Spoleto, 6-7 aprile 2018

RISPOSTA SISMICA LOCALE

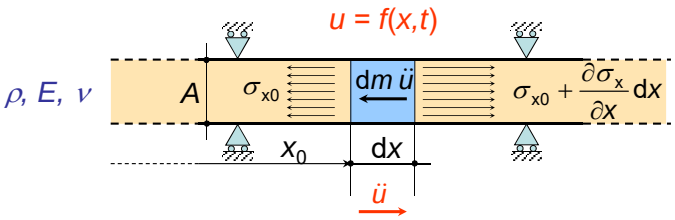
Luigi Callisto

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

onde in un mezzo continuo

- oscillatore elementare: 1 grado di libertà
- terreno ≡ mezzo continuo: infiniti gradi di libertà
- gli spostamenti sono una funzione del **tempo** e dello **spazio**
- le azioni simiche si propagano sotto forma di **onde**
- durante la propagazione, il moto può subire modifiche
  - riflessioni / rifrazioni
  - attenuazione

condizioni monodimensionali - onde di compressione



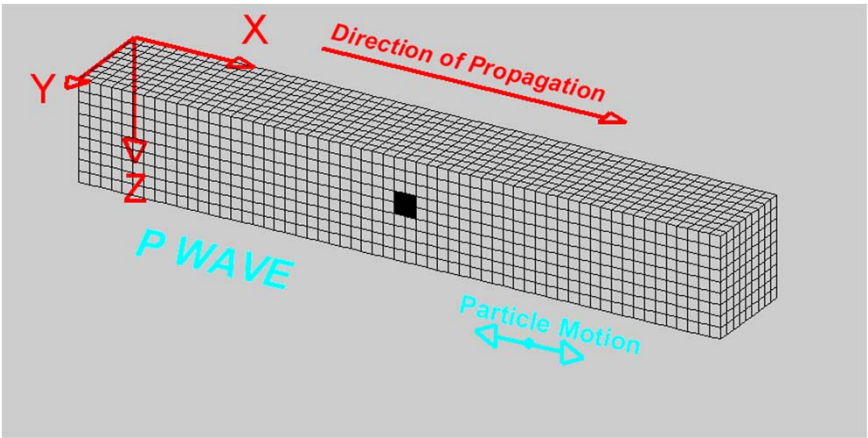
equilibrio: $-A\sigma_{x0} + A\left(\sigma_{x0} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - \mathrm{d}m \cdot \ddot{u} = 0$ $\qquad \mathrm{d}m = \rho\, A\, \mathrm{d}x$

legame costitutivo $\sigma_x = E_{ed} \cdot \varepsilon_x = E_{ed} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad E_{ed} = E\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

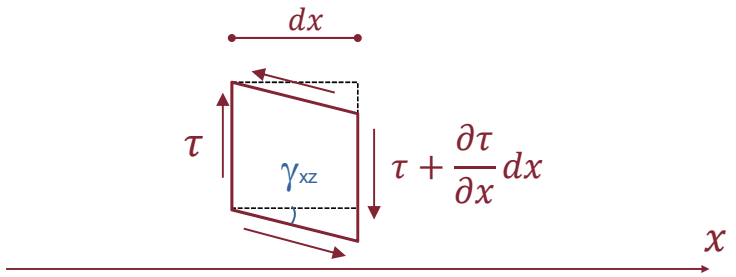
equazione del moto $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad v_p = \sqrt{\frac{E_{ed}}{\rho}}$

direzione del moto || direzione di propagazione

onde P (longitudinali)



condizioni monodimensionali - onde di taglio



equilibrio $\frac{\partial \tau}{\partial x} dx\, dy\, dz = \ddot{w}\, \rho dV$

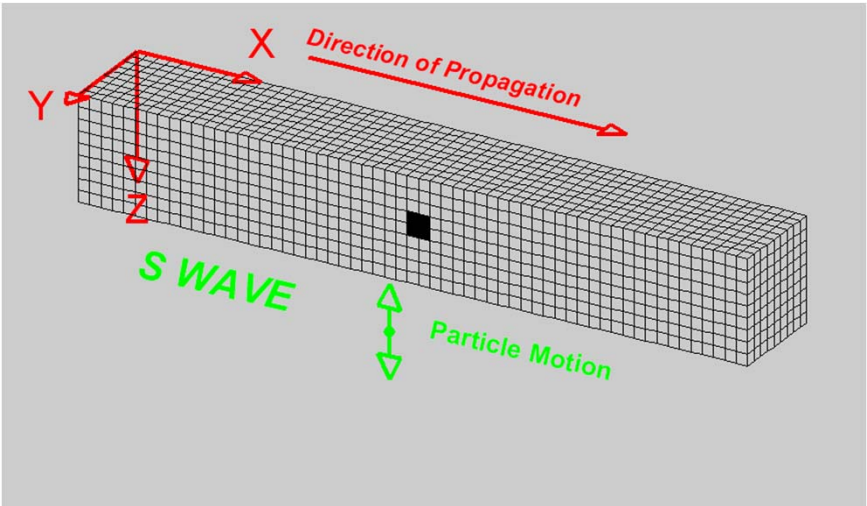
legame costitutivo $\tau = G\, \gamma = G\, \frac{\partial w}{\partial x}$

equazione del moto $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = V_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

direzione del moto ⊥ direzione di propagazione

onde S (trasversali)



condizioni monodimensionali - soluzione dell'equazione del moto

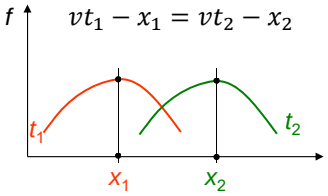
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = f(v \cdot t - x) \quad + \quad g(v \cdot t + x)$$

onda viaggiante nel verso delle x crescenti

onda viaggiante nel verso delle x decrescenti

$$vt_1 - x_1 = vt_2 - x_2$$



$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

velocità di propagazione $\quad v = \frac{\partial x}{\partial t}$

velocità delle particelle $\quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$

f e g assumono valori costanti per x che aumenta o diminuisce nel tempo con velocità v

onde armoniche

$$u(x,t) = A\cos(\omega \cdot t - kx) + B\cos(\omega \cdot t + kx)$$

dopo un tempo t, ciascuna onda avrà percorso una distanza:

$$x = \frac{\omega}{k} t = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{k} t \qquad v = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}$$ (velocità di propagazione)

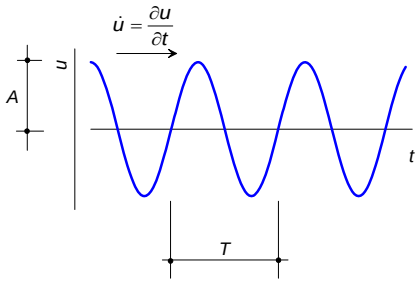
$$k = \frac{\omega}{v}$$ (numero d'onda) $\qquad [k] = L^{-1}$

dopo un periodo T, ciascuna onda avrà percorso una distanza:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f} = v \cdot T$$ (lunghezza d'onda) $\qquad [\lambda] = L$

onde armoniche $u(x,t) = A\cos(\omega \cdot t - kx)$

nel tempo

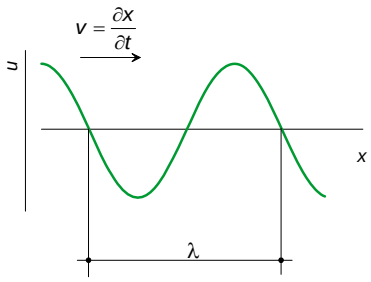


$T = 2\pi/\omega$

$f = 1/T$ = frequenza temporale

ω = frequenza temporale · 2π

nello spazio

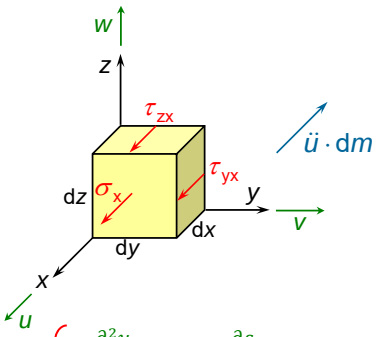


$\lambda = 2\pi/k$

$1/\lambda$ = frequenza spaziale

k = frequenza spaziale · 2π

condizioni tridimensionali



equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (+\rho g) \end{cases}$$

+ legame costitutivo (elasticità lineare) =

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G\nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G\nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G\nabla^2 w \end{cases}$$

$$\lambda = E\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

deformazione volumetrica

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

condizioni tridimensionali

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G\nabla^2 w$$

campo irrotazonale
(onde p)

$$rot(u, v, w) = 0$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\nabla^2 w$$

campo indivergente
(onde s)

$$div(u, v, w) = 0$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G\nabla^2 w$$

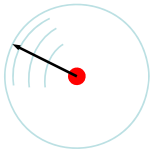
tempo di propagazione
tempo in cui l'onda percorre la distanza minima fra due punti

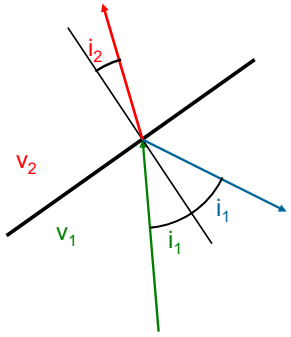
raggio
percorso (rettilineo) seguito dall'onda

fronte d'onda
luogo geometrico dei punti caratterizzati dallo stesso tempo di propagazione

in un mezzo **isotropo** rispetto alla velocità di propagazione,
un fronte d'onda è perpendicolare ai raggi

esempio:
sorgente puntuale, fronte d'onda sferico





legge di Snell

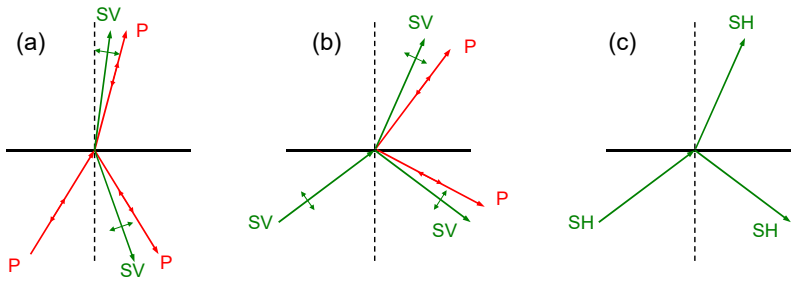
$$\frac{\text{sen}\, i}{v} = \text{costante}$$

(condizione che rende minimo il tempo di propagazione)

se $v_2 < v_1 \Rightarrow i_2 < i_1$

se $i_2 = 90°$, $i_1 = i_c$ si dice **angolo di incidenza critico**

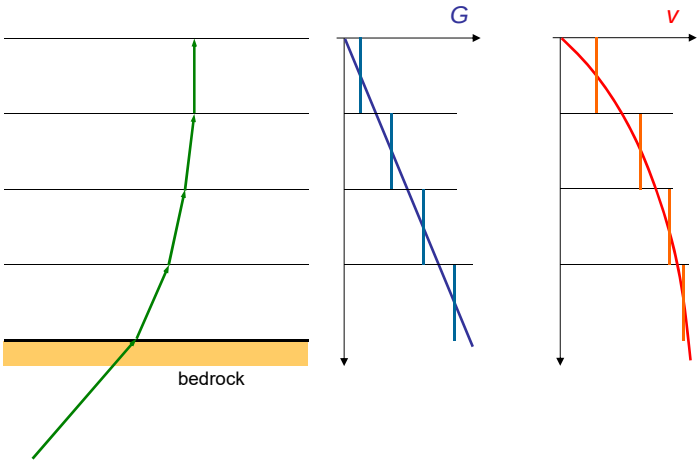
$$\frac{\text{sen}\, i_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\, i_2}{v_2} \qquad \text{sen}\, i_c = \text{sen}\, 90° \frac{v_1}{v_2} \qquad i_c = \text{arcsen} \frac{v_1}{v_2}$$



a. onda P incidente: si generano onde P e SV riflesse e rifratte

b. onda SV incidente: si generano onde SV e P riflesse e rifratte

a. onda SH incidente: si generano solo onde SH, riflesse e rifratte



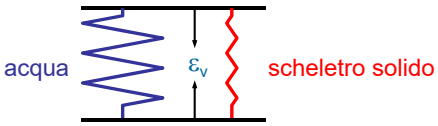
a causa del decremento di rigidezza, le onde incidenti subiscono un progressivo raddrizzamento → propagazione in direzione verticale

le **onde p** consistono nella propagazione di deformazioni volumetriche

NB: ε_v = div **s**

mezzo saturo → condizioni non drenate ($\varepsilon_v \approx 0$) → gli spostamenti associati alle **onde p** sono piccoli

in un mezzo saturo, le **onde p** si trasmettono essenzialmente attraverso l'acqua, caratterizzata da un'elevata rigidezza volumetrica

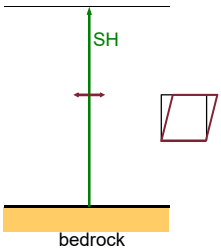


se la direzione di propagazione è verticale, alle **onde p** sono associati spostamenti prevalentemente verticali, che producono effetti modesti sulle strutture

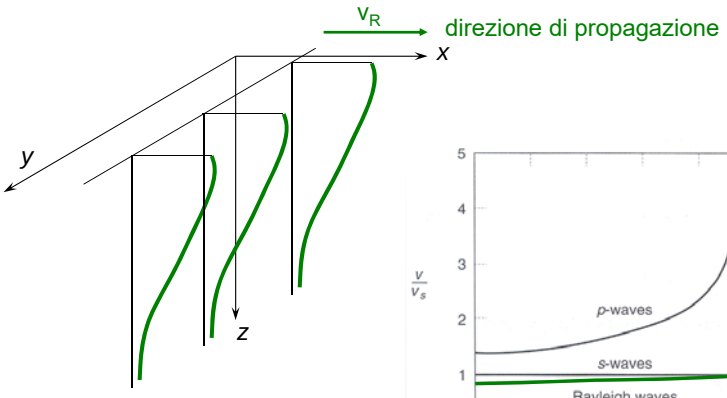
l'acqua non trasmette sforzi di taglio → le **onde s** si propagano attraverso lo scheletro solido

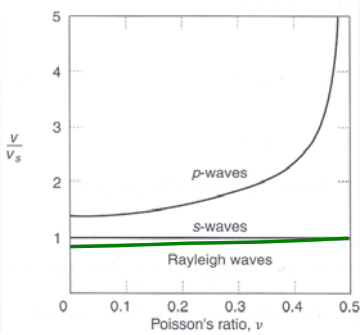
se la direzione di propagazione è verticale, alle **onde s** sono associati spostamenti orizzontali, che producono effetti importanti

in molti casi di interesse pratico:
studio della propagazione di **onde s** in direzione verticale (onde SH)

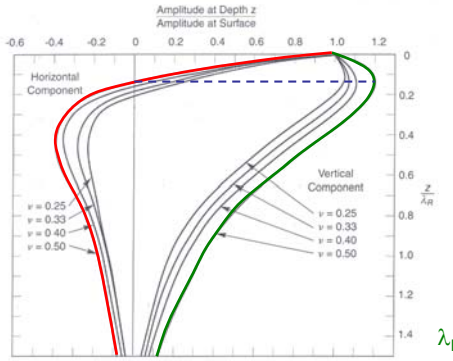


onde di Rayleigh
interazione fra le onde di volume e la superficie



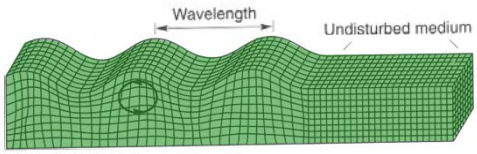


ampiezza onde di Rayleigh

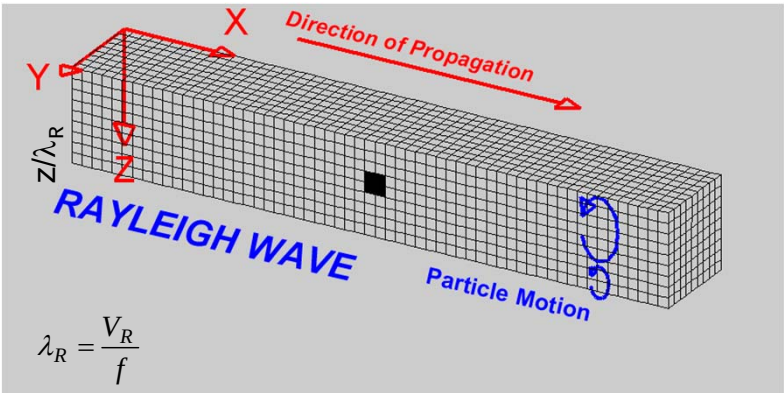


$\lambda_R = v_R / f_R$

v_R → direzione di propagazione



onde di Rayleigh

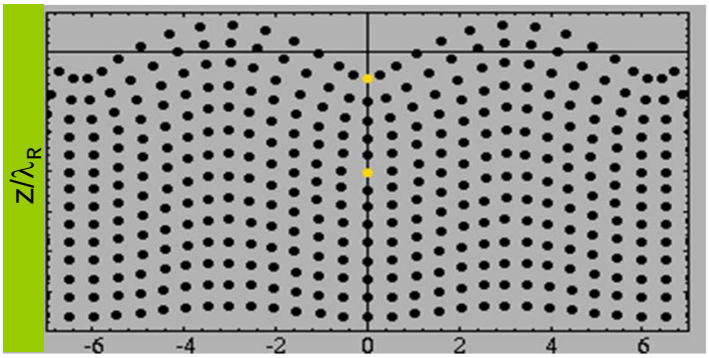


$$\lambda_R = \frac{V_R}{f}$$

in un mezzo lineare elastico omogeneo: $V_R \approx 0.9 \cdot V_S$

onde di Rayleigh

$$\lambda_R = \frac{V_R}{f}$$

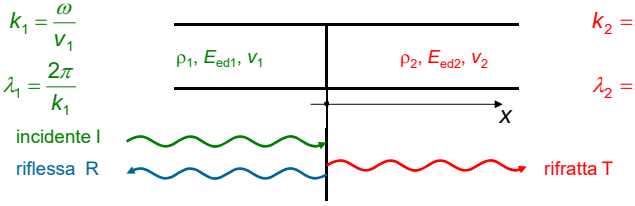


Direction of Propagation

onde in un mezzo stratificato - condizioni monodimensionali

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} \qquad \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$$

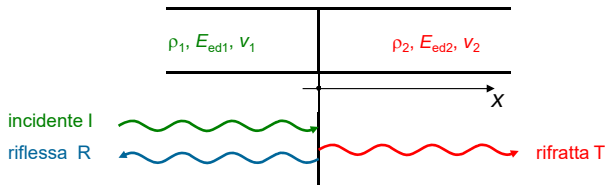


$$u_i(x,t) = A_{ui}\cos(\omega \cdot t - k_1 x) \qquad \sigma_i(x,t) = A_{\sigma i}\cos(\omega \cdot t - k_1 x)$$

$$u_r(x,t) = A_{ur}\cos(\omega \cdot t + k_1 x) \qquad \sigma_r(x,t) = A_{\sigma r}\cos(\omega \cdot t + k_1 x)$$

$$u_t(x,t) = A_{ut}\cos(\omega \cdot t - k_2 x) \qquad \sigma_t(x,t) = A_{\sigma t}\cos(\omega \cdot t - k_2 x)$$

$$\sigma = E_{ed} \cdot \varepsilon = E_{ed} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$



al contatto tra i due materiali (x = 0) → continuità di tensioni e spostamenti

$$\sigma_i(0,t)+\sigma_r(0,t)=\sigma_t(0,t) \qquad \frac{A_{ur}}{A_{ui}}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \frac{A_{\sigma r}}{A_{\sigma i}}=\frac{\alpha-1}{1+\alpha}$$

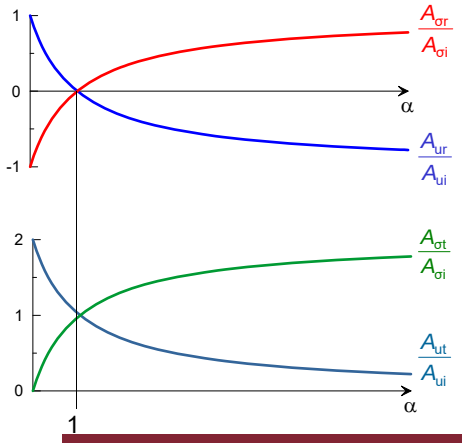
$$u_i(0,t)+u_r(0,t)=u_t(0,t) \qquad \frac{A_{ut}}{A_{ui}}=\frac{2}{1+\alpha} \qquad \frac{A_{\sigma t}}{A_{\sigma i}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

$$\alpha=\frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}$$ rapporto tra impedenze specifiche

$$\frac{A_{ur}}{A_{ui}}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \frac{A_{\sigma r}}{A_{\sigma i}}=\frac{\alpha-1}{1+\alpha} \qquad \alpha=\frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}$$

$$\frac{A_{ut}}{A_{ui}}=\frac{2}{1+\alpha} \qquad \frac{A_{\sigma t}}{A_{\sigma i}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

α = 0 superficie libera
α = 1 mezzo omogeneo
α → ∞ contorno rigido

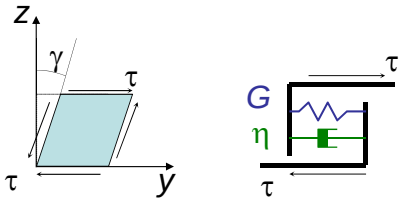


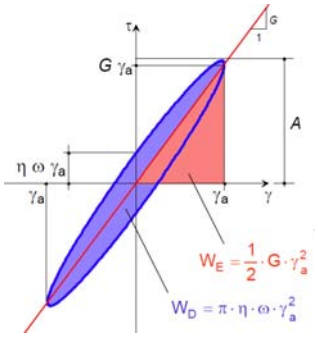
$\frac{\text{riflessa}}{\text{incidente}}$

$\frac{\text{rifratta}}{\text{incidente}}$

ESEMPIO

attenuazione isteretica





mezzo visco-elastico

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} = G \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial z}$$

equazione del moto

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial z^2}$$

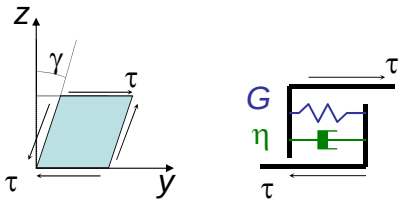
modulo di taglio complesso $G^* = G + i\omega\eta$

$$\xi = \frac{W_D}{4\pi W_E} = \frac{\eta \cdot \omega}{2G}$$

viscosità equivalente: $\eta = \frac{2G}{\omega}\xi$

$$G^* = G + i\omega\eta = G(1 + 2i\xi)$$

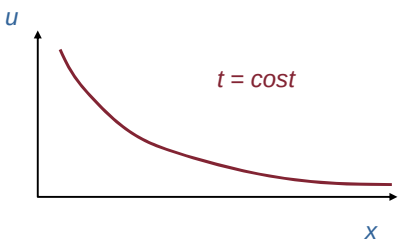
attenuazione isteretica



soluzione

$$u(z,t) = A \cdot e^{i(\omega \cdot t - k^* z)} + B \cdot e^{i(\omega \cdot t + k^* z)}$$

$k^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}}$ numero d'onda complesso



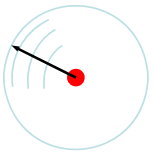
onda che si propaga nel verso delle z positivo

$$u(z,t) = A \cdot e^{i(\omega \cdot t - k^* z)} = A \cdot e^{i(\omega \cdot t - k_1 z)} \cdot e^{k_2 z}$$

$k_2 < 0 \rightarrow$ **attenuazione** esponenziale delle ampiezze con z

attenuazione geometrica

fronte d'onda sferico (onde di volume)



in assenza di attenuazione isteretica, l'energia
si conserva, ma si distribuisce su superfici crescenti con r^2

$$e_s = \text{energia specifica} = \frac{\text{energia}}{\text{superficie}} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{ampiezza} \propto \sqrt{e_s} \propto \frac{1}{r}$$

fronte d'onda cilindrico (onde di superficie)

$$e_s = \text{energia specifica} = \frac{\text{energia}}{\text{superficie}} \propto \frac{1}{r}$$

$$\text{ampiezza} \propto \sqrt{e_s} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

all'aumentare della distanza r, l'attenuazione geometrica è più importante per le onde di volume