

Corso di laurea in Ingegneria edile-architettura

Dinamica delle strutture e
Progetto di costruzioni in zona sismica
2020/21

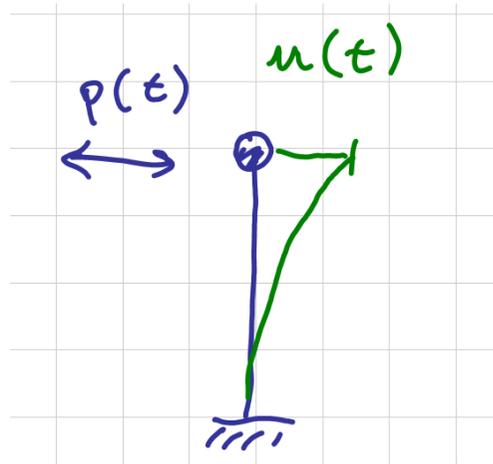
06b – Schemi a un grado di libertà, in campo elastico:
oscillazioni forzate, moto del terreno

Aurelio Ghersi

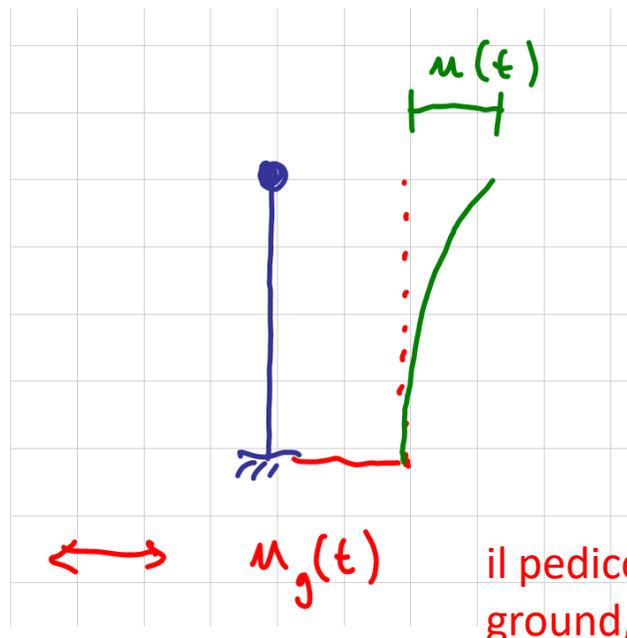
16/10/2020

Oscillazioni forzate

azione sulla massa o spostamento del terreno



Azione sulla massa



Spostamento del terreno

Lo spostamento della massa è somma di spostamento del terreno e spostamento relativo della massa rispetto alla base

il pedice g indica ground, terreno

Oscillazioni forzate

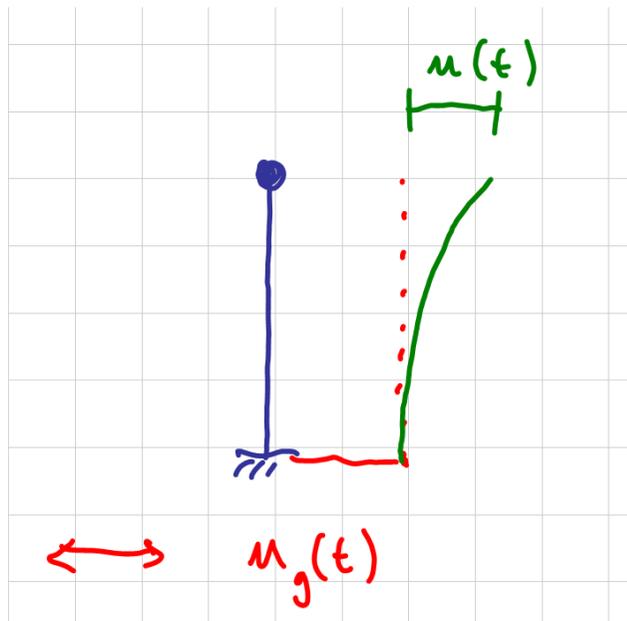
spostamento del terreno

- La forza d'inerzia dipende dall'accelerazione assoluta

$$m \ddot{u}_{\text{tot}}(t) = m \ddot{u}(t) + m \ddot{u}_g(t)$$

- La forza di richiamo e la dissipazione dipendono da spostamenti e velocità relative

$$k u(t) \quad c \dot{u}(t)$$



Lo spostamento della massa è somma di spostamento del terreno e spostamento relativo della massa rispetto alla base

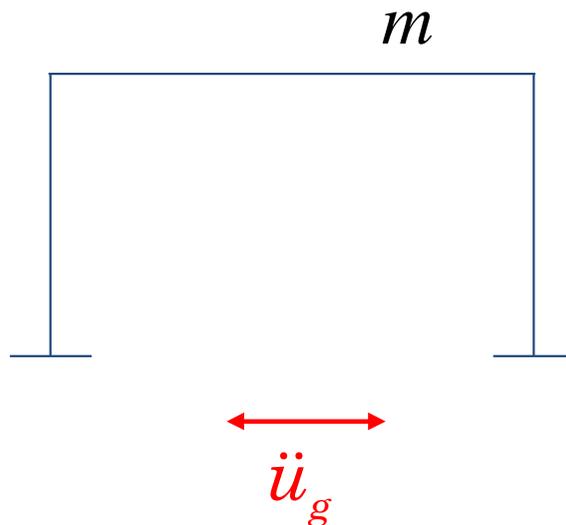
Oscillazioni forzate

moto del terreno

- L'equazione del moto è $m \ddot{u}(t) + m \ddot{u}_g(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0$

In genere si scrive come:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t)$$



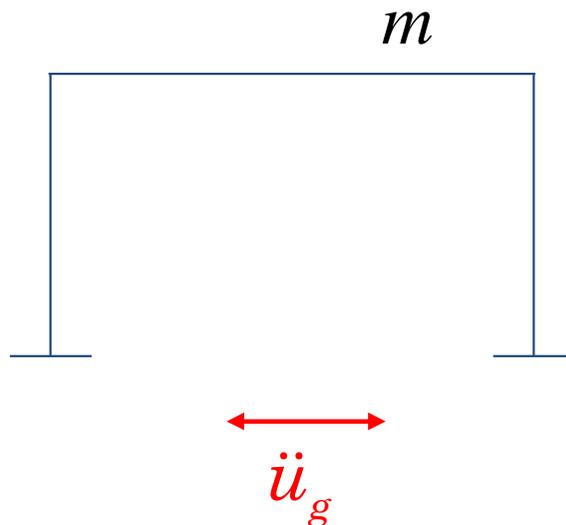
Cambia (formalmente)
il termine noto
nell'equazione del moto

Il problema è sostanzialmente identico a quello del moto con forzante applicata al traverso

Oscillazioni forzate

moto del terreno

- Forzante armonica



Equazione del moto:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g,\max} \sin \omega_g t$$

Se la forzante è armonica (seno, coseno) è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale

Oscillazioni forzate

moto del terreno, in presenza di smorzamento

- In presenza di smorzamento, con forzante armonica, si ha

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_{g,\max} \sin \omega_g t$$

- Un integrale particolare è in questo caso del tipo

$$u_g(t) = C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t$$

e si ottiene, in maniera analoga a quanto visto in precedenza

$$C = \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_g)^2}$$

$$D = \ddot{u}_{g,\max} \frac{2\xi\omega\omega_g}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_g)^2}$$

Sviluppo del calcolo di C e D

solo come ricordo

$$\begin{aligned}u_g(t) &= C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t & m(-\omega_g^2 C \sin \omega_g t - \omega_g^2 D \cos \omega_g t) + \\ \dot{u}_g(t) &= \omega_g C \cos \omega_g t - \omega_g D \sin \omega_g t & + c(\omega_g C \cos \omega_g t - \omega_g D \sin \omega_g t) + \\ \ddot{u}_g(t) &= -\omega_g^2 C \sin \omega_g t - \omega_g^2 D \cos \omega_g t & + k(C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t) = -m \ddot{u}_{g,\max} \sin \omega_g t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-\omega_g^2 C - 2\xi \omega \omega_g D + C \omega^2 + \ddot{u}_{g,\max}) \sin \omega_g t & & (\omega^2 - \omega_g^2) C - 2\xi \omega \omega_g D + \ddot{u}_{g,\max} = 0 \\ (-\omega_g^2 D + 2\xi \omega \omega_g C + D \omega^2) \cos \omega_g t = 0 & & (\omega^2 - \omega_g^2) D + 2\xi \omega \omega_g C = 0\end{aligned}$$

$$C = \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi \omega \omega_g} D$$

$$D = \ddot{u}_{g,\max} \frac{2\xi \omega \omega_g}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

$$C = \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

Oscillazioni forzate

moto del terreno, in presenza di smorzamento

- In presenza di smorzamento, con forzante armonica, si ha

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_{g,\max} \sin \omega_g t$$

- La soluzione di questa equazione differenziale è

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t$$

$$\text{con } \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad A = u(0) - D \quad B = \frac{\dot{u}(0) + \xi \omega u(0) - \xi \omega D - C \omega_g}{\omega_D}$$

- Il primo termine, avendo un esponenziale il cui valore si riduce progressivamente fino a scomparire, viene detto parte **transitoria**, mentre il resto è detto parte **stazionaria**

Sviluppo del calcolo di A e B

solo come ricordo

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t$$

$$u(0) = A + D$$

$$A = u(0) - D$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\xi\omega e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \\ &\quad + e^{-\xi\omega t} (-A \omega_D \sin \omega_D t + B \omega_D \cos \omega_D t) + \\ &\quad + C \omega_g \cos \omega_g t - D \omega_g \sin \omega_g t \\ &= e^{-\xi\omega t} (-\xi\omega A + B \omega_D) \cos \omega_D t + \\ &\quad + e^{-\xi\omega t} (-A \omega_D - \xi\omega B) \sin \omega_D t + \\ &\quad + C \omega_g \cos \omega_g t - D \omega_g \sin \omega_g t \end{aligned}$$

$$\dot{u}(0) = -\xi\omega A + B \omega_D + C \omega_g$$

$$\dot{u}(0) = -\xi\omega u(0) + \xi\omega D + B \omega_D + C \omega_g$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0) - C \omega_g - \xi\omega D}{\omega_D}$$

Oscillazioni forzate

in presenza di smorzamento

- La parte stazionaria è

$$u_{st}(t) = C \sin \omega_g t + D \cos \omega_g t =$$
$$= \ddot{u}_{g,max} \frac{(\omega_g^2 - \omega^2) \sin \omega_g t + 2\xi \omega \omega_g \cos \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

Il massimo della parte stazionaria si determina imponendo che la derivata di u_{st} si annulli e vale

$$u_{st,max} = \ddot{u}_{g,max} \sqrt{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

$$\ddot{u}_{st,max} = \ddot{u}_{g,max} \omega_g^2 \sqrt{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

Sviluppo del calcolo di u_{\max} solo come ricordo

$$u_g(t) = \ddot{u}_{g,\max} \frac{(\omega_g^2 - \omega^2) \sin \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} + \ddot{u}_{g,\max} \frac{2\xi \omega \omega_g \cos \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_g(t) &= \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g (\omega_g^2 - \omega^2) \cos \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} + \ddot{u}_{g,\max} \frac{-2\xi \omega \omega_g^2 \sin \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} = \\ &= \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} \left[(\omega_g^2 - \omega^2) \cos \omega_g t - 2\xi \omega \omega_g \sin \omega_g t \right] \end{aligned}$$

$$\dot{u}_g(t) = 0 \quad \text{se} \quad (\omega_g^2 - \omega^2) \cos \omega_g t - 2\xi \omega \omega_g \sin \omega_g t = 0$$

$$\text{tg } \omega_g t = \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi \omega \omega_g}$$

Sviluppo del calcolo di u_{\max}

solo come ricordo

$$\operatorname{tg} \omega_g t = \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_g}$$

$$\sin \omega_g t = \frac{\operatorname{tg} \omega_g t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_g t}} = \frac{\frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_g}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_g}\right)^2}} = \frac{\omega_g^2 - \omega^2}{\sqrt{(2\xi\omega\omega_g)^2 + (\omega_g^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\cos \omega_g t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_g t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_g^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_g}\right)^2}} = \frac{2\xi\omega\omega_g}{\sqrt{(2\xi\omega\omega_g)^2 + (\omega_g^2 - \omega^2)^2}}$$

Sviluppo del calcolo di u_{\max}

solo come ricordo

$$u_g(t) = \ddot{u}_{g,\max} \frac{(\omega_g^2 - \omega^2) \sin \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} + \ddot{u}_{g,\max} \frac{2\xi \omega \omega_g \cos \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

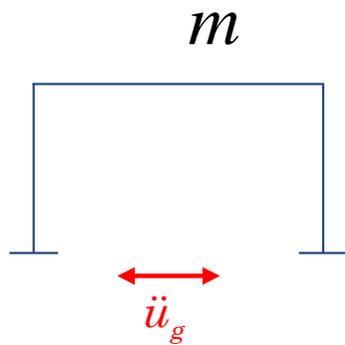
$$u_{st,\max} = \frac{\ddot{u}_{g,\max} m}{k} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}} = \frac{\ddot{u}_{g,\max} m}{k} \frac{T_g^2}{\sqrt{(T^2 - T_g^2)^2 + (2\xi T T_g)^2}}$$

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g^2 (\omega_g^2 - \omega^2) \sin \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2} + \ddot{u}_{g,\max} \frac{2\xi \omega \omega_g^3 \cos \omega_g t}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}$$

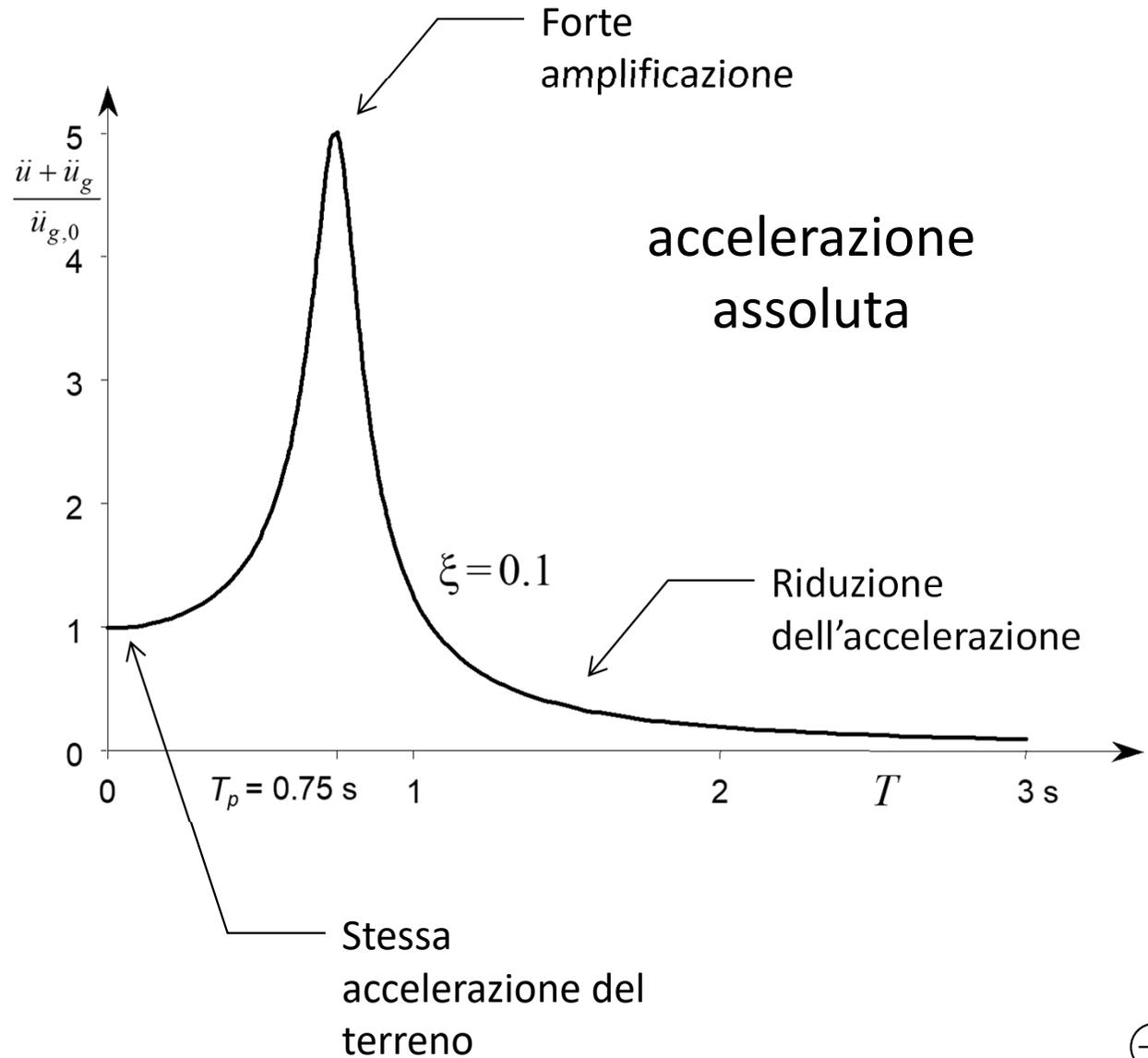
$$\ddot{u}_{st,\max} = \ddot{u}_{g,\max} \frac{\omega_g^2}{\sqrt{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_g)^2}} = \ddot{u}_{g,\max} \frac{T^2}{\sqrt{(T^2 - T_g^2)^2 + (2\xi T T_g)^2}}$$

Oscillazioni forzate

(moto del terreno - armonico)

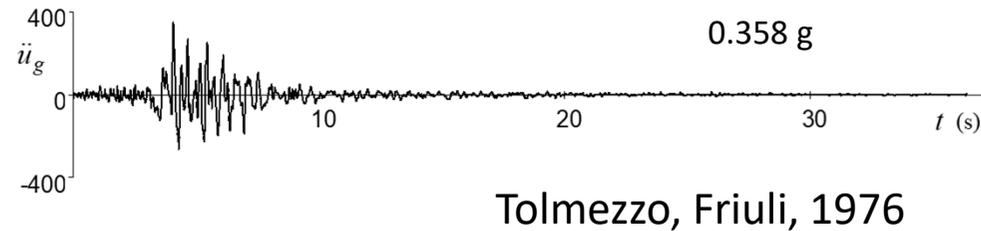
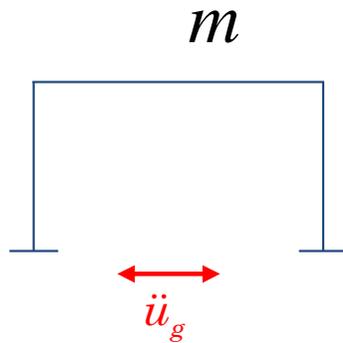


Si noti, in particolare, l'andamento dell'accelerazione massima in funzione del periodo proprio



Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)



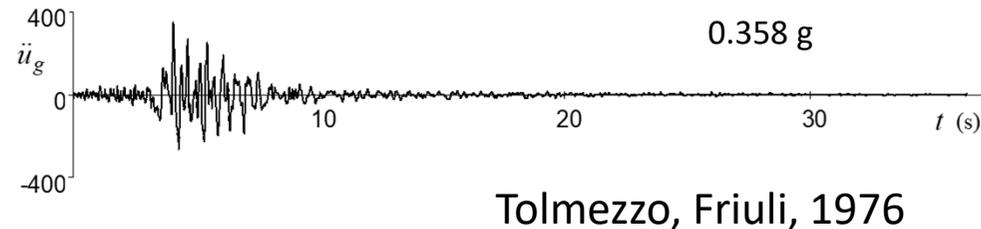
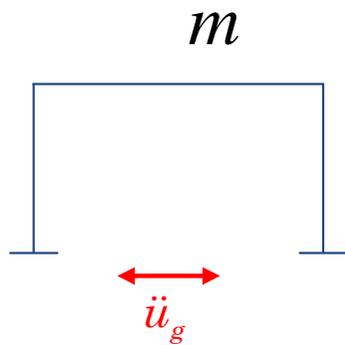
Input sismico: accelerogramma

Equazione del moto:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_g$$

Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)



È possibile determinare numericamente la risposta ad un accelerogramma

Noti i valori di u , \dot{u} , \ddot{u} in un certo istante t_1 ed il valore di \ddot{u}_g tra t_1 e $t_1 + \Delta t$ si possono ricavare i valori di u , \dot{u} , \ddot{u} nell'istante $t_1 + \Delta t$

Si ottiene la risposta nel tempo (time history)

Determinazione della time history

Metodo di Newmark

Intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_2$

- Si usa il pedice 1 per indicare l'istante iniziale, 2 per quello finale
- Sono noti $u_1 \dot{u}_1 \ddot{u}_1$ e l'accelerazione del suolo $u_{g,1} u_{g,2}$
- Si ipotizza che l'accelerazione sia costante nel passo $\ddot{u} = (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2)/2$ (o variabile linearmente)
- Si esprimono $u_2 \dot{u}_2$ in funzione di \ddot{u}_2 (incognito)
- O meglio in termini variazionali

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{u}$$

$$\Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}$$

Determinazione della time history

Metodo di Newmark

- Invertendole, si esprimono $\Delta\dot{u}$ $\Delta\ddot{u}$ in funzione di Δu

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_1 - 2\ddot{u}_1$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t} \Delta u - 2\dot{u}_1$$

- Si utilizza l'equazione di equilibrio dinamico (in termini variazionali)

$$m \Delta\ddot{u} + c \Delta\dot{u} + k \Delta u = -m \Delta\ddot{u}_g$$

per calcolare Δu

$$\Delta u = \frac{-m \Delta\ddot{u}_g + 2m\dot{u}_1 + (2c + 4m / \Delta t) \dot{u}_1}{k + 2c / \Delta t + 4m / \Delta t^2}$$

Determinazione della time history

Metodo di Newmark - più in generale

- Ipotesi di \ddot{u} costante nell'intervallo Δt

$$\Delta u = \dot{u}_1 \Delta t + \ddot{u}_1 \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u} \frac{1}{4} \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}_1 \Delta t + \Delta \ddot{u} \frac{1}{2} \Delta t$$

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

- Ipotesi di \ddot{u} lineare nell'intervallo Δt

$$\Delta u = \dot{u}_1 \Delta t + \ddot{u}_1 \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u} \frac{1}{6} \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}_1 \Delta t + \Delta \ddot{u} \frac{1}{2} \Delta t$$

$$\beta = \frac{1}{6}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

- Quindi in generale

$$\Delta u = \dot{u}_1 \Delta t + \ddot{u}_1 \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u} \beta \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}_1 \Delta t + \Delta \ddot{u} \gamma \Delta t$$

Determinazione della time history

Metodo di Newmark - più in generale

- Invertendole, si esprimono $\Delta\dot{u}$ $\Delta\ddot{u}$ in funzione di Δu

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta u - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_1 - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_1$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_1 + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_1\Delta t$$

- Si utilizza l'equazione di equilibrio dinamico (in termini variazionali)

$$m\Delta\ddot{u} + c\Delta\dot{u} + k\Delta u = -m\Delta\ddot{u}_g$$

per calcolare Δu

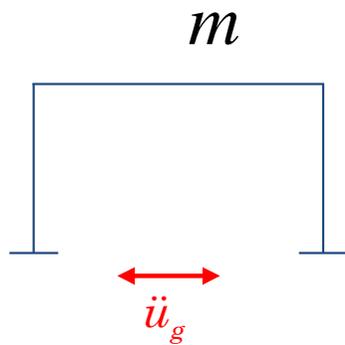
$$\Delta u = \frac{-m\Delta\ddot{u}_g + a\ddot{u}_1 + b\dot{u}_1}{k + a\Delta t} \quad a = \frac{m}{\beta\Delta t} + c\frac{\gamma}{\beta}$$

Bibliografia: Anil K. Chopra, Dynamics of structures, Prentice Hall International, cap. 5.4

$$b = \frac{m}{2\beta} + c\Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right)$$

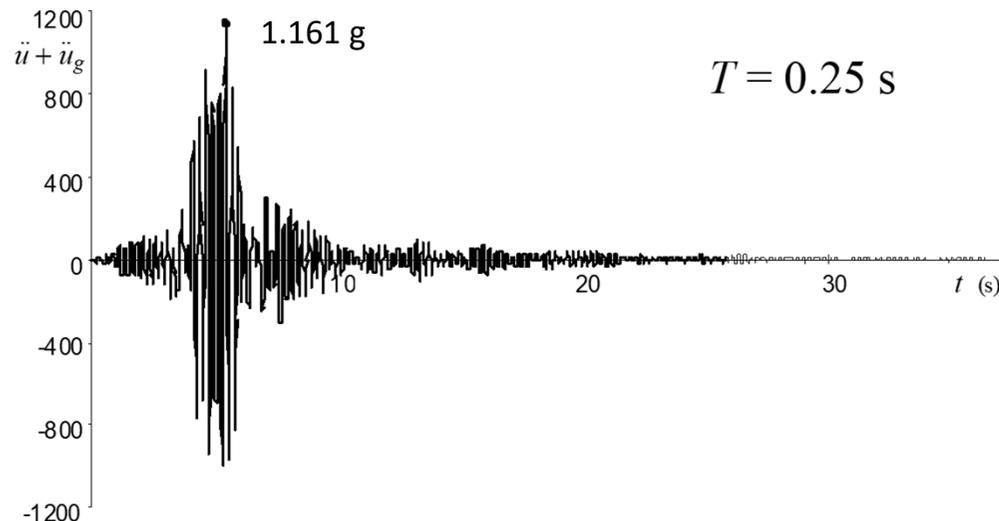
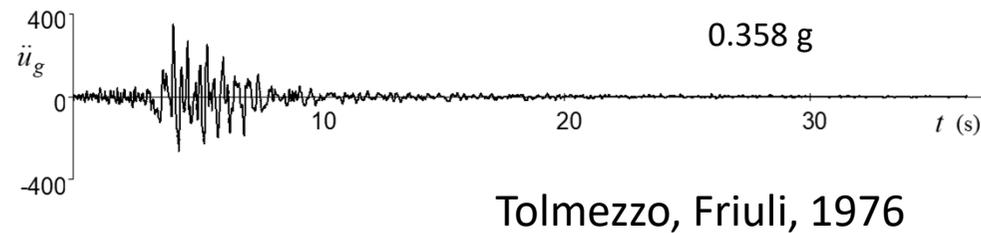
Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)

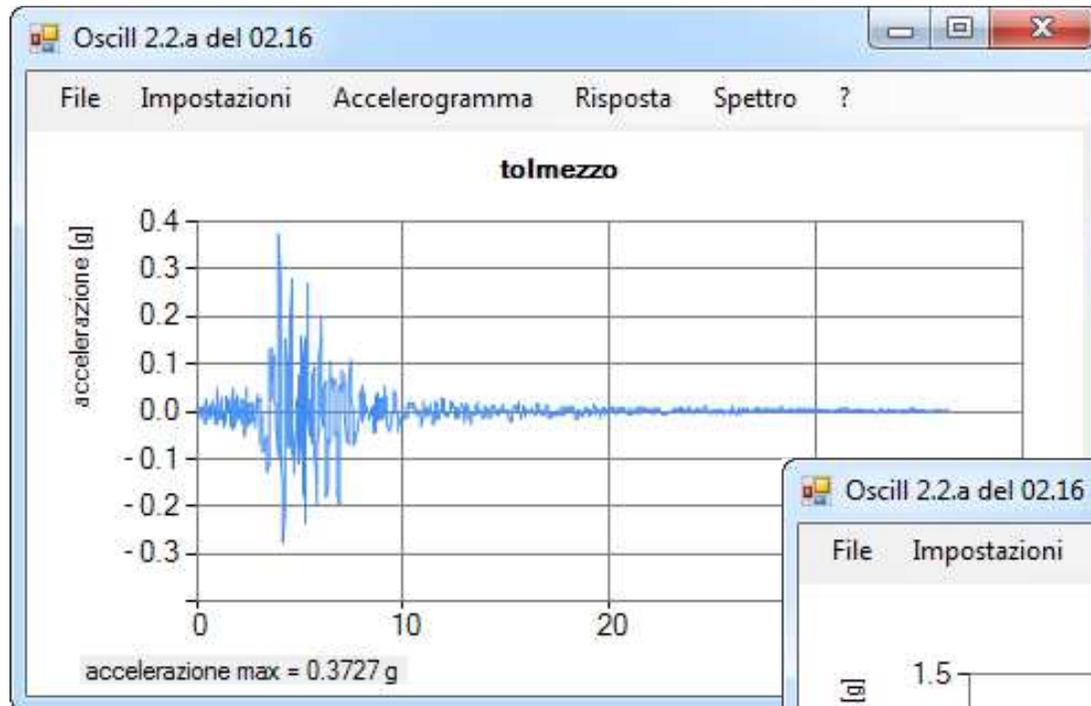


È possibile determinare numericamente la risposta ad un accelerogramma

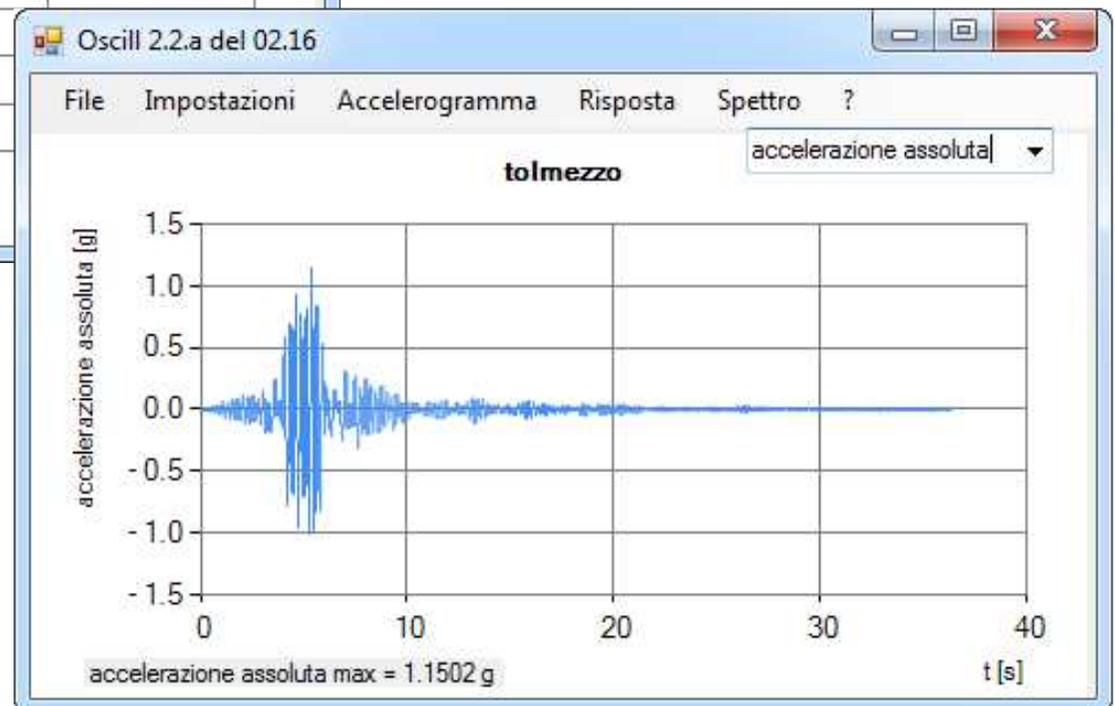
la risposta dipende dal periodo T dell'oscillatore



Risposta dell'oscillatore programma Oscill

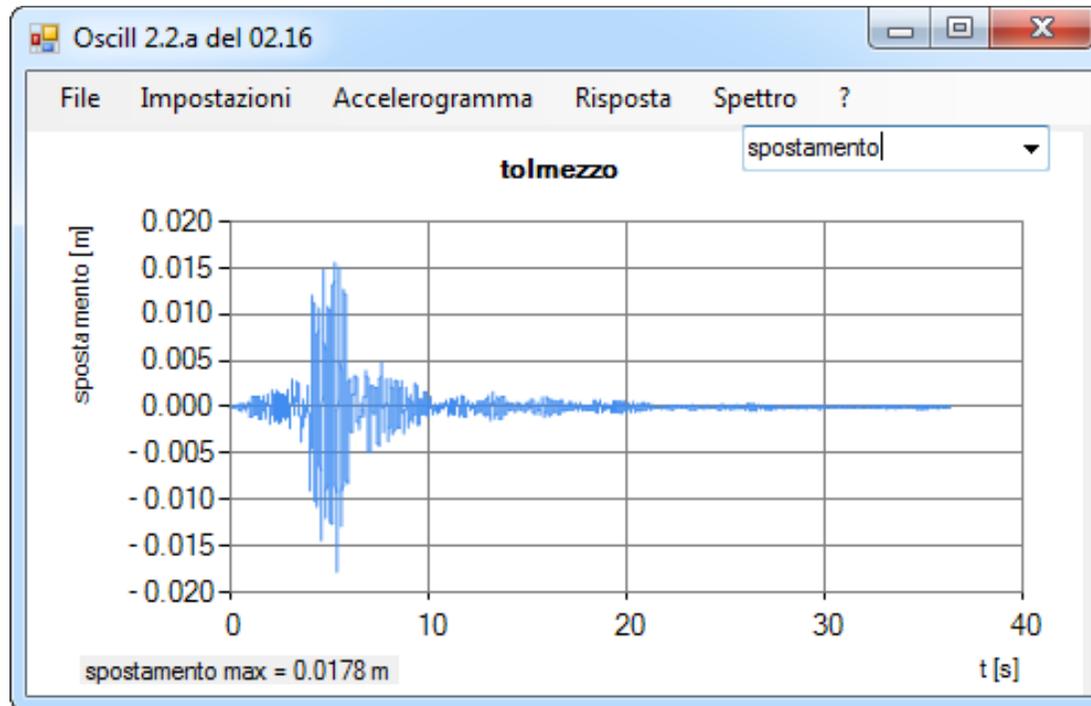


accelerogramma



risposta:
accelerazione

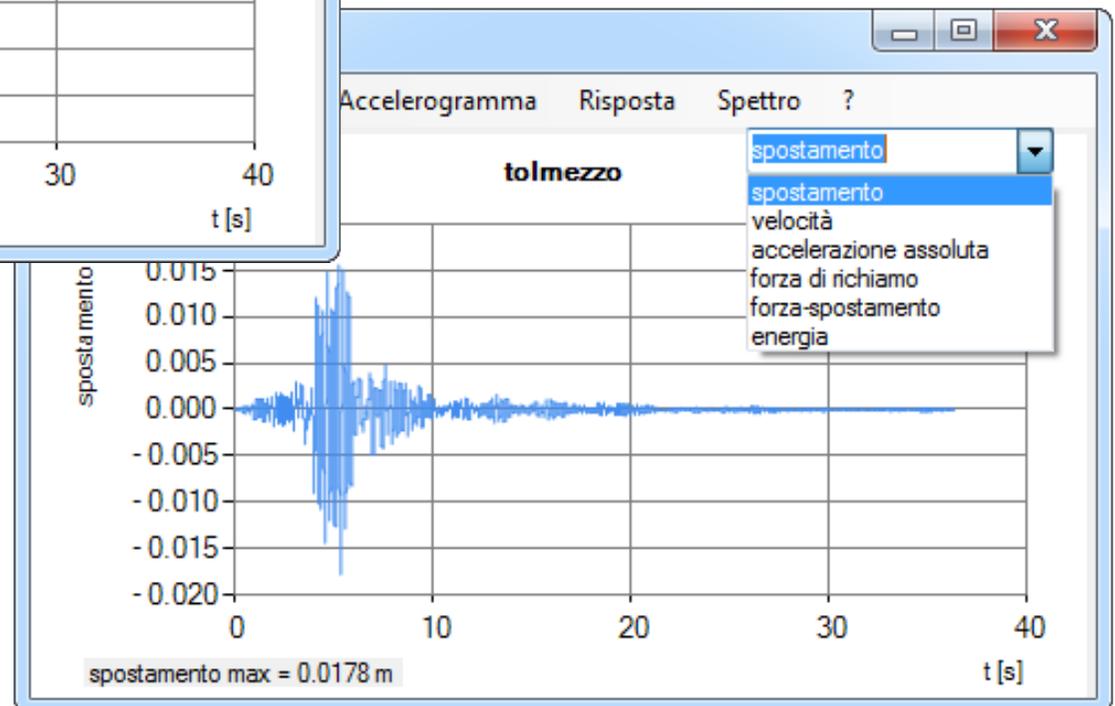
Risposta dell'oscillatore programma Oscill



È possibile scegliere
cosa visualizzare

risposta:
spostamento

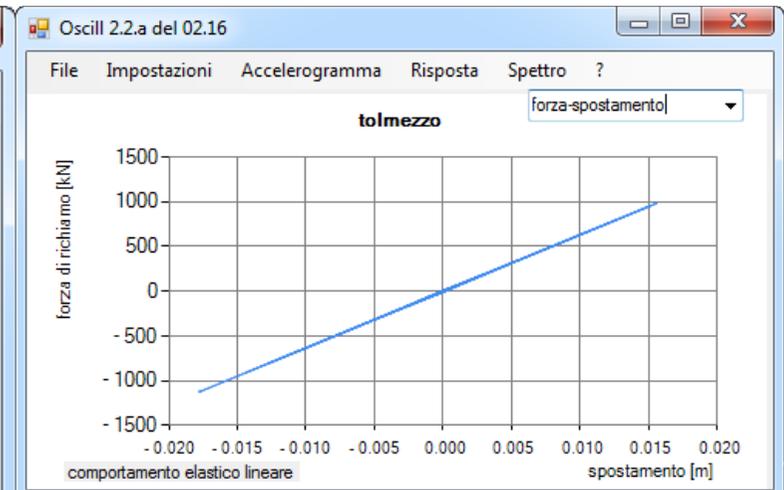
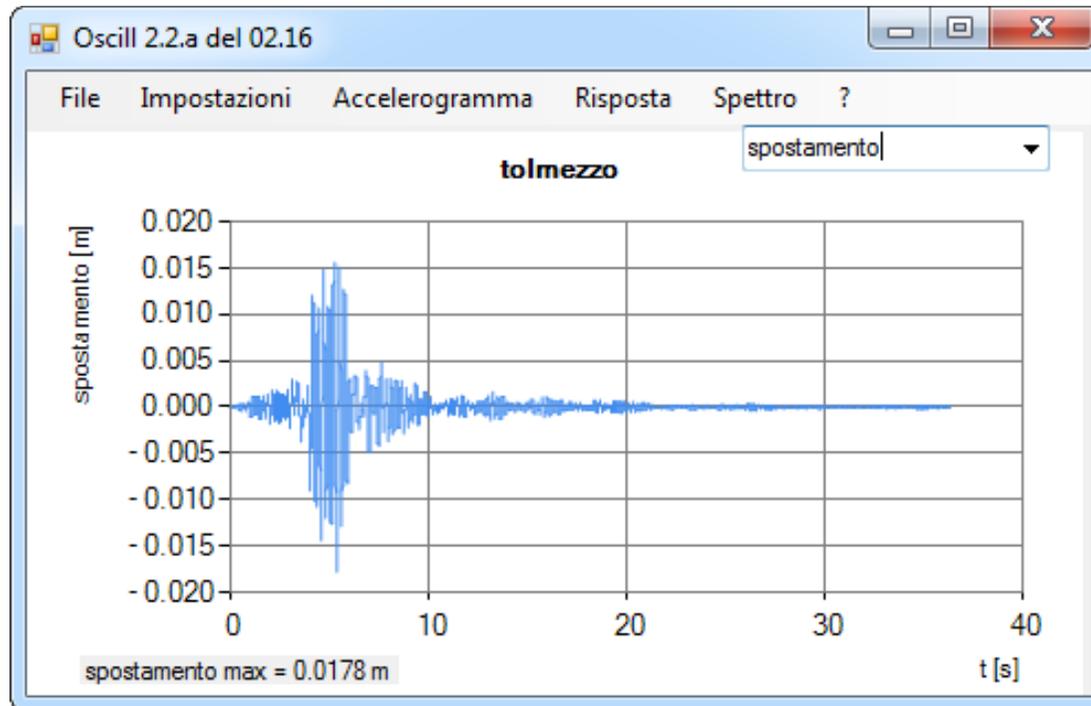
risposta:
accelerazione



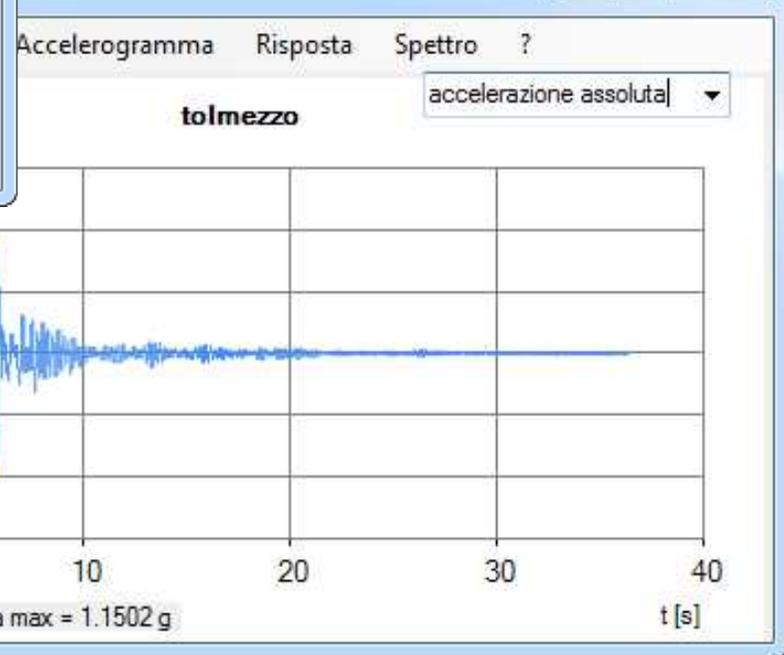
Risposta dell'oscillatore

programma Oscill

risposta:
forza-spostamento



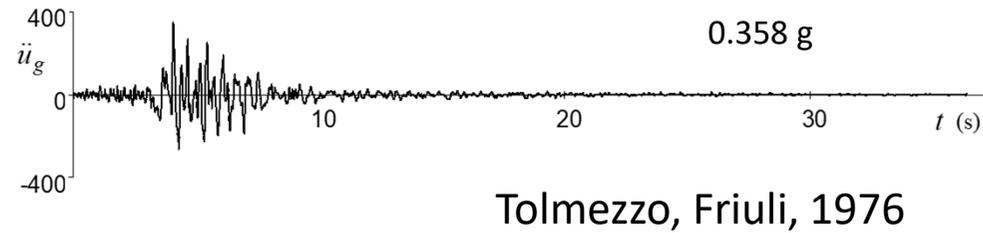
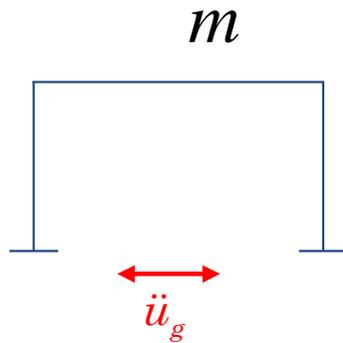
risposta:
spostamento



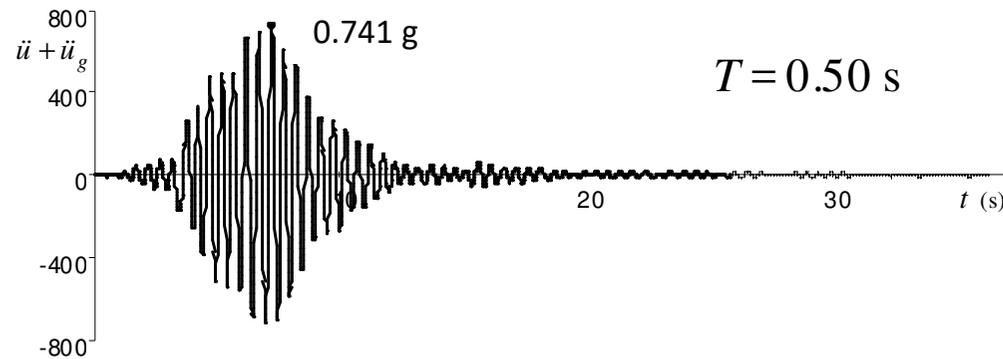
risposta:
accelerazione

Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)

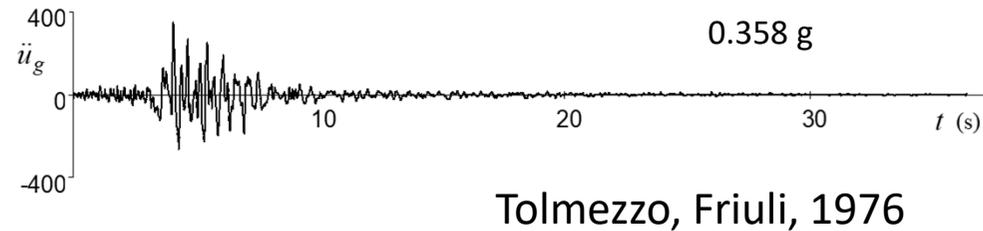
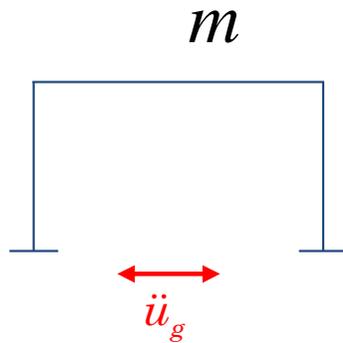


Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta



Oscillazioni forzate

(moto del terreno - accelerogramma)



Cambiando il periodo dell'oscillatore, cambia la risposta

