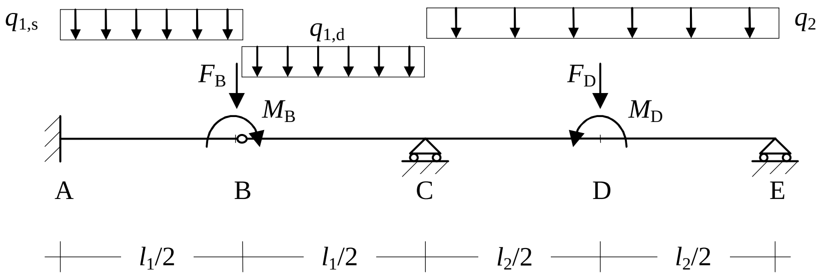
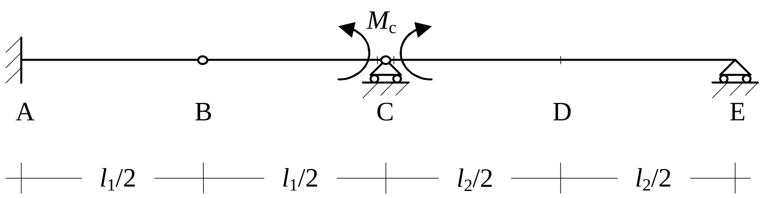
Compito del 5 maggio 2011 - Risoluzione

Per questo compito tutte le aste sono profili in acciaio HEB 240, caratterizzati da questi parametri: modulo elastico $E = 206000$ MPa, momento d'inerzia $I = 11260$ cm^4, coefficiente di dilatazione termico $\alpha = 10^{-5}$ °C^{-1}. Le aste devono essere considerate indeformabili estensionalmente (solo le variazioni termiche producono variazioni di lunghezza).
Nota: la sezione era diversa da compito a compito.

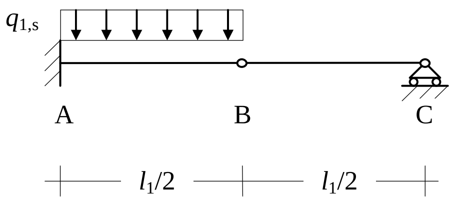
(1) Risolvi lo schema sotto indicato. Riporta nel riquadro solo il risultato finale, cioè il diagramma del momento flettente ed il valore del momento nei punti più significativi, compreso il massimo momento in campata.



Il testo del compito prevedeva la presenza contemporanea di due carichi tra quelli sopra indicati. Nel mostrare come risolverlo analizzo quindi, in maniera generale, tutti i carichi possibili.
Ho effettuato la risoluzione con il metodo delle forze. Ho scelto come schema isostatico quello ottenuto mettendo una cerniera in C. L'incognita è quindi il momento flettente M_C e la condizione di congruenza è l'uguaglianza di rotazione a destra e sinistra di C, $\varphi_{C,s} = \varphi_{C,d}$.



Occorre quindi determinare le rotazioni $\varphi_{C,s}$ e $\varphi_{C,d}$ provocate nello schema isostatico dai carichi e dal momento flettente incognito. Analizzo i carichi, uno ad uno.

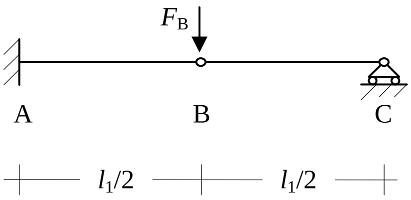


Per effetto del carico il punto B si abbassa della quantità

$$v_B = \frac{q_{1,s}\,(l_1/2)^4}{8\,E\,I} = \frac{q_{1,s}\,l_1^4}{128\,E\,I}$$

Di conseguenza la rotazione $\varphi_{C,s}$ vale

$$\varphi_{C,s} = \frac{v_B}{l_1/2} = \frac{q_{1,s}\,l_1^3}{64\,E\,I}$$

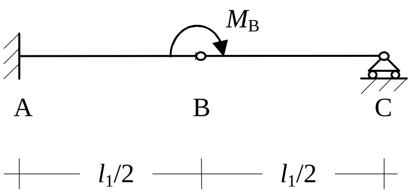


Per effetto della forza F_B il punto B si abbassa della quantità

$$v_B = \frac{F_B\,(l_1/2)^3}{3\,E\,I} = \frac{F_B\,l_1^3}{24\,E\,I}$$

Di conseguenza la rotazione $\varphi_{C,s}$ vale

$$\varphi_{C,s} = \frac{v_B}{l_1/2} = \frac{F_B\,l_1^2}{12\,E\,I}$$

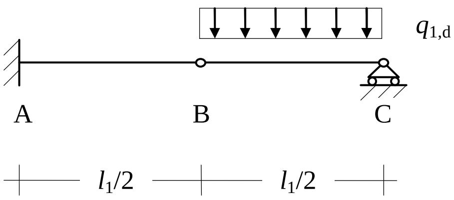


La coppia M_B è applicata a sinistra della cerniera. Per effetto della coppia il punto B si abbassa della quantità

$$v_B = \frac{M_B\,(l_1/2)^2}{2\,E\,I} = \frac{M_B\,l_1^2}{8\,E\,I}$$

Di conseguenza la rotazione $\varphi_{C,s}$ vale

$$\varphi_{C,s} = \frac{v_B}{l_1/2} = \frac{M_B\,l_1}{4\,E\,I}$$



Per l'equilibrio del tratto BC, questo tratto trasmette al tratto BA una forza pari a

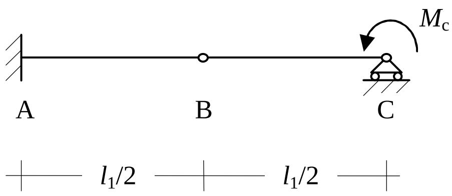
$$V_B = q_{1,d}\,\frac{l_1/2}{2} = q_{1,d}\,\frac{l_1}{4}$$

Per effetto di tale forza il punto B si abbassa della quantità

$$v_B = \frac{V_B\,(l_1/2)^3}{3\,E\,I} = \frac{q_{1,d}\,l_1^4}{96\,E\,I}$$

La rotazione $\varphi_{C,s}$ è somma di una aliquota dovuta all'abbassamento di B ed una dovuta alla deformazione del tratto BC, visto come trave appoggiata agli estremi

$$\varphi_{C,s} = \frac{v_B}{l_1/2} + \frac{q_{1,d}\,(l_1/2)^3}{24\,E\,I} = \frac{q_{1,d}\,l_1^3}{48\,E\,I} + \frac{q_{1,d}\,l_1^3}{192\,E\,I} = \frac{5}{192}\,\frac{q_{1,d}\,l_1^3}{E\,I}$$



Per l’equilibrio del tratto BC, questo tratto trasmette al tratto BA una forza pari a

$$V_B = \frac{M_C}{l_1/2} = \frac{2\,M_C}{l_1}$$

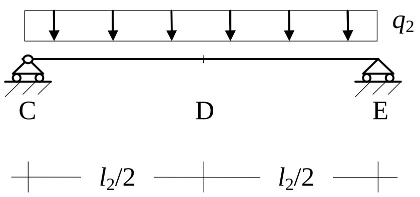
Per effetto di tale forza il punto B si abbassa della quantità

$$v_B = \frac{V_B\,(l_1/2)^3}{3\,E\,I} = \frac{M_C\,l_1^2}{12\,E\,I}$$

La rotazione $\varphi_{C,s}$ è somma di una aliquota dovuta all’abbassamento di B ed una dovuta alla deformazione del tratto BC, visto come trave appoggiata agli estremi

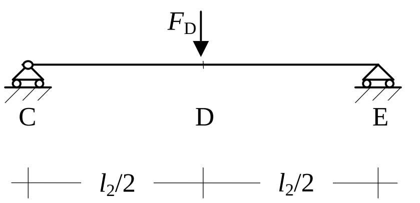
$$\varphi_{C,s} = \frac{v_B}{l_1/2} + \frac{M_C\,(l_1/2)}{3\,E\,I} = \frac{M_C\,l_1}{6\,E\,I} + \frac{M_C\,l_1}{6\,E\,I} = \frac{M_C\,l_1}{3\,E\,I}$$

Faccio notare che questo schema era stato da me già assegnato come “meditazione notturna” durante la lezione del 26 aprile (e qualcuno mi ha anche chiesto conferma della soluzione da lui ottenuta).

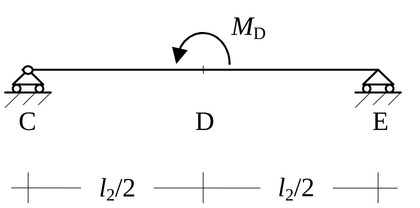


Per effetto del carico la rotazione $\varphi_{C,d}$ vale

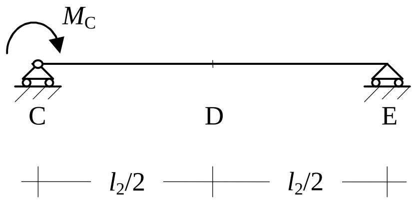
$$\varphi_{C,d} = -\frac{q_2\,l_2^3}{24\,E\,I}$$



Per effetto della forza F_D la rotazione $\varphi_{C,d}$ vale $\varphi_{C,d} = -\dfrac{F_D\,l_2^2}{16\,E\,I}$



Per effetto della coppia M_D la rotazione $\varphi_{C,d}$ vale $\varphi_{C,d} = -\dfrac{M_D\,l_2}{24\,E\,I}$

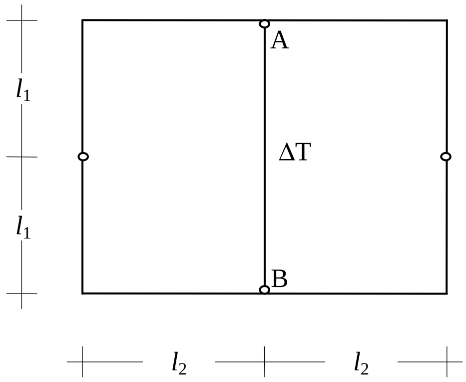


Per effetto della coppia M_C la rotazione $\varphi_{C,d}$ vale $\varphi_{C,d} = -\dfrac{M_C\, l_2}{3\,E\,I}$

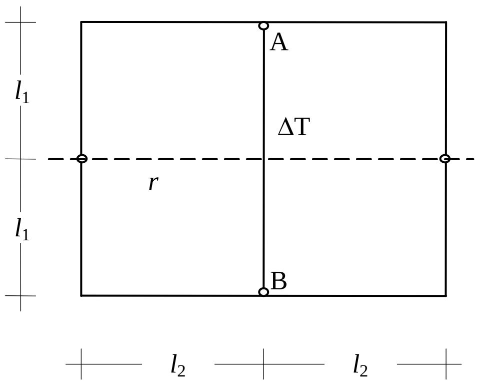
Combinando le rotazioni prodotte dai carichi assegnati e dall'incognita si determina il valore dell'incognita mediante la condizione di congruenza già indicata. Nel file Excel allegato sono riportati dati e soluzioni delle 8 varianti del compito, ma è possibile risolvere lo schema anche per una qualsiasi combinazione dei carichi.

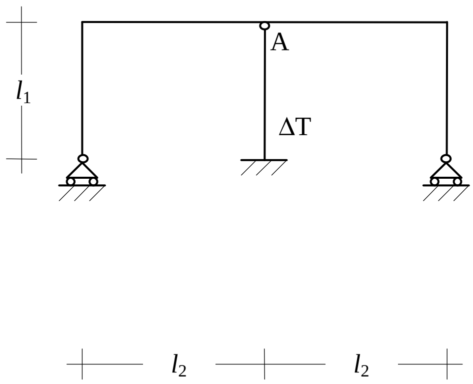
(2) Risolvi lo schema a fianco indicato, che è completamente scarico ma soggetto ad una variazione termica $\Delta T = +40°C$ che agisce solo nel pendolo indicato con AB. Riporta nel riquadro solo il risultato finale, cioè il diagramma del momento flettente ed il valore del momento (con due cifre decimali) nei punti più significativi

Suggerimento: sfrutta meglio possibile la doppia simmetria dello schema

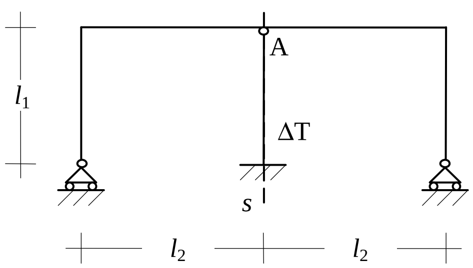


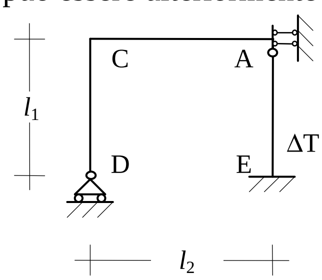
Per la simmetria rispetto all'asse orizzontale *r* si può passare allo schema





Per la simmetria rispetto all'asse verticale *s* lo schema può essere ulteriormente dimezzato





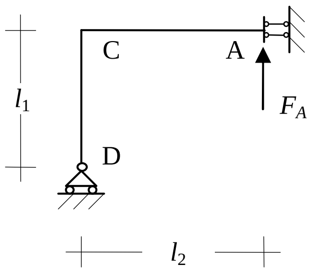
La distorsione termica provoca un allungamento del tratto AE pari a

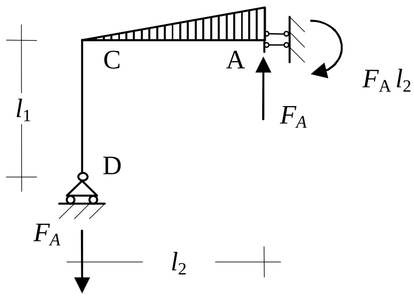
$\Delta l = \alpha\, l_1\, \Delta T$

e quindi uno spostamento del punto A verso l’alto della stessa quantità (poiché l’asta è indeformabile estensionalmente)

$v_A = \alpha\, l_1\, \Delta T$

È allora possibile, per risolvere lo schema col metodo delle forze, togliere l’asta AE, mettere al suo posto una forza F_A e calcolare il valore della forza che provoca lo spostamento v_A.





Lo schema è isostatico. Nella figura di destra sono indicate le reazioni vincolari ed il diagramma del momento. Usando i corollari di Mohr, oppure notando che in pratica è come se si trattasse di una trave appoggiata agli estremi di luce 2 l_2 e con una forza 2 F_A in mezzeria, o ancora immaginandola (visto il diagramma del momento) come una mensola soggetta alla forza F_A, si ottiene lo spostamento

$$v_A = \frac{F_A\, l_2^3}{3\, E\, I}$$

La condizione di congruenza è quindi

$$\frac{F_A\, l_2^3}{3\, E\, I} = \alpha\, l_1\, \Delta T$$

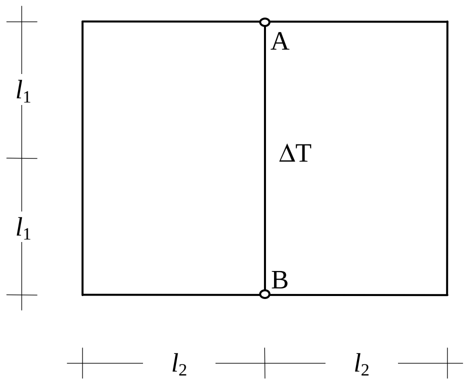
che fornisce come soluzione

$$F_A = \frac{3\, E\, I\, \alpha\, l_1\, \Delta T}{l_2^3} \qquad \text{e quindi} \qquad M_A = 3\, E\, I\, \alpha\, \frac{l_1}{l_2^2}\, \Delta T\ .$$

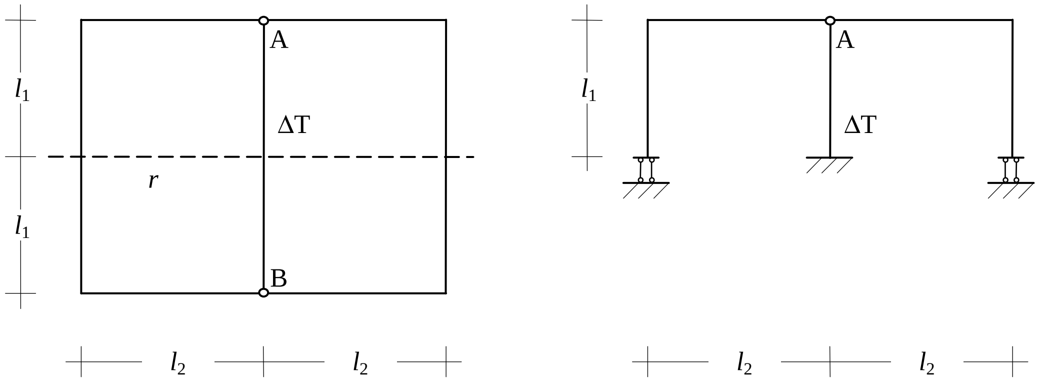
Nel file Excel allegato sono riportati dati e soluzioni delle diverse varianti del compito.

(2) Risolvi lo schema a fianco indicato, che è completamente scarico ma soggetto ad una variazione termica ΔT=+40°C che agisce solo nel pendolo indicato con AB. Riporta nel riquadro solo il risultato finale, cioè il diagramma del momento flettente ed il valore del momento (con due cifre decimali) nei punti più significativi

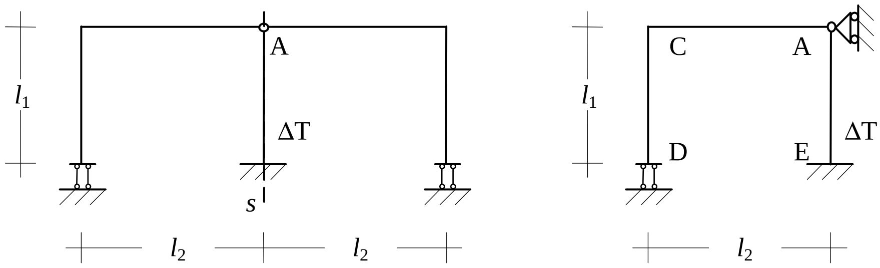
Suggerimento: sfrutta meglio possibile la doppia simmetria dello schema



Questa è una variante dello schema precedente, nella quale le cerniera che interrompono la continuità del telaio sono posizionate in corrispondenza del pendolo.



Per la simmetria rispetto all’asse verticale s lo schema può essere ulteriormente dimezzato



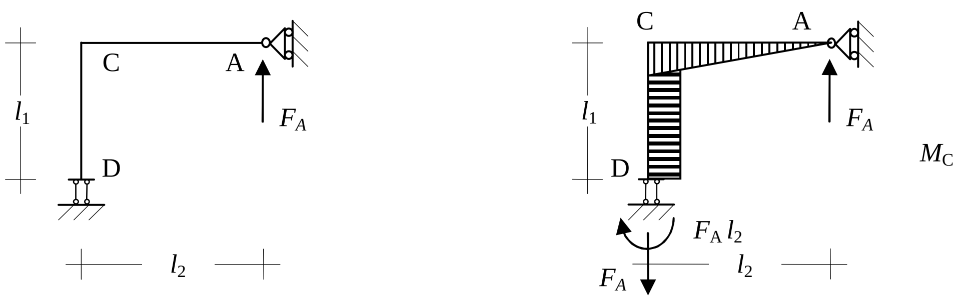
La distorsione termica provoca un allungamento del tratto AE pari a

$$\Delta l = \alpha\, l_1\, \Delta T$$

e quindi uno spostamento del punto A verso l’alto della stessa quantità (poiché l’asta è indeformabile estensionalmente)

$$v_A = \alpha\, l_1\, \Delta T$$

È allora possibile, per risolvere lo schema col metodo delle forze, togliere l’asta AE, mettere al suo posto una forza F_A e calcolare il valore della forza che provoca lo spostamento v_A.



Lo schema è isostatico. Nella figura di destra sono indicate le reazioni vincolari ed il diagramma del momento. La deformata del tratto AC è quella di una mensola soggetta alla forza F_A, ma a questa si deve aggiungere l’effetto della rotazione φ_C che è calcolata pensando all’asta CD come una mensola soggetta ad una coppia

$$v_A = \frac{F_A\, l_2^3}{3\, E\, I} + \frac{(F_A\, l_2)\, l_1}{E\, I}\, l_2 = \frac{F_A\, l_2^2}{E\, I}\left(\frac{l_2}{3} + l_1\right)$$

La condizione di congruenza è quindi

$$\frac{F_A\, l_2^2}{E\, I}\left(\frac{l_2}{3} + l_1\right) = \alpha\, l_1\, \Delta T$$

che fornisce come soluzione

$$F_A = \frac{E\, I\, \alpha\, l_1\, \Delta T}{l_2^2\, (l_1 + l_2 / 3)} \qquad \text{e quindi} \qquad M_A = E\, I\, \alpha\, \frac{l_1}{l_2\, (l_1 + l_2 / 3)}\, \Delta T\,.$$

Nel file Excel allegato sono riportati dati e soluzioni delle diverse varianti del compito.