

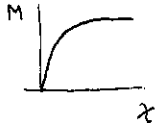
# TIPO DI ANALISI

- Per come si tiene conto delle proprietà fisico-meccaniche del materiale:

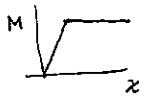
DM 96

(4.1.1.1) Analisi non lineare, con modello non lineare del materiale:

struttura discretizzata in conci sufficientemente piccoli;  
per ciascun cono, legame non lineare momento-curvatura  
(e quindi - supponendo  $M$  costante nel cono) legame non lineare  
momento - rotazione



(4.1.1.1) Analisi non lineare, con modello elastico-perfettamente plastico  
struttura divisa in tratti, in corrispondenza delle sezioni in  
cui il momento può essere massimo (di solito estremi delle travi);  
possibilità di formazione di cerniere plastiche agli estremi dei tratti;  
si procede per incrementi di carico, con schema che può variare  
man mano, con l'introduzione di cerniere



N.B. le sezioni plasticizzate si comportano come cerniere  
solo per incrementi di carico

Problema per passare da  $M-\chi$  allo schema di cerniera plastica: ampiezza  
della zona plasticizzata (di solito assunta circa pari all'altezza della sezione)

(4.1.1.2) Analisi lineare

legame costitutivo del materiale lineare;

la norma impone comunque di controllare che  $\frac{x}{d} \leq 0.45$  per  $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$

(4.1.1.3) Analisi lineare con ridistribuzioni

fare un calcolo lineare, ma assumere in talune sezioni momenti  
ridotti rispetto a quelli di calcolo mediante un coefficiente  $\delta \leq 1$

$$\delta = 0.44 + 1.25 \frac{x}{d} \quad \text{per } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

queste riduzioni devono essere bilanciate variando il momento in  
altre parti della struttura, in modo da garantire l'equilibrio

Analisi limite - con modello rigido-plastico

individuazione del meccanismo di collasso

teorema statico e cinematico dell'analisi limite

- Per come si tiene conto della geometria :

Analisi del 1° ordine

l'effetto dei carichi non è considerato dipendente dalla deformazione, ovvero le equazioni di equilibrio sono scritte con riferimento alla posizione indeformata (ipotesi di piccoli spostamenti)

Analisi del 2° ordine - non linearità geometriche

le equazioni di equilibrio sono scritte con riferimento alla posizione deformata

Esempio di casi in cui questo è importante :



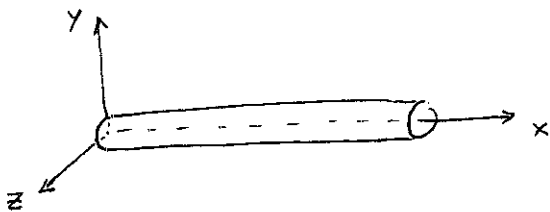
Nel caso dei telai si parla spesso di "tener conto dell'effetto P- $\delta$ " ovvero "dell'effetto instabilizzante dei carichi verticali"

Usualmente effettueremo analisi lineari del 1° ordine

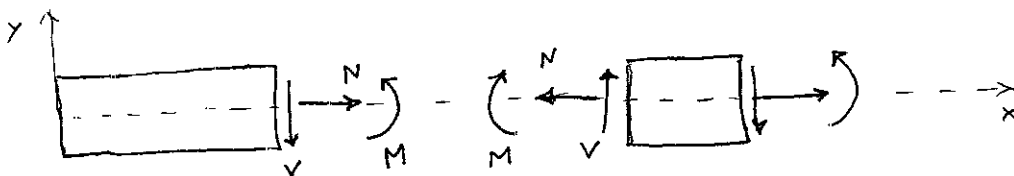
In tale caso valgono :

- principio di unicità della soluzione
- principio di sovrapposizione degli effetti

SISTEMA DI RIFERIMENTO PER UN'ASTA



caratteristiche della sollecitazione positive :

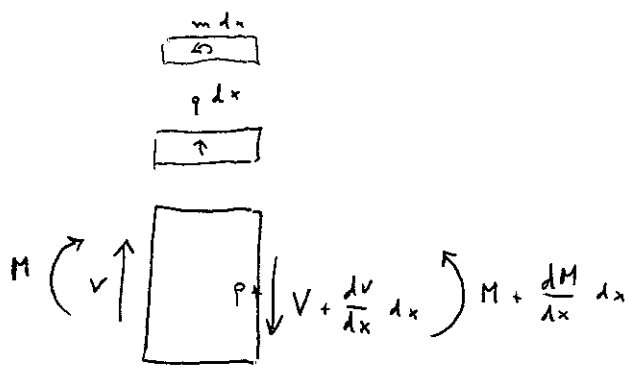


convenzione dei segni :

spostamenti positivi se concordi col verso positivo degli assi

rotazioni positive se portano  $x$  su  $y$ ,  $y$  su  $z$ ,  $z$  su  $x$

forze e carichi positivi se concordi con gli assi  
coppie positive se concordi con le rotazioni positive



+ dx +

Equilibrio alla traslazione

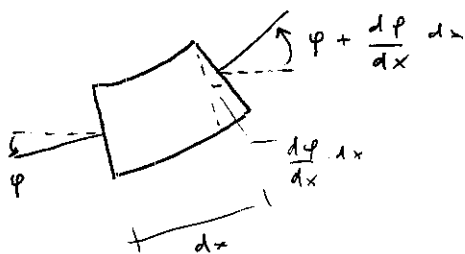
$$\cancel{V} + q dx = \cancel{V} + \frac{dV}{dx} dx$$

$$q = \frac{dV}{dx}$$

Equilibrio alla rotazione intorno a P

$$\cancel{M} + V dx + \underbrace{q \frac{dx^2}{2}}_{\text{trascurabile}} - \cancel{M} - \frac{dM}{dx} dx = 0$$

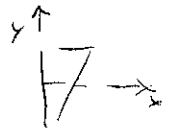
$$\frac{dM}{dx} = V - m$$



$$\frac{d\phi}{dx} dx = -\chi_1 dx$$

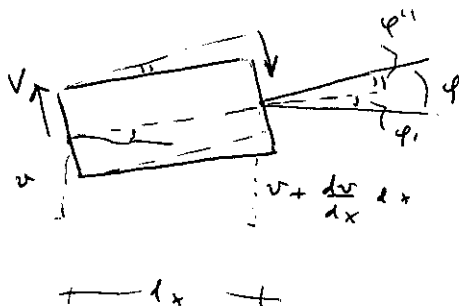
$$\chi_1 = -\frac{M}{EI}$$

il segno perché  
chi positivo è  
per E curvato



quindi

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}$$



$$\phi = \phi' + \phi''$$

$$\phi' = \frac{u + \frac{du}{dx} dx - u}{dx} = \frac{du}{dx}$$

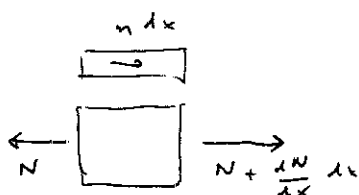
$$\phi'' = \frac{\chi V}{GA}$$

$$\phi = \frac{du}{dx} + \frac{\chi V}{GA}$$

$$\frac{du}{dx} = \phi - \frac{\chi V}{GA}$$

Equazione delle linee elastiche

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{q}{EI} - \frac{1}{EI} \frac{dm}{dx} = \frac{\chi}{GA} \frac{d^2 q}{dx^2}$$



equilibrio alla traslazione

$$\frac{dN}{dx} = -m$$

$$\epsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}$$

# ANALISI DI STRUTTURE IPERSTATICHE

Metodo delle forze : si introducono nella struttura delle sconnessioni che ne riducono il grado di iperstaticità, fino a ridurla ad uno schema isostatico oppure ad uno schema ancora iperstatico ma conosciuto (già risolto); in corrispondenza delle sconnessioni si introducono le azioni mutue (incognite) che non possono più essere trasmesse, si determina il valore delle incognite imponendo condizioni di congruenza, che indicano l'annullarsi del movimento relativo in corrispondenza di ciascuna sconnessione.

Il metodo delle forze può essere molto conveniente per la risoluzione di schemi poco iperstatici. Il problema fondamentale è però l'individuazione dello schema base isostatico più conveniente.

Nel caso di Travi continue, lo schema base preferibile per l'applicazione del metodo delle forze è sicuramente quello che prevede cerniere in corrispondenza di tutti gli appoggi interni (e quindi come incognite i momenti in tali appoggi).

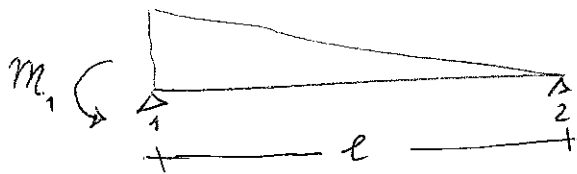
Occorre quindi preliminarmente determinare le rotazioni provocate da coppie d'estremità o dai carichi agenti sull'asta

Cio può essere fatto :

- integrando le equazioni indefinite
- col principio dei lavori virtuali
- coi corollari di Mohr

ROTAZIONI PROVOCATE DA UNA COPPIA - INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI INDEFINITE

$$M = -m_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



Trave a sezione costante

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \varphi = \int \frac{M}{EI} dx = -\frac{m_1}{EI} \int \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx =$$

$$= -\frac{m_1}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2\ell}\right) + \varphi_1$$

$$\frac{dv}{dx} = \varphi \Rightarrow v = \int \varphi dx = \int \left[-\frac{m_1}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2\ell}\right) + \varphi_1\right] dx =$$

$$= -\frac{m_1}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell}\right) + \varphi_1 x + v_1$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

$$v(\ell) = 0 \Rightarrow -\frac{m_1}{EI} \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{6}\right) + \varphi_1 \ell = 0$$

$$-\frac{m_1 \ell^2}{3EI} + \varphi_1 \ell = 0 \quad \varphi_1 = \frac{m_1 \ell}{3EI}$$

$$\varphi_2 = \varphi(\ell) = -\frac{m_1}{EI} \left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) + \varphi_1 = -\frac{m_1 \ell}{2EI} + \frac{m_1 \ell}{3EI} = -\frac{m_1 \ell}{6EI}$$

però scrive, più in generale

$$\varphi_1 = m_1 \alpha_1$$

$$\varphi_2 = -m_1 \beta$$

$$\text{con } \alpha_1 = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\beta = \frac{\ell}{6EI}$$

nel caso considerato ( $EI = \text{cost}$ )

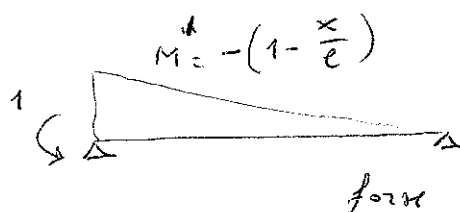
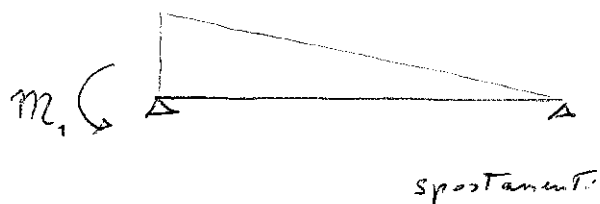
Analogamente, una coppia  $m_2$  al secondo estremo provoca

$$\varphi_1 = -m_2 \beta$$

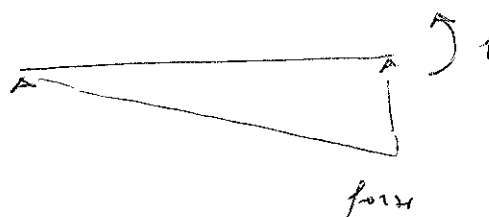
$$\varphi_2 = m_2 \alpha_2$$

ROTAZIONI PROVOCATE DA UNA COPPIA - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$M'' = -m_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



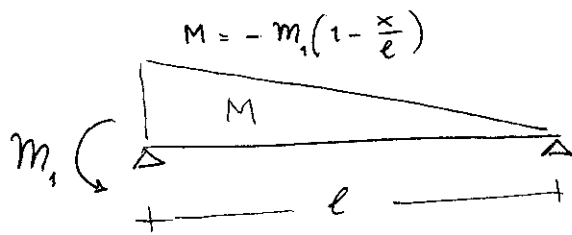
$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{M''}{EI} dx \\ 1 \cdot \varphi_1 &= \int_0^l M' \cdot d\varphi = \int_0^l \frac{M' M''}{EI} dx = \int_0^l -\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \left[-m_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right] \frac{1}{EI} dx = \\ &= \frac{m_1}{EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = -\frac{m_1 \ell}{EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 d\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) = -\frac{m_1 \ell}{EI} \left[ \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^3 \frac{1}{3} \right]_0^l = \\ &= -\frac{m_1 \ell}{3EI} \left[ 0^3 - 1^3 \right] = \frac{m_1 \ell}{3EI} \end{aligned}$$



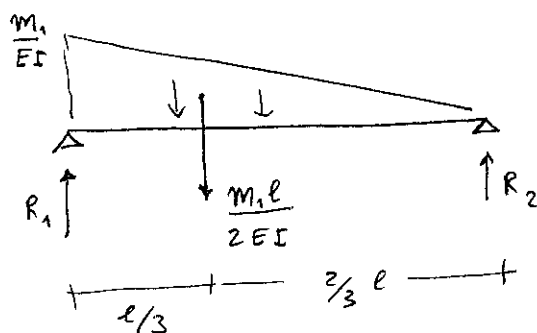
$$\begin{aligned} 1 \cdot \varphi_2 &= \int_0^l \frac{M' M''}{EI} dx = \int_0^l \frac{x}{\ell} \left[-m_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right] \frac{1}{EI} dx = \\ &= -\frac{m_1}{EI} \int_0^l \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx = -\frac{m_1 \ell}{EI} \int_0^l \left[ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right] d\left(\frac{x}{\ell}\right) = \\ &= -\frac{m_1 \ell}{EI} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right]_0^l = -\frac{m_1 \ell}{EI} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = -\frac{m_1 \ell}{6EI} \end{aligned}$$

# ROTAZIONI PROVOCATE DA UNA COPPIA - COROLLARI

DI MOHR



lo schema duale è ancora una Trave appoggiata agli estremi ;  
il carico è pari a  $\frac{M}{EI}$  (in questo caso  $M$  è negativo ,  
quindi il carico è verso il basso)



$$R_1 = \frac{2}{3} \frac{m_1 l}{2 EI} = \frac{m_1 l}{3 EI}$$

$$R_2 = \frac{1}{3} \frac{m_1 l}{2 EI} = \frac{m_1 l}{6 EI}$$

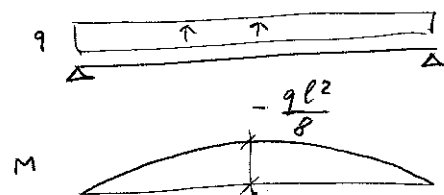
$$V_1 = R_1 \quad , \quad V_2 = -R_2$$

la rotazione dello schema principale corrisponde al taglio dello  
schema duale ; quindi

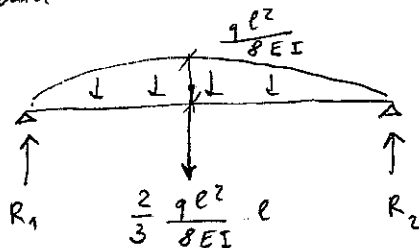
$$\varphi_1 = \frac{m_1 l}{3 EI} \quad \varphi_2 = -\frac{m_1 l}{6 EI}$$

## ROTAZIONE PROVOCATA DA UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO - COROLLARI DI MOHR

considero un carico diretto verso l'alto (positivo)  
anche se nei casi reali è di solito verso il basso



schema duale :



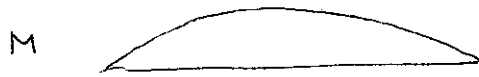
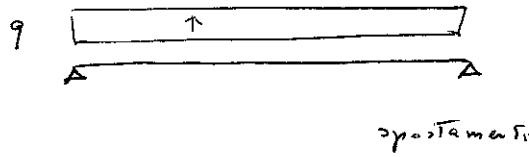
$$R_1 = R_2 = \frac{1}{3} \frac{q l^2}{8 EI} l = \frac{q l^3}{24 EI}$$

$$V_1 = R_1 \quad ; \quad V_2 = -R_2$$

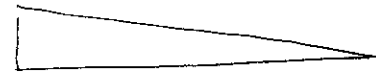
quindi

$$\varphi_1 = \frac{q l^3}{24 EI} \quad \varphi_2 = -\frac{q l^3}{24 EI}$$

ROTAZIONE PROVOCATA DA UN CARICO UNIFORMEMENTE  
DISTRIBUITO - COL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI



$$M'' = -\frac{qx}{2}(l-x)$$



$$M' = -\left(1 - \frac{x}{l}\right) = -\frac{1}{l}(l-x)$$

$$1. \varphi_1 = \int_0^l \frac{M' M''}{EI} dx = \int_0^l -\frac{1}{l}(l-x) \cdot \left[-\frac{qx}{2}(l-x)\right] \frac{1}{EI} dx =$$

$$= \frac{q}{2EI l} \int_0^l x(l-x)^2 dx = \frac{q}{2EI l} \int_0^l (x^3 - 2x^2 l + l^2 x) dx =$$

$$= \frac{q}{2EI l} \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3 l}{3} + \frac{l^2 x^2}{2} \right|_0^l = \frac{q l^3}{2EI} \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) =$$

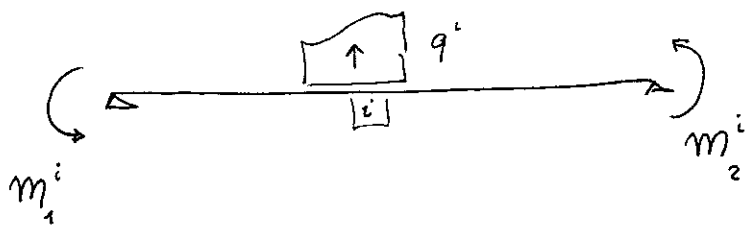
$$= \frac{q l^3}{24 EI}$$

Analogamente si ottiene

$$\varphi_2 = -\frac{q l^3}{24 EI}$$



Nella generica campata  $i$  si ha

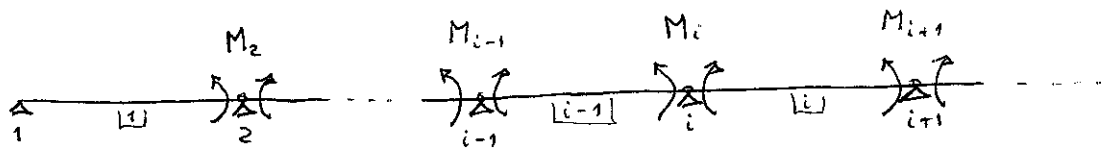


$\varphi_{1(q)}^i, \varphi_{2(q)}^i$  rotazioni dovute al carico  $q^i$

$$\varphi_1^i = m_1^i \alpha_1^i - m_2^i \beta^i + \varphi_{1(q)}^i$$

$$\varphi_2^i = -m_1^i \beta^i + m_2^i \alpha_2^i + \varphi_{2(q)}^i$$

Trave continua, costituita da più campate



assumiamo come incognite le azioni flessanti sulle aste, col segno che le compete come caratteristiche della sollecitazione; si ha quindi

per l'asta  $i-1$  :  $m_1^{i-1} = -M_{i-1}$   $m_2^{i-1} = M_i$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{i-1} &= -m_1^{i-1} \beta^{i-1} + m_2^{i-1} \alpha_2^{i-1} + \varphi_{2(q)}^{i-1} = \\ &= M_{i-1} \beta^{i-1} + M_i \alpha_2^{i-1} + \varphi_{2(q)}^{i-1} \end{aligned}$$

per l'asta  $i$  :  $m_1^i = -M_i$   $m_2^i = M_{i+1}$

$$\varphi_1^i = -M_i \alpha_1^i - M_{i+1} \beta^i + \varphi_{1(q)}^i$$

la condizione di congruenza in corrispondenza dell'appoggio  $i$ ,  $\varphi_2^{i-1} = \varphi_1^i$ , si scrive pertanto

$$\beta^{i-1} M_{i-1} + (\alpha_2^{i-1} + \alpha_1^i) M_i + \beta^i M_{i+1} = -\varphi_{2(q)}^{i-1} + \varphi_{1(q)}^i$$

è detta "Equazione dei 3 momenti"

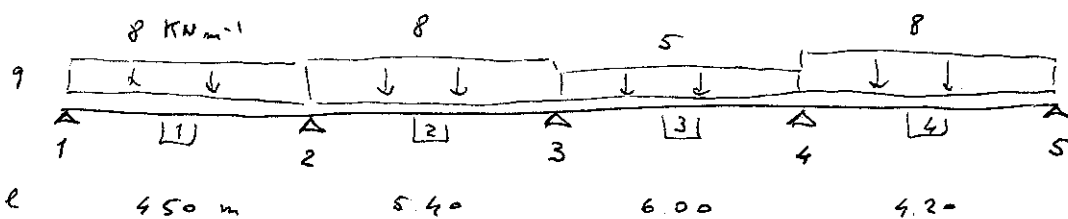
Il sistema di equazioni cui si perviene è Tridiagonale, cioè in esso sono diversi da 0 solo i coefficienti nella diagonale principale e nelle due diagonali immediatamente adiacenti

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

si può risolvere rapidamente per sostituzione, procedendo dalla prima equazione all'ultima e poi dall'ultima alla prima (o viceversa)

### ESEMPIO

q col segno meno perché verso il basso



campata 1

campata 2

campata 3

campata 4

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{l}{3EI}$$

$$\frac{1.50}{EI}$$

$$\frac{1.80}{EI}$$

$$\frac{2.00}{EI}$$

$$\frac{1.40}{EI}$$

$$\beta = \frac{l}{6EI}$$

$$\frac{0.75}{EI}$$

$$\frac{0.90}{EI}$$

$$\frac{1.00}{EI}$$

$$\frac{0.70}{EI}$$

$$\varphi_{1(q)} = -\varphi_{2(q)} = \frac{1l^3}{24EI}$$

$$\frac{-30.38}{EI}$$

$$\frac{-52.49}{EI}$$

$$\frac{-45.00}{EI}$$

$$\frac{-24.70}{EI}$$

$$\text{node 2: } \frac{1.50+1.80}{EI} M_2 + \frac{0.90}{EI} M_3 = \frac{-30.38-52.49}{EI}$$

$$\text{node 3: } \frac{0.90}{EI} M_2 + \frac{1.80+2.00}{EI} M_3 + \frac{1.00}{EI} M_4 = \frac{-52.49-45.00}{EI}$$

$$\text{node 4: } \frac{1.00}{EI} M_3 + \frac{2.00+1.40}{EI} M_4 = \frac{-45.00-24.70}{EI}$$

$$3.30 M_2 + 0.90 M_3 = -82.87$$

$$\Rightarrow M_2 = -25.11 - 0.27 M_3$$

$$0.90 M_2 + 3.80 M_3 + 1.00 M_4 = -97.49$$

$$\Rightarrow M_3 = -21.10 - 0.28 M_4$$

$$1.00 M_3 + 3.40 M_4 = -69.70$$

$$\Rightarrow M_4 = -15.58 \text{ KNm}$$

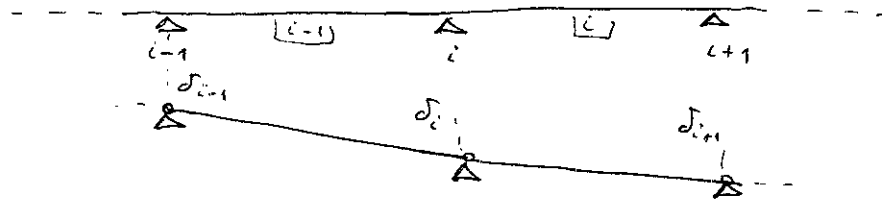
e, sostituendo all'indietro

$$M_3 = -16.74 \text{ KNm}$$

$$M_2 = -20.59 \text{ KNm}$$

## METODO DELLE FORZE - influenza di cedimenti anelastici

Poiché ciascuna parte dello schema sconnesso è ipostatica, occorre semplicemente tener conto della rotazione corrispondente ai cedimenti.



$$\varphi_2^{i-1} = \beta^{i-1} M_{i-1} + \alpha_2^{i-1} M_i + \varphi_{2(q)}^{i-1} - \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_{i-1}}$$

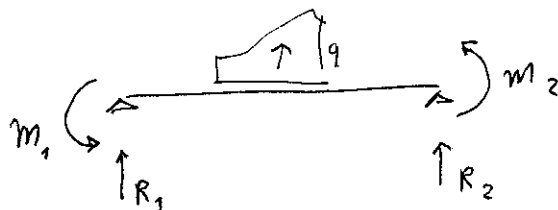
$$\varphi_1^i = -\alpha_1^i M_i - \beta^i M_{i+1} + \varphi_{1(q)}^i - \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l_i}$$

e quindi

$$\beta^{i-1} M_{i-1} + (\alpha_2^{i-1} + \alpha_1^i) M_i + \beta^i M_{i+1} = -\varphi_{2(q)}^{i-1} + \varphi_{1(q)}^i + \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_{i-1}} - \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l_i}$$

- influenza di cedimenti elastici  
(appoggi cedevoli)

Poiché ciascuna parte dello schema sconnesso è ipostatica, l'azione su ciascun appoggio è calcolabile con considerazioni di equilibrio e dipende sia dai carichi che dalle incognite  $M$ ; il cedimento di ciascun appoggio sarà inserito nelle equazioni come indicato sopra, ma sarà funzione dei carichi e delle incognite.



$$R_1 = \frac{M_1 + M_2}{l} + R_{1(q)}$$

$$R_2 = -\frac{M_1 + M_2}{l} + R_{2(q)}$$

per l'appoggio  $i$

$$R_i = R_2^{i-1} + R_1^i = - \frac{M_1^{i-1} + M_2^{i-1}}{l_{i-1}} + R_{2(q)}^{i-1} + \frac{M_1^{(i)} + M_2^{(i)}}{l_i} + R_{1(q)}^i =$$

$$= \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + R_{2(q)}^{i-1} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} + R_{1(q)}^i$$

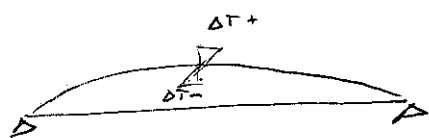
$$\delta_i = -K_i R_i = K_i \frac{M_i - M_{i-1}}{l_{i-1}} - K_i R_{2(q)}^{i-1} + K_i \frac{M_i - M_{i+1}}{l_i} - K_i R_{1(q)}^i$$

questo, insieme agli analoghi  $\delta_{i-1}$  e  $\delta_{i+1}$ , va sostituito nelle equazione ricavata nel caso di cedimenti anelastici

Si noti che in questo modo in ciascuna equazione compariranno anche il momento  $M_{i-2}$  (per  $\delta_{i-1}$ ) e  $M_{i+2}$  (per  $\delta_{i+1}$ ).

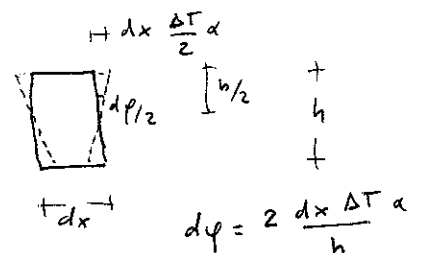
- influenza di distorsioni termiche a farfalla

In ciascuna campata resa isostatica nascono una rotazione per l'effetto termico che va considerata nell'equazione di congruenza



$$\varphi_1 = \frac{\alpha l \Delta T}{h}$$

$$\varphi_2 = - \frac{\alpha l \Delta T}{h}$$



all'equazione dei 3 momenti si aggiungono quindi, in cada al secondo membro, i termini

$$\frac{\alpha l_{i-1} \Delta T}{h_{i-1}} + \frac{\alpha l_i \Delta T}{h_i}$$

Metodo degli spostamenti: si bloccano le componenti di movimento (spostamenti e rotazioni) di tutti i nodi, o solo di una parte di essi, valutando le azioni che nascono sui nodi per effetto dei carichi (azioni di incastro perfetto); si valutano poi le azioni che nascono sui nodi quando si impone un valore assegnato (unitario) di ciascuna componente di movimento, presa separatamente dalle altre; si determina quindi il valore delle componenti di movimento imponendo una condizione di equilibrio per le azioni nodali duali di ciascuna componente di movimento.

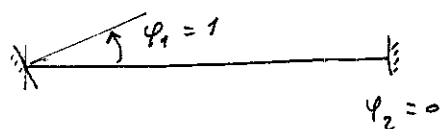
Il metodo degli spostamenti può essere molto conveniente per la risoluzione di schemi molto iperstatici, cioè con pochi gradi di libertà d'individuazione delle incognite e in generale automatica (possono sorgere complicazioni solo in presenza di aste indeformabili flessionalmente o estensionalmente, perché in questo caso le componenti di movimento di più nodi possono essere mutuamente legate).

Nel caso di travi continue, le incognite sono le rotazioni dei nodi (includendo o escludendo quelle dei nodi di estremità).

Occorre quindi preliminarmente determinare i momenti d'incastro perfetto dovuti ai carichi ed i momenti che nascono per effetto di rotazioni unitarie degli estremi delle aste (rigidezza flessionali).

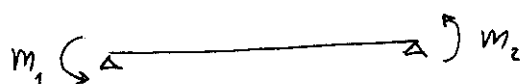
RIGIDENZE FLESSIONALI = momenti che nascono agli estremi dell'asta per effetto di una rotazione unitaria degli estremi:

in generale, occorre risolvere lo schema di asta incastrata agli estremi con cedimento anelastico rotazionale per determinare i momenti di estremità



ASTE SENZA SCONESSIONI INTERNE

se non vi sono sconnessioni interne all'asta lo schema è due volte iperstatico (più una iperstaticità assiale che non ci interessa); si può quindi partire dallo schema isostatico di Trave appoggiata con coppie (incognite) all'estremità



$$\varphi_1 = \alpha_1 M_1 - \beta M_2$$

$$\varphi_2 = -\beta M_1 + \alpha_2 M_2$$

imponendo  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$  trovo i momenti che nascono per effetto di una rotazione unitaria del primo estremo; analogamente, imponendo  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 1$  trovo l'effetto di una rotazione unitaria del secondo estremo; in maniera più generale, posso invertire le relazioni sopra indicate

moltiplicando le equazioni: rispettivamente per  $\alpha_2$  e  $\beta$  e sommando si ha

$$\alpha_2 \varphi_1 + \beta \varphi_2 = \alpha_1 \alpha_2 M_1 - \beta^2 M_2$$

$$M_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_1 + \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_2$$

e analogamente

$$M_2 = \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_2$$

le rigidzze flessionali sono quindi, in questo caso:

$$P_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2}$$

$$P_{12} = \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2}$$

$$P_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2}$$

# RIGIDENZE FLESSIONALI PER ASTA A SEZIONE COSTANTE

in questo caso  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\ell}{3EI}$   $\beta = \frac{\ell}{6EI}$

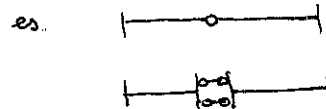
si ha quindi 
$$\rho_1 = \frac{\frac{\ell}{3EI}}{\frac{\ell}{3EI} \frac{\ell}{3EI} - \left(\frac{\ell}{6EI}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9} - \frac{1}{36}} \frac{EI}{\ell} = 4 \frac{EI}{\ell}$$

$$\rho_{12} = 2 \frac{EI}{\ell} \quad \rho_2 = 4 \frac{EI}{\ell}$$

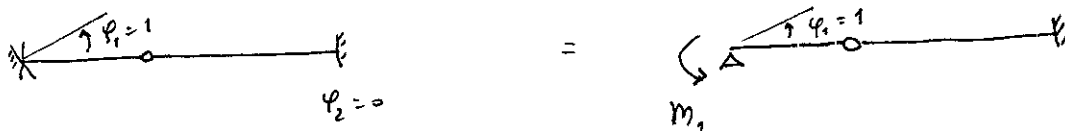
ovvero  $M_1 = 4 \frac{EI}{\ell} \varphi_1 + 2 \frac{EI}{\ell} \varphi_2$

$$M_2 = 2 \frac{EI}{\ell} \varphi_1 + 4 \frac{EI}{\ell} \varphi_2$$

## ASTE CON SCONNESSIONI INTERNE

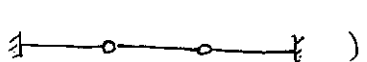


in presenza di una sconnessione lo schema è solo una volta iperstatico e lo schema isostatico di partenza si ottiene sostituendo l'incastro con un appoggio solo a un estremo



non si possono quindi sfruttare le relazioni già trovate per asta appoggiata, ma bisogna ricavarne di nuove coi soliti metodi (P.L.V., integrazione delle equazioni indefinite, corollari di Mohr)

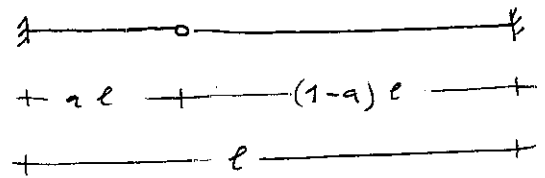
- vedi esempio -

in presenza di due sconnessioni (es. )

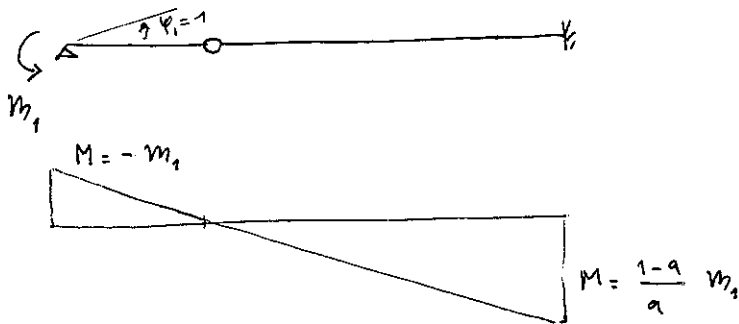
lo schema è isostatico; non nascono momenti quando si impone un cedimento all'estremità, quindi

$$\rho_1 = \rho_{12} = \rho_2 = 0$$

esempio: asta con cerniera interna

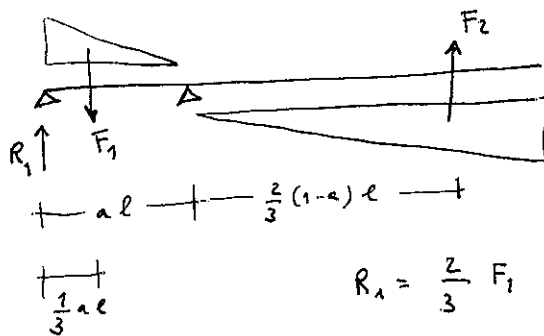


schema isostatico:



condizione da imporre:  
 $\varphi_1 = 1$

coi corollari di Mohr



$$F_1 = \frac{m_1}{EI} \frac{al}{2}$$

$$F_2 = \frac{1-a}{a} \frac{m_1}{EI} \frac{(1-a)l}{2} = \frac{m_1}{EI} \frac{(1-a)^2 l}{2a}$$

$$R_1 = \frac{2}{3} F_1 + \frac{1}{a} F_2 \frac{2}{3} (1-a)l = \frac{m_1 al}{3EI} + \frac{m_1 (1-a)^3 l}{3a^2 EI}$$

$$V_1 = R_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{m_1 al}{3EI} \left[ 1 + \frac{(1-a)^3}{a^3} \right]$$

imponendo  $\varphi_1 = 1$ :

$$m_1 = \frac{3EI}{al} \frac{1}{1 + \frac{(1-a)^3}{a^3}} = \frac{3EI}{l} \frac{a^2}{a^3 + (1-a)^3}$$

$$\rho_1 = \frac{3EI}{l} \frac{a^2}{a^3 + (1-a)^3}$$

$$\rho_{12} = \frac{1-a}{a} m_1 = \frac{3EI}{l} \frac{a(1-a)}{a^3 + (1-a)^3}$$

ed analogamente si trova anche

$$\rho_2 = \frac{3EI}{l} \frac{(1-a)^2}{a^3 + (1-a)^3}$$

nel caso particolare  $a = 0.5$

$$\rho_1 = \rho_{12} = \rho_2 = \frac{6EI}{l}$$

nel caso particolare  $a = 0$

$$\rho_1 = \rho_{12} = 0 \quad \rho_2 = \frac{3EI}{l}$$



MOMENTI D'INCASTRO PERFETTO = momenti che nascono agli estremi dell'asta (bloccati alla rotazione) per effetto dei carichi

occorre ancora risolvere, in generale, uno schema iperstatico

ASTE SENZA SCONNESSIONI INTERNE

ci si può sempre rifare alle relazioni generali ricavate per trave appoggiata

$$\varphi_1 = \alpha_1 m_1 - \beta m_2 + \varphi_1(q)$$

$$\varphi_2 = -\beta m_1 + \alpha_2 m_2 + \varphi_2(q)$$

imponendo  $\varphi_1 = 0$   $\varphi_2 = 0$  ed indicando le azioni di incastro con  $\bar{m}_1$   $\bar{m}_2$

$$\alpha_1 \bar{m}_1 - \beta \bar{m}_2 + \varphi_1(q) = 0 \quad \times \alpha_2 \quad \text{e sommando}$$

$$-\beta \bar{m}_1 + \alpha_2 \bar{m}_2 + \varphi_2(q) = 0 \quad \times \beta$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2) \bar{m}_1 + \alpha_2 \varphi_1(q) + \beta \varphi_2(q) = 0 \quad \bar{m}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_1(q) - \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \varphi_2(q)$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{m}_1 = -\rho_1 \varphi_1(q) - \rho_{12} \varphi_2(q)$$

$$\text{e analogamente} \quad \bar{m}_2 = -\rho_{12} \varphi_1(q) - \rho_2 \varphi_2(q)$$

per trave a sezione costante, con carico uniforme  $q$  (positivo verso l'alto)

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{4EI}{l} \quad \rho_{12} = \frac{2EI}{l} \quad \varphi_1(q) = \frac{ql^3}{24EI} \quad \varphi_2(q) = -\varphi_1(q)$$

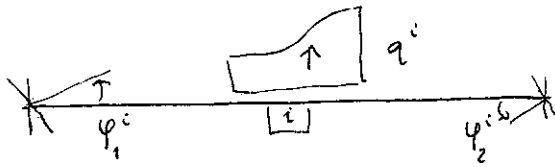
$$\bar{m}_1 = -\frac{4EI}{l} \frac{ql^3}{24EI} + \frac{2EI}{l} \frac{ql^3}{24EI} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) ql^2 = -\frac{ql^2}{12}$$

$$\bar{m}_2 = \frac{ql^2}{12}$$

N.B. visti come caratteristiche della sollecitazione,  $\bar{M}_1 = -\bar{m}_1$ ,  $\bar{M}_2 = \bar{m}_2$ ;

e, come di solito avviene,  $q$  è verso il basso, si ha  $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = -\frac{ql^2}{12}$

Nella generica campata  $i$  si ha

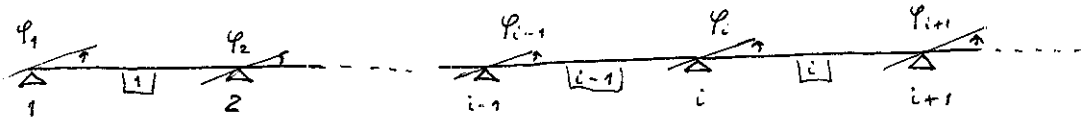


$\bar{m}_{1(q)}^i, \bar{m}_{2(q)}^i$  momenti  
d'incastro perfetto dovuti  
al carico  $q^i$

$$M_1^i = f_1^i \varphi_1^i + f_{12}^i \varphi_2^i + \bar{m}_{1(q)}^i$$

$$M_2^i = f_{12}^i \varphi_1^i + f_2^i \varphi_2^i + \bar{m}_{2(q)}^i$$

Trave continua, costituita da più campate



assumiamo come incognite le rotazioni dei nodi, positive se orarie,  
si ha quindi:

per l'asta  $i-1$  :  $\varphi_1^{i-1} = \varphi_{i-1}$   $\varphi_2^{i-1} = \varphi_i$

$$M_2^{i-1} = f_{12}^{i-1} \varphi_{i-1} + f_2^{i-1} \varphi_i + \bar{m}_{2(q)}^{i-1}$$

per l'asta  $i$  :  $\varphi_1^i = \varphi_i$   $\varphi_2^i = \varphi_{i+1}$

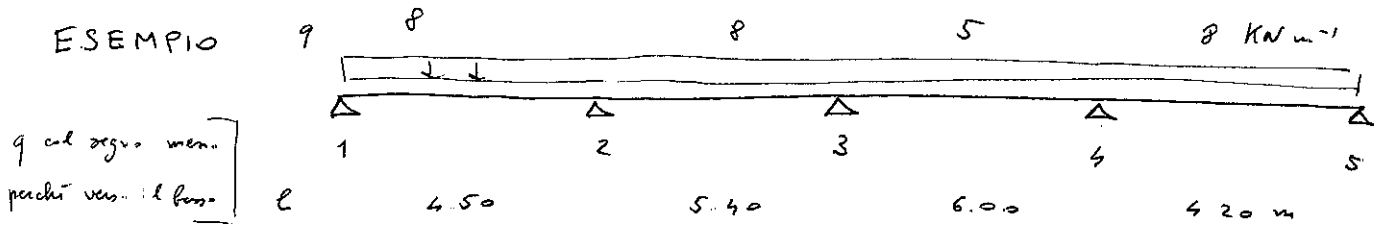
$$M_1^i = f_1^i \varphi_i + f_{12}^i \varphi_{i+1} + \bar{m}_{1(q)}^i$$

la condizione di equilibrio in corrispondenza dell'appoggio  $i$ ,  $M_2^{i-1} + M_1^i = 0$ ,  
si scrive pertanto

$$f_{12}^{i-1} \varphi_{i-1} + (f_2^{i-1} + f_1^i) \varphi_i + f_{12}^i \varphi_{i+1} = -\bar{m}_{2(q)}^{i-1} - \bar{m}_{1(q)}^i$$

Il sistema di equazioni è tridiagonale, così come per il metodo delle forze,  
e si risolve allo stesso modo; le incognite sono però due in più

# ESEMPIO



q cal. segno meno  
perché verso il basso

$$f_1 = f_2 = \frac{4EI}{l}$$

$$f_{12} = \frac{2EI}{l}$$

$$\bar{m}_1 = -\frac{ql^2}{12}$$

$$\bar{m}_2 = -\bar{m}_1$$

campata 1

campata 2

campata 3

campata 4

$$0.889 EI$$

$$0.741 EI$$

$$0.667 EI$$

$$0.952 EI$$

$$0.444 EI$$

$$0.370 EI$$

$$0.333 EI$$

$$0.476 EI$$

$$13.50$$

$$19.44$$

$$15.00$$

$$11.76$$

nodo 1:  $0.889 EI \varphi_1 + 0.444 EI \varphi_2 = -13.50$

nodo 2:  $0.444 EI \varphi_1 + (0.889 + 0.741) EI \varphi_2 + 0.370 EI \varphi_3 = 13.50 - 19.44$

nodo 3:  $0.370 EI \varphi_2 + (0.741 + 0.667) EI \varphi_3 + 0.333 EI \varphi_4 = 19.44 - 15.00$

nodo 4:  $0.333 EI \varphi_3 + (0.667 + 0.952) EI \varphi_4 + 0.476 EI \varphi_5 = 15.00 - 11.76$

nodo 5:  $0.476 EI \varphi_4 + 0.952 EI \varphi_5 = 11.76$

si ha:  $EI \varphi_1 = -15.19 - 0.500 EI \varphi_2$

$EI \varphi_2 = 0.57 - 0.263 EI \varphi_3$

$EI \varphi_3 = 3.23 - 0.254 EI \varphi_4$

$EI \varphi_4 = 1.41 - 0.310 EI \varphi_5$

$EI \varphi_5 = 13.79$

$EI \varphi_1 = -14.95$

$EI \varphi_2 = -0.47$

$EI \varphi_3 = 3.96$

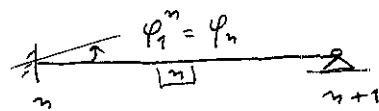
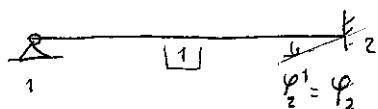
$EI \varphi_4 = -2.87$

da questi si ottiene  $M_1^* = 0.889(-14.95) + 0.444(-0.47) + 13.50 = 0$

$M_2^* = 0.444(-14.95) + 0.889(-0.47) - 13.50 = -20.59 \text{ KNm}$

e così via per tutte le campate

N.B. Per una risoluzione manuale può essere conveniente non assumere come incognite  $\varphi_1$  e  $\varphi_{n+1}$  e quindi considerare per le campate 1 ed n (prima ed ultima) uno schema di trave con cerniera all'estremità



si ha in questo caso

$$P_1^1 = \int_{12}^1 = 0 \quad P_2^1 = \frac{3EI}{l}$$

$$\bar{M}_{1(q)}^1 = 0 \quad \bar{M}_{2(q)}^1 = \frac{ql^2}{8}$$

$$P_1^n = \frac{3EI}{l} \quad P_2^n = \int_{12}^n = 0$$

$$\bar{M}_{1(q)}^n = -\frac{ql^2}{8} \quad \bar{M}_{2(q)}^n = 0$$

per l'esempio di prima

$$P_2^1 = 0.667 EI$$

$$\bar{M}_{2(q)}^1 = -20.25$$

$$P_1^n = 0.714 EI$$

$$\bar{M}_{1(q)}^n = 17.64$$

e le equazioni diventano:

$$\text{node 2 : } (0.667 + 0.714) EI \varphi_2 + 0.370 EI \varphi_3 = 20.25 - 19.44$$

$$\text{node 3 : } 0.370 EI \varphi_2 + (0.714 + 0.667) EI \varphi_3 + 0.333 EI \varphi_4 = 19.44 - 15.00$$

$$\text{node 4 : } 0.333 EI \varphi_3 + (0.667 + 0.714) EI \varphi_4 = 15.00 - 17.64$$

$$EI \varphi_2 = 0.575 - 0.263 EI \varphi_3$$

$$EI \varphi_2 = -0.47$$

$$EI \varphi_3 = 3.224 - 0.254 EI \varphi_4$$

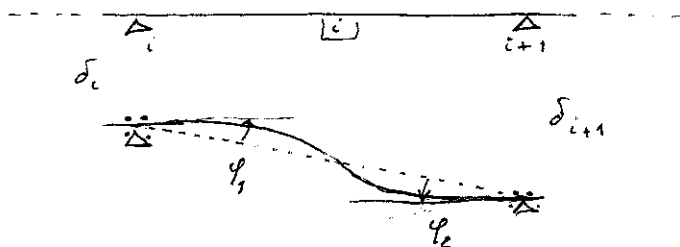
$$EI \varphi_3 = 3.95$$

$$EI \varphi_4 = -2.87$$

N.B. i risultati dovrebbero coincidere rigorosamente con precedenti; le piccole differenze sono dovute alle approssimazioni del calcolo

## METODO DEGLI SPOSTAMENTI - influenza di cedimenti anelastici

Poiché le rotazioni dei nodi sono bloccate, occorre tener conto dei momenti d'incastro corrispondenti ai cedimenti.



I cedimenti equivalgono a un moto rigido più una rotazione degli estremi pari a  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l}$

I momenti che nascono sono pertanto:

$$\bar{M}_1 = \rho_1 \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l} + \rho_{12} \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l} = \frac{\rho_1 + \rho_{12}}{l} \delta_{i+1} - \frac{\rho_1 + \rho_{12}}{l} \delta_i$$

$$\bar{M}_2 = \rho_{12} \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l} + \rho_2 \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l} = \frac{\rho_{12} + \rho_2}{l} \delta_{i+1} - \frac{\rho_{12} + \rho_2}{l} \delta_i$$

Nel caso di trave a sezione costante le espressioni diventano:

$$\bar{M}_1 = \frac{6EI}{l^2} \delta_{i+1} - \frac{6EI}{l^2} \delta_i$$

$$\bar{M}_2 = \frac{6EI}{l^2} \delta_{i+1} - \frac{6EI}{l^2} \delta_i$$

## - influenza di cedimenti elastici

Per operare col metodo degli spostamenti occorre considerare una ulteriore incognita per ogni appoggio elasticamente cedevole e scrivere una ulteriore equazione di equilibrio (tra i tagli e la reazione vincolare)

## PROCEDIMENTI PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI

metodi diretti - quando si opera direttamente sulle equazioni, ad esempio col metodo già descritto che può essere definito di "riduzione e sostituzione all'indietro"

metodi iterativi - quando si ricava da ciascuna equazione il valore di un'incognita in base al valore corrente delle altre e si ripete ciò fin quando i valori si stabilizzano

esempio di metodo iterativo: l'equazione risolutiva del metodo degli spostamenti

può scriversi

$$y_i = \frac{-\overline{M}_{2(q)}^{i-1} - \overline{M}_{1(q)}^i - \beta_{12}^{i-1} y_{i-1} - \beta_{12}^i y_{i+1}}{\beta_2^{i-1} + \beta_2^i}$$

l'applicazione di procedimenti iterativi al metodo degli spostamenti è nata quando si operava manualmente o con calcolatori poco potenti; essa si basa su un preciso significato fisico (lasciar muovere un nodo, con gli altri bloccati, facendo raggiungere l'equilibrio in quel nodo).

Si parla in questo caso di "metodi di rilassamento" proprio perché corrispondono ad un progressivo sbloccamento dei nodi.

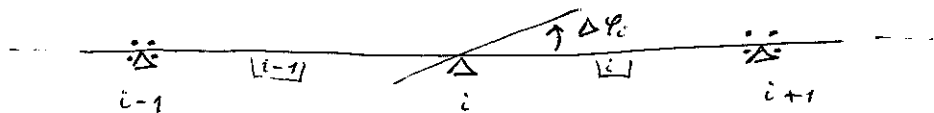
Esistono numerosi metodi di rilassamento, per telai a nodi fissi o a nodi spostabili (metodi di Cross, Grinter, Kani ecc.). Essi hanno ormai più un interesse storico che una vera validità operativa (pur potendo essere per casi specifici concorrenti coi metodi diretti).

Hanno però ancora grande importanza per:

- la comprensione del comportamento fisico della struttura
- una valutazione rapida, anche se approssimativa, dei risultati, utile sia per dimensionamenti di massima che per il controllo di risultati esatti

metodi di rilassamento: METODO DI CROSS

Si procede in maniera incrementale, valutando l'incremento di rotazione del nodo  $i$  necessario per equilibrarlo, quando i nodi adiacenti sono bloccati al valore precedentemente calcolato della rotazione



$$\varphi_{i-1} \neq 0, \Delta \varphi_{i-1} = 0$$

$$\varphi_{i+1} \neq 0, \Delta \varphi_{i+1} = 0$$

le relazioni valgono anche in termini incrementali (cioè per  $\Delta \varphi$ ) considerando lo schema con nodi bloccati alle rotazioni  $\varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}$  calcolate nell'iterazione precedente; in questo caso il termine noto rappresenta lo squilibrio del nodo  $i$  per effetto delle rotazioni anzidette e lo indicheremo genericamente con  $-\Delta M_i$ . Si ha quindi, essendo  $\Delta \varphi_{i-1} = \Delta \varphi_{i+1} = 0$

$$(\rho_2^{i-1} + \rho_1^i) \Delta \varphi_i = -\Delta M_i \Rightarrow \Delta \varphi_i = \frac{-\Delta M_i}{\rho_2^{i-1} + \rho_1^i}$$

essa provoca le variazioni dei momenti d'estremità

$$\Delta M_2^{i-1} = \rho_2^{i-1} \Delta \varphi_i = -\Delta M_i$$

$$\Delta M_1^i = \rho_1^i \Delta \varphi_i = -\Delta M_i$$

agli estremi adiacenti al nodo  $i$

questi rapporti sono detti coefficienti di ripartizione

ed agli estremi opposti

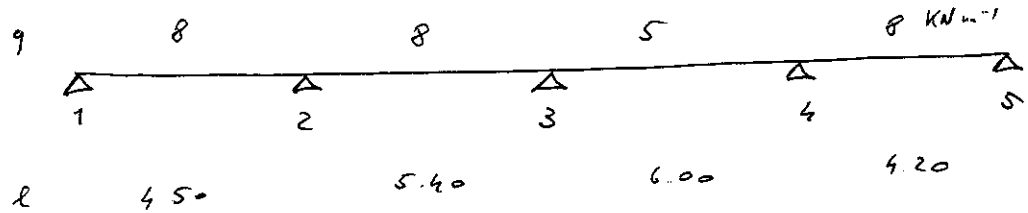
$$\Delta M_1^{i-1} = \rho_{12}^{i-1} \Delta \varphi_i = \frac{\rho_{12}^{i-1}}{\rho_2^{i-1}} \Delta M_2^{i-1} = t_{12}^{i-1} \Delta M_2^{i-1}$$

$$\Delta M_2^i = \rho_{12}^i \Delta \varphi_i = \frac{\rho_{12}^i}{\rho_1^i} \Delta M_1^i = t_{21}^i \Delta M_1^i$$

questi momenti rappresentano lo squilibrio che insorge nei nodi adiacenti ( $i-1$  e  $i+1$ ) quando si equilibra il nodo  $i$ . I coefficienti  $t_{12}$  e  $t_{21}$  sono detti coefficienti di trasporto; per trave a sezione costante

valgono 0.5

# ESEMPIO



considero bloccati solo i nodi 2, 3 e 4

	campata 1	campata 2	campata 3	campata 4
$I_1 = I_2 = \frac{4EI}{L}$		$0.741 EI$	$0.667 EI$	
$\left(\frac{3EI}{L} \text{ per le campate d'estremità}\right)$	$0.667 EI$			$0.714 EI$
$I_{12} = \frac{2EI}{L}$		$0.370 EI$	$0.333 EI$	
$(0 \text{ per le estremità})$	$0$			$0$
$\bar{M}_1 = -\frac{qL^2}{12}$		$19.44$	$15.00$	
	$20.25$			$17.64$
$\left(-\frac{qL^2}{8} \text{ per le estremità}\right)$				

coeff di ripartizione

$$\frac{0.741}{0.667 + 0.741}$$

momenti d'incastro perfetto

	0.474	0.526		0.526	0.474		0.483	0.517
-AM	-20.25	19.44		-19.44	15.00		-15.00	17.64
ripartito	0.38	0.43	Trasporto	0.21				
obare per indicare che si è equilibrato il nodo		1.11		2.22	2.01		1.00	
				-0.88			-1.76	-1.88
		0.23		0.46	0.42		0.21	
	-0.64	-0.70		-0.35				
	0.09			0.18	0.17		0.08	
(trascurato)				-0.07			-0.14	-0.15
somma	-20.51	20.51		-16.72	16.72		-15.61	15.61

N.B. In questo caso le piccole differenze rispetto ai risultati precedentemente ottenuti sono dovute, oltre che alle approssimazioni del calcolo, anche all'aver interrotto il procedimento iterativo trascurando equilibri piccoli ma non nulli.