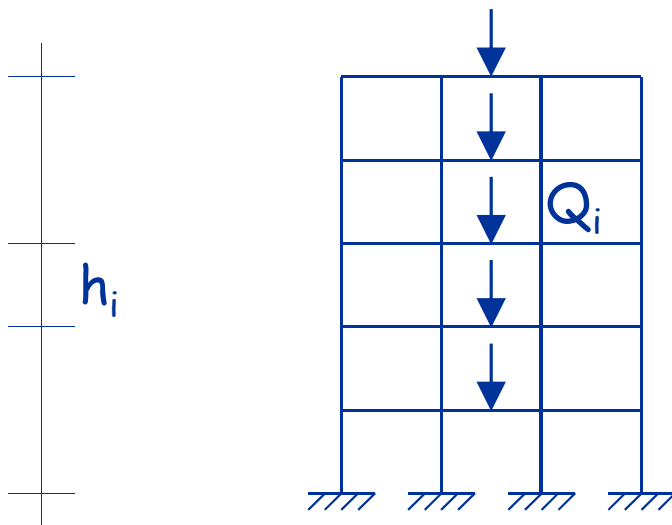


δ_i spostamenti assoluti
 d_i spostamenti relativi

$$F = k \delta$$

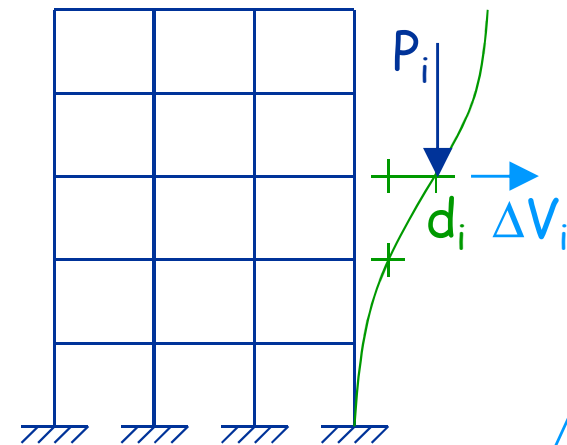
Relazione
matriciale

Telaio multipiano, comportamento elastico



Q_i carico verticale di piano

P_i carico totale
sovrastante il piano



$$\Delta V_i = \frac{P_i d_i}{h_i}$$

Si può ottenere

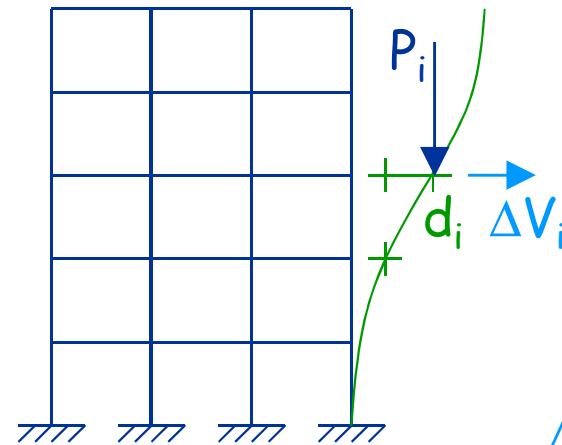
$$\Delta F = k_g \delta$$

Relazione
matriciale

Telaio multipiano, comportamento elastico

$$k_g = \begin{bmatrix} \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \end{bmatrix}$$

$$-\frac{P_i}{h_i} \quad \frac{P_i}{h_i} + \frac{P_{i+1}}{h_{i+1}} \quad -\frac{P_{i+1}}{h_{i+1}}$$



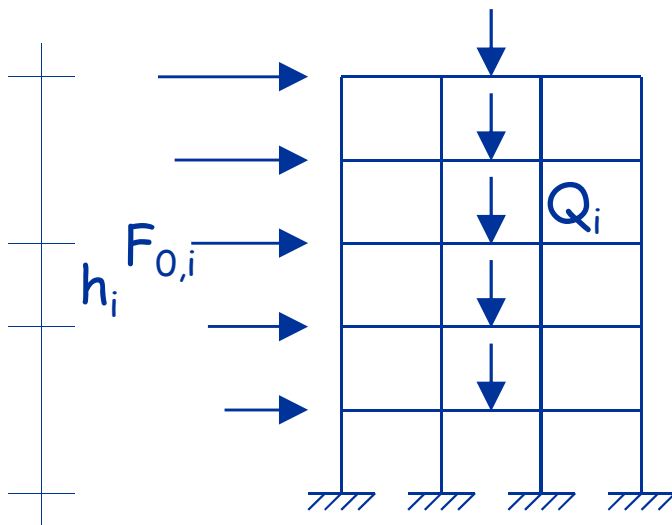
$$\Delta V_i = \frac{P_i d_i}{h_i}$$

Si può ottenere

$$\Delta F = k_g \delta$$

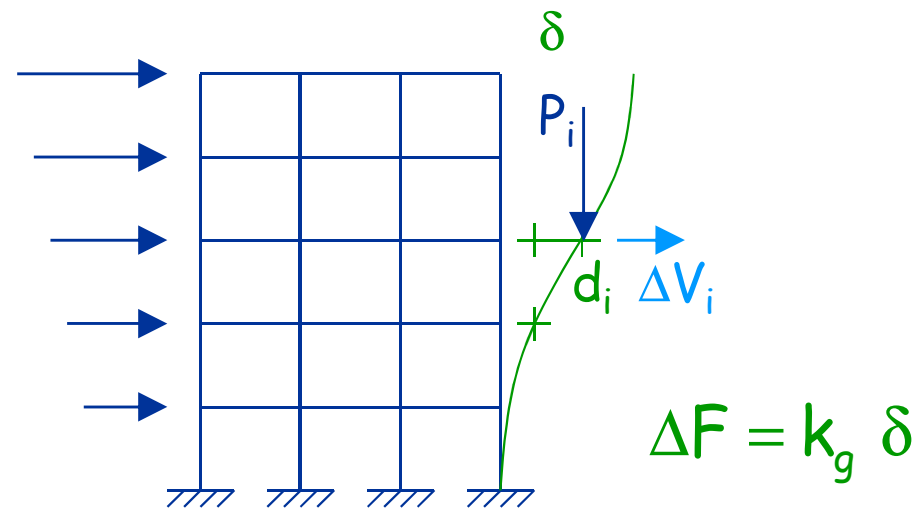
Relazione
matriciale

Telaio multipiano, comportamento elastico



$$F = F_0 + \Delta F = k \delta$$

Relazione
matriciale

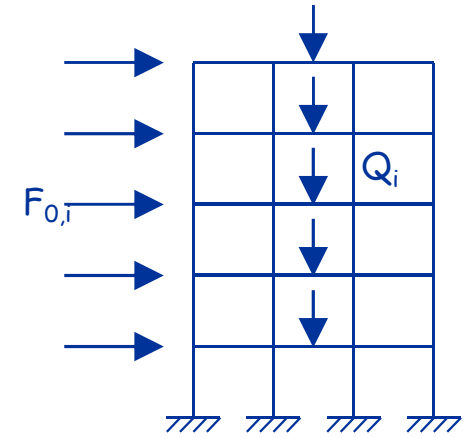


$$F_0 = F - \Delta F = k \delta - k_g \delta = (k - k_g) \delta$$

Matrice di rigidezza
ridotta per tener
conto dell'effetto P- δ

Telaio multipiano, comportamento elastico

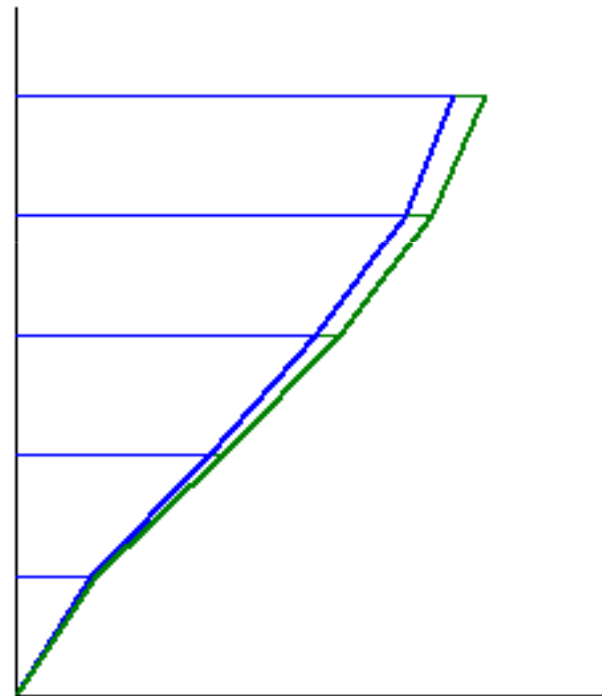
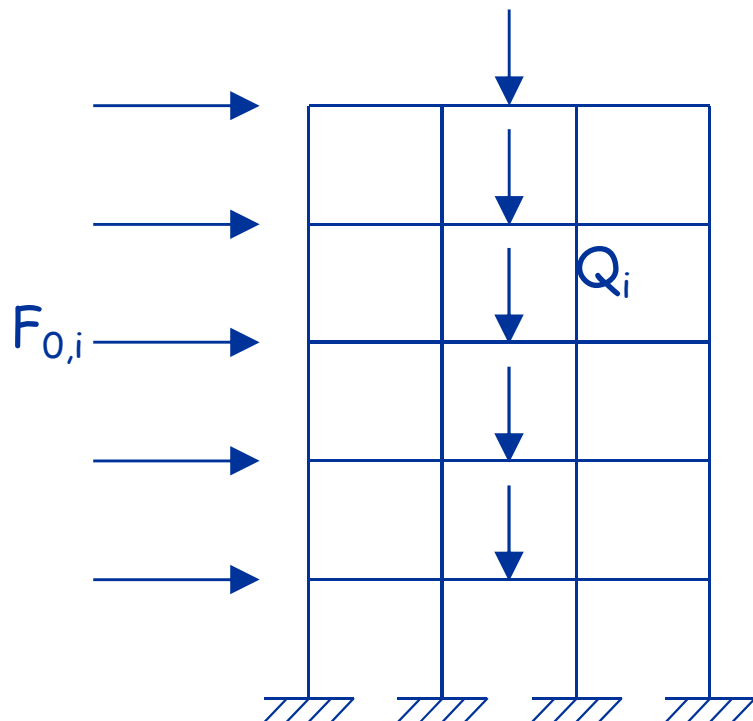
matrice rigidezza		tutti i termini sono in kN/mm		
12.378	-16.672	5.314	-1.257	0.290
-16.672	36.593	-27.821	9.577	-2.098
5.314	-27.821	53.540	-43.431	15.500
-1.257	9.577	-43.431	73.692	-55.183
0.290	-2.098	15.500	-55.183	94.120
matrice geometrica				
0.171	-0.171	0	0	0
-0.171	0.557	-0.386	0	0
0	-0.386	0.986	-0.600	0
0	0	-0.600	1.414	-0.814
0	0	0	-0.814	1.843
matrice rigidezza - geometrica				
12.207	-16.501	5.314	-1.257	0.290
-16.501	36.036	-27.435	9.577	-2.098
5.314	-27.435	52.554	-42.831	15.500
-1.257	9.577	-42.831	72.278	-54.369
0.290	-2.098	15.500	-54.369	92.277



Vedi file Excel Instabilità (telaio)

Telaio multipiano, comportamento elastico

				senza P- δ	con P- δ
piano	h [m]	z [m]	F [kN]	spo [mm]	spo [mm]
5	3.50	17.50	100	145.7	155.6
4	3.50	14.00	100	129.5	138.7
3	3.50	10.50	100	99.8	107.1
2	3.50	7.00	100	64.4	69.0
1	3.50	3.50	100	24.8	26.4



Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

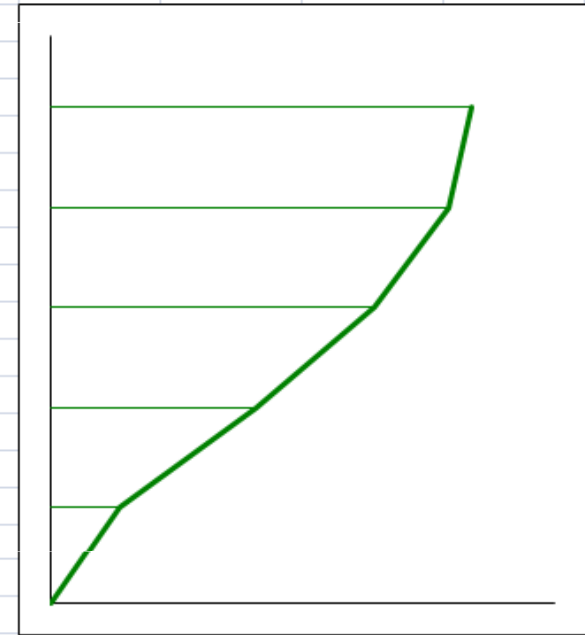
- Incrementando i carichi verticali di α si ha carico critico quando non è più possibile portare forze orizzontali (le forze instabilizzanti tengono, da sole, la struttura deformata)

$$F_0 = (k - \alpha k_g) \delta = 0$$

- Si hanno soluzioni se $\text{Det}(k - \alpha k_g) = 0$
(problema di autovalori e autovettori)

Telaio multipiano, carico critico in campo elastico

matrice rigidezza					tutti i termini sono in kN/mm				
12.378	-16.672	5.314	-1.257	0.290					
-16.672	36.593	-27.821	9.577	-2.098					
5.314	-27.821	53.540	-43.431	15.500					
-1.257	9.577	-43.431	73.692	-55.183					
0.290	-2.098	15.500	-55.183	94.120					
matrice geometrica									
0.171	-0.171	0	0	0					
-0.171	0.557	-0.386	0	0					
0	-0.386	0.986	-0.600	0					
0	0	-0.600	1.414	-0.814					
0	0	0	-0.814	1.843					
moltiplicatore critico									
α_{cr}	14.77215	modificare questo valore fino ad annullare il determinante							
determinante									
6.37E-05	valore da azzerare								
matrice rigidezza - geometrica									
9.846	-14.140	5.314	-1.257	0.290	t.noto	inversa			s.p.o.c.r.
-14.140	28.363	-22.123	9.577	-2.098	14.140	0.108	0.131	0.093	0.033
5.314	-22.123	38.979	-34.568	15.500	-5.314	0.131	0.248	0.201	0.076
-1.257	9.577	-34.568	52.800	-43.155	1.257	0.093	0.201	0.207	0.090
0.290	-2.098	15.500	-43.155	66.897	-0.290	0.033	0.076	0.090	0.056



Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

1. Procedimento iterativo

Correzione dell'analisi lineare, iterativa									
			senza P- δ		prima iterazione				
piano	F [kN]	V [kN]	spo [mm]	dr [mm]	ΔV [kN]	V' [kN]	F' [kN]	spo [mm]	dr [mm]
5	100	100	145.7	16.1	2.8	102.8	102.8	154.9	16.8
4	100	200	129.5	29.8	11.5	211.5	108.7	138.1	31.5
3	100	300	99.8	35.4	21.2	321.2	109.7	106.6	37.8
2	100	400	64.4	39.6	32.2	432.2	111.0	68.7	42.4
1	100	500	24.8	24.8	25.5	525.5	93.3	26.3	26.3

Calcolo lineare, con
le forze assegnate

ΔV 

Nuove
forze 

 Nuovi
spostamenti

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?


1. Procedimento iterativo

prima iterazione					seconda iterazione				
ΔV [kN]	V' [kN]	F' [kN]	spo [mm]	dr [mm]	ΔV [kN]	V'' [kN]	F'' [kN]	spo [mm]	$\Delta \%$
2.8	102.8	102.8	154.9	16.8	2.9	102.9	102.9	155.5	-0.03%
11.5	211.5	108.7	138.1	31.5	12.2	212.2	109.3	138.7	-0.03%
21.2	321.2	109.7	106.6	37.8	22.7	322.7	110.5	107.0	-0.03%
32.2	432.2	111.0	68.7	42.4	34.5	434.5	111.8	69.0	-0.03%
25.5	525.5	93.3	26.3	26.3	27.1	527.1	92.6	26.4	-0.03%

... iterando
quanto occorre

ΔV 

Nuove
forze 

 Nuovi
spostamenti

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

2. Con determinazione approssimata del carico critico

Carico critico						senza P-δ				
piano	h [m]	z [m]	P [kN]	F [kN]	V [kN]	spo [mm]	dr [mm]	α cr	θ	1/1-θ
5	3.50	17.50	600	100	100	145.7	16.1	36.13	0.028	1.028
4	3.50	14.00	1350	100	200	129.5	29.8	17.43	0.057	1.061
3	3.50	10.50	2100	100	300	99.8	35.4	14.14	0.071	1.076
2	3.50	7.00	2850	100	400	64.4	39.6	12.41	0.081	1.088
1	3.50	3.50	3600	100	500	24.8	24.8	19.58	0.051	1.054
								α cr min	θ max	1/1-θ _{max}
								12.41	0.081	1.088

a ogni piano si calcola $\alpha_{cr} = \frac{V_i h_i}{P_i d_i}$ e si prende il minimo

Telaio multipiano, comportamento elastico

È possibile procedere in maniera approssimata, se non si ha un programma che fa l'analisi non lineare?

2. Con determinazione approssimata del carico critico

								$\alpha_{cr \min}$	θ_{\max}	$1/1-\theta_{\max}$
								12.41	0.081	1.088
Correzione dell'analisi lineare, con θ										
		senza P- δ	stima	con P- δ						
piano	F [kN]	spo [mm]	spo [mm]	spo [mm]	$\Delta \%$					
5	100	145.7	158.4	155.6	1.8%					
4	100	129.5	140.9	138.7	1.6%					
3	100	99.8	108.5	107.1	1.4%					
2	100	64.4	70.0	69.0	1.5%					
1	100	24.8	27.0	26.4	2.1%					

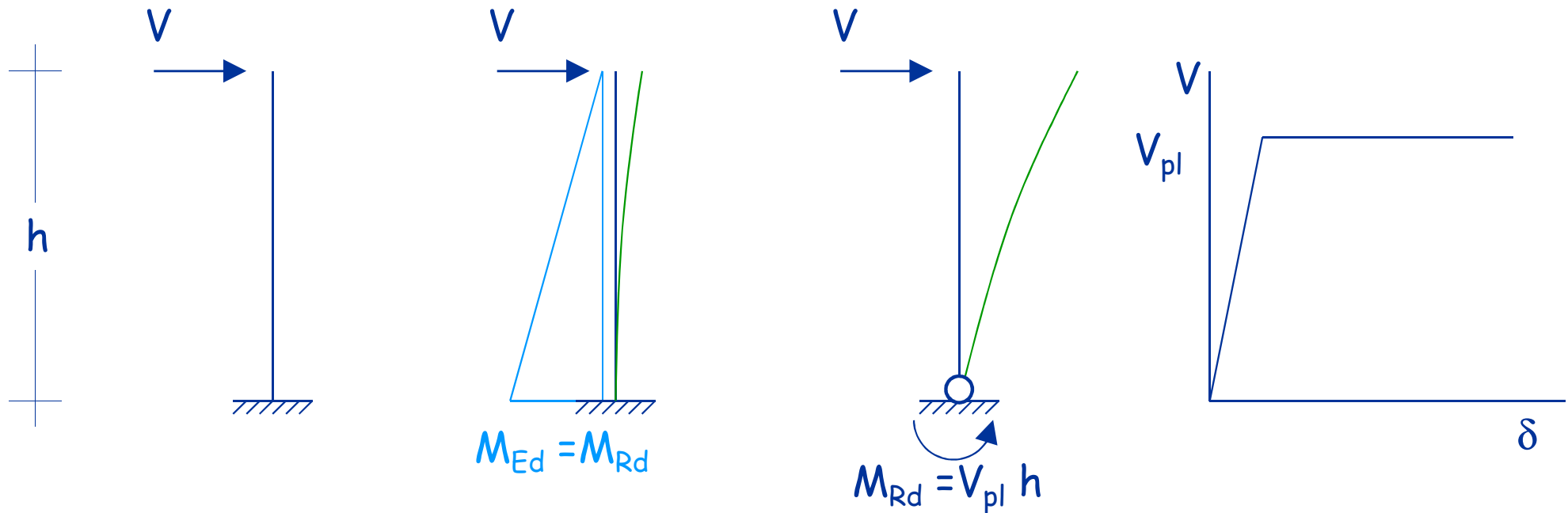
$$\theta = \frac{1}{\alpha_{cr}} \quad \theta_{\max} = \frac{1}{\alpha_{cr, \min}}$$

si amplificano i risultati di $\frac{1}{1 - \theta_{\max}}$

In campo plastico

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

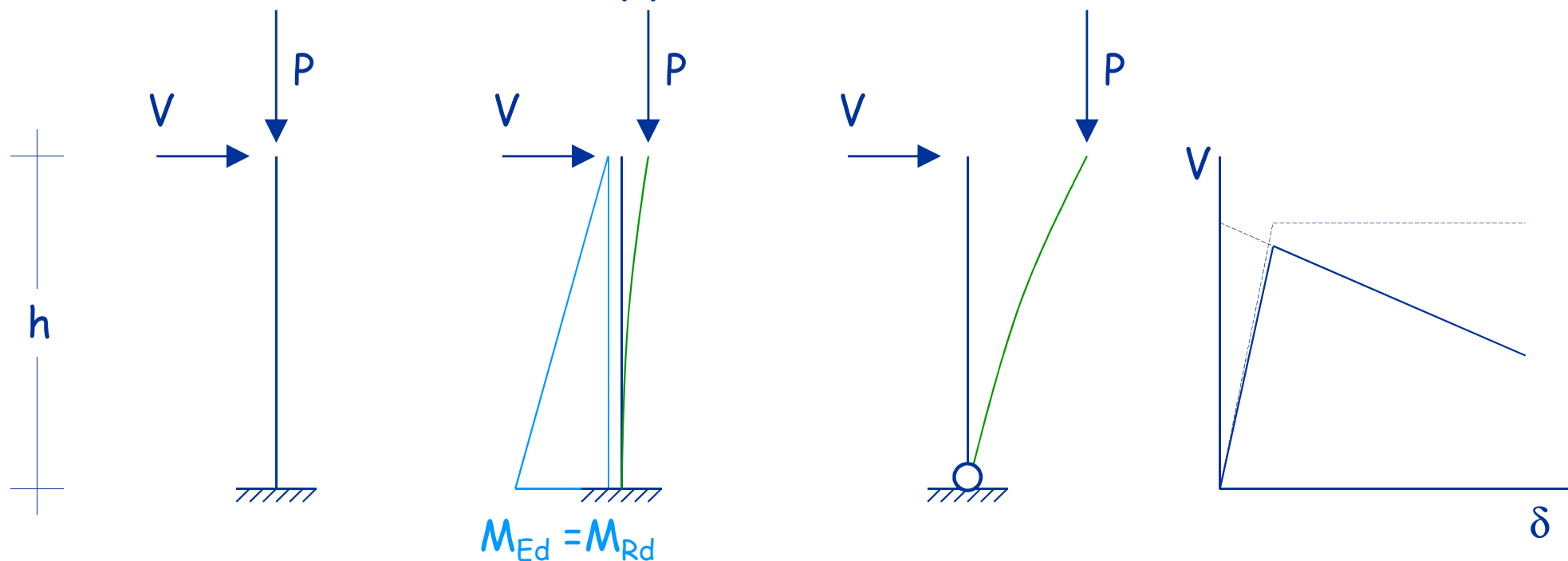
- Al crescere della forza orizzontale



Relazione non lineare tra carichi e spostamenti

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

- Se si considera l'effetto $P-\delta$



Il tratto elastico lineare ha una pendenza minore

La cerniera plastica si forma per un taglio minore

Dopo la formazione della cerniera si prosegue con un tratto decrescente

Schema monopiano, comportamento in campo plastico

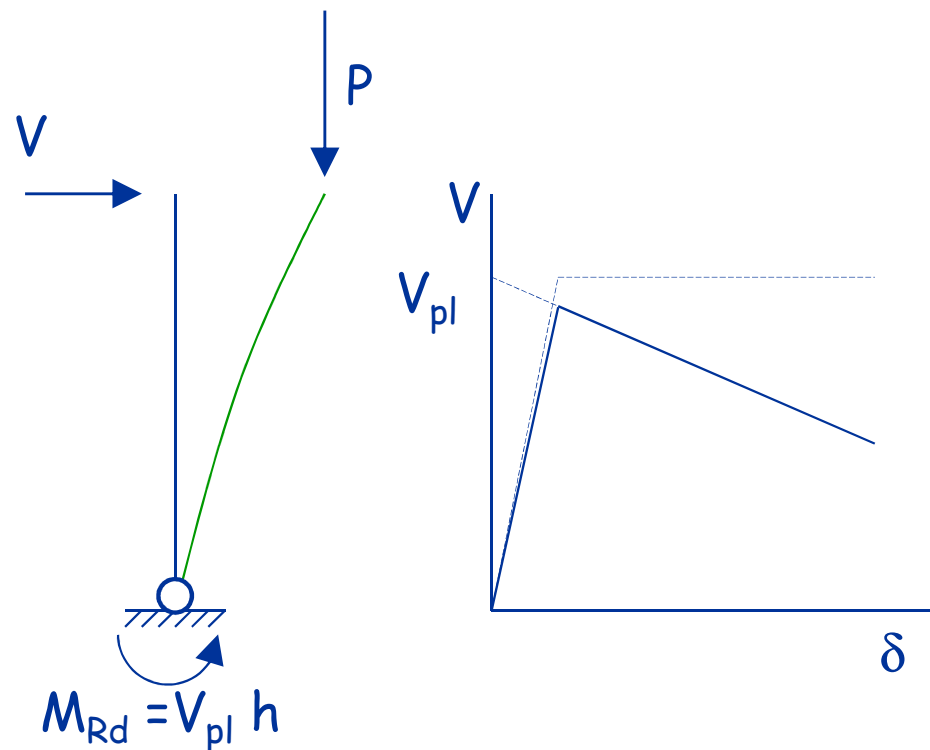
- Se si considera l'effetto P- δ

Per l'equilibrio

$$V h + P \delta = V_{pl} h$$

$$V = V_{pl} - \frac{P \delta}{h}$$

(retta decrescente)



Implicazioni per l'analisi sismica

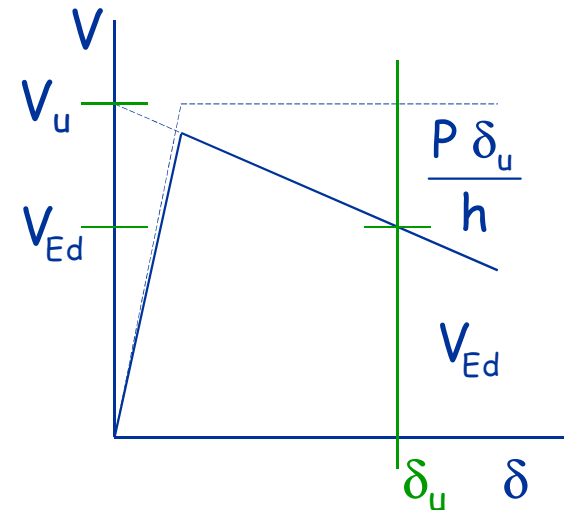
- Alla struttura sono applicate forze di calcolo V_{Ed}
- La struttura in campo plastico raggiungerà uno spostamento δ_u



- La struttura deve essere in grado di portare un taglio plastico (ultimo) V_u maggiore di V_{Ed}

$$\frac{V_u}{V_{Ed}} = \frac{V_u}{V_u - \frac{P \delta_u}{h}} = \frac{1}{1 - \frac{P \delta_u}{V_u h}} = \frac{1}{1 - \theta}$$

$$\text{con } \theta = \frac{P \delta_u}{V_u h}$$



Applicazione ai telai

- Calcolare a tutti i piani il rapporto $\theta_i = \frac{P_i d_{i,u}}{V_{i,u} h_i}$
- Determinarne il massimo θ_{\max}
- Incrementare i risultati del calcolo di $\frac{1}{1 - \theta_{\max}}$

La normativa dice che:

- Se $\theta_{\max} \leq 0.1$ l'effetti può essere trascurato
- Se $0.1 < \theta_{\max} \leq 0.2$ l'incremento v  fatto cos 
- Se $0.2 < \theta_{\max} \leq 0.3$ occorrono analisi pi  dettagliate
- Non   ammesso $\theta_{\max} > 0.3$

Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per d_u e V_u ?
- Spostamenti:
 - Il calcolo SLV è fatto con forze ridotte di q rispetto a quelle dello spettro elastico
 - Per Newmark, gli spostamenti in campo plastico sono gli stessi della struttura che rimane elastica
 - Quindi i valori di calcolo degli spostamenti devono essere incrementati di q o più precisamente, di $S_e(T)/S_d(T)$

Applicazione ai telai

- Ma cosa prendere per V_u e d_u ?

- Tagli:

- La prima plasticizzazione avviene per sisma incrementato di Ω

$$\Omega = \text{Min} \left(\frac{M_{pl,Rd} - M_{Ed,G}}{M_{Ed,E}} \right)_{travi}$$

- Tra prima plasticizzazione e collasso vi è un incremento di azione tagliante pari a α_u / α_1
- Quindi i valori di calcolo del taglio devono essere incrementati di $\Omega \alpha_u / \alpha_1$

- In definitiva si può usare l'espressione

$$\theta = \frac{P_d \frac{S_e(T)}{S_d(T)}}{V h \Omega \frac{\alpha_u}{\alpha_1}}$$