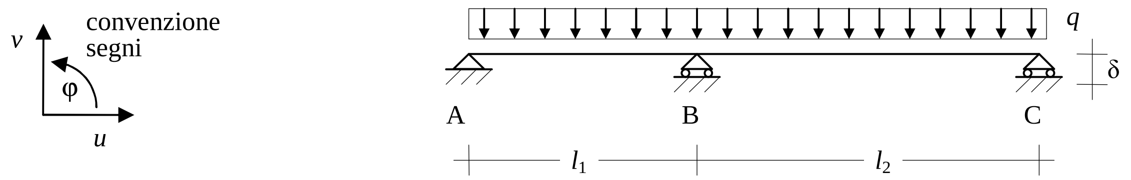
Compito del 10 aprile 2011

Riporto qui la risoluzione del compito e qualche commento. Il compito è costituito da due schemi iperstatici da risolvere col metodo delle forze. A mio parere il primo schema è il più facile da risolvere, ma sembra che invece gli studenti siano stati spaventati dal cedimento vincolare e si siano buttati più sul secondo.

Primo schema

Per le domande che seguono, fai riferimento allo schema rappresentato in figura, costituito da aste tutte di sezione 30×50 cm e modulo elastico E=31500 MPa. Le luci delle due campate sono l_1=4.00 m e l_2=6.00 m.

Il carico applicato vale q=30 kN/m. L'appoggio C ha subito un cedimento anelastico δ=1.5 cm.

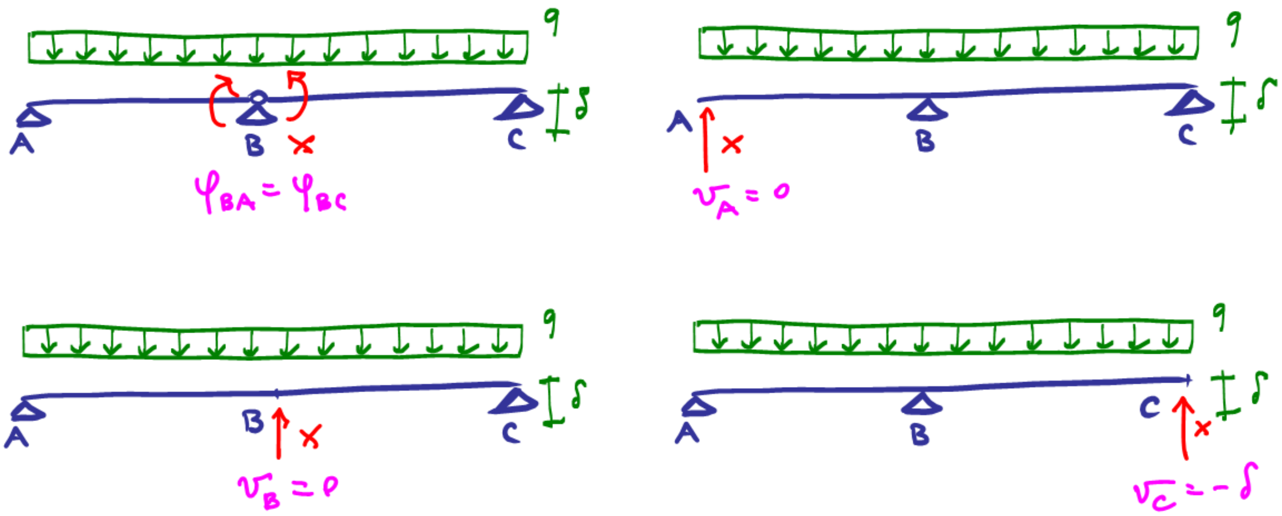


(1) Indica due possibili schemi isostatici che considereresti per risolvere lo schema col metodo delle forze e le relative incognite iperstatiche. (punti 0/+3)

(2) Indica per ciascuno dei due schemi la condizione di congruenza da imporre (punti 0/+4)

Il primo passo nel risolvere uno schema iperstatico col metodo delle forze è rendere lo schema isostatico con delle sconnessioni, indicare le incognite (le azioni che sarebbero dovute essere trasmesse attraverso le sconnessioni) e le condizioni di congruenza (relative alle componenti di movimento consentite dalle sconnessioni.

La scelta dello schema isostatico non è banale, anzi proprio da questa dipende la facilità, o le difficoltà, che si incontreranno nella risoluzione. I primi due quesiti volevano evidenziare proprio questo. Indico qui alcuni possibili schemi isostatici, con incognite e condizioni di congruenza.

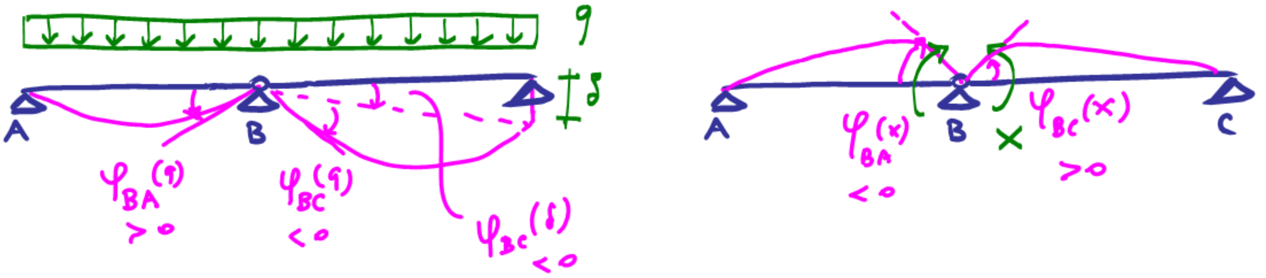


Quale scegliere? Bisogna chiedersi quale comporterà meno fatica, ovvero quale sia quello che porta ad espressioni più semplici o, meglio ancora, già note.

Il primo si riconduce a due travi semplicemente appoggiate, separate tra loro. Dovrebbero essere noti a tutti i valori della rotazione indotta da un carico uniforme o da una coppia ed è immediato calcolare le rotazioni indotte da un cedimento.
Il secondo e il quarto sono una trave con sbalzo. Calcolare l'abbassamento dello sbalzo non è tanto difficile, ma certo più complicato che nel caso precedente perché bisogna tener conto della deformazione dello sbalzo e della campata.
Il terzo è un'unica trave semplicemente appoggiata. Se il punto B fosse esattamente a metà campata, dovrebbe essere noto l'abbassamento indotto da un carico uniforme o da una forza. Ma nel caso in esame il punto non è al centro e questo complica la risoluzione.
In definitiva, è indubbiamente meglio scegliere il primo schema.

(3) Traccia la deformata qualitativa dello schema isostatico scelto, soggetto al carico più cedimento vincolare e all'incognita iperstatica (punti 0/+4)

La condizione di congruenza richiede il calcolo di componenti di movimento (rotazioni o abbassamenti). Pensare a quale sia la deformata complessiva dello schema, provocata dai carichi agenti e dalle incognite, è utile per individuare le formule da usare e i segni delle componenti di movimento; fa anche capire quali difficoltà si incontreranno e quindi aiuta nella scelta dello schema isostatico più idoneo.
Nel caso in esame, le deformate sono quelle riportate in figura. Ho evidenziato ciascuna rotazione, segnandomi anche se è maggiore o minore di zero per non commettere errori nei segni (cosa abbastanza facile se non si sta molto attenti).



(4) Coerentemente con la convenzione dei segni indicata, scrivi l'espressione analitica delle componenti di movimento che figurano nell'equazione di congruenza (punti 0/+3)

$\varphi_{BA}(q)=\dfrac{q\,l_1^3}{24\,E\,I}$	$\varphi_{BA}(\delta)=0$	$\varphi_{BA}(X)=-\dfrac{X\,l_1}{3\,E\,I}$
$\varphi_{BC}(q)=-\dfrac{q\,l_2^3}{24\,E\,I}$	$\varphi_{BC}(\delta)=-\dfrac{\delta}{l_2}$	$\varphi_{BC}(X)=\dfrac{X\,l_2}{3\,E\,I}$

Le espressioni dovrebbero essere tutte note, o immediatamente ricavabili. I segni sono stati messi guardando la deformata qualitativa che era stata tracciata.

(5) Indica l'espressione analitica che fornisce il valore dell'incognita iperstatica, che hai ottenuto imponendo la condizione di congruenza e sviluppando i calcoli (punti 0/+3)

Una volta scritti i singoli termini, l'equazione di congruenza è immediata

$$\frac{q\,l_1^3}{24\,E\,I}-\frac{X\,l_1}{3\,E\,I}=-\frac{q\,l_2^3}{24\,E\,I}-\frac{\delta}{l_2}+\frac{X\,l_2}{3\,E\,I}$$

e da questa si ricava l'espressione, che andava scritta come risposta

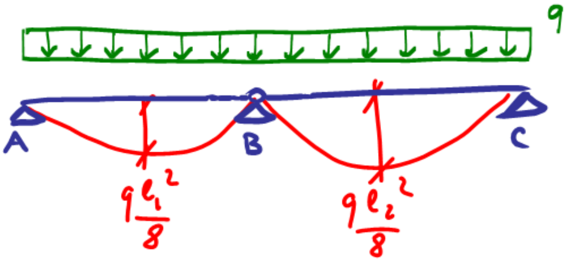
$$X=\left(\frac{q\,l_1^3}{24\,E\,I}+\frac{q\,l_2^3}{24\,E\,I}+\frac{\delta}{l_2}\right)\frac{3\,E\,I}{l_1+l_2}$$

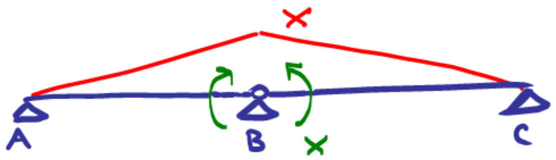
o, meglio ancora

$$X = \frac{q\,(l_1^3 + l_2^3)}{8\,(l_1 + l_2)} + \frac{3\,E\,I\,\delta}{l_2\,(l_1 + l_2)}$$

(6) Traccia qualitativamente il diagramma del momento flettente, separatamente per carico, cedimento vincolare e incognita iperstatica. (punti 0/+3)

Anche se non strettamente indispensabile, può essere utile tracciare prima i diagrammi relativi allo schema isostatico e poi sovrapporli per ottenere quello relativo allo schema iperstatico.





È utile soprattutto se si valutano numericamente le grandezze in gioco, in modo da poter tracciare il diagramma complessivo in maniera ben proporzionata.
In questo caso è

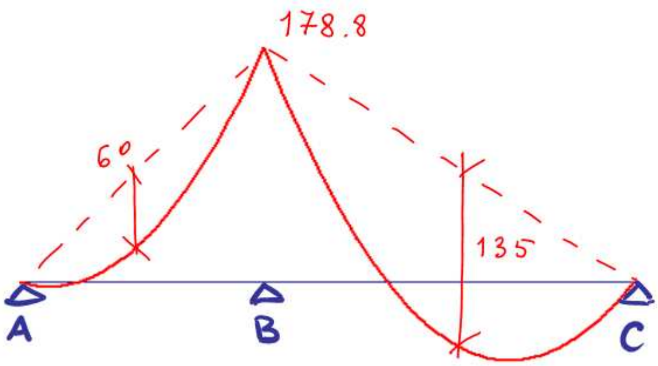
$$\frac{q\,l_1^2}{8} = \frac{30 \times 4.00^2}{8} = 60 \text{ kNm} \qquad \frac{q\,l_2^2}{8} = \frac{30 \times 6.00^2}{8} = 135 \text{ kNm}$$

$$X = \frac{30 \times (4.00^3 + 6.00^3)}{8 \times (4.00 + 6.00)} + \frac{3 \times 31500 \times 10^3 \times 312500 \times 10^{-8} \times 1.5 \times 10^{-2}}{6.00 \times (4.00 + 6.00)} = 105 + 73.83 = 178.83 \text{ kNm}$$

essendo E=31500 MPa e I=312500 cm^4.

(7) Traccia il diagramma finale del momento flettente e indica sul diagramma il valore numerico (in kNm) del momento nel punto B. (punti 0/+4)

Il diagramma che mostro è stato calcolato con Excel (si veda il foglio Excel, che contiene anche le diverse varianti del compito). Ho però annotato sopra i valori calcolati, che giustificano l'andamento qualitativo del diagramma.



(8) Indica in quale campata si raggiunge il massimo momento flettente positivo. (punti 0/+3)

È abbastanza ovvio, per come sono costruite le parabole nelle due campate, che il massimo momento positivo si raggiunga nella campata BC.

(9) Indica quanto vale il massimo momento flettente positivo. (punti 0/+3)

Per calcolare con precisione il massimo momento flettente positivo occorre prima determinare il punto di nullo del taglio. La reazione, e quindi il taglio, in C vale

$$V_C = \frac{q\,l_2}{2} - \frac{M_B}{l_2} = \frac{30\times 6.00}{2} - \frac{178.83}{6.00} = 60.2\ \text{kN}$$

Il taglio si annulla ad una distanza dall'appoggio C

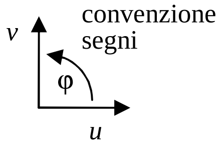
$$z_{(V=0)} = \frac{60.2}{30} = 2.01\ \text{m}$$

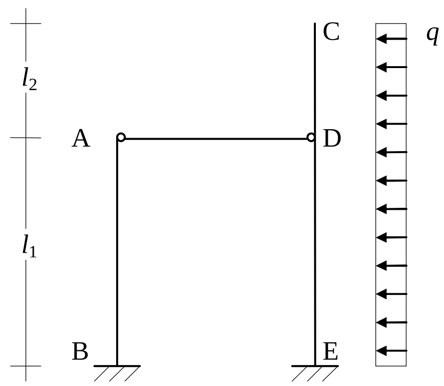
ed il momento massimo è

$$M^{+}_{\max} = 60.2\times 2.01 - \frac{30\times 2.01^2}{2} = 60\ \text{kNm}$$

Secondo schema

Per le domande che seguono, fai riferimento allo schema rappresentato nella figura a fianco, costituito da aste tutte di sezione 30×50 cm e modulo elastico E=31500 MPa.
Il pendolo è assialmente indeformabile. Le luci indicate valgono l_1=6.00 m e l_2=3.00 m.
Il carico applicato vale q=30 kN/m.

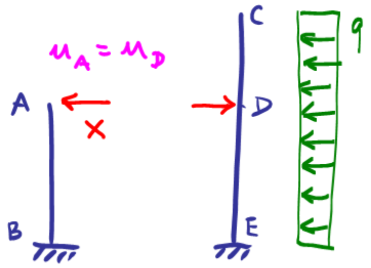


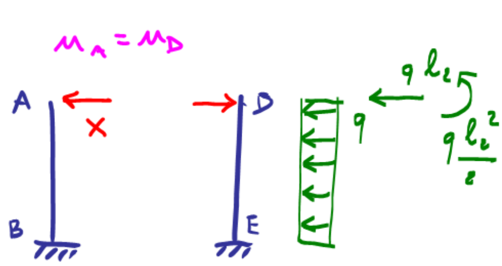


(10) Indica due possibili schemi isostatici che considereresti per risolvere lo schema col metodo delle forze e le relative incognite iperstatiche. (punti 0/+3)

(11) Indica per ciascuno dei due schemi la condizione di congruenza da imporre (punti 0/+4)

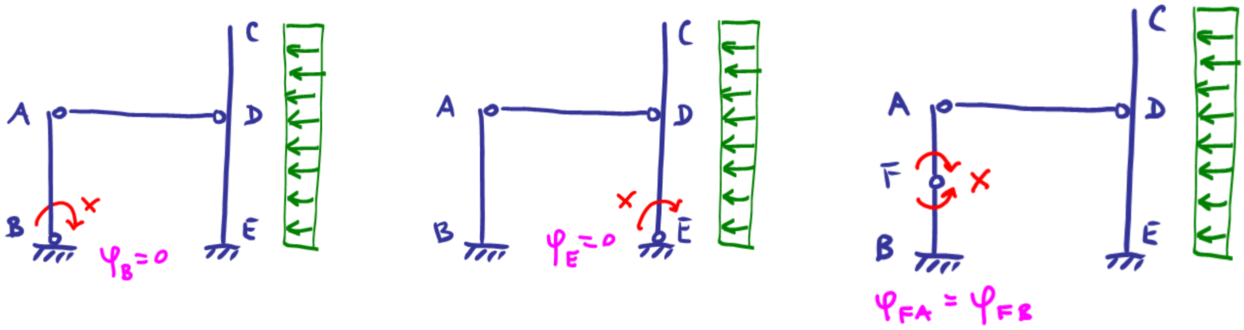
Anche in questo caso, la scelta dello schema isostatico è molto importante. Indico qui alcuni possibili schemi isostatici, con incognite e condizioni di congruenza.





In questo schema abbiamo due mensole, soggette a forze e carichi distribuiti. Gli schemi a mensola sono sicuramente noti. L'unica complicazione è il dover calcolare lo spostamento di un punto che non è di estremità. Il tratto CD può però essere tolto, applicando in D le azioni da lui trasmesse

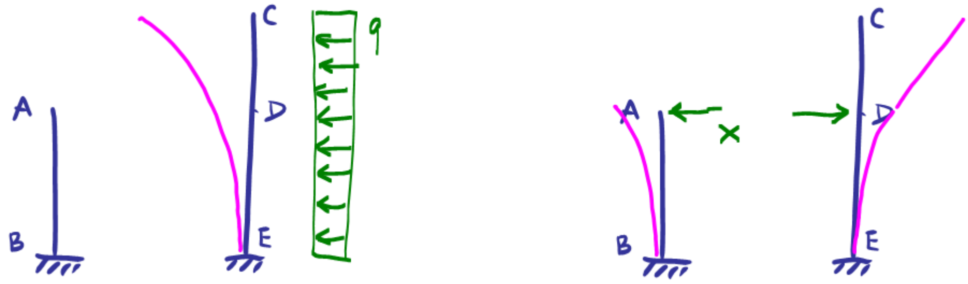
$F = q\,l_2$ e $M = q\,l_2^2/2$



Altri schemi alternativi si ottengono mettendo una cerniera in B oppure in E. Occorre però tener conto dell'interazione tra i tratti AB e DE, che sicuramente complica la risoluzione. Ancora più fantasiosa la soluzione proposta da uno studente, che mette una cerniera a metà del tratto AB.
Mi sembra quindi che sia certamente meglio utilizzare il primo schema.

(12) Traccia la deformata qualitativa dello schema isostatico scelto, soggetto al carico e all'incognita iperstatica (punti 0/+4)

Nel caso in esame, le deformate sono quelle riportate in figura. In questo caso è molto chiaro il segno degli spostamenti.



(13) Coerentemente con la convenzione dei segni indicata, scrivi l'espressione analitica delle componenti di movimento che figurano nell'equazione di congruenza (punti 0/+3)

Gli spostamenti di uno schema a mensola sono ben noti. È importante l'aver eliminato il tratto CD sostituendolo con la forza e la coppia innanzi indicate.

$u_A(q) = 0$	$u_A(X) = -\dfrac{X\, l_1^3}{3\,E\,I}$
$u_D(q) = -\dfrac{(q\, l_2)\, l_1^3}{3\,E\,I} - \dfrac{(q\, l_2^2/2)\, l_1^2}{2\,E\,I} - \dfrac{q\, l_1^4}{8\,E\,I} = = -\dfrac{q}{E\,I}\left(\dfrac{l_1^4}{8} + \dfrac{l_1^3\, l_2}{3} + \dfrac{l_1^2\, l_2^2}{4}\right)$	$u_D(X) = \dfrac{X\, l_1^3}{3\,E\,I}$

(14) Indica l'espressione analitica che fornisce il valore dell'incognita iperstatica, che hai ottenuto imponendo la condizione di congruenza e sviluppando i calcoli (punti 0/+3)

Una volta scritti i singoli termini, l'equazione di congruenza è immediata

$$-\frac{X\, l_1^3}{3\,E\,I} = -\frac{q}{E\,I}\left(\frac{l_1^4}{8} + \frac{l_1^3\, l_2}{3} + \frac{l_1^2\, l_2^2}{4}\right) + \frac{X\, l_1^3}{3\,E\,I}$$

da cui si ottiene

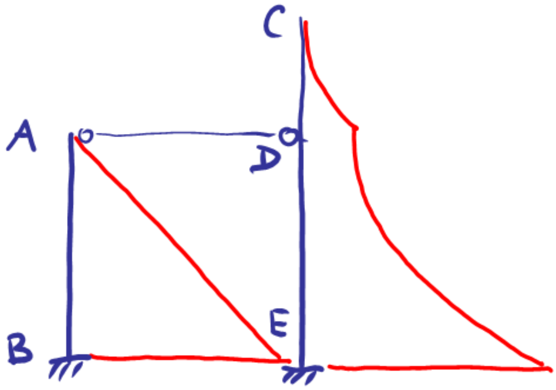
$$X = \frac{3\,q}{2\,l_1^3}\left(\frac{l_1^4}{8} + \frac{l_1^3\, l_2}{3} + \frac{l_1^2\, l_2^2}{4}\right)$$

o meglio ancora

$$X = q\left(\frac{3}{16}l_1 + \frac{1}{2}l_2 + \frac{3}{8}\frac{l_2^2}{l_1}\right)$$

(15) Traccia il diagramma finale del momento flettente. (punti 0/+4)

Qualitativamente il diagramma ha questo andamento.



(16) Indica quanto vale il momento flettente M_B. (punti 0/+3)

(17) Indica quanto vale il momento flettente M_D. (punti 0/+3)

(18) Indica quanto vale il momento flettente M_E (punti 0/+3)

Il valore di M_D è stato già calcolato, almeno in forma analitica. Vale

$$M_D = \frac{q\,l_2^2}{2} = \frac{30\times 3.00^2}{2} = 135 \text{ kNm}$$

Per gli altri, occorre calcolare il valore numerico di X

$$X = q\left(\frac{3}{16}l_1 + \frac{1}{2}l_2 + \frac{3}{8}\frac{l_2^2}{l_1}\right) = 30\times\left(\frac{3}{16}6.00 + \frac{1}{2}3.00 + \frac{3}{8}\frac{3.00^2}{6.00}\right) = 95.6 \text{ kN}$$

Il taglio V_{DE} vale quindi

$$V_{DE} = q\,l_2 - X = -5.6 \text{ kN}$$

e gli altri momenti richiesti

$$M_B = 95.6\times 6.00 = 573.6 \text{ kNm}$$

$$M_E = 135 - 5.6\times 6.00 + \frac{30\times 6.00^2}{2} = 641.4 \text{ kNm}$$