# Risposte – compito del 8/5/2008

Le risposte si riferiscono alla prima serie di domande.

(1) Il riferimento "subito dopo l'applicazione di $M$ ed $N$" sottolinea che non si deve tener conto di effetti viscosi; si prenderà quindi $n = E_s / E_c$. Assumendo per l'acciaio $E_s = 200000$ MPa e per il calcestruzzo di classe C25/30 $E_c = 31500$ MPa, si ha $n = 6.35$.

Poiché l'armatura è simmetrica, il baricentro della sezione omogeneizzata coincide col baricentro del rettangolo. Si può quindi calcolare immediatamente area e momento d'inerzia baricentrico della sezione omogeneizzata

$$A = b\,h + 2\,n\,A_s = 40\times 70 + 2\times 6.35\times 8.04 = 2902.1\ \text{cm}^2$$

$$I = \frac{b\,h^3}{12} + 2\,n\,A_s\left(\frac{h}{2} - c\right)^2 = \frac{40\times 70^3}{12} + 2\times 6.35\times 8.04\times 31^2 = 1241489\ \text{cm}^4$$

Poiché il momento è positivo, la massima tensione di trazione si ha al bordo inferiore. Essa vale

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}\,y \quad \text{con} \quad y = \frac{h}{2}$$

(2) Si ottiene

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}\,y = \frac{-720\times 10^3}{2902.1\times 10^2} + \frac{120\times 10^6}{1241489\times 10^4}\times 35\times 10^1 = -2.48 + 3.38 = 0.90\ \text{MPa}$$

(3) Il momento di fessurazione $M_r$ si determina imponendo che la massima tensione di trazione sia pari a $f_{cfk}$ (resistenza a trazione per flessione). Per il calcestruzzo di classe C25/30 si ha $f_{ctk}$ =1.80 MPa e $f_{cfk}$ =2.16 MPa. $M_r$ si ottiene quindi dall'espressione

$$\frac{M_r}{I}\,y = f_{cfk} \quad \text{con} \quad y = \frac{h}{2}$$

(4) Si ottiene

$$M_r = \frac{f_{cfk}\,I}{h/2} = \frac{2.16\times 1241489\times 10^4}{35\times 10^1}\times 10^{-6} = 76.62\ \text{kNm}$$

(5) Lo sforzo normale è di trazione, quindi (essendo l'armatura simmetrica e tutto il calcestruzzo reagente) la parte tesa della sezione deve essere maggiore della parte compressa. Si possono quindi escludere i diagrammi 1, 2 e 3. Il momento flettente è negativo e quindi le fibre inferiori devono essere compresse (o comunque meno tese di quelle superiori). Si possono quindi escludere i diagrammi 1, 3 e 5. Rimane quindi solo il diagramma 4.

Solo a titolo informativo: il diagramma 1 corrisponde a $M = 60$ kNm, $N = -550$ kN; il diagramma 2 corrisponde a $M = -80$ kNm, $N = -400$ kN; il diagramma 3 corrisponde a $M = 80$ kNm, $N = -100$ kN; il diagramma 5 corrisponde a $M = 50$ kNm, $N = 200$ kN.

(6) Poiché si parla di sezione con "un'adeguata armatura", la resistenza è condizionata dal calcestruzzo e può essere determinata con l'espressione

$$M_{max} = \frac{b\,d^2}{r^2}$$

Nella quale $d = h - c = 66$ cm ed il coefficiente $r$ (per semplice armatura, come indicato nel titolo) è pari a 0.0253, valore ottenuto utilizzando $\overline{\sigma}_c = 9.75\ \text{MPa}$ e $\overline{\sigma}_s = 255\ \text{MPa}$ .

(7) Si ottiene

$$M_{max} = \frac{b\, d^2}{r^2} = \frac{0.40 \times 0.66^2}{0.0253^2} = 272 \text{ kNm}$$

(8) Per determinare lo stato tensionale nella sezione occorre innanzitutto determinare la distanza dell'asse neutro dal bordo compresso. La condizione $S_n = 0$ porta ad una equazione di secondo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\, b\,(A_s\, d + A'_s\, c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

nella quale è $n = 15$, $d = h - c = 66$ cm, $A_s = 8.04$ cm$^2$, $A'_s = 0$.

Trovato $x$, si calcola il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata

$$I = \frac{b\, x^3}{3} + n\, A_s\, (d - x)^2 + n\, A'_s\, (x - c)^2$$

e quindi la massima tensione nel calcestruzzo

$$\sigma_c^{max} = \frac{M}{I}\, y \quad \text{con} \quad y = -x$$

(9) Si ottiene

$$x = \frac{15 \times 8.04}{40} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 40 \times 8.04 \times 66}{15 \times 8.04^2}} \right] = 17.16 \text{ cm}$$

$$I = \frac{40 \times 70^3}{3} + 15 \times 8.04 \times (66 - 17.16)^2 = 355135 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_c^{max} = \frac{150 \times 10^6}{355135 \times 10^4} \times (-17.16 \times 10^1) = -7.25 \text{ MPa}$$

(10) Il diagramma giusto è il secondo.

(11) Il momento flettente è negativo e quindi le fibre inferiori devono essere compresse (o comunque meno tese di quelle superiori). Si possono quindi escludere i diagrammi 1, 3 e 5. Lo sforzo normale è di compressione, ma questo non consente di dire con certezza quale sia (tra 2 e 4) il diagramma esatto. L'eccentricità $M / N$ è 18.4 cm, che valore che è maggiore della dimensione del nocciolo (che deve essere un po' più di $h$ / 6, cioè circa 12 cm), ma non troppo. Quindi l'asse neutro non deve essere troppo distante dal bordo teso. Tra i due diagrammi, è più plausibile il secondo, perché il quarto ha una zona compressa molto minore, appena più grande di quella che si avrebbe in caso di flessione semplice.

Solo a titolo informativo: il diagramma 1 corrisponde a $M = 133$ kNm, $N = -1153$ kN; il diagramma 3 corrisponde a $M = 120$ kNm, $N = -436$ kN; il diagramma 4 corrisponde a $M = -69$ kNm, $N = -183$ kN; il diagramma 5 corrisponde a $M = 34$ kNm, $N = -18$ kN.

(12) L'armatura tesa si progetta con la formula

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, f_{yd}}$$ con $d = h - c = 66$ cm e $f_{yd} = 391.3$ MPa (per acciaio B450C)

(13) Si ottiene

$$A_s = \frac{M}{0.9\, d\, f_{yd}} = \frac{600 \times 10}{0.9 \times 0.66 \times 391.3} = 25.8 \text{ cm}^2$$

(14) Per calcolare la quantità di armatura compressa necessaria occorre prima determinare il momento che la sezione potrebbe portare con sola armatura tesa

$$M_{Rc} = \frac{b\,d^2}{r^2}$$

con $r = 0.0194$ nel caso di calcestruzzo di classe C25/30. La differenza

$$\Delta M = M_{Ed} - M_{Rc}$$

deve essere portata dall'armatura compressa (oltre che dall'armatura tesa). L'armatura compressa si determina quindi con

$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d-c)\,\sigma'_s}$$

dove $\sigma'_s$ è la tensione di lavoro dell'armatura compressa. Poiché la trave è emergente, si può sicuramente assumere $\sigma'_s = f_{yd}$.

(15) Si ottiene

$$M_{Rc} = \frac{b\,d^2}{r^2} = \frac{0.40\times 0.66^2}{0.0194^2} = 462.5\ \text{kNm} \qquad \Delta M = M_{Ed} - M_{Rc} = 600 - 462.5 = 137.5\ \text{kNm}$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d-c)\,\sigma'_s} = \frac{137.5\times 10}{0.62\times 391.3} = 5.7\ \text{cm}^2$$

(16) Per determinare il momento resistente della sezione occorre innanzitutto determinare la posizione dell'asse neutro, imponendo che la risultante delle tensioni normali sia nulla. In questo caso, essendo $A_s = A'_s$, l'armatura compressa deve essere in campo elastico e non snervata. La condizione di equilibrio sarà quindi un'equazione di secondo grado. Si ha

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x}\,\varepsilon_{cu}, \qquad \sigma'_s = E_s\,\varepsilon'_s \qquad N'_s = A'_s\,\sigma'_s = A'_s\,E_s\,\frac{x-c}{x}\,\varepsilon_{cu}$$

$$N_s = A_s\,f_{yd} \qquad N_c = \beta\,b\,x\,f_{cd}$$

e la condizione di equilibrio è

$$N'_s + N_c = N_s \qquad \text{ovvero} \qquad A'_s\,E_s\,\frac{x-c}{x}\,\varepsilon_{cu} + \beta\,b\,x\,f_{cd} = A_s\,f_{yd}$$

con $\varepsilon_{cu} = 0.0035$, $E_s = 200000\ \text{MPa}$, $f_{yd} = 391.3\ \text{MPa}$, $f_{cd} = 14.173\ \text{MPa}$, $\beta = 0.810$.

Si può risolvere direttamente l'equazione o procedere iterativamente, assegnando $x$. Trovato $x$, il momento resistente vale

$$M_{Rd} = A_s\,(d - \kappa\,x)\,f_{yd} + A'_s\,(\kappa\,x - c)\,\sigma'_s \quad \text{, con } \kappa = 0.416.$$

(17) Si ottiene

$$8.04\times 200000\times 0.0035\ \frac{x-4}{x} + 0.810\times 40\times 14.17\,x = 8.04\times 391.3$$

$$5628\,(x-4) + 459.1\,x^2 = 3146\,x \qquad 459.1\,x^2 + 2482\,x - 22512 = 0$$

$$x = \frac{-2482 + \sqrt{2482^2 - 4\times 459.1\times(-22512)}}{2\times 459.1} = 4.80\ \text{cm}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{4.80-4}{4.80}\times 0.0035 = 0.0005833 \qquad \sigma'_s = 200000\times 0.0005833 = 116.6\ \text{MPa}$$

$$M_{Rd} = [8.04 \times (0.66 - 0.416 \times 0.048) \times 391.3 + 8.04 \times (0.416 \times 0.048 - 0.04) \times 116.6]/10 =$$
$$= 199.5 \text{ MPa}$$

(18) Il momento flettente è negativo e quindi le fibre inferiori devono essere compresse (o comunque meno tese di quelle superiori). Si possono quindi escludere i diagrammi 2 e 4. Il diagramma 1 ha la sezione quasi intermente tesa e corrisponderà quindi a trazione, flessione semplice o al più ad una compressione molto bassa. Il diagramma 5 è a farfalla con l'asse neutro quasi a metà altezza della sezione; per esso si ha sicuramente $\sigma_s^{sup} = f_{yd}$ e $\sigma_s^{inf} = -f_{yd}$ e quindi le armature (uguali tra loro) non danno contributo a $N$; in questo caso si ha quindi

$$N = N_c = \beta\, b\, x\, f_{cd}$$

e se fosse $x = 35$ cm si avrebbe

$$N = -0.810 \times 40 \times 35 \times 14.17/10 = -1607 \text{ kN}$$

Poiché lo sforzo normale di compressione è molto maggiore di questo valore, la parte compressa deve essere maggiore. Il diagramma giusto sarà quindi il 3.

Solo a titolo informativo: il diagramma 1 corrisponde a $M = -301$ kNm, $N = -334$ kN; il diagramma 2 corrisponde a $M = 484$ kNm, $N = -1193$ kN; il diagramma 4 corrisponde a $M = 153$ kNm, $N = -4030$ kN; il diagramma 5 corrisponde a $M = -510$ kNm, $N = -1423$ kN.

(19) Per calcolare l'armatura necessaria bisogna prima determinare il momento che potrebbe portare la sezione in assenza di armatura. Per questo occorre valutare

$$N_{c,\max} = A_c\, f_{cd} \qquad M_{c,\max} = 0.12\, A_c\, h\, f_{cd}$$

e quindi $M_c = M_{c,\max}\left[1 - \left(\dfrac{N_{Sd} + 0.48\, N_{c,\max}}{0.48\, N_{c,\max}}\right)^2\right]$

L'armatura necessaria è quindi

$$A_s = A'_s = \frac{M_{Ed} - M_c}{(h - 2\,c)\, f_{yd}}$$

(20) Si ottiene

$$N_{c,\max} = A_c\, f_{cd} = 40 \times 70 \times 14.17/10 = 3967 \text{ kN}$$

$$M_{c,\max} = 0.12 \times 40 \times 70^2 \times 14.17/1000 = 333.2 \text{ kNm}$$

$$M_c = 333.2 \times \left[1 - \left(\frac{-700 + 0.48 \times 3967}{0.48 \times 3967}\right)^2\right] = 200.0 \text{ kNm}$$

$$A_s = A'_s = \frac{(600 - 200) \times 10}{0.62 \times 391.3} = 16.5 \text{ cm}^2$$

(21) Dai diagrammi si può leggere, in corrispondenza ad uno sforzo normale di compressione pari a 2500 kN, il valore del momento resistente nelle due direzioni

$M_{x,Rd} = 580$ kNm, dal primo, e $M_{y,Rd} = 310$ kNm, dal secondo.

La verifica consiste nel calcolare

$$\left(\frac{M_x}{M_{x,Rd}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}}\right)^{1.5} = \left(\frac{200}{580}\right)^{1.5} + \left(\frac{250}{310}\right)^{1.5} = 0.202 + 0.724 = 0.926 \quad < 1$$

La verifica è soddisfatta.