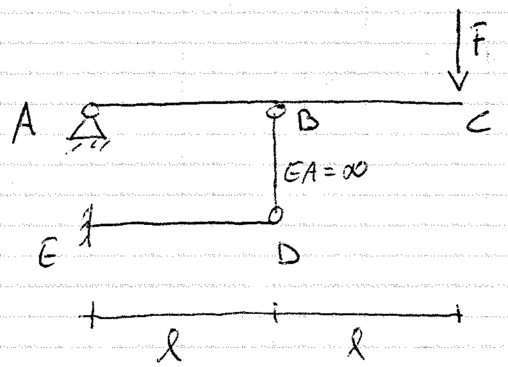
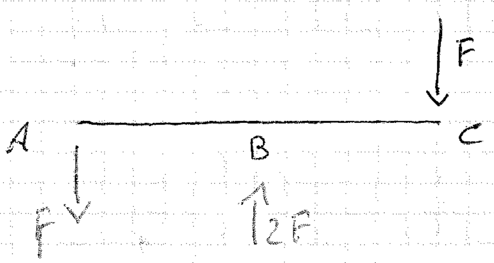
QUESITO DEL 26/10/11 N° 1



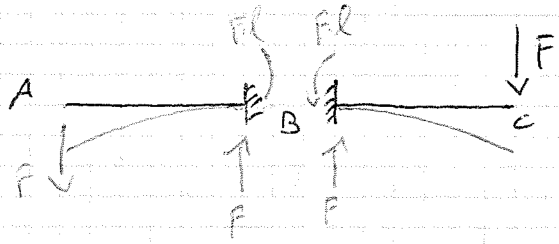
Determinare lo spostamento verticale del punto C.

SOLUZIONE 1

Lo schema è isostatico. Il primo passo è la determinazione delle reazioni vincolari con condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione.
Il pendolo BD, non essendo caricato, sarà soggetto solo a sforzo assiale. In B, quindi, agirà soltanto una forza in direzione verticale.
Per l'equilibrio del tratto ABC si avranno le seguenti reazioni in A e B:

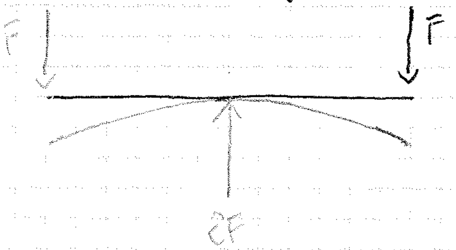


Quest'asta, soggetta al carico esterno F ed alle reazioni in A e B, è simmetrica e simmetricamente caricata, pertanto il punto B non potrà ruotare traslare orizzontalmente e, a meno della traslazione verticale, può essere vista nel modo seguente:

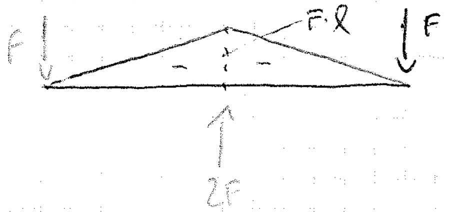


$v_{C(1)} \Rightarrow v_{C(1)} = \frac{Fl^3}{3EI}$

$\Downarrow$



Deformata

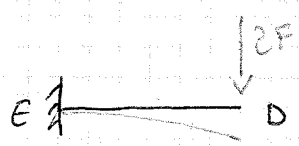


Momento

In questo modo è possibile determinare lo spostamento verticale di C dovuto alla deformazione elastica del tratto ABC.

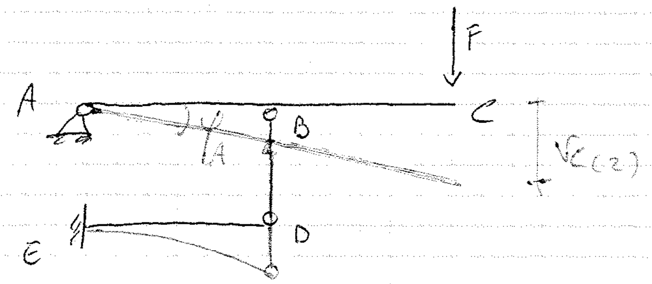
Ma C subisce un ulteriore spostamento verticale dovuto all'abbassamento di B che, a sua volta, è causato dalla deformazione elastica del tratto ED.

Il tratto ED lo si può vedere come una mensola soggetta in D alla forza trasmessa dal pendolo, cioè 2F.



$\Rightarrow v_D = \frac{2Fl^3}{3EI} = v_B$

Per effetto di tale spostamento l'asta ABC subisce una rotazione rigida intorno ad A.



$$\varphi_A = \frac{v_B}{l} = \frac{2}{3}\frac{Fl^2}{EI}$$

$$\Downarrow$$

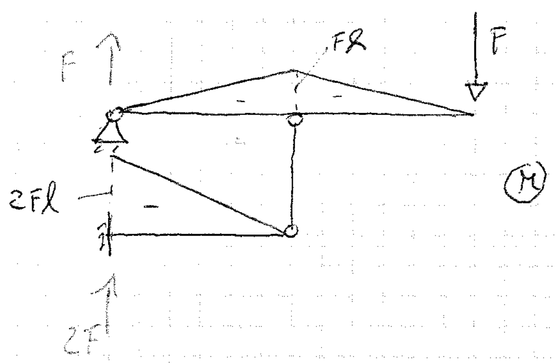
$$v_{C(2)} = \varphi_A \cdot 2l \quad \text{ovvero} \quad v_{C(2)} = 2\,v_B$$

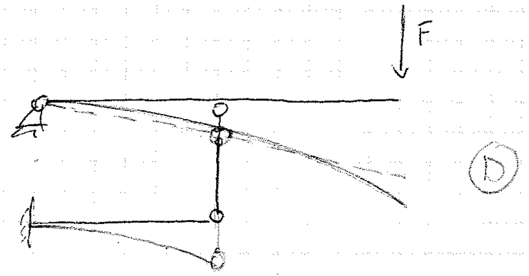
$$v_{C(2)} = \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$

Lo spostamento totale di c è dato dalla somma dei due:

$$v_C = v_{C(1)} + v_{C(2)} = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)\frac{Fl^3}{EI} = \frac{5}{3}\cdot\frac{Fl^3}{EI}$$

Si riportano di seguito il diagramma del momento flettente e la deformata complessiva

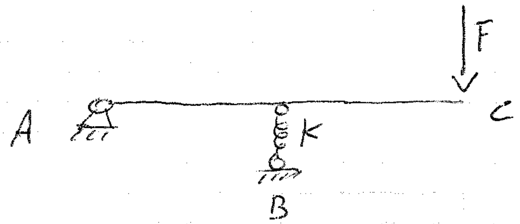




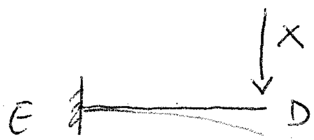
SOLUZIONE 2

Un modo alternativo di risolvere lo schema è quello di sostituire al tratto BDE una molla, in direzione verticale, con una determinata rigidezza K.
Infatti la parte di struttura BDE consente al punto B un certo spostamento funzione della rigidezza del tratto.

Pertanto, dallo schema di partenza, si può passare al seguente



dove K è determinata dallo schema di trave a mensola ED

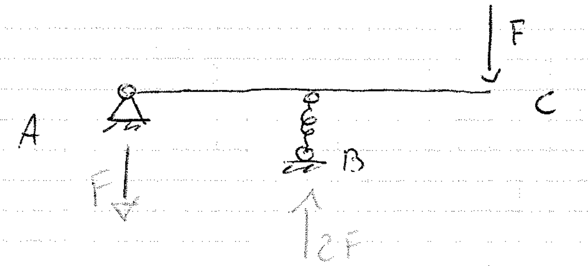


La rigidezza rappresenta la forza necessaria a produrre uno spostamento unitario.
Lo schema ED soggetto alla generica forza X determina uno spostamento di D pari a

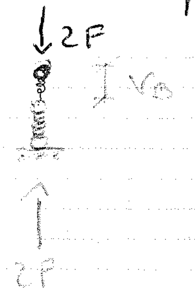
$v_D = \dfrac{X \ell^3}{3EI}$ ponendo $v_D = 1$ e quindi $X = K$ si ha

$$K = \frac{3EI}{\ell^3}$$

Lo schema di partenza è equivalente a quello con molla, quindi lo spostamento di C si ricava studiando quest'ultimo:



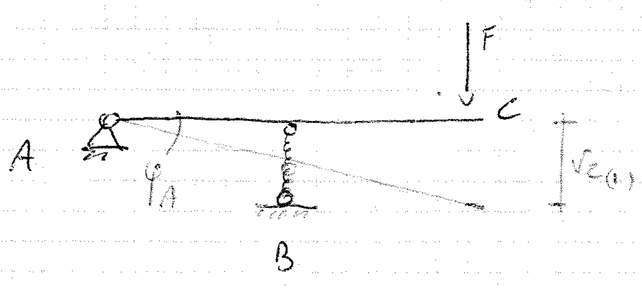
Anche la molla reagisce con una forza verticale, diretta verso l'alto, pari a 2F ma solo dopo aver subito un accorciamento, v_B



$$2F = K\, v_B \Rightarrow v_B = \frac{2F}{K} = \frac{2F \cdot \ell^3}{3EI}$$

A causa di tale accorciamento, l'asta ABC ruota rigidamente intorno ad A di un angolo φ_A pari a:

$$\varphi_A = \frac{v_B}{\ell} = \frac{2}{3}\frac{F\ell^2}{EI}$$



e il punto C, in questa prima rotazione (rigida), subisce uno spostamento di

$$v_{C(1)} = 2\ell\,\varphi_A = \frac{4}{3}\frac{F\ell^3}{EI}$$

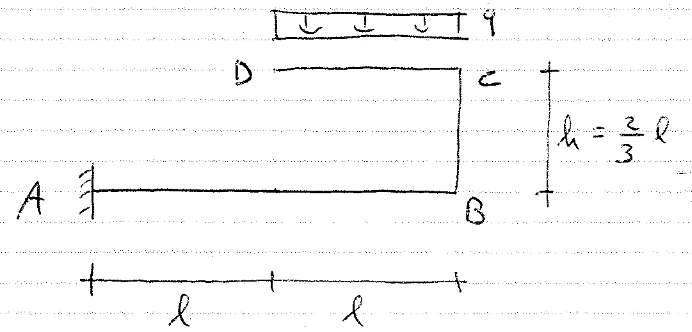
A $v_{C(1)}$ bisogna aggiungere quello dovuto alla deformazione elastica che, come si è già visto, è pari a

$$v_{C(2)} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Quindi lo spostamento totale di C è

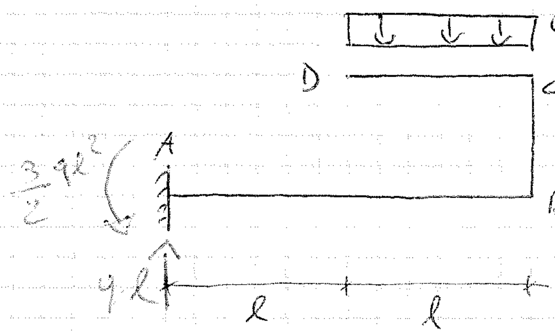
$$v_C = v_{C(1)} + v_{C(2)} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)\frac{Fl^3}{EI} = \frac{5}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$

QUESITO DEL 26/10/11 N° 2



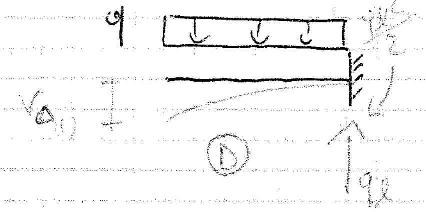
Determinare lo spostamento verticale del punto D.

Lo schema è isostatico ed è immediato determinare le reazioni nell'incastro A con condizioni di equilibrio alla traslazione verticale e rotazione.

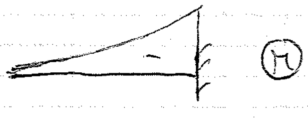


Lo spostamento verticale in D può essere determinato considerando l'effetto del carico sui singoli tratti:

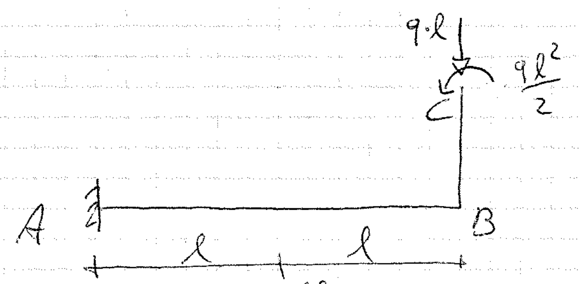
1) Deformazione elastica del tratto DC



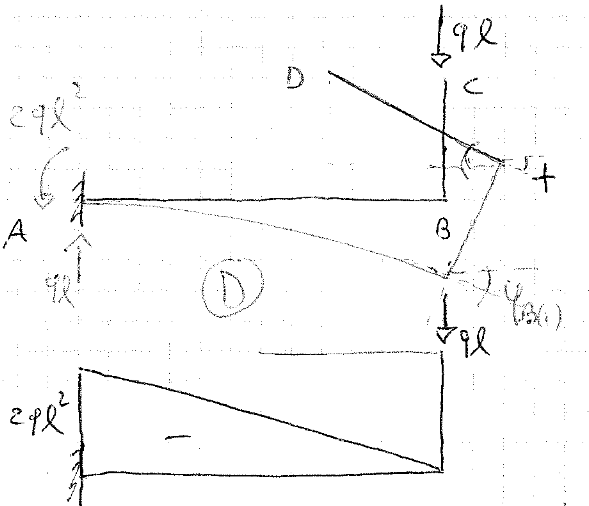
$$V_{D(1)} = \frac{q l^4}{8EI}$$

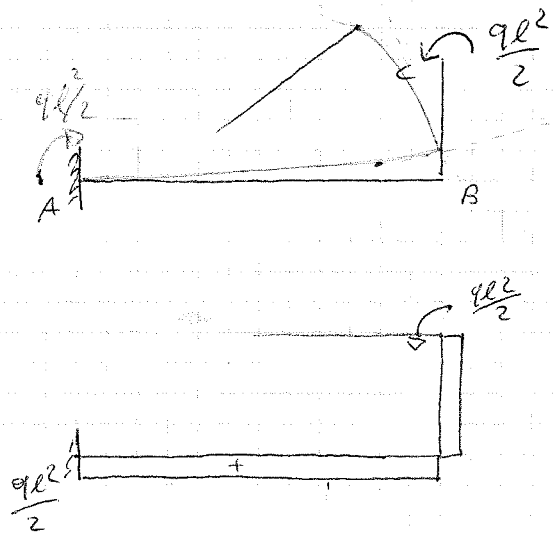


L'effetto del carico q sulla restante struttura ABC, si ottiene dal seguente schema:



ovvero dalla somma dei due:





2) Deformazione elastica di AB per effetto della forza ql

$$v_{D(2)} = \frac{ql(2l)^3}{3EI} = \frac{8}{3}\frac{ql^4}{EI}$$

$$\varphi_{B(2)} = \frac{ql(2l)^2}{2EI} = 2\frac{ql^3}{EI}$$

3) Rotazione rigida di BCD, intorno a B, per effetto della forza ql

$$v_{D(3)} = -\varphi_{B(2)}\, l = -2\frac{ql^4}{EI}$$

4) Rotazione di C per effetto di $\frac{ql^2}{2}$

$$\varphi_C = \frac{ql^2}{2}\cdot\frac{(\frac{2}{3}l)}{EI} = \frac{1}{3}\frac{ql^3}{EI}$$

$$v_{D(4)} = \varphi_C\, l = \frac{1}{3}\frac{ql^3}{EI}$$

5) Rotazione di B per effetto di $\frac{ql^2}{2}$

$$\varphi_B = \frac{ql^2}{2}\cdot\frac{2l}{EI} = \frac{ql^3}{EI}$$

$$v_{D(5)} = \varphi_B \cdot l = \frac{ql^4}{EI}$$

6) Deformazione elastica di AB per effetto di $ql^2/2$

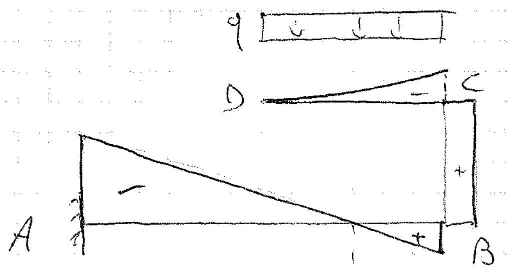
$$v_{D(6)} = -\frac{ql^2}{2}\frac{(2l)^2}{2EI} = -\frac{ql^4}{EI}$$

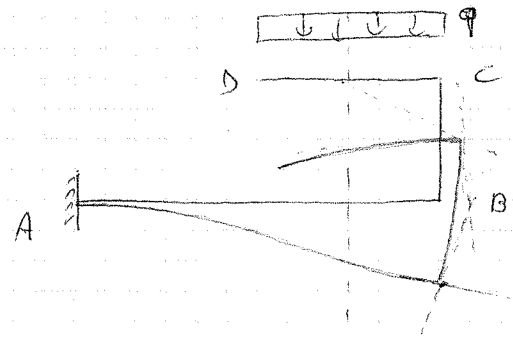
In definitiva lo spostamento verticale del punto D è dato dalla somma dei singoli contributi:

$$V_D = V_{D(1)} + V_{D(2)} + V_{D(3)} + V_{D(4)} + V_{D(5)} + V_{D(6)}$$

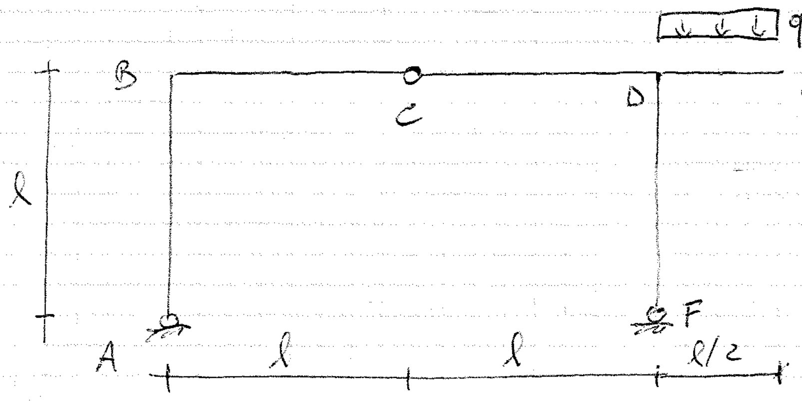
$$V_D = \left(\frac{1}{8} + \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 1 - 1\right)\frac{ql^4}{EJ} = \frac{9}{8}\,\frac{ql^4}{EJ}$$

Analogamente si può calcolare lo spostamento orizzontale di D.
Si traccia il diagramma del momento flettente e la deformata dell'intera struttura soggetta al carico q.



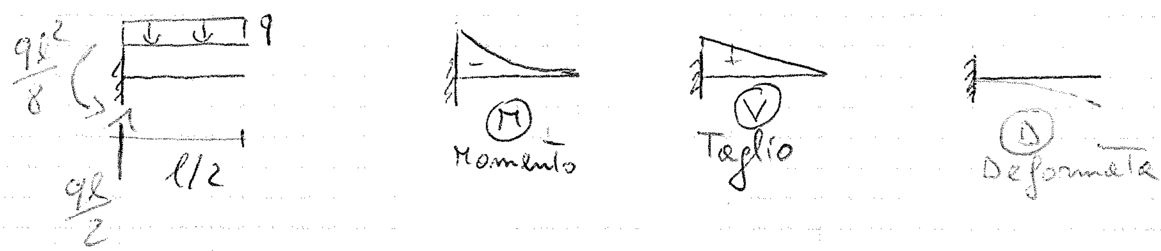


QUESITO DEL 26/10/11 n° 3

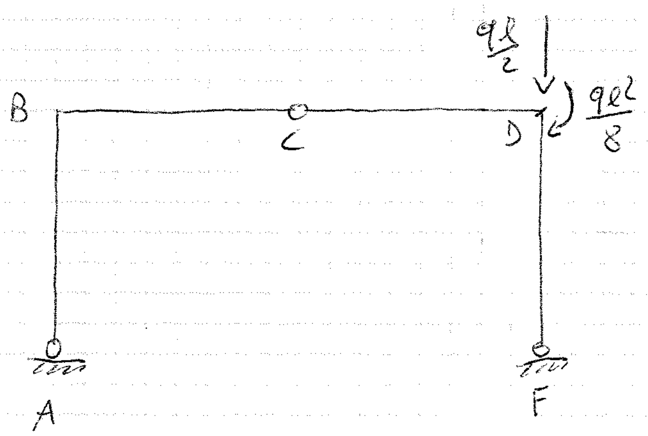


Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e la deformata.

Lo schema è un arco a tre cerniere, quindi isostatico.
Per semplicità si può sostituire al carico q agente nel tratto DE, il suo effetto nel punto D.



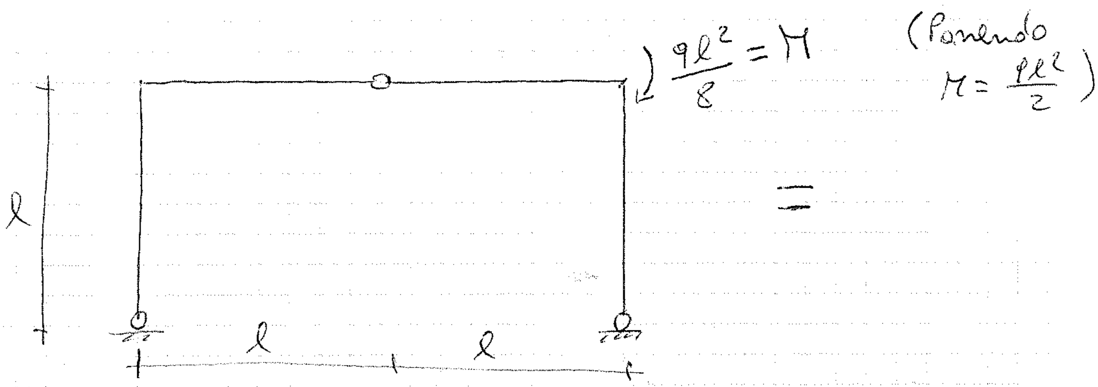
Lo schema da risolvere è dunque

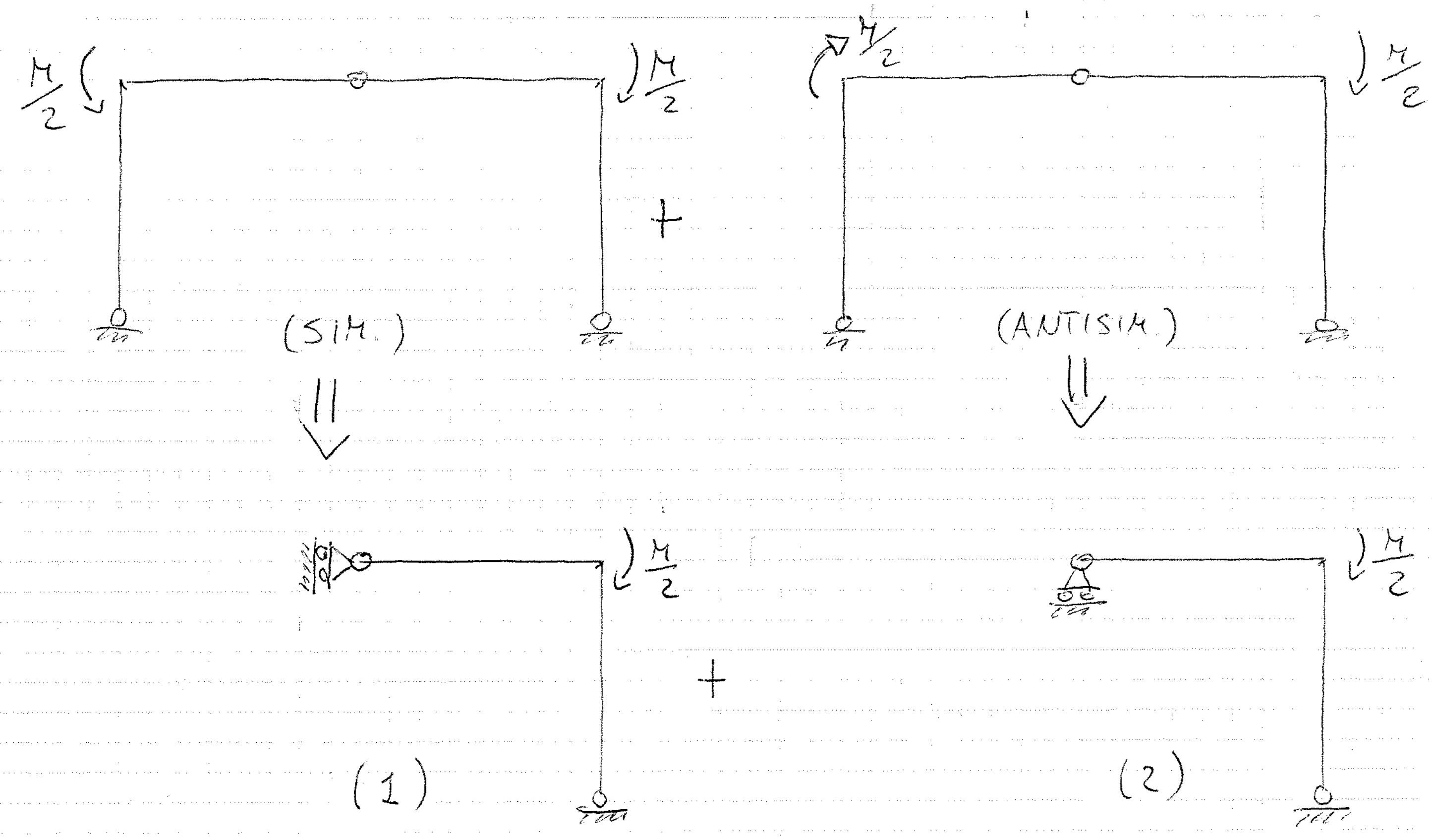


che può essere scomposto nella somma di due schemi, geometricamente uguali, uno caricato solo con la forza, l'altro solo con la coppia.

Trascurando le deformazioni assiali rispetto a quelle flessionali, lo schema con la sola forza non produce deformazioni poichè tutta la struttura è scarica tranne il tratto DF. Quest'ultimo sarà soggetto solo compressione di $\frac{ql}{2}$

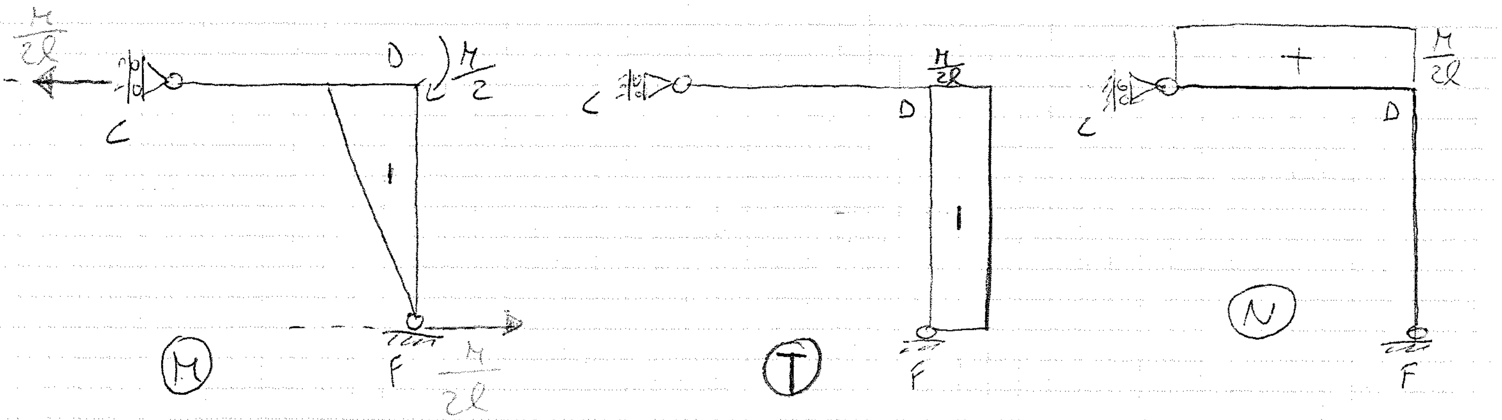
Si risolve lo schema con la coppia.
Esso può essere visto come la somma di due strutture, una simmetrica e simmetricamente caricata, una simmetrica caricata antisimmetricamente.

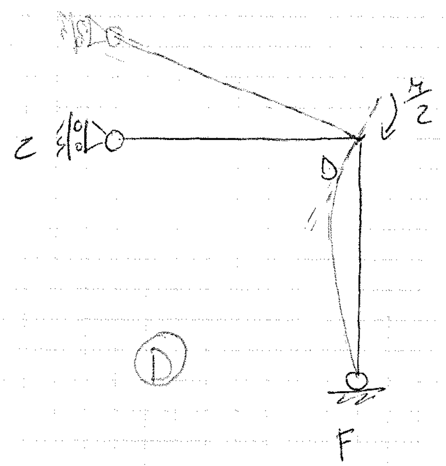




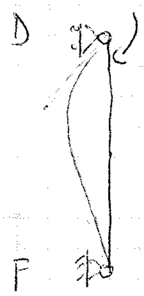
Tutto si riduce alla risoluzione di questi due schemi isostatici

Schema (1)





L'asta DF è equivalente ad una trave appoggiata-appoggiata



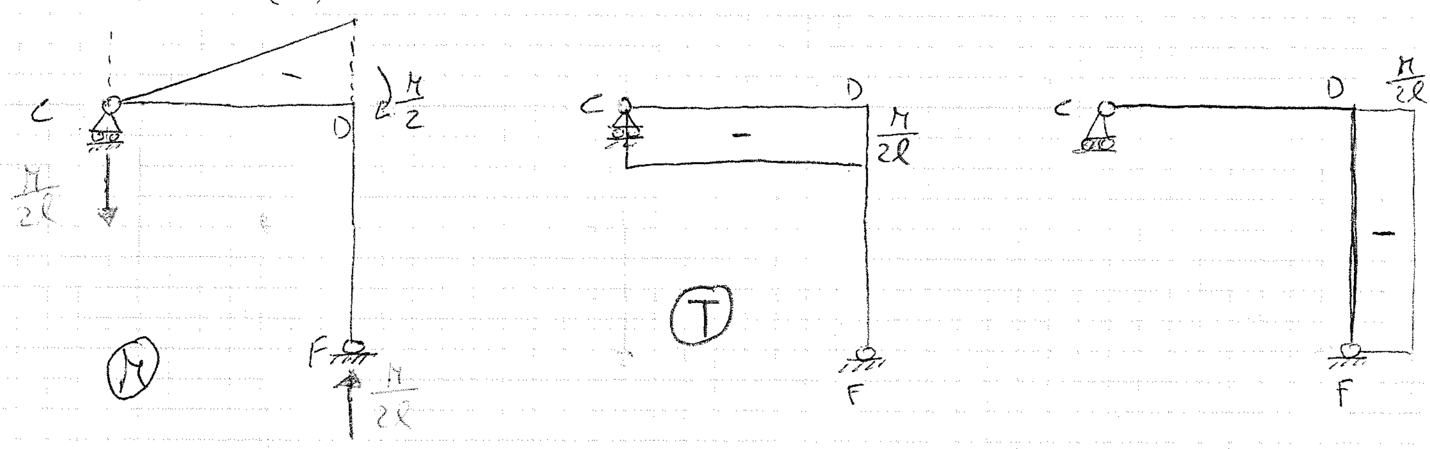
$\frac{M}{2} = \frac{ql^2}{16}$

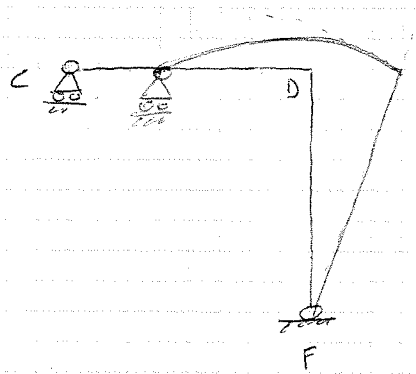
$\varphi_D = -\frac{M}{2}\frac{l}{3EI}$

$\varphi_F = \frac{M}{2}\frac{l}{6EI}$

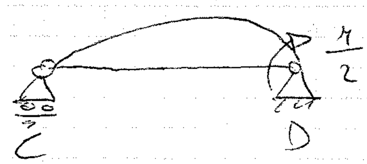
Per la congruenza al nodo D l'asta CD subisce una rotazione rigida intorno a D.

Schema (2)





Il tratto CD è equivalente ad una trave appoggiata-appoggiata



$\varphi_C = \frac{M}{2}\frac{l}{6EI}$

$\varphi_D = -\frac{M}{2}\frac{l}{3EI}$

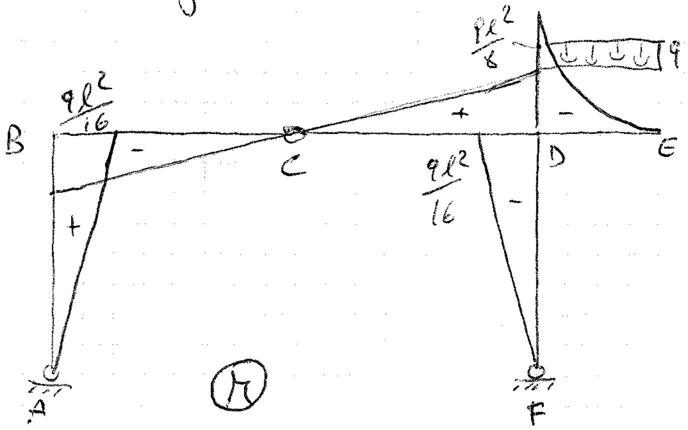
Notiamo che il punto si sposta in verticale (verso l'alto) per effetto dello schema (1), in orizzontale (verso destra) per effetto dello schema (2).

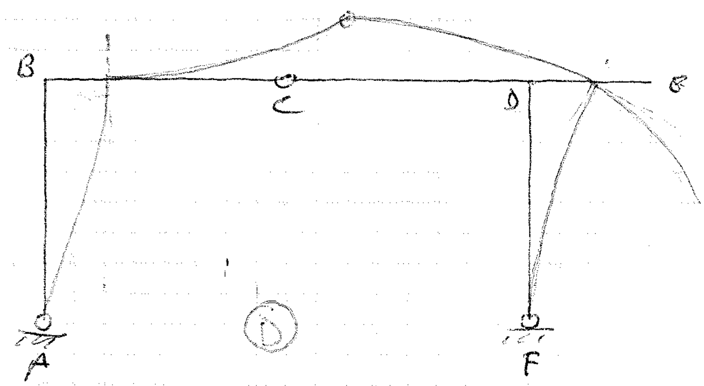
Tali spostamenti sono rispettivamente pari a:

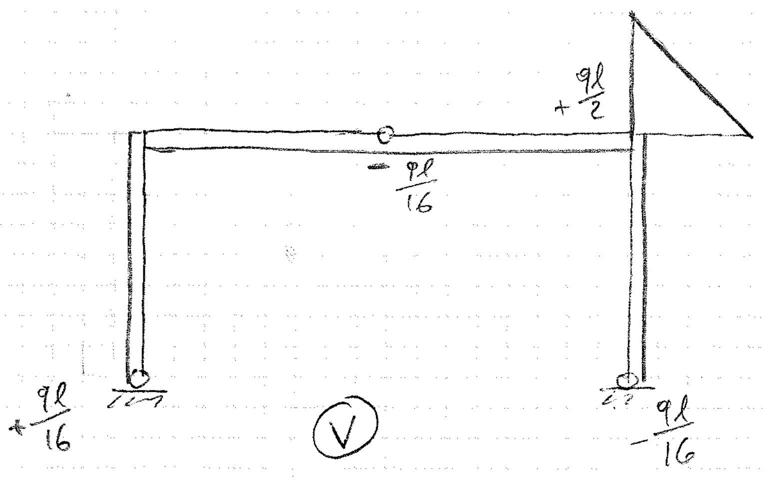
$$v_{E_V} = -l\,\varphi_D = -\frac{Ml^2}{6EI} \quad (1° \text{ schema})$$

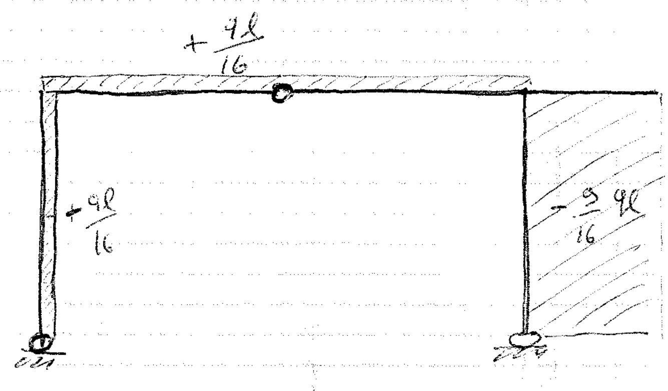
$$v_{E_O} = l\,\varphi_D = \frac{Ml^2}{6EI} \quad (2° \text{ schema})$$

In definitiva, per la struttura di partenza, si ha:



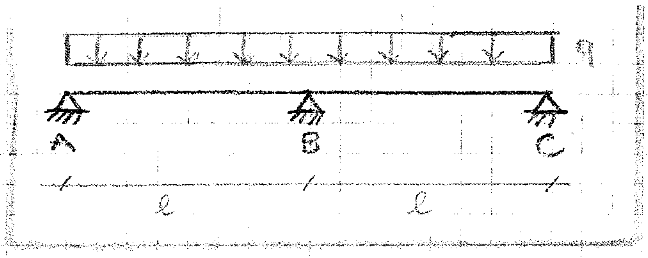




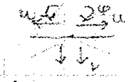


E' da notare che il nodo B trasla senza ruotare.

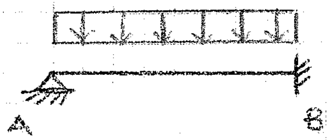
QUESITO DEL 2/11/11 N° 1

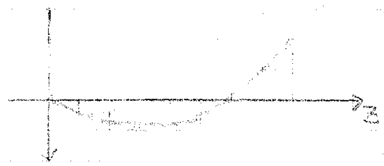


DALLO STUDIO DELLA SIMMETRIA



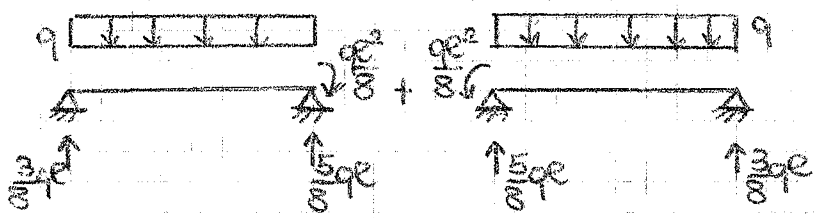
Struttura simmetrica, caricata simmetricamente.
In B non ci può essere rotazione, perché se ci fosse dovrebbe essere uguale e contraria per le due aste, e dato che B è unico non posso avere discontinuità nelle rotazioni.
Questo ci dice che lo schema è perfettamente equivalente al seguente:





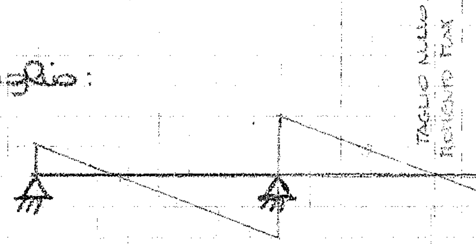
(l'abbiamo già risolta)

Quindi possiamo considerare le strutture

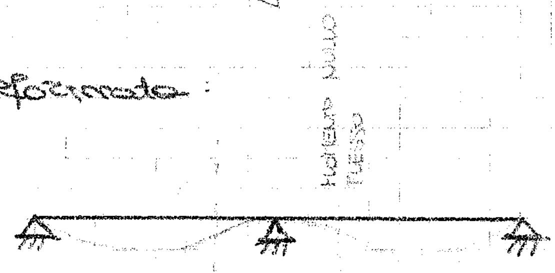


Quindi il diagramma di momento della struttura iniziale è:

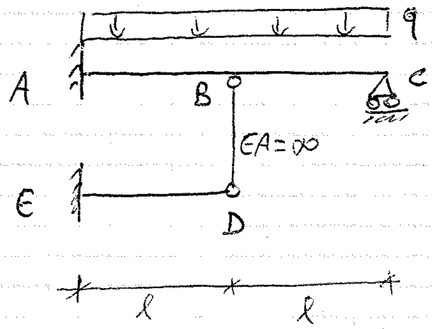
Il taglio:



La deformata:



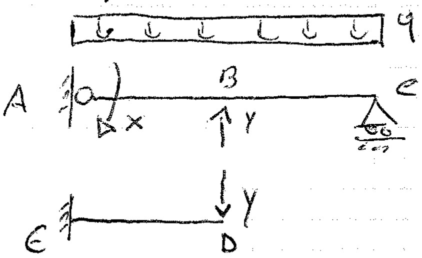
QUESITO DEL 2/11/11 N° 2



Lo schema è due volte iperstatico.

La risoluzione, col metodo delle forze, può essere affrontata in diversi modi come:

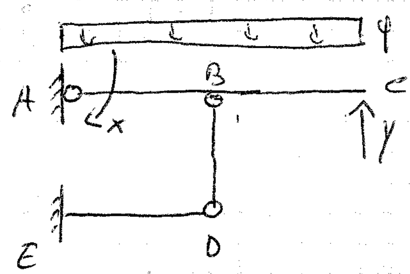
1)



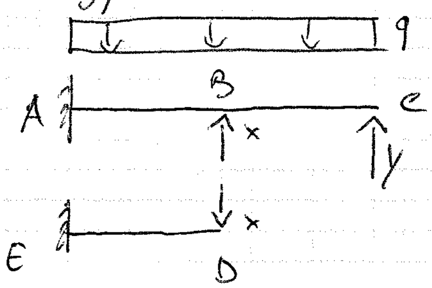
Condiz. di congr.

$\varphi_A = 0 \qquad v_B = v_D$

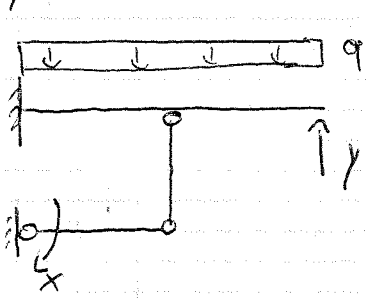
2)



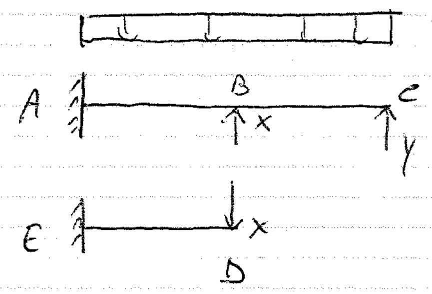
3)



4)

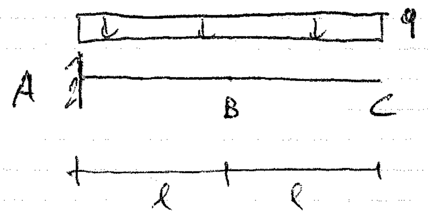


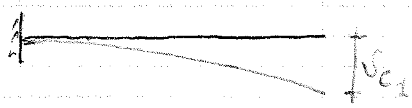
Si sceglie di utilizzare lo schema 3.



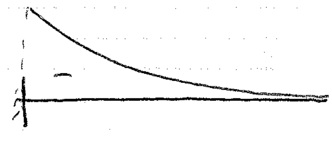
Si risolvono separatamente i seguenti schemi e poi si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

(1)





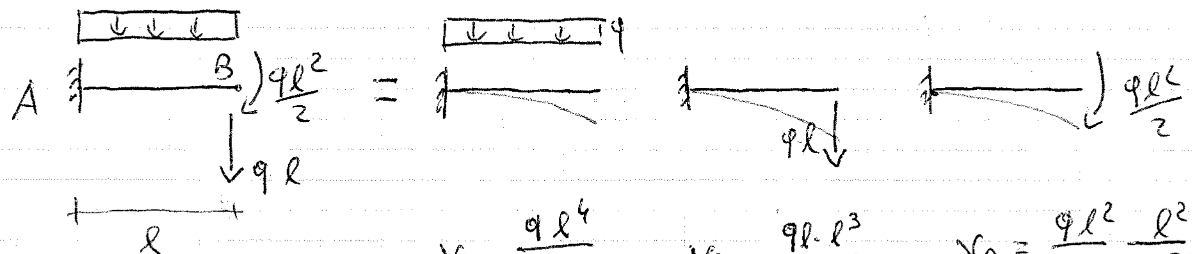
deformata (D)



diagr. Momento (M)

$$v_{C_1} = \frac{q(2l)^4}{8EI} = 2\frac{ql^4}{EI}$$

Per determinare lo spostamento di B si considera lo schema seguente



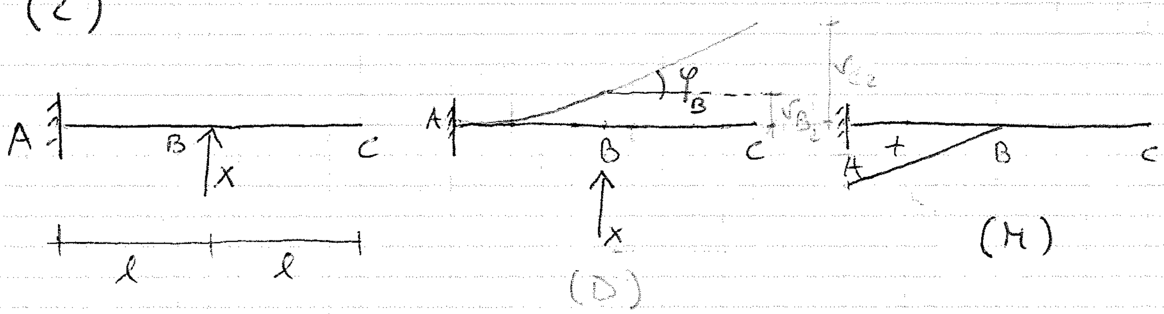
$$\underbrace{v_B = \frac{ql^4}{8EI} \qquad v_B = \frac{ql \cdot l^3}{3EI} \qquad v_B = \frac{ql^2}{2}\frac{l^2}{2EI}}$$

$\Downarrow$

sommando

$$v_{B_1} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{ql^4}{EI} = \frac{17}{24}\frac{ql^4}{EI}$$

(2)



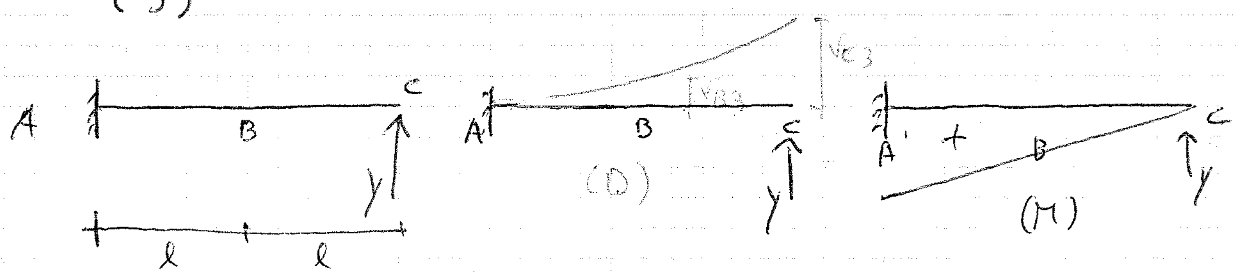
NOTA:

Il Tratto BC non si deforma, ma subisce rotazioni e spostamenti rigidi.

$$V_{B2} = -\frac{X l^3}{3 E} \qquad \varphi_B = \frac{X l^2}{2EI}$$

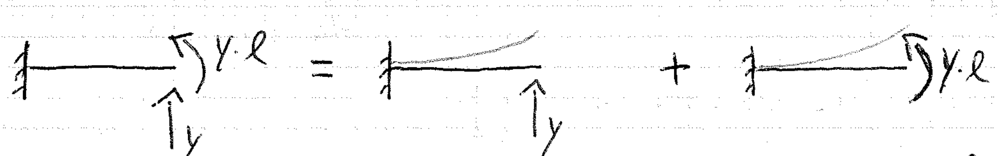
$$V_{C2} = V_{B2} - \varphi_B \cdot l = -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{X l^3}{EI} = -\frac{5}{6}\,\frac{X l^3}{EI}$$

(3)



$$V_{C3} = -\frac{y(2l)^3}{3EI} = -\frac{8}{3}\,\frac{y l^3}{EI}$$

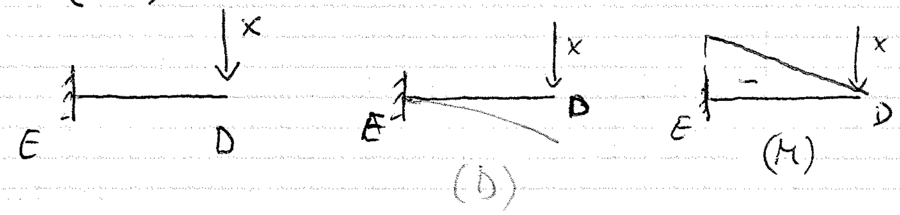
Lo spostamento V_{B3} lo si può ottenere da questo schema:



$$V_B = -\frac{y l^3}{3EI} \qquad V_B = -\frac{y \cdot l\; l^2}{2EI}$$

$$V_{B_3} = -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{y l^3}{EI} = -\frac{5}{6}\,\frac{y l^3}{EI}$$

(4)



$$v_{D_4} = \frac{x\ell^3}{3EI}$$

Ricapitolando

Schema	v_B	v_C	v_D
1	$\frac{17}{24}\frac{q\ell^4}{EI}$	$2\frac{q\ell^4}{EI}$	0
2	$-\frac{x\ell^3}{3EI}$	$-\frac{5}{6}\frac{x\ell^3}{EI}$	0
3	$-\frac{5}{6}\frac{y\ell^3}{EI}$	$-\frac{8}{3}\frac{y\ell^3}{EI}$	0
4	0	0	$\frac{x\ell^3}{3EI}$

Imponendo le condizioni di congruenze si ha:

$$\begin{aligned} v_B = v_D \Rightarrow & \begin{cases} \frac{17}{24}\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{x\ell^3}{3EI} - \frac{5}{6}\frac{y\ell^3}{EI} = \frac{x\ell^3}{3EI} \\ 2\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{5}{6}\frac{x\ell^3}{EI} - \frac{8}{3}\frac{y\ell^3}{EI} \end{cases} \\ v_C = 0 \Rightarrow & \end{aligned}$$

da cui $\Rightarrow$

$$x = \frac{8}{39} q\ell \simeq \frac{1}{5} q\ell$$

$$y = \frac{107}{4 \cdot 39} q\ell \simeq \frac{2}{3} q\ell$$

Tracciamento di deformata e diagrammi della sollecitazione.

$$M_A = -2ql \cdot l + x \cdot l + y \cdot 2l = \left(-2 + \frac{8}{39} + \frac{2 \cdot 107}{4 \cdot 39}\right) ql^2 = -\frac{33}{2 \cdot 39} ql^2$$

$$M_A \simeq -\frac{2}{5} ql^2$$

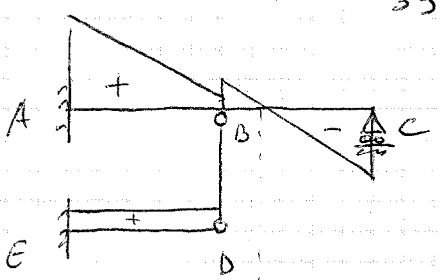
$$M_B = -\frac{ql^2}{2} + yl = \left(-\frac{1}{2} + \frac{107}{4 \cdot 39}\right) ql^2 = \frac{29}{4 \cdot 39} ql^2 \simeq \frac{1}{5} ql^2$$

$$V_A = 2ql - x - y = \left(2 - \frac{8}{39} - \frac{107}{4 \cdot 39}\right) ql = \frac{173}{4 \cdot 39} ql \simeq \frac{11}{10} ql$$

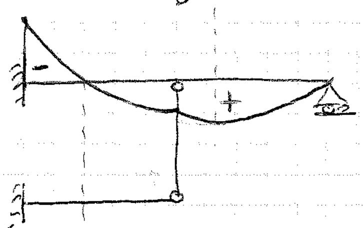
$$V_B^{sx} = V_A - ql = \left(\frac{173}{4 \cdot 39} - 1\right) ql = \frac{17}{4 \cdot 39} ql \simeq \frac{1}{10} ql$$

$$V_B^{dx} = V_B^{sx} + x = \left(\frac{17}{4 \cdot 39} + \frac{8}{39}\right) ql = \frac{49}{4 \cdot 39} ql \simeq \frac{1}{3} ql$$

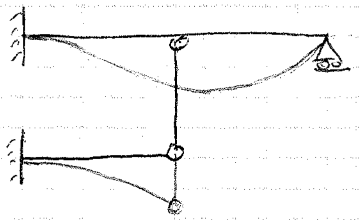
$$M_E = -xl = -\frac{8}{39} ql^2$$



TAGLIO

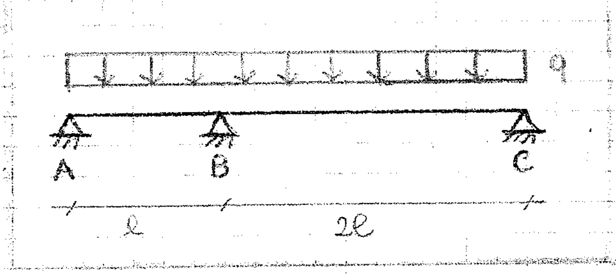


MOMENTO



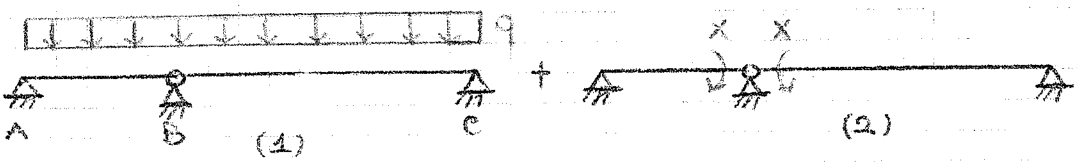
DEFORMATA

QUESITO DEL 2/11/11 N° 3



Per rendere isostatica la struttura potrei:

- togliere un vincolo in B (non conviene perché è complicato determinare lo spostamento ad ~~una~~ 1/3 della luce).
- mettere una cerniera interna in B (strada più facile).



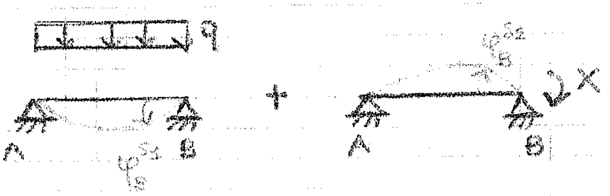
· Impongo la congruenza

$$\boxed{\varphi_B^s = \varphi_B^d}$$

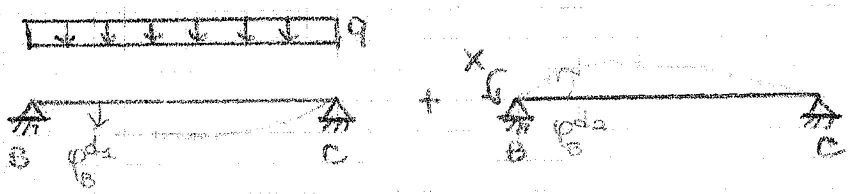
Inserendo la cerniera ho disaccoppiato la struttura

· Come si deformano:

$\overline{AB}$



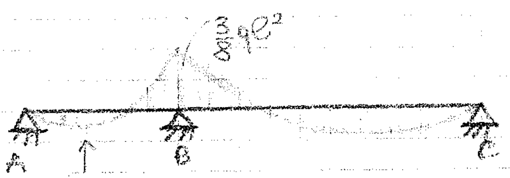
$\overline{BC}$



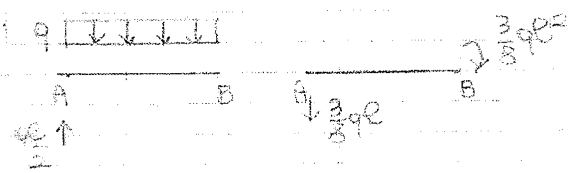
Ottenendo per $\varphi_B^s = \varphi_B^d$

$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{Xl}{3EI} = -\frac{q(2l)^3}{24EI} + \frac{X(2l)}{3EI} \rightarrow X = \frac{3}{8}ql^2$$

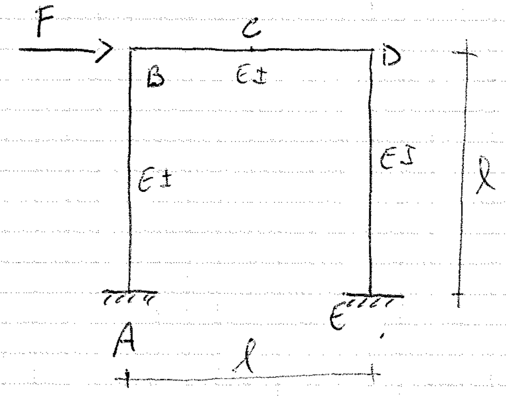
· Determinata l'incognita iperstatica posso determinare il momento:



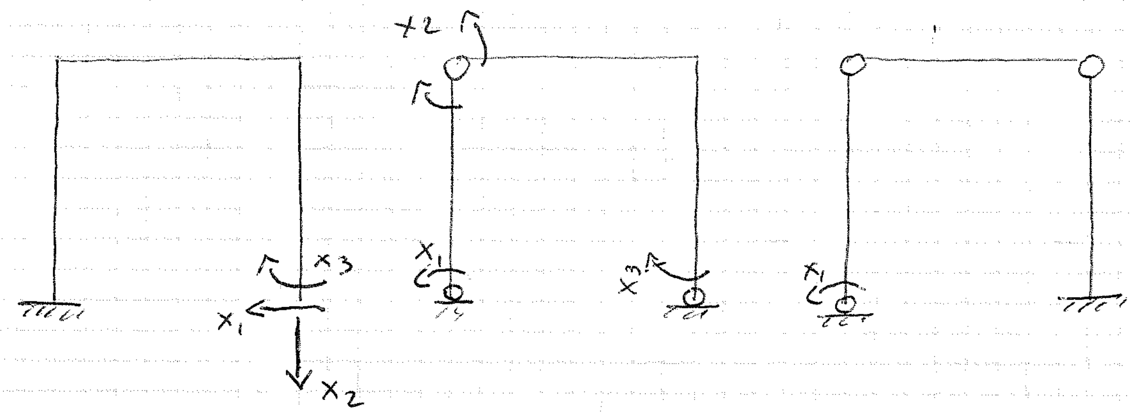
FIBRE TESE VERSO IL BASSO
REAZIONE IN A VERSO L'ALTO



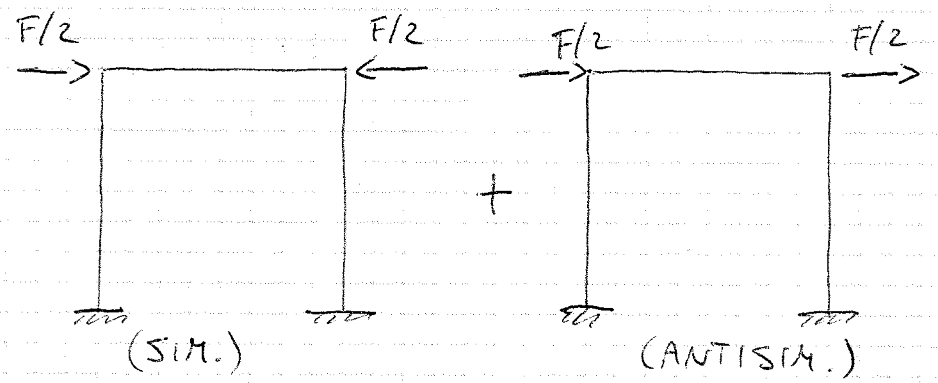
QUESITO DEL 2/11/11 N° 4



Lo schema è tre volte iperstatico.
È possibile risolverlo col metodo delle forze, eliminando tre vincoli semplici e sostituendo le rispettive reazioni incognite, considerando ad esempio uno dei seguenti schemi.

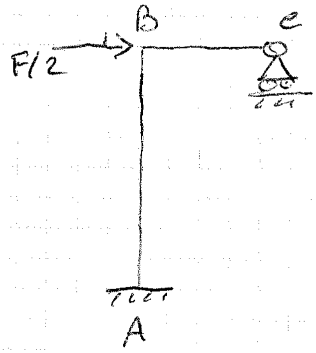


Per semplicità si può sfruttare il fatto che lo schema assegnato è geometricamente simmetrico per scomporlo nella somma di uno simmetrico ed uno antisimmetrico (dal punto di vista dei carichi), cioè

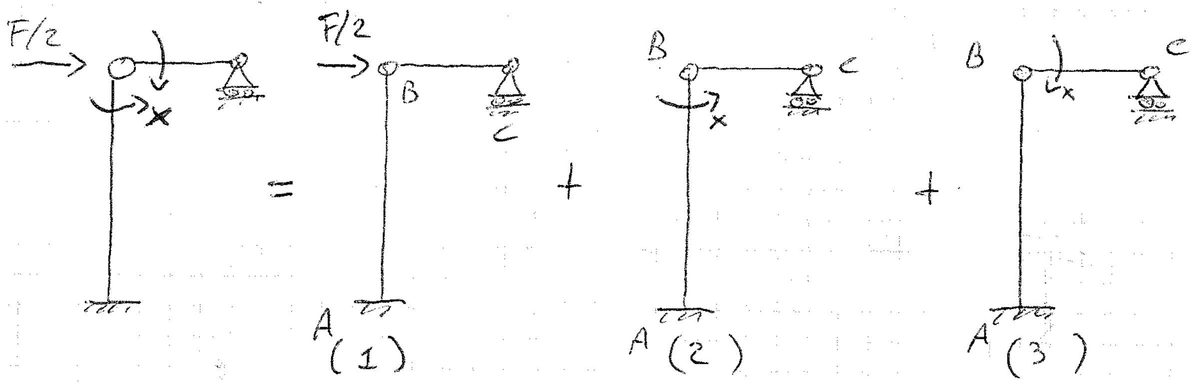


Per quanto riguarda lo schema simmetrico, ipotizzando che il Traverso BC sia infinitamente rigido assialmente, possiamo dire che i punti B e C non si sposteranno e non si avrà nessuna deformazione. Solo il Tratto BC è soggetto ad una compressione pari ad F/2.

Il problema quindi si riconduce nella risoluzione dello schema antisimmetrico, ovvero lo schema equivalente che è soltanto 1 volta iperstatico.

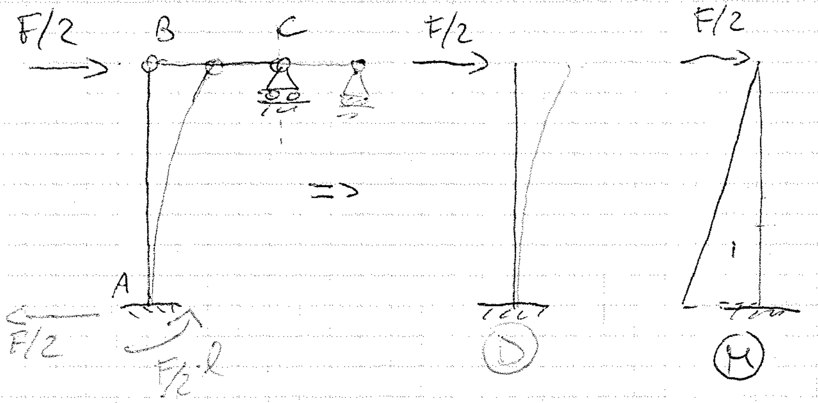


Questo schema viene ora risolto inserendo una cerniera in B. Applicando il metodo delle forze, si imporrà come condizione di congruenza: $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$



In ciascuna di esse dovrò calcolare φ_{BA} e φ_{BC} e dopo aver sommato i valori ottenuti per ognuno degli schemi (1), (2), (3), imporre la condizione di congruenza.

Schema (1)



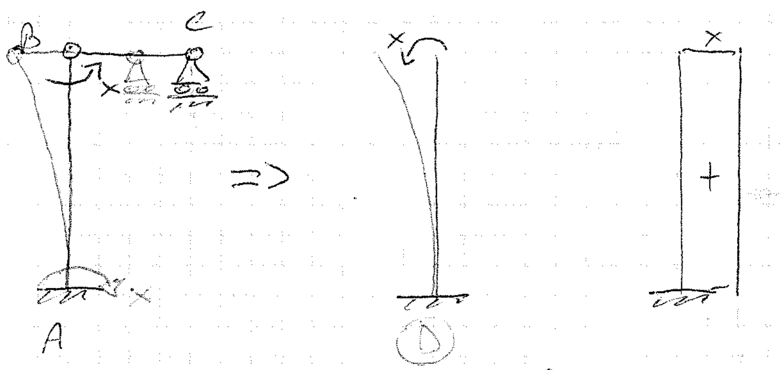
$$\mu_B = \frac{F}{2}\cdot\frac{l^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{6EI}$$

$$\varphi_{BA} = -\frac{F}{2}\,\frac{l^2}{2EI} = -\frac{Fl^2}{4EI}$$

$$\varphi_{BC} = 0$$

Il Tratto BC è scarico e lo schema è equivalente ad una mensola soggetta alla forza in B.

Schema (2)



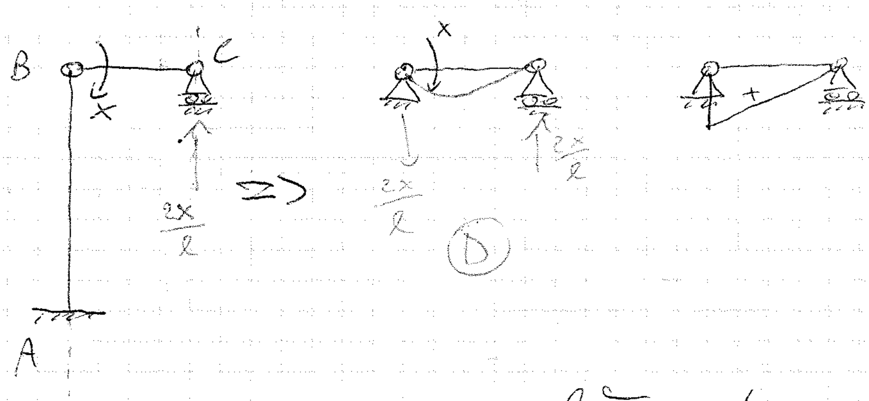
$$\mu_B = -X\,\frac{l^2}{2EI}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{Xl}{EI}$$

$$\varphi_{BC} = 0$$

Anche in questo caso il Tratto BC è scarico e lo schema si riconduce ad un mensola con una coppia in B.

Schema (3)



$$\mu_B = 0$$

$$\varphi_{BA} = 0$$

$$\varphi_{BC} = -X\,\frac{l}{2}\,\frac{1}{3EI} = -\frac{Xl}{6EI}$$

Il Tratto BC è equivalente ad una Trave appoggiata-appoggiata soggetta ad una coppia X in B.

Imponendo la condizione di congruenza si ha:

$$-\frac{Fl^2}{4EI}+\frac{Xl}{EI}=-\frac{Xl}{6EI} \Rightarrow X=\frac{3}{14}Fl$$

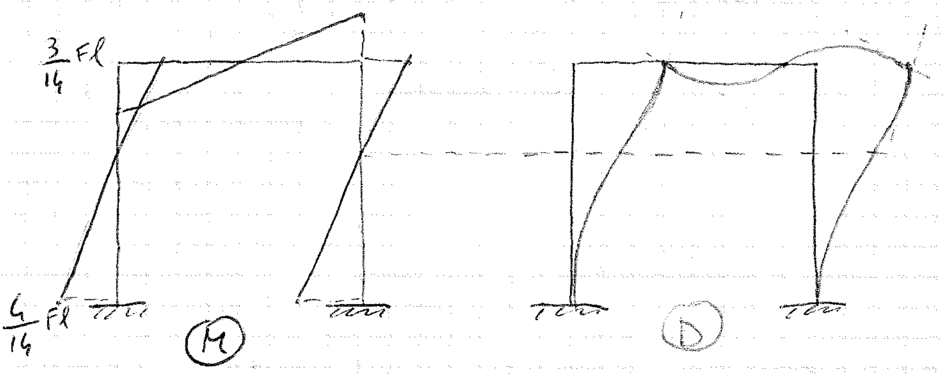
Determinata l'incognita iperstatica, è possibile determinare o valore degli spostamenti e reazioni vincolari, come:

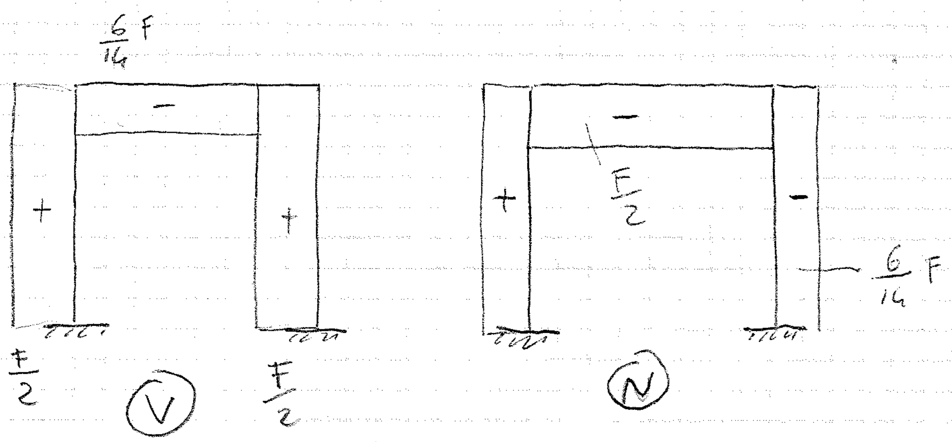
$$u_B=\frac{Fl^3}{6EI}-\frac{3}{28}\frac{Fl^3}{EI}=\frac{5}{84}\frac{Fl^3}{EI}$$

$$\varphi_B=-\frac{3}{14}\frac{1}{6}\frac{Fl^2}{EI}=-\frac{1}{28}\frac{Fl^2}{EI}$$

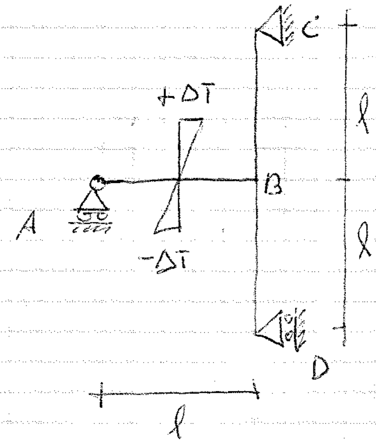
$$M_A=-\frac{Fl}{2}+\frac{3}{14}Fl=-\frac{4}{14}Fl$$

Si tracciano ora i diagrammi M, V, T e la deformata della struttura assegnata.





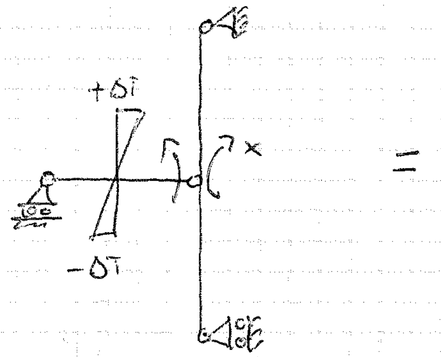
QUESITO DEL 3/11/11

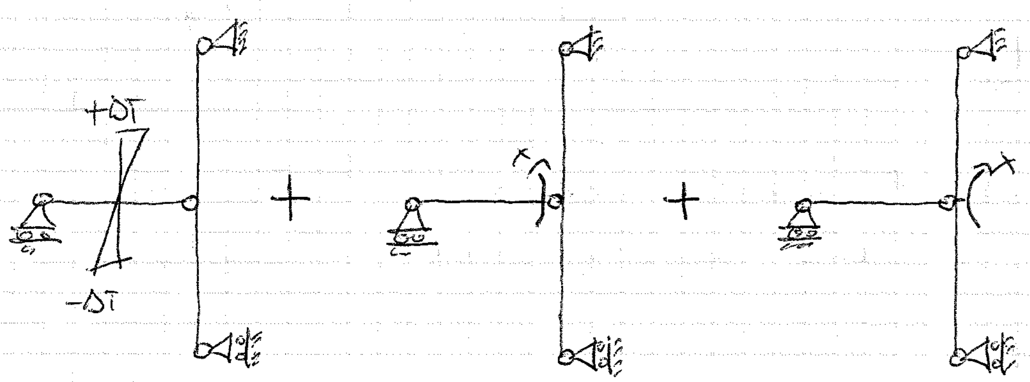


Lo schema è una volta iperstatico.

<u>SOLUZIONE 1</u>

Un modo per risolvere lo schema col metodo delle forze, è quello di inserire una cerniera nell'estremo B dell'asta AB.



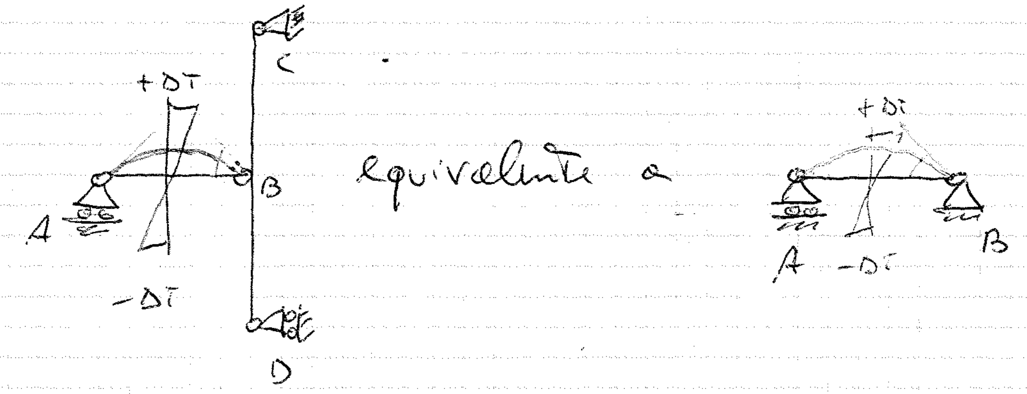


(1) (2) (3)

Si considerano separatamente gli effetti di ciascun carico, poi si sommano e si impone la condizione di congruenza, cioè $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$

opp. $\varphi_{BA} = \varphi_{BD}$

Schema (1)

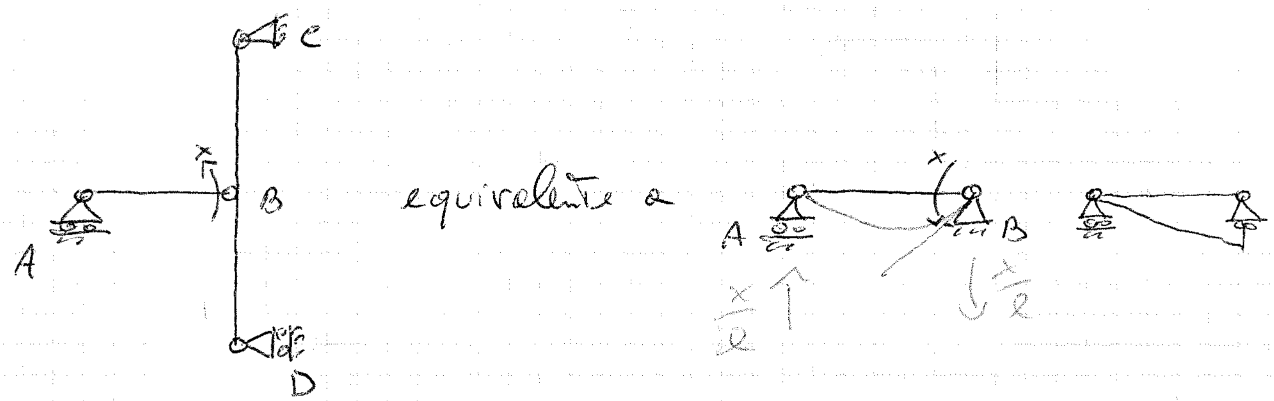


Nello schema isostatico soggetto alla distorsione termica non nascono sollecitazioni, il tratto AB si deforma mentre il tratto CBD resta indeformato.

La rotazione dell'estremo B dell'asta AB è:

$$\varphi_{BA} = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,\alpha\,\Delta T}{h}\,\ell = -\,\frac{\alpha\,\Delta T}{h}\,\ell$$

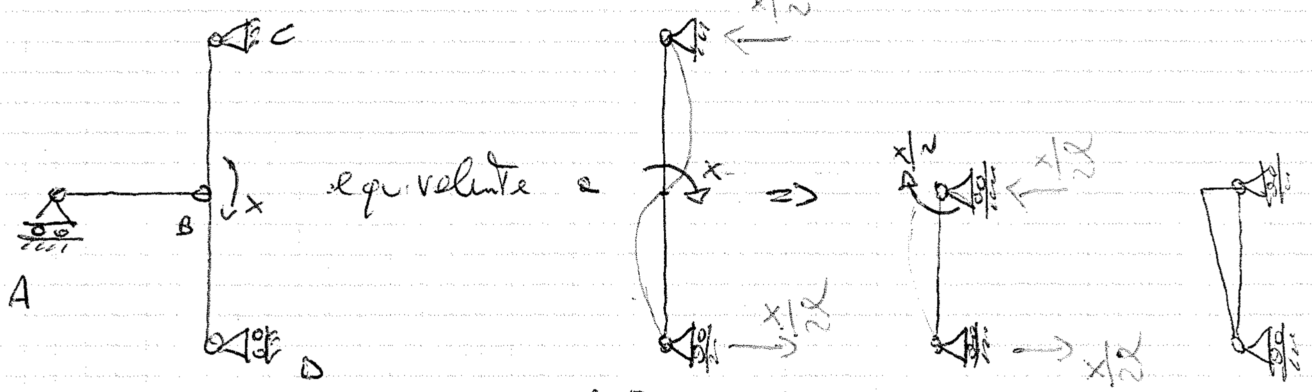
Schema (2)



Il tratto BD è scarico, mentre il tratto BC è soggetto soltanto a compressione (pari a X/ℓ)

$$\varphi_{BA} = \frac{X\,\ell}{3\,EJ}$$

Schema (3)



ANTISIMMETRICA

Il tratto AB è scarico perchè il punto B dell'asta CD può ruotare liberamente, ma può anche traslare in orizzontale in quanto il carrello in A consente tale spostamento.

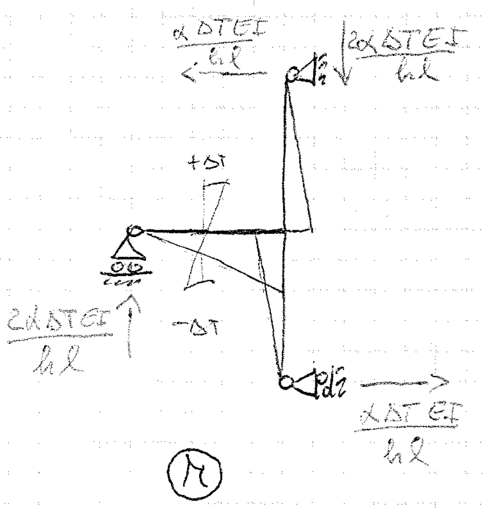
$$\varphi_{BD} = \varphi_{BC} = -\frac{x}{2}\frac{\ell}{3EJ} = -\frac{x\ell}{6EJ}$$

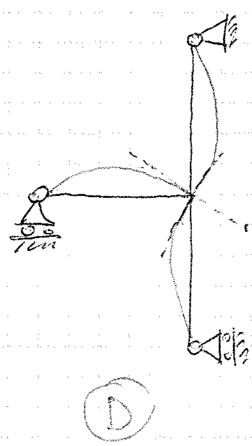
Imponendo la condizione di congruenza si ha:

$$-\frac{\alpha \Delta T}{h}\ell + \frac{x\ell}{3EJ} = -\frac{x\ell}{6EJ} \Rightarrow x = \frac{2\alpha\Delta T EJ}{h}$$

Nella struttura di partenza il punto B subirà una rotazione di:

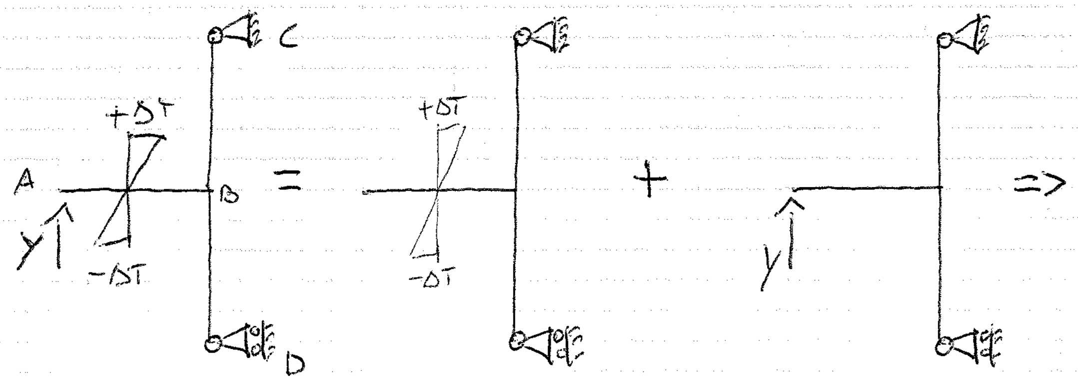
$$\varphi_B = -\frac{2\alpha\Delta T EJ}{h}\frac{\ell}{6EJ} = -\frac{1}{3}\frac{\alpha\Delta T\ell}{h} \quad \text{(rotazione oraria)}$$





SOLUZIONE 2

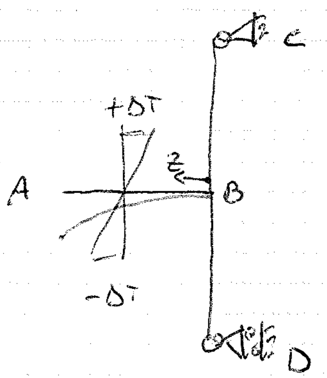
Un'altra possibilità per risolvere lo schema è quella di togliere il carrello in A:



(1) (2)

$\Rightarrow$ Condizione di congruenza $v_A = 0$

Schema 1



In questo schema non nascono sollecitazioni.

Si avrà un abbassamento di A ottenibile ricavando la funzione $v(z)$:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \chi = \frac{2\alpha\Delta T}{h}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{2\alpha\Delta T}{h}$$

Integrando si ha

$$v'(z) = \frac{2\alpha\Delta T}{h} z + C_1$$

$$v(z) = \frac{2\alpha\Delta T}{h} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

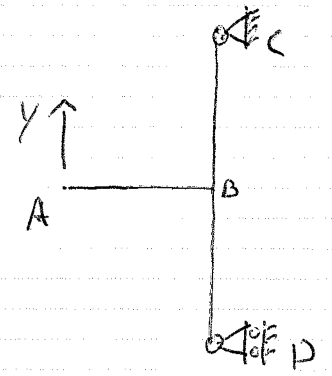
$$\varphi(0) = v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$V(z) = \frac{\alpha \Delta T}{h} z^2$$

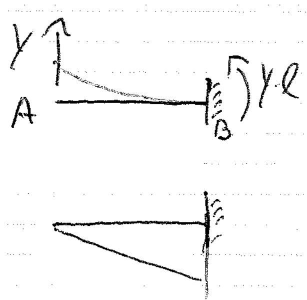
Pertanto, in questo schema lo spostamento verticale di A è:

$$V_A(l) = -\frac{\alpha \Delta T}{h} l^2 \quad \text{(verso il basso)}$$

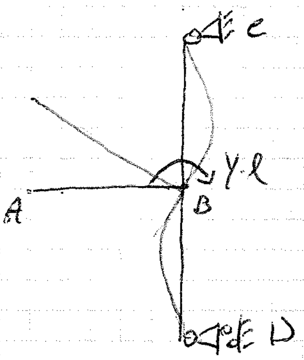
Schema 2



Questo schema può essere semplificato, considerando la somma degli effetti che si hanno in:



$+$



$$V_A = -\frac{\gamma l^3}{3EI}$$

$$\varphi_B = \frac{\gamma \cdot l}{2}\frac{l}{3EI} = \frac{\gamma l^2}{6EI}$$

$$V_A = l\,\varphi_B = \frac{\gamma l^3}{6EI}$$

Complessivamente per lo schema (2)

$$V_A = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}\right)\frac{\gamma l^3}{EI} = \frac{1}{2}\frac{\gamma l^3}{EI}$$

Imponendo la condizione di congruenza

$v_A = 0$

$$-\frac{\alpha \Delta T}{h} l^2 \quad \frac{1}{2} \frac{Y l^3}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{2 \alpha \Delta T \, EI}{h \, l}$$