

Corso

Dinamica delle strutture e progetto di costruzioni in zona sismica - mod. B

Catania

marzo-maggio 2018

12 - Rigidezza laterale (o traslazionale)

Aurelio Ghersi

Elementi resistenti alle azioni orizzontali

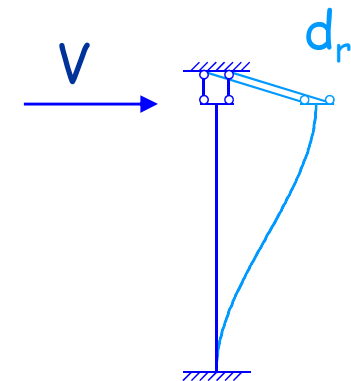
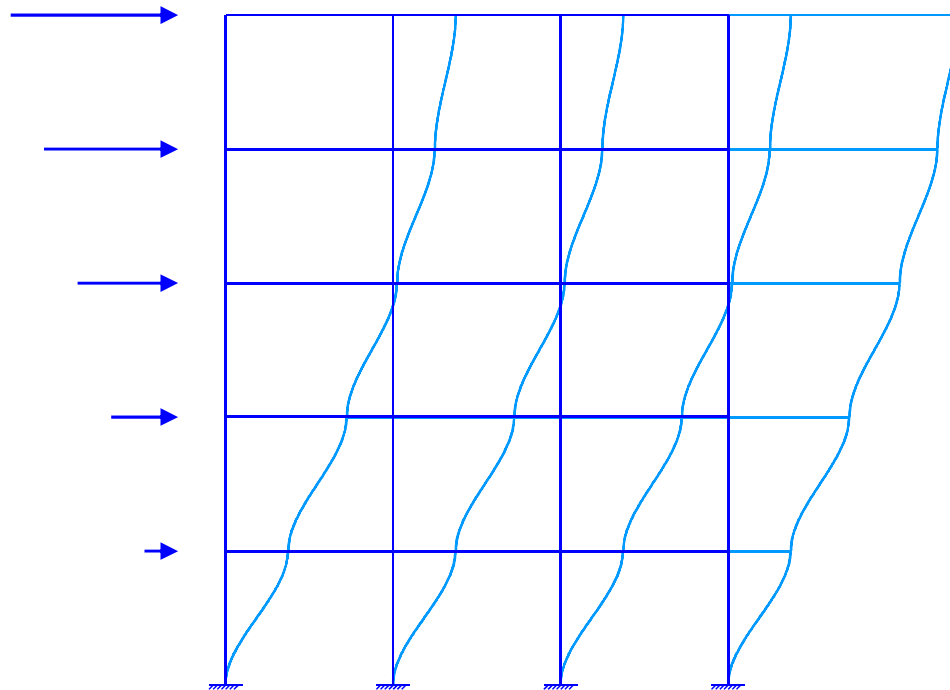
In genere nelle strutture si hanno travi sia emergenti che a spessore e pilastri rettangolari, che possono essere orientati col lato più lungo in una delle due dimensioni della pianta

I singoli pilastri assorbono un'aliquota dell'azione sismica minore o maggiore in proporzione alla loro rigidezza

In che modo si può stimare la rigidezza?

Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- Se le travi sono infinitamente rigide



Modello
di calcolo

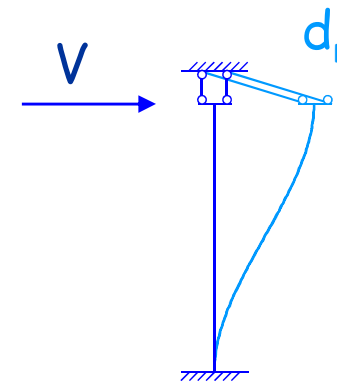
Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- Se le travi sono infinitamente rigide

$$d_r = \frac{V L_p^3}{12 E I_p}$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3}$$

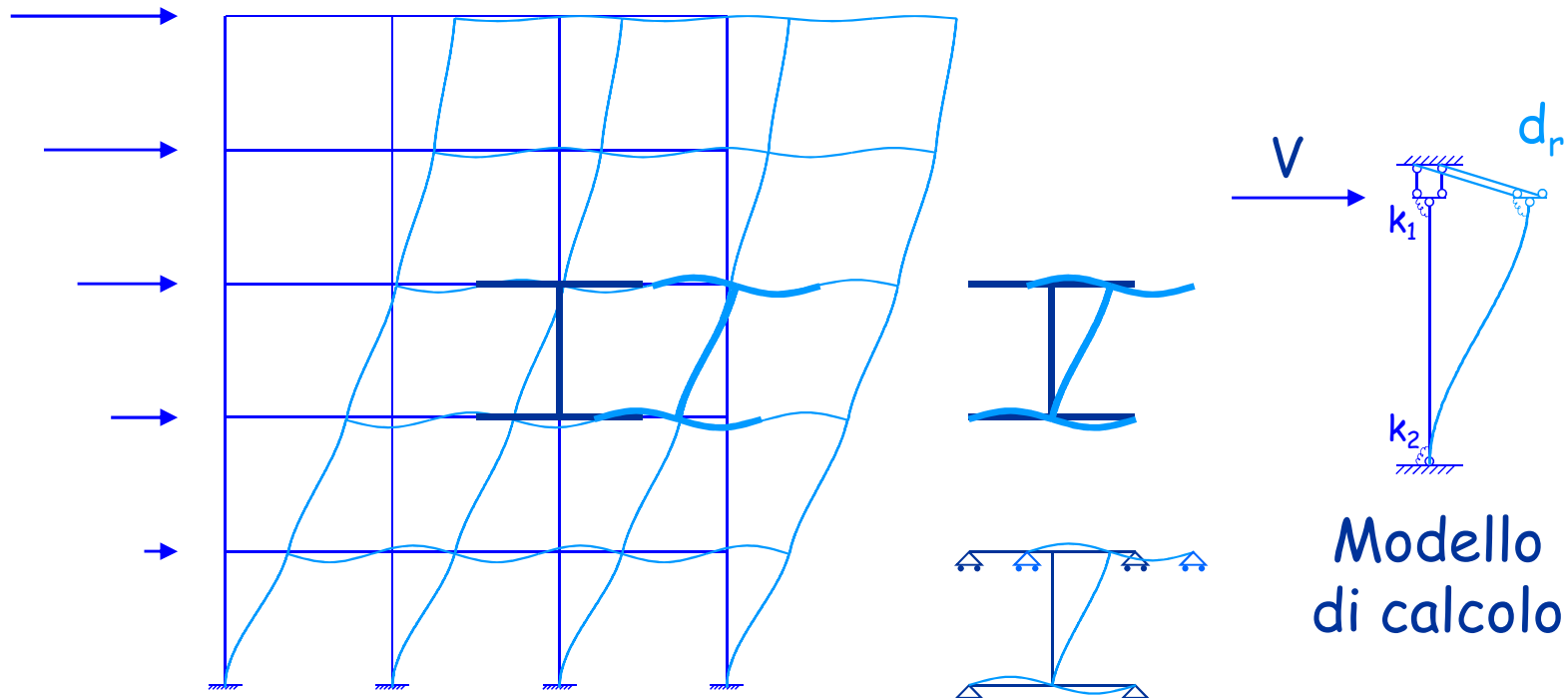
La rigidezza è proporzionale al momento d'inerzia della sezione



Modello
di calcolo

Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili



Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili

$$k_1 = \frac{12 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

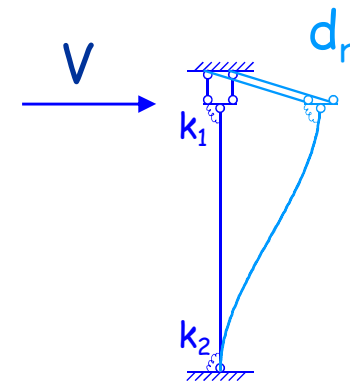


ma poiché la trave serve da vincolo anche al pilastro di sopra, prendo la metà (nel caso di piani intermedi)

$$k_1 = \frac{6 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

$$k_2 = \frac{6 E I_{t,\text{inf}}}{L_t}$$

pongo $r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t}$ $r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$

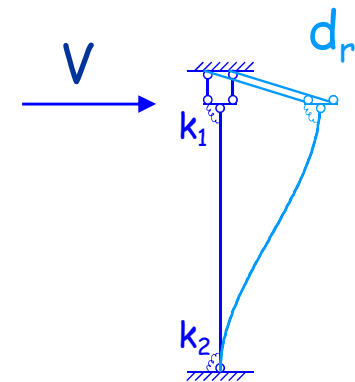


Modello
di calcolo

Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili

$$\begin{aligned}d_r &= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2 / 6}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&\cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \quad \text{se } r_1 \cong r_2\end{aligned}$$



Modello
di calcolo

Lo spostamento dipende anche
dalla rigidezza delle travi

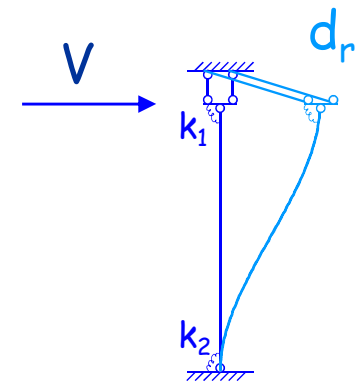
Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili

In maniera semplificata, spostamento e rigidezze si possono esprimere direttamente con

$$d_r \cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right) \right]$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right)}$$



Modello di calcolo

Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili

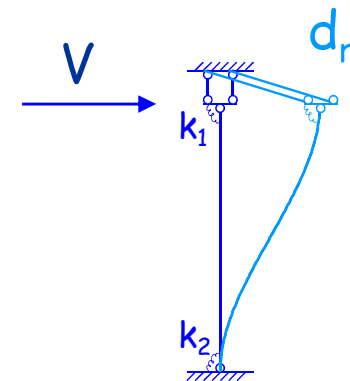
Ora preferisco però usare sempre l'espressione generale

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6}}$$

$$\text{con } r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t} \quad r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$$

Note: $r = 0$ se la trave è infinitamente rigida (incastro)

si potrebbe dimezzare r se vi è solo il pilastro sup. o inf. ma non sembra funzioni bene



Modello
di calcolo

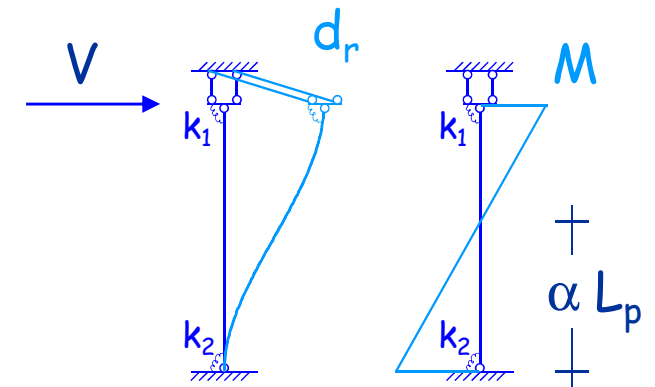
Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio V e spostamento relativo d_r
- In realtà le travi sono deformabili

Dallo schema si può ottenere anche la posizione del punto di nullo di M

Dista dalla base αL_p , con

$$\alpha = 0.5 \frac{1 + r_1 / 3}{1 + r_1 / 6 + r_2 / 6}$$



Modello
di calcolo

Note: $r = 0$ se la trave è infinitamente rigida (incastro)
si potrebbe dimezzare r se vi è solo il pilastro sup. o inf. ma non sembra funzioni bene

Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 30.60$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 12.88$ kN/mm		

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	60x24	$l=4.50$ m
$k = 5.36$ kN/mm		

Rigidezza

Esempio, con solo travi a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	60x28	$l=4.00$ m
$k = 9.19$ kN/mm		

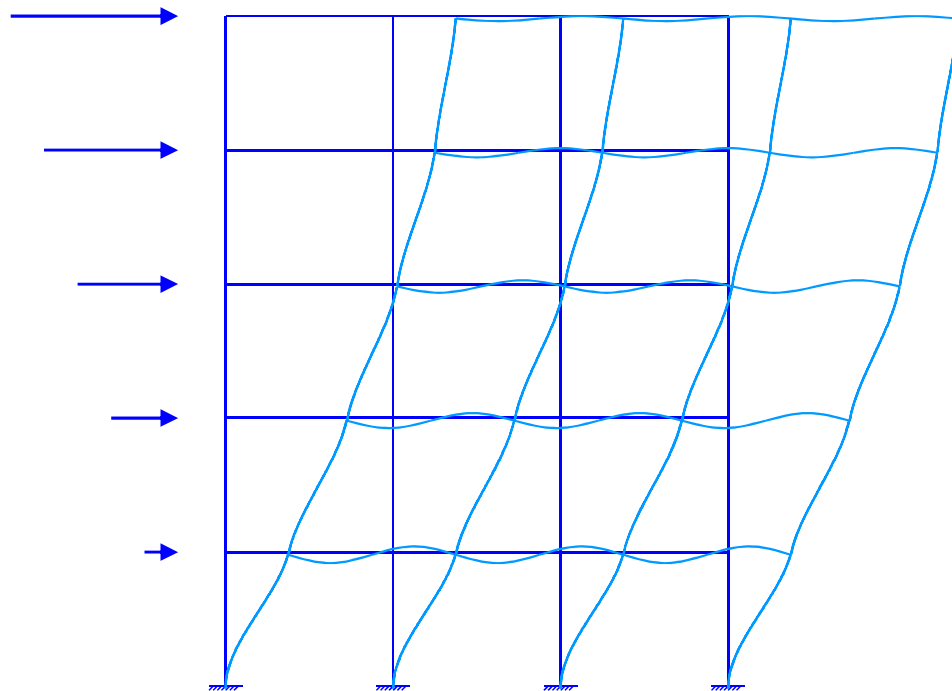
pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	60x28	$l=4.00$ m
$k = 6.50$ kN/mm		

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
una sola trave	60x28	$l=4.00$ m
$k = 4.82$ kN/mm		

Rigidezza

Nota:

- Le formule sono ricavate nell'ipotesi di rotazione uguale per tutti i nodi



Cadono in difetto se vi sono forti variazioni tra un pilastro e l'altro

In particolare nel caso di un pilastro di piatto tra due pilastri di coltello



In questo caso la rotazione del nodo centrale può essere nulla; valutare la rigidezza del pilastro centrale senza riduzioni

Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 30.60$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 12.88$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	∞ rigide	
$k = 18.17$ kN/mm		

Foglio di calcolo Rigidezza

Superiormente esiste un pilastro al di sopra ▼			pilastro b 30 cm h 70 cm Lp 3.20 m			k (t=inf) 98.92 kN/mm riduzione 0.309		
						k 30.60 kN/mm		
Inferiormente esiste un pilastro al di sotto ▼						punto di nullo di M a 0.500 da base		
Travi superiori e inferiori diverse tra loro ▼			travi superiori trave sx b 30 cm h 60 cm Lt 4.50 m			trave dx b 30 cm h 60 cm Lt 4.50 m		
Travi a destra e sinistra due, dx e sx, diverse tra loro ▼			travi inferiori trave sx b 30 cm h 60 cm Lt come sup			trave dx b 30 cm h 60 cm Lt come sup		
E 31500 MPa								

In **rosso** i dati da inserire

Caselle a discesa per selezionare le possibili situazioni

In **blu** i risultati forniti

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1.d, apr 2018)

Foglio di calcolo Rigidezza

Superiormente	
esiste un pilastro al di sopra	<input type="button" value="▼"/>
non esiste pilastro al di sopra	
esiste un pilastro al di sopra	
la trave superiore è infinitamente rigida	

r_1 potrebbe dimezzarsi
caso standard

$r_1 = 0$

Inferiormente	
esiste un pilastro al di sotto	<input type="button" value="▼"/>
non esiste pilastro al di sotto	
esiste un pilastro al di sotto	
la trave inferiore è infinitamente rigida	
il pilastro è incastrato alla base	

r_2 potrebbe dimezzarsi
caso standard

$r_2 = 0$

Travi superiori e inferiori	
diverse tra loro	<input type="button" value="▼"/>
uguali tra loro	
diverse tra loro	

Travi a destra e sinistra	
due, dx e sx, diverse tra loro	<input type="button" value="▼"/>
una sola	
due, dx e sx, diverse tra loro	
due, dx e sx, uguali tra loro	

Foglio di calcolo Rigidezza



Nota: nel foglio di calcolo è inserita una protezione, per evitare che si inseriscano valori in celle sbagliate. La protezione è senza password e può essere rimossa se si vuole modificare il file

Foglio di calcolo Rigidezza

Superiormente non esiste pilastro al di sopra			pilastro b 30 cm h 70 cm Lp 3.20 m			k (t=inf) 98.92 kN/mm riduzione 0.328			non esiste pilastro al di sopra esiste un pilastro al di sopra la trave superiore è infinitamente rigida					
						k 32.49 kN/mm								
Inferiormente esiste un pilastro al di sotto						punto di nullo di M a 0.500 da base questo valore teorico deve essere ridotto			non esiste pilastro al di sotto esiste un pilastro al di sotto la trave inferiore è infinitamente rigida il pilastro è incastrato alla base					
Travi superiori e inferiori uguali tra loro			travi (inf=sup) trave sx b 30 cm h 60 cm Lt 4.50 m			trave dx b 30 cm h 60 cm Lt 3.80 m			uguali tra loro diverse tra loro					
Travi a destra e sinistra due, dx e sx, diverse tra loro									una sola due, dx e sx, diverse tra loro due, dx e sx, uguali tra loro					
E 31500 MPa														
Ip 857500 cm4 E Ip / Lp 8.44E+07 kN mm			sx 30 60 4.50 lt,sup 540000 E lt,s / Lt 3.78E+07 r1 2.04			cm4 30 60 4.50			sx 30 60 4.50 lt,inf 540000 E lt,i / Lt 3.78E+07 r2 2.04			cm4 30 60 4.50 lt,inf 540000 E lt,i / Lt 4.48E+07		
			30 60 3.80			dx 30 60 3.80 lt,sup 540000 E lt,s / Lt 4.48E+07			30 60 3.80			dx 30 60 3.80 lt,inf 540000 E lt,i / Lt 4.48E+07		

Nel foglio sono presenti zone che contengono valori intermedi di calcolo, da non modificare (sono visibili in carattere grigio chiaro)

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1.d, apr 2018)

Determinazione delle rigidezze
per l'edificio in esame

Determinazione delle rigidezze laterali

per tipologia di pilastro

- Usate per comodità il foglio di calcolo Rigidezze (vers 2.1d, apr 2018)
- Usate un file per ciascun ordine di pilastri e rinominatelo in modo da evidenziare di quale piano si tratta; in ciascun file, un foglio per ogni tipo di pilastro
- Se più ordini hanno situazioni identiche usare un unico file

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

Rigidezze - versione 2.1d	apr-18									
Questo file vuole essere di aiuto per calcolare la rigidezza dei pilastri										
E' possibile duplicare i fogli, in modo da averne uno per ciascuna tipologia di pilastro										
Tipicamente, in un singolo file si conservano i dati di tutti i pilastri di un ordine										
E' possibile creare un Riepilogo che riporta i valori di ciascun foglio (i collegamenti devono essere impostati dall'utente)										
Singolo foglio Rig										
Occorre inserire i dati richiesti (caselle a discesa e valori evidenziati in rosso)										
Viene fornita la rigidezza e la posizione del punto di nullo di M (valori in blu)										

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1.d, apr 2018)

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

Superiormente			pilastro						k (t=inf)			98.92			kN/mm		
esiste un pilastro al di sopra ▼			b			30			cm			riduzione			0.335		
			h			70			cm								
			Lp			3.20			m			k			33.14		
															kN/mm		
Inferiormente																	
esiste un pilastro al di sotto ▼																	
Travi superiori e inferiori			travi (inf=sup)														
uguali tra loro ▼			trave sx=dx														
			b			30			cm								
			h			60			cm								
			Lt			4.00			m								
Travi a destra e sinistra																	
due, dx e sx, uguali tra loro ▼																	
E			31500			MPa											

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1.d, apr 2018) foglio rig-2 + em

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

Riepilogo dei valori		i valori in questo file sono riferiti all'ordine				2,3,4						
sigla	rig-2 t em	rig-1 t em	def-2 t em	def-1 t em	def-2 t sp	def-1 t sp						
pilastr	30x70	30x70	70x30	70x30	70x30	70x30						
rig/def	rigido	rigido	deform.	deform.	deform.	deform.						
travi em.	2	1	2	1								
travi sp.					2	1						
	30x70	30x70	70x30	70x30	70x30	70x30						
	2 emerg.	1 emerg.	2 emerg.	1 emerg.	2 spess.	1 spess.						
k	33.14	19.90	13.31	10.51	3.87	2.16		nelle caselle verdi:				
d inf	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500		valori copiati dai fogli				
pilastr per tipo - direzione x												
	10	3	1	5	4	4						
k	33.14	19.90	13.31	10.51	3.87	2.16		rigidezza max	33.14			
k / kmax	1.00	0.60	0.40	0.32	0.12	0.07						
Σ k	331.39	59.71	13.31	52.54	15.47	8.66		rigidezza totale	481.08	pilastr equivalenti	14.52	
pilastr per tipo - direzione y												
	11	3	0	7	2	4						
k	33.14	19.90		10.51	3.87	2.16		rigidezza max	33.14			
k / kmax	1.00	0.60		0.32	0.12	0.07						
Σ k	364.53	59.71	0.00	73.55	7.73	8.66		rigidezza totale	514.18	pilastr equivalenti	15.52	

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1.d, apr 2018) foglio riepilogo

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

- Riepilogo valori ottenuti

Rigidezze						
	30x70	30x70	70x30	70x30	70x30	70x30
Piano	2 emerg.	1 emerg.	2 emerg.	1 emerg.	2 spess.	1 spess.
5	27.36	16.04	12.18	9.19	3.87	2.16
4	33.14	19.90	13.31	10.51	3.87	2.16
3	33.14	19.90	13.31	10.51	3.87	2.16
2	33.14	19.90	13.31	10.51	3.87	2.16
1	41.31	32.91	11.06	9.87	6.19	4.97

Rigidezze normalizzate						
	30x70	30x70	70x30	70x30	70x30	70x30
Piano	2 emerg.	1 emerg.	2 emerg.	1 emerg.	2 spess.	1 spess.
5	1.00	0.59	0.45	0.34	0.14	0.08
4	1.00	0.60	0.40	0.32	0.12	0.07
3	1.00	0.60	0.40	0.32	0.12	0.07
2	1.00	0.60	0.40	0.32	0.12	0.07
1	1.00	0.80	0.27	0.24	0.15	0.12

Vedi file Excel 4_Controllo dimensionamento foglio Rigidezze

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

- Rigidezza totale in direzione x

direzione x										
	2 emerg.	1 emerg.	2 emerg.	1 emerg.	2 spess.	1 spess.				
n.pil	10	3	1	5	4	4				
Piano	Σk	Σk	Σk	Σk	Σk	Σk	Σk	totale	rapp.piano	pilastri eq.
7										
6										
5	273.6	48.1	12.2	46.0	15.5	8.7		403.9	0.840	14.77
4	331.4	59.7	13.3	52.5	15.5	8.7		481.1	1.000	14.52
3	331.4	59.7	13.3	52.5	15.5	8.7		481.1	1.000	14.52
2	331.4	59.7	13.3	52.5	15.5	8.7		481.1	0.780	14.52
1	413.1	98.7	11.1	49.4	24.8	19.9		616.9		14.93

Rapporto
rigidezze tra i
piani adiacenti

Pilastri
equivalenti

Vedi file Excel 4_Controllo dimensionamento foglio Rigidezze

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

- Rigidezza totale in direzione y

direzione y										
	30x70	30x70	70x30	70x30	70x30	70x30	altro			
	2 emerg.	1 emerg.	2 emerg.	1 emerg.	2 spess.	1 spess.				
n.pil	11	3	0	7	2	4				
Piano	Σk	Σk	Σk	Σk	Σk		Σk	totale	rapp.piano	pilastri eq.
7										
6										
5	300.9	48.1	0.0	64.3	7.7	8.7		429.8	0.836	15.71
4	364.5	59.7	0.0	73.6	7.7	8.7		514.2	1.000	15.52
3	364.5	59.7	0.0	73.6	7.7	8.7		514.2	1.000	15.52
2	364.5	59.7	0.0	73.6	7.7	8.7		514.2	0.786	15.52
1	454.4	98.7	0.0	69.1	12.4	19.9		654.5		15.84

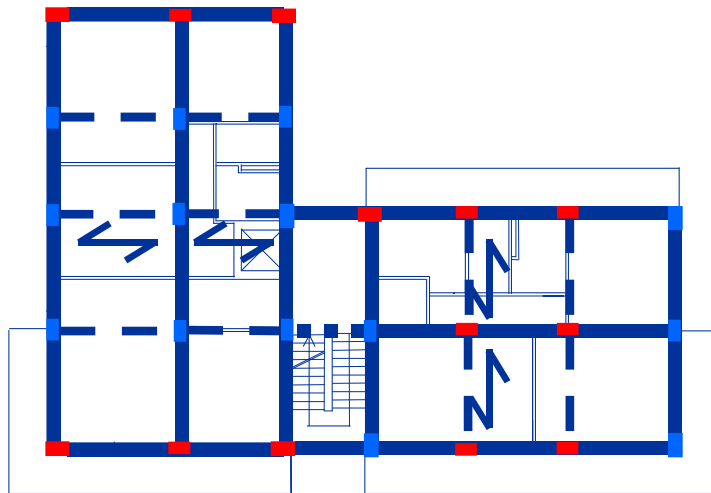
Rapporto
rigidezze tra i
piani adiacenti

Pilastri
equivalenti

Vedi file Excel 4_Controllo dimensionamento foglio Rigidezze

Determinazione delle rigidezze laterali per tipologia di pilastro

- Riepilogo rigidezze
approccio per tipologia di pilastro



ordine	K_x [kN/mm ²]	K_y [kN/mm ²]
5	404.0	429.8
4	481.1	514.2
3	481.1	514.2
2	481.1	514.2
1	616.9	654.5

I valori totali sono molto simili
a quelli ottenuti con l'approccio
globale semplificato

5	384.3	411.1
4	472.7	506.0
3	472.7	506.0
2	472.7	506.0
1	511.8	548.9