Anno accademico 2009-10

Laboratorio di Tecnica delle costruzioni 2

Progetto e verifica di edifici antisismici in c.a.

4 – Comportamento dinamico elastico
Schemi a più gradi di libertà

Catania

10 giugno 2010

Aurelio Ghersi

Possibili approcci per valutare la risposta elastica

Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta (istante per istante)

Analisi modale con spettro di risposta, per valutare la massima risposta

Analisi statica, per valutare in maniera approssimata la massima risposta

NTC08, punto 7.3

Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta

- Se il sistema ha n gradi di libertà (dinamici) il suo moto è descritto con n funzioni spostamento u (quindi con un vettore di funzioni $\mathbf{u}$)
- L'equazione di equilibrio dinamico è

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$$

  che è formalmente simile a quella di un oscillatore semplice (ma in realtà è un sistema di equazioni differenziali)
- Risolverla numericamente (cioè determinare la risposta istante per istante) è possibile ma è matematicamente oneroso

Analisi dinamica,
con valutazione della storia della risposta

- Determinare la risposta istante per istante è possibile ma è matematicamente oneroso

Ma ci serve veramente?

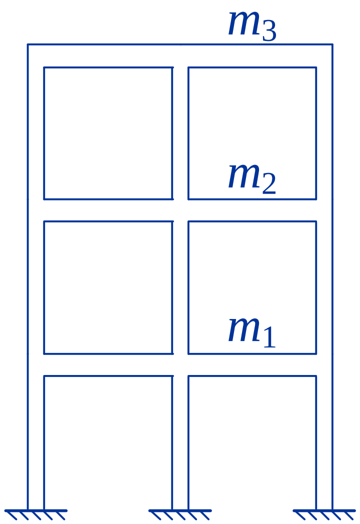
- In realtà a noi interessano i massimi spostamenti e le massime sollecitazioni

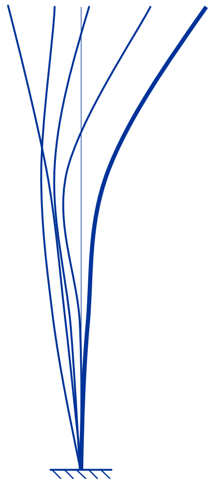
Per ottenere questi si può usare
un procedimento più semplice:
l'analisi modale (con spettro di risposta)

Analisi modale

Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare ...



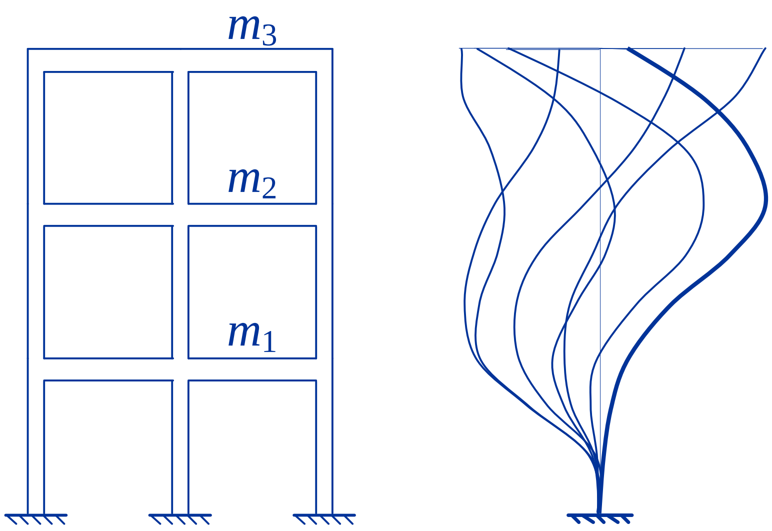


... la struttura si muove in maniera disordinata

Analisi modale

Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare …



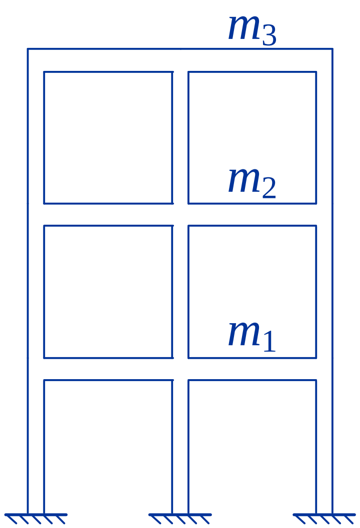
… la struttura si muove in maniera disordinata

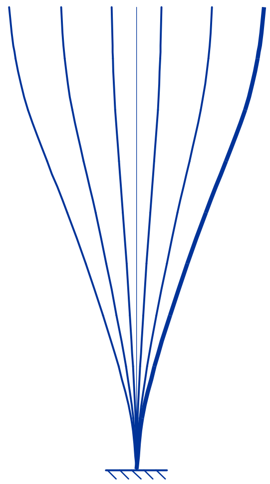
altro esempio

Analisi modale

Questo è un "modo di oscillazione libera"

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...





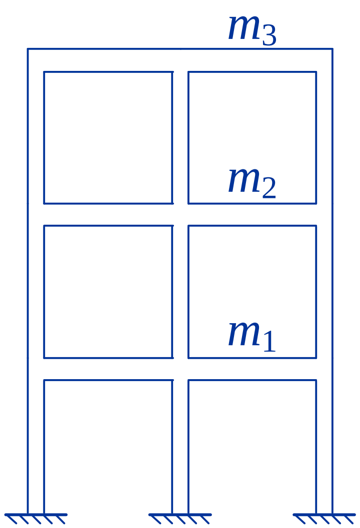
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

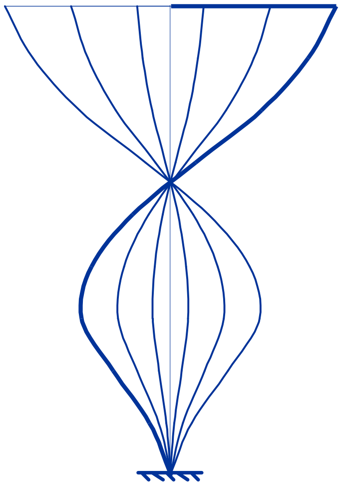
T = periodo di oscillazione libera

Analisi modale

Questo è un “modo di oscillazione libera“

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...





altro esempio

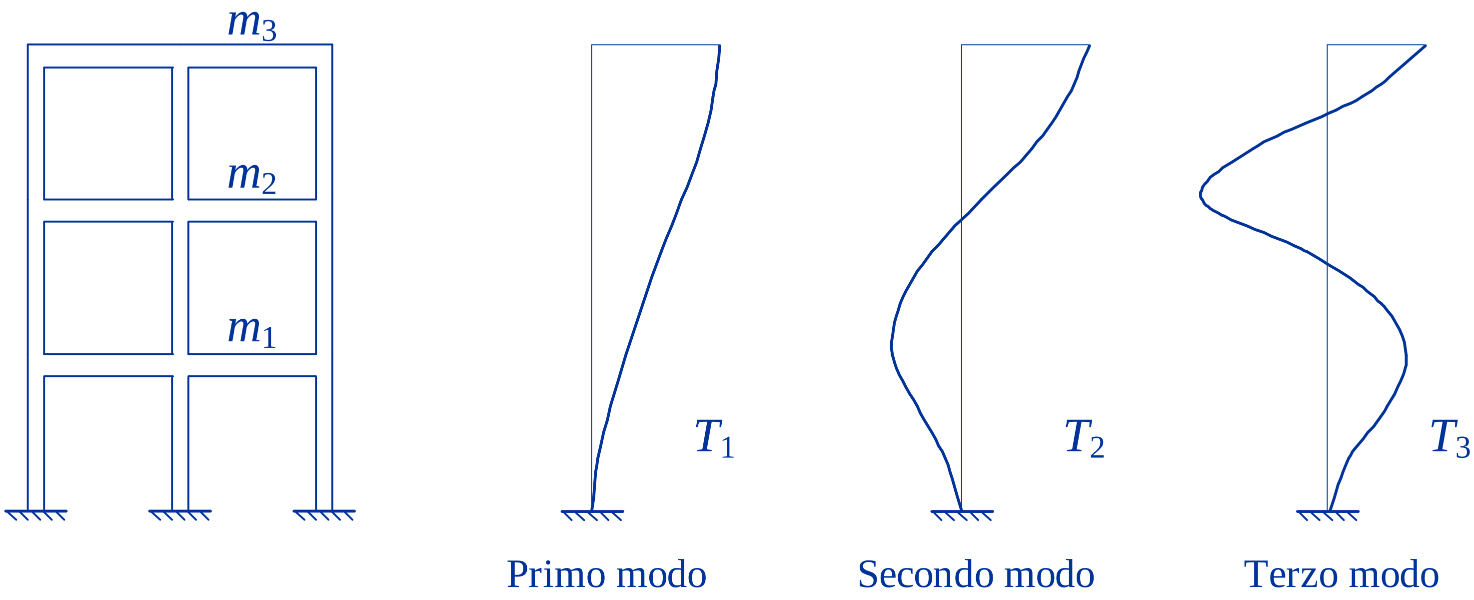
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

T = periodo di oscillazione libera

Modi di oscillazione libera

Telaio piano (con traversi inestensibili):

numero di modi di oscillazione libera = numero di piani



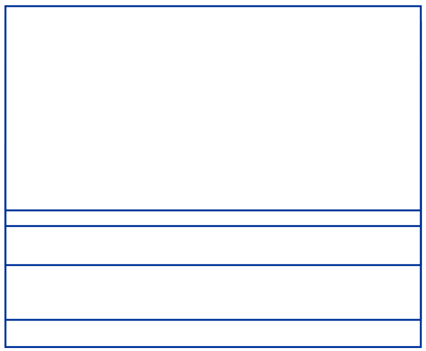
Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione

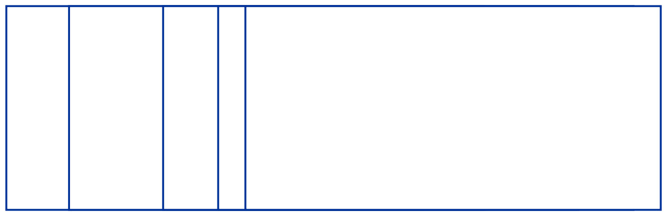


Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione

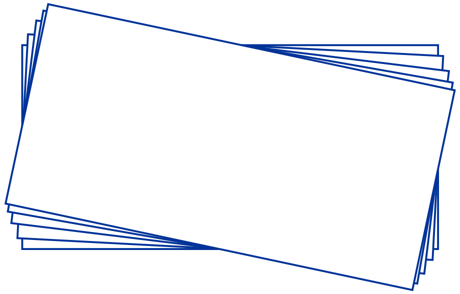


Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:
- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione

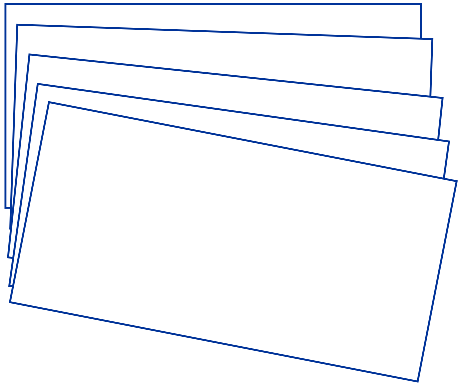


Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera = 3 x numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono accoppiati



Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale

senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera è molto maggiore

Moto libero

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0$$

La soluzione, in caso di moto libero con deformata modale, è una funzione armonica

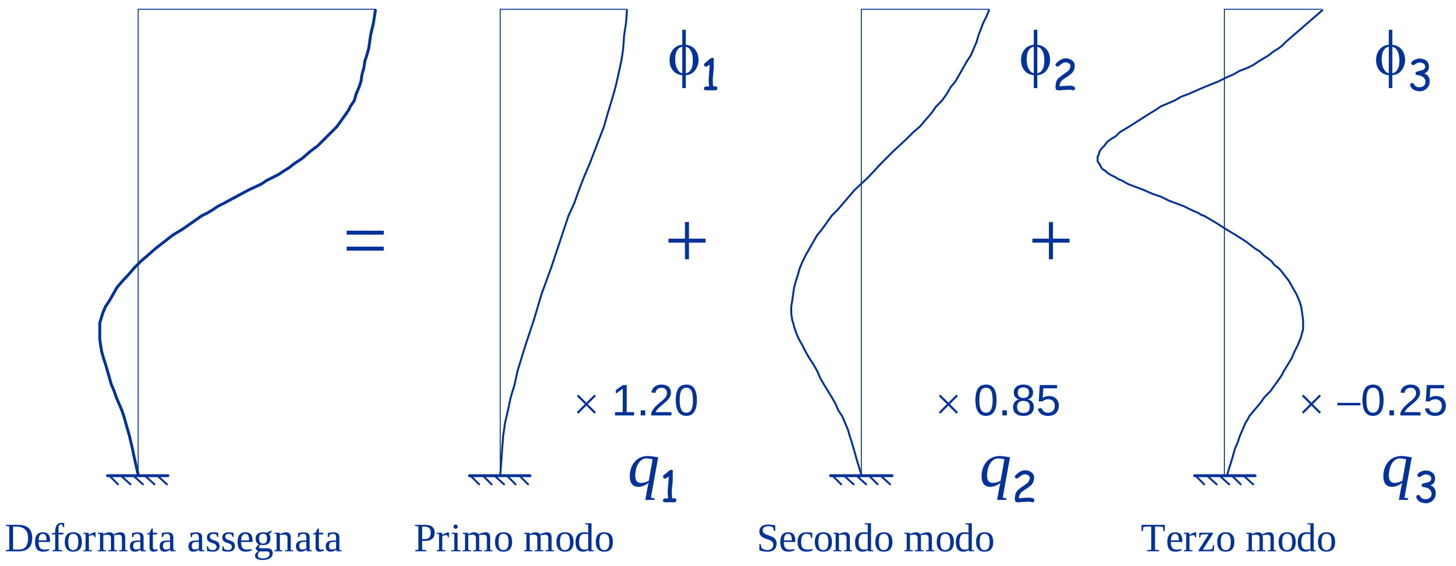
$$u_i(t) = \phi_{i,j}\ \cos(\omega_j\ t)$$

a condizione che sia $$\det(\mathbf{k} - \omega_j^2\ \mathbf{m}) = 0$$

Da questa si ricavano le frequenze angolari ω_j e quindi i periodi T_j (autovalori) e le deformate ϕ (autovettori)

Equazione del moto

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\, \mathbf{q}$$

Equazione del moto libero

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\,\mathbf{q} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = 0$$

Nelle matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice

Equazione del moto libero
con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\,\mathbf{q} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = 0$$

In molti casi anche la matrice $\mathbf{C}$ è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate
(sistemi classicamente smorzati)

Equazione del moto
(risposta ad un accelerogramma)

L'equazione del moto $\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\,\mathbf{u} = -\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$

diventa $\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = -\phi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}\,\mathbf{I}\,\ddot{u}_g$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_j + 2\,\xi_j\,\omega_j\,\dot{q}_j + \omega_j^2\,q_j = -\Gamma_j\,\ddot{u}_g$$

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\phi_{i,j}^2}$$

Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per Γ_j

Coefficiente di partecipazione modale:
indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante

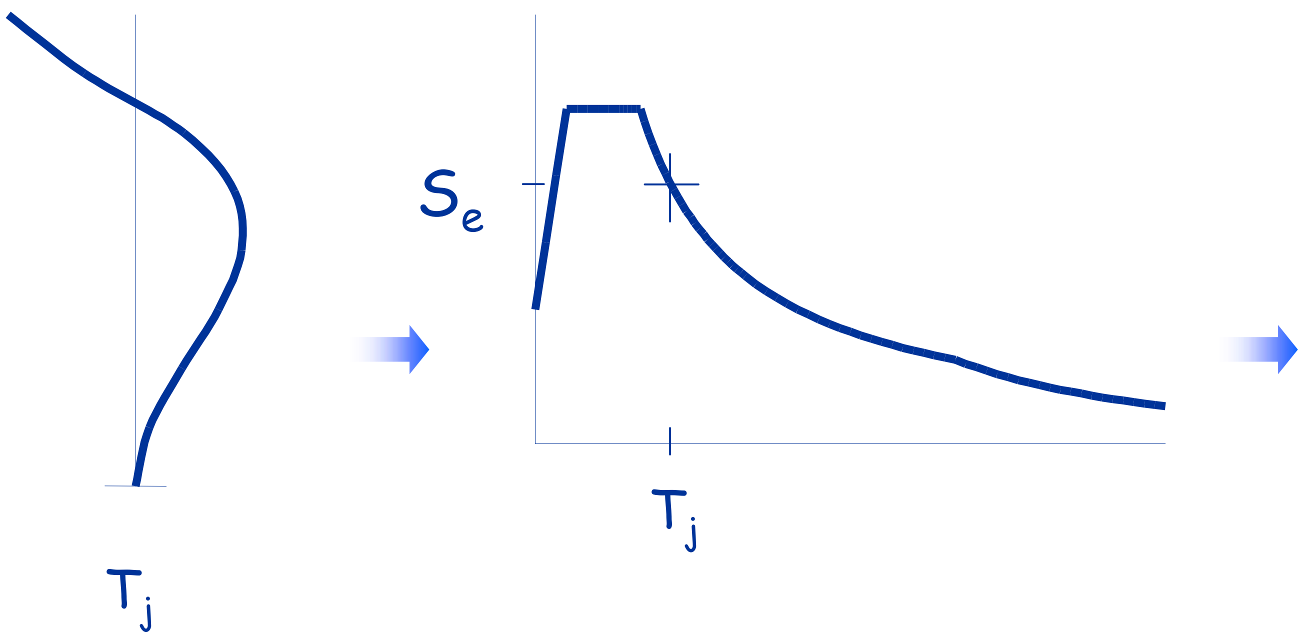
Analisi modale
con spettro di risposta

- La struttura che oscilla secondo uno dei suoi "modi" si comporta come un oscillatore semplice
- È possibile ricavare di conseguenza un insieme di forze e calcolare le sollecitazioni prodotte

- Il contributo di quel "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un coefficiente di partecipazione modale o – in maniera più chiara – in funzione della massa partecipante

Analisi modale
con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .



Forze

sollecitazioni

spostamenti

Contributo dei singoli modi

$S_e(T_j)$ = ordinata spettrale corrispondente al periodo T_j

Il taglio alla base corrispondente al modo j è

$$V_{b,j} = M_j^* \, S_e(T_j)$$

M_j^* è detta massa partecipante

$$M_j^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j} \, \Gamma_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \phi_{i,j}^2}$$

Analisi modale
con spettro di risposta

- La struttura che oscilla secondo uno dei suoi "modi" si comporta come un oscillatore semplice
- È possibile ricavare di conseguenza un insieme di forze e calcolare le sollecitazioni prodotte

- Il contributo di quel "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un coefficiente di partecipazione modale o – in maniera più chiara – in funzione della massa partecipante

- La somma delle masse partecipanti di tutti i modi è pari alla massa totale della struttura
(per questo motivo si parla in genere di masse partecipanti come percentuale della massa totale)

Analisi modale
con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
- CQC = combinazione quadratica completa

- Attenzione: nel fare la combinazione si perde il segno (che può essere utile);
  ma se c'è un modo prevalente si può assegnare a ciascun valore il segno che esso ha nel modo prevalente

Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:
- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

Considerazioni

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma

- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo

- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

Considerazioni

Negli schemi spaziali è più probabile avere modi con periodi molto vicini tra loro:

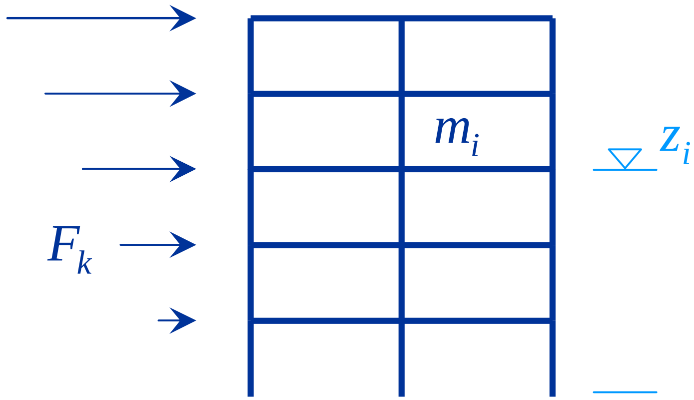
- in questo caso è opportuno usare la sovrapposizione quadratica completa (CQC)

Una buona impostazione progettuale deve mirare ad avere una struttura con impalcato rigido e con comportamento disaccoppiato (cioè minime rotazioni planimetriche)

Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k\, z_k \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i} S_e(T_1)$$



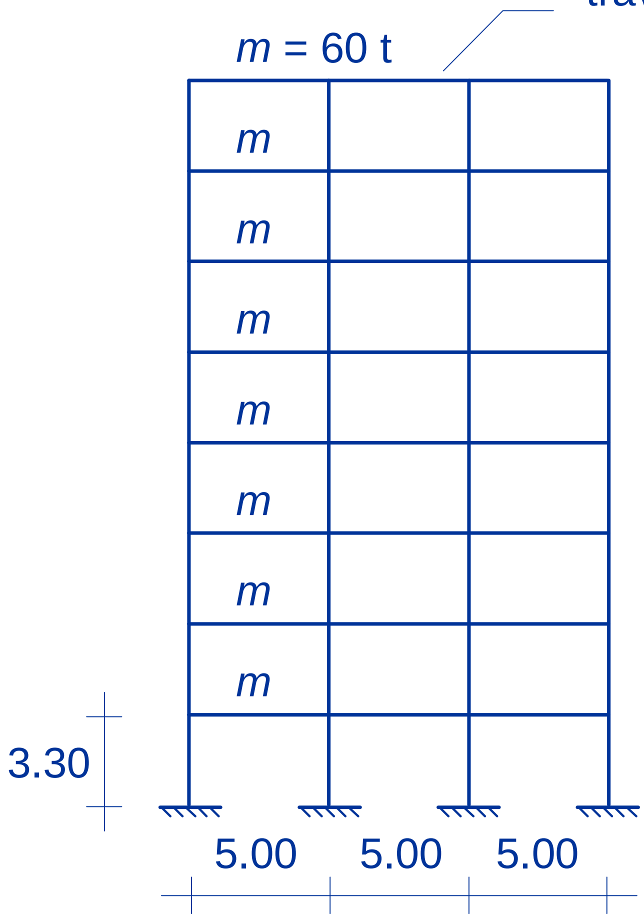
Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

$$T_1 = C_1\, H^{3/4}$$

Le forze possono essere ridotte con λ=0.85 se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

Confronto analisi statica - modale
Edificio con travi emergenti

trave emergente 30 × 50



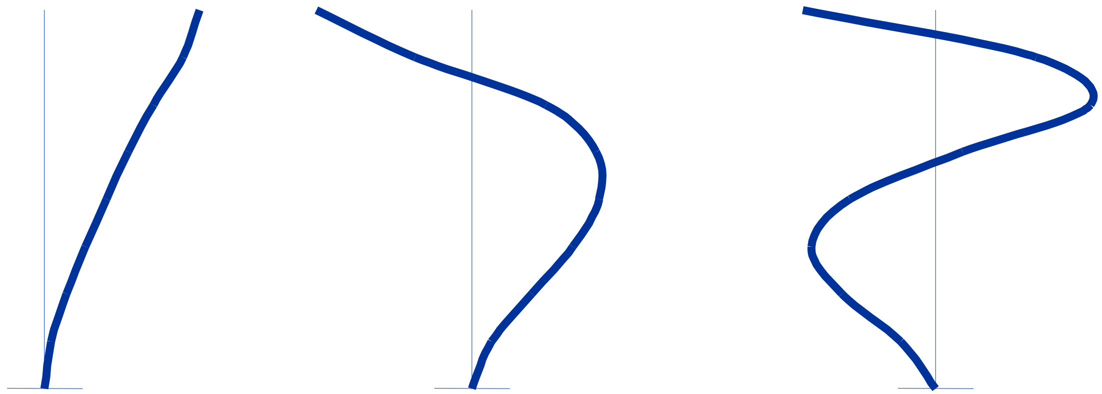
pilastri
30 × 30
30 × 30
30 × 40
30 × 50
30 × 60
30 × 70
30 × 80
30 × 90

Zona 3
$a_g = 0.15\ g$

Suolo B

Classe di duttilità B

Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti
Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.183 s	0.461 s	0.259 s
S_e	0.0484 g	0.1145 g	0.1145 g
M*/M	70.1 %	13.7 %	5.1 %

Forze statiche - modali [kN]
Edificio con travi emergenti

	modale			analisi
piano	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	40.0	-39.1	19.5	50.6
7	35.8	-14.4	-14.9	44.3
6	28.1	18.6	-22.8	38.0
5	21.7	31.3	-4.0	31.6
4	16.0	32.1	12.5	25.3
3	10.6	25.4	18.2	19.0
2	5.7	15.1	13.7	12.7
1	1.8	5.0	5.1	6.3

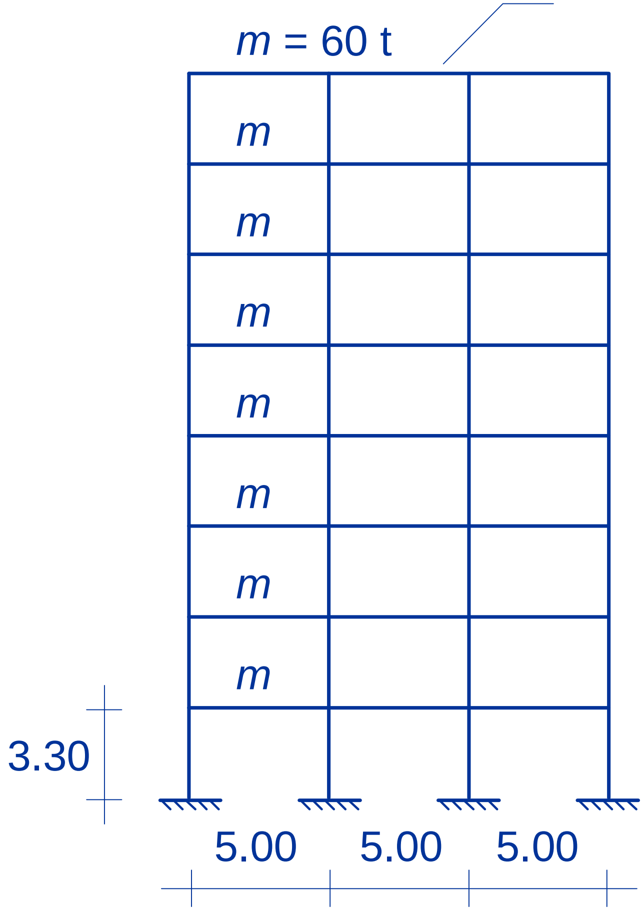
Tagli statici - modali [kN]
Edificio con travi emergenti

piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	59.2	50.6	-14.5
7	92.9	94.9	2.2
6	111.1	132.9	19.6
5	127.6	164.5	28.9
4	144.8	189.9	31.1
3	161.7	208.8	29.2
2	173.7	221.5	27.5
1	178.1	227.8	27.9

Confronto analisi statica - modale

Edificio con travi a spessore

trave a spessore 80 × 24



pilastri

30 × 30

30 × 30

30 × 40

30 × 50

30 × 60

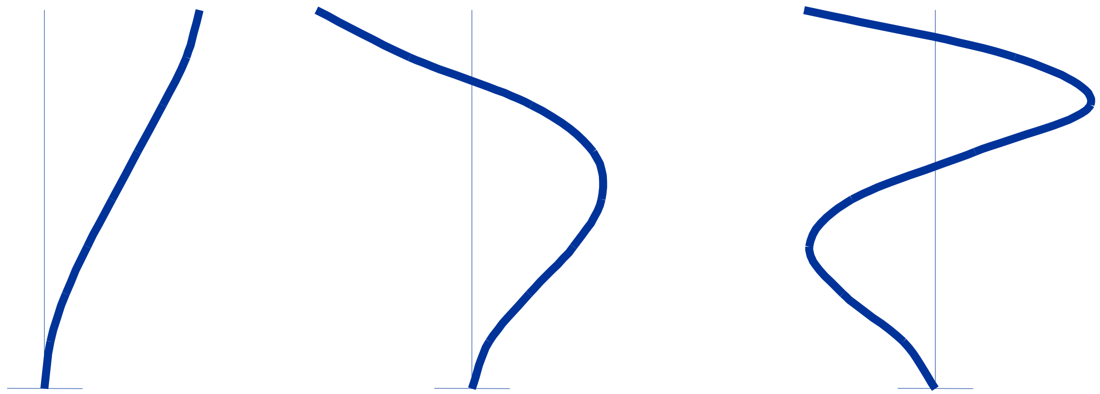
30 × 70

30 × 80

30 × 90

Periodi, accelerazioni spettrali, masse partecipanti

Edificio con travi emergenti



	Modo 1	Modo 2	Modo 3
T	1.738 s	0. 604 s	0. 328 s
S_e	0. 0329 g	0. 0947 g	0. 1145 g
M*/M	70.9 %	11.8 %	5.4 %

Forze statiche - modali [kN]

Edificio con travi a spessore

	modale			analisi
piano	modo 1	modo 2	modo 3	statica
8	26.3	-30.3	20.4	34.5
7	24.1	-12.2	-12.5	30.1
6	20.1	11.6	-24.2	25.8
5	15.9	23.6	-6.2	21.5
4	11.5	25.4	12.9	17.2
3	7.3	19.9	19.6	12.9
2	3.6	11.2	14.4	8.6
1	1.0	3.4	5.0	4.3

Tagli statici - modali [kN]
Edificio con travi a spessore

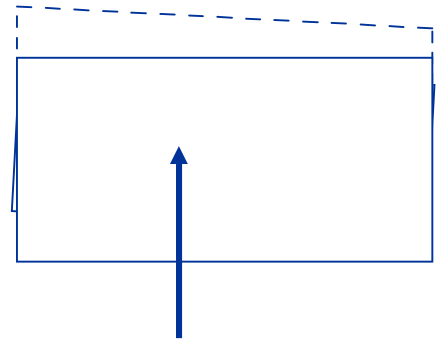
piano	analisi modale	analisi statica	differenza %
8	45.0	34.5	-23.4
7	66.4	64.6	-2.7
6	78.7	90.4	15.0
5	89.6	112.0	25.0
4	100.0	129.2	29.2
3	112.3	142.1	26.5
2	121.9	150.7	23.6
1	125.3	155.0	23.7

Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

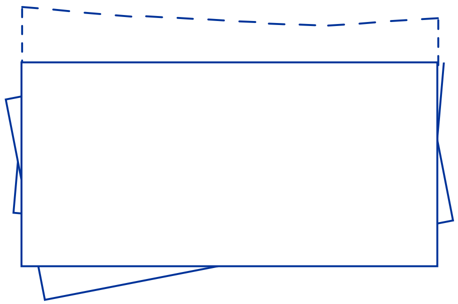
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con forti rotazioni, non va bene

Analisi modale



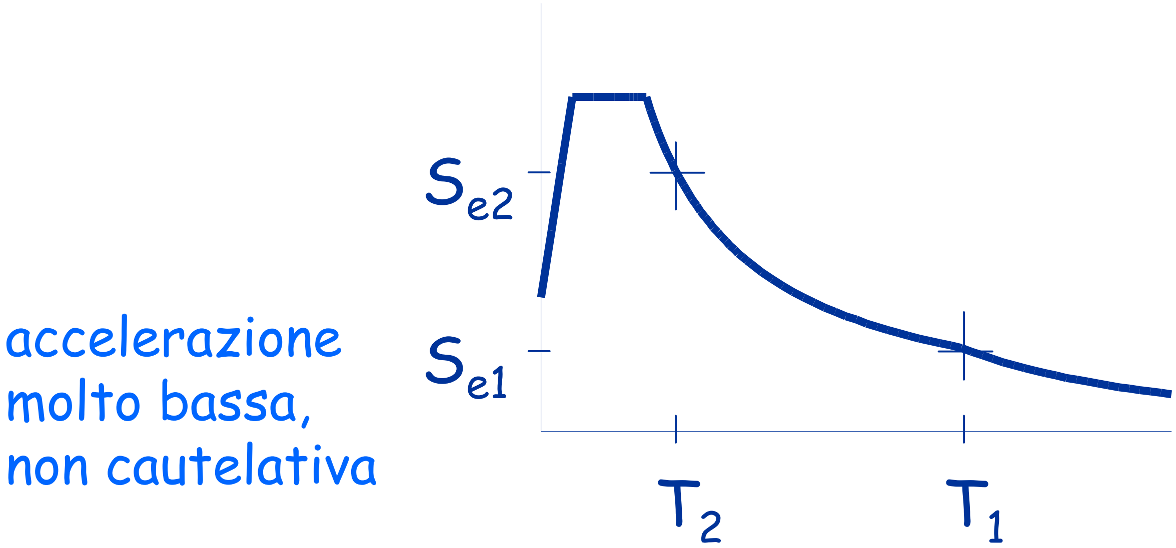
modo 1

modo 2

inviluppo

Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto



Analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica è cautelativa purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile (o, meglio, corretta con la formula di Rayleigh)

L'uso del coefficiente riduttivo λ rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

Analisi statica o analisi modale?

La norma vieta l'uso dell'analisi statica se:
- il periodo proprio supera 2.5 T_C
- la struttura è irregolare in altezza

Commento:

Il riferimento all'irregolarità in altezza non sembra coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

NTC08, punto 7.3.3.2

Analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)