

## Laboratorio di Costruzioni dell'Architettura 2

Stati limite di fessurazione

Siracusa, 27 maggio 2009

Edoardo M. Marino

## Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si prendono in considerazione due combinazioni di carico:

- Combinazione frequente
- Combinazione quasi permanente

NTC08, punti 4.1.2.2.4.1 e 4.1.2.2.4.2

2/59

## Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si deve tenere conto delle condizioni ambientali:

- Ordinarie
- Aggressive
- Molto Aggressive

NTC08, punto 4.1.2.2.4.3

3/59

## Condizioni ambientali

Condizioni ambientali	Classe di esposizione
Ordinarie	X0, XC1, XC2, <b>XC3</b> , XF1
Aggressive	XC4, XD1, XS1, XA1, XA2, XF2, XF3
Molto aggressive	XD2, XD3, XS2, XS3, XA3, XF4

NTC08, punto 4.1.2.2.4.3

4/59

## Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

Infine si deve tenere conto della sensibilità delle armature alla corrosione:

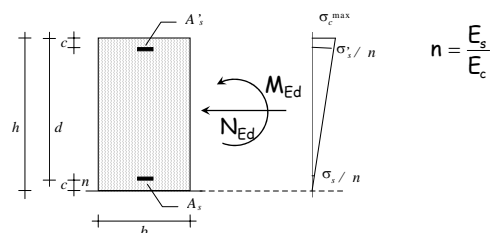
- Armature sensibili
- Armature poco sensibili (per c.a. ordinario)

NTC08, punto 4.1.2.2.4.4

5/59

## Stato limite di decompressione

Si raggiunge quando la tensione del bordo meno compresso è uguale a zero

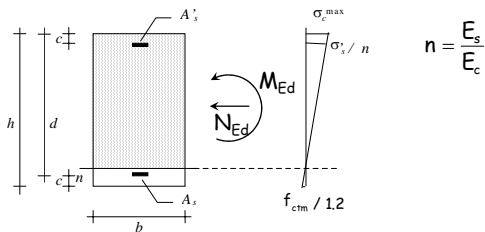


NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

6/59

## Stato limite di formazione delle fessure

Si raggiunge quando la tensione massima di trazione è pari al valore  $f_{ctm}/1.2 \approx f_{ctk}$



NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

7/59

## Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si raggiunge quando il valore di calcolo dell'ampiezza delle fessure  $w_d$  è pari a:

0.2 mm o 0.3 mm o 0.4 mm

Il valore limite dell'ampiezza delle fessure dipende da:

- Combinazione di carico
- Condizioni ambientali
- Sensibilità delle armature

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

8/59

## Verifiche a fessurazione per strutture con armature poco sensibili

Cond. Amb.	Comb. carico	Stato limite	$w_d$
Ordinarie	Frequente	Ap. fessure	< 0.4 mm
	Quasi perm.	Ap. Fessure	< 0.3 mm
Aggressive	Frequente	Ap. Fessure	< 0.3 mm
	Quasi perm.	Ap. fessure	< 0.2 mm
Molto Aggr.	Frequente	Ap. Fessure	< 0.2 mm
	Quasi perm.	Ap. fessure	< 0.2 mm

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

9/59

## Verifiche a fessurazione per strutture con armature sensibili

Cond. Amb.	Comb. carico	Stato limite	$w_d$
Ordinarie	Frequente	Ap. fessure	< 0.3 mm
	Quasi perm.	Ap. Fessure	< 0.2 mm
Aggressive	Frequente	Ap. Fessure	< 0.2 mm
	Quasi perm.	Decomp.	--
Molto Aggr.	Frequente	Form. Fessure	--
	Quasi perm.	Decomp.	--

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

10/59

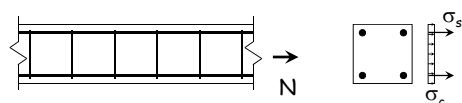
## Verifica dell'ampiezza delle fessure

## Comportamento prima della fessurazione

- Il comportamento dei materiali è elastico lineare
- Vi è perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo e le tensioni nell'acciaio sono n volte quelle del calcestruzzo

$$\sigma_s = n \sigma_c$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad \text{coefficiente di omogeneizzazione}$$



12/59

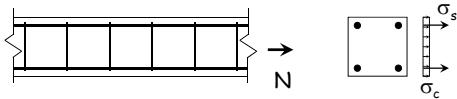
## Comportamento prima della fessurazione

Dall'equilibrio alla traslazione segue

$$N = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s = \sigma_c (A_c + n A_s)$$

e la tensione nel calcestruzzo vale

$$\sigma_c = \frac{N}{(A_c + n A_s)}$$



13/59

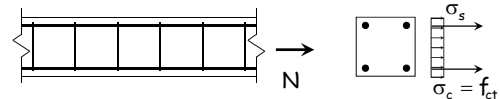
## Formazione della prima fessura (stato limite di fessurazione)

Le tensioni crescono in proporzione allo sforzo normale fino a quando

$$\sigma_c = \frac{N}{(A_c + n A_s)} = f_{ct} \quad \text{Resistenza a trazione del calcestruzzo}$$

... o quando

$$N = N_t = f_{ct} (A_c + n A_s) \quad \text{Sforzo normale di fessurazione}$$



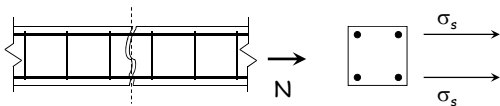
14/59

## Dopo la formazione della prima fessura

Nella sezione fessurata tutta la forza di trazione è portata dall'armatura

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \quad \dots \text{ può essere } \begin{matrix} \sigma_s < f_y \\ \sigma_s \geq f_y \end{matrix}$$

Cosa succede se  $\sigma_s \geq f_y$ ?



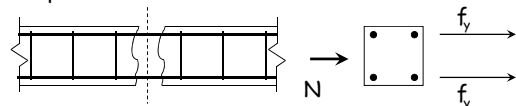
15/59

## Dopo la formazione della prima fessura

Nella sezione fessurata tutta la forza di trazione è portata dall'armatura

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \quad \dots \text{ può essere } \begin{matrix} \sigma_s < f_y \\ \sigma_s \geq f_y \end{matrix}$$

Non si aprono altre fessure, l'armatura subisce forti deformazioni plastiche nella zona fessurata e l'ampiezza della fessura sarà elevata



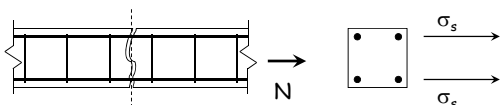
16/59

## Dopo la formazione della prima fessura

Nella sezione fessurata tutta la forza di trazione è portata dall'armatura

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \quad \dots \text{ può essere } \begin{matrix} \sigma_s < f_y \\ \sigma_s \geq f_y \end{matrix}$$

Cosa succede se  $\sigma_s < f_y$ ?

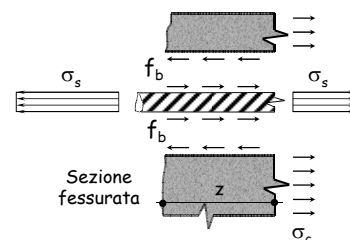


17/59

## Dopo la formazione della prima fessura

In prossimità della fessura, grazie all'aderenza:

- la tensione nell'armatura si riduce;
- le tensioni vengono trasferite al calcestruzzo.



18/59

## Dopo la formazione della prima fessura

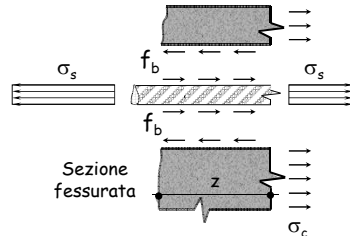
Dall'equilibrio del conico di calcestruzzo

$$\sigma_c A_{c,eff} = f_b z (m \pi \phi)$$

$m$  numero di barre

$\phi$  diametro delle barre

$A_{c,eff}$  area di calcestruzzo efficace

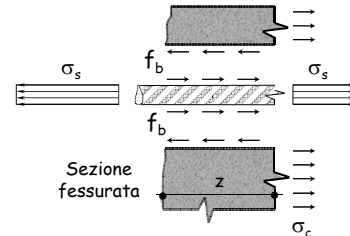


19/59

## Dopo la formazione della prima fessura

Dall'equilibrio del conico di calcestruzzo si ricava la tensione  $\sigma_c$  alla distanza  $z$  dalla fessura

$$\sigma_c = \frac{f_b z}{A_{c,eff}} (m \pi \phi)$$

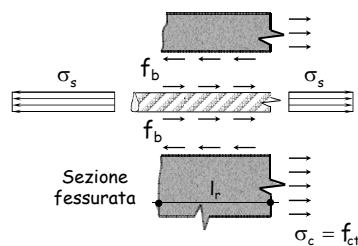


20/59

## Lunghezza di trasmissione ( $l_r$ )

Alla distanza  $z = l_r$  dalla fessura la tensione  $\sigma_c = f_{ct}$

$$f_{ct} = \frac{f_b l_r}{A_{c,eff}} (m \pi \phi) \Rightarrow l_r = \frac{A_{c,eff} f_{ct}}{m \pi \phi f_b}$$

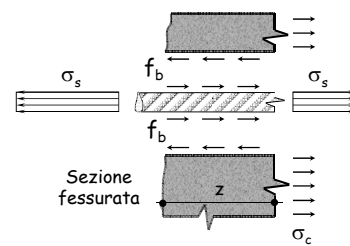


21/59

## Lunghezza di trasmissione ( $l_r$ )

La lunghezza di trasmissione si può scrivere come segue

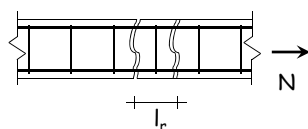
$$l_r = \frac{1}{4} \frac{f_{ct}}{f_b} \frac{\phi}{\rho_{eff}} \quad \text{con } \rho_{eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$$



22/59

## Apertura delle successive fessure

... e si apre un'altra fessura.



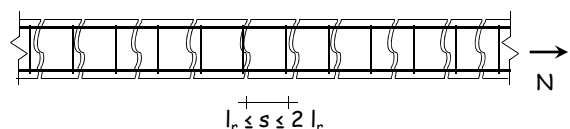
23/59

## Distanza tra le fessure

Le fessure si propagano a sforzo normale praticamente costante.

La distanza  $s$  tra due fessure successive è sempre compresa tra  $l_r$  e  $2l_r$ .

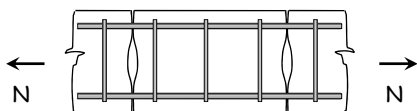
$$s_{r,max} = 2l_r = \frac{1}{2} \frac{f_{ct}}{f_b} \frac{\phi}{\rho_{eff}}$$



24/59

### Comportamento dopo la fessurazione

Nel concio tra due fessure, le deformazioni crescono nell'acciaio e si riducono nel calcestruzzo causando l'apertura delle fessure.

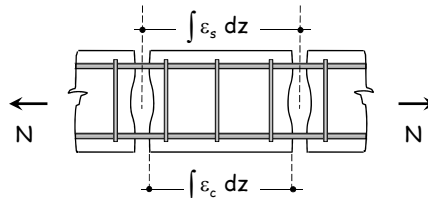


25/59

### Comportamento dopo la fessurazione

Nel concio tra due fessure, le deformazioni crescono nell'acciaio e si riducono nel calcestruzzo causando l'apertura delle fessure.

$$w_d = \int_0^{s_{r,max}} (\epsilon_s - \epsilon_c) dz$$

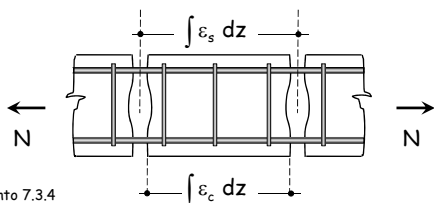


26/59

### Ampiezza delle fessure

Più semplicemente l'ampiezza delle fessure si può calcolare facendo riferimento a i valori medi di deformazione.

$$w_d = (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) s_{r,max}$$

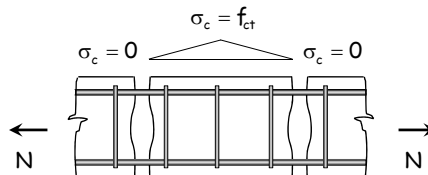


EC2, punto 7.3.4

27/59

### Calcolo della deformazione media del calcestruzzo

Le tensioni nel calcestruzzo variano tra 0 ed  $f_{ct}$

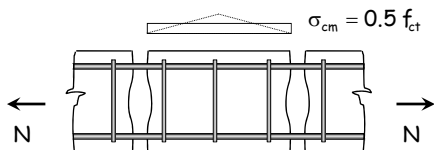


28/59

### Calcolo della deformazione media del calcestruzzo

Le tensioni nel calcestruzzo variano tra 0 ed  $f_{ct}$ , dunque la deformazione media è pari a:

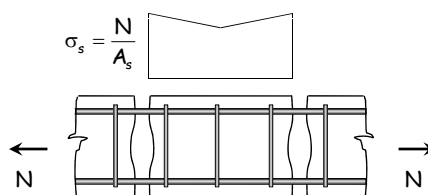
$$\epsilon_{cm} = \frac{\sigma_{cm}}{E_{cm}} = 0.5 \frac{f_{ct}}{E_{cm}}$$



29/59

### Calcolo della deformazione media dell'armatura

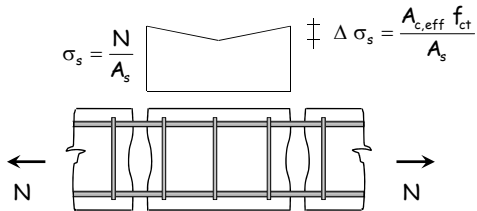
Nella sezione fessurata reagisce solo l'armatura e la tensione  $\sigma_s$  è massima



30/59

### Calcolo della deformazione media dell'armatura

Le tensioni dell'armatura si riduce nella parte interna del conco perché il calcestruzzo assorbe parte della forza di trazione.

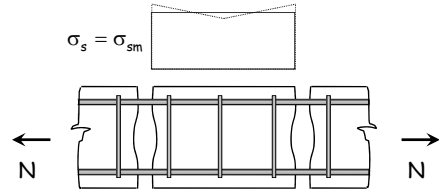


31/59

### Calcolo della deformazione media dell'armatura

Le tensioni media dell'armatura vale:

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - \frac{\Delta \sigma_s}{2} = \sigma_s \left( 1 - 0.5 \frac{A_{c,eff} f_{ct}}{A_s \sigma_s} \right)$$

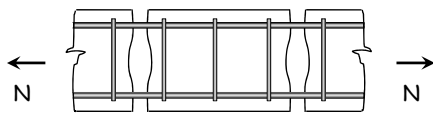


32/59

### Calcolo della deformazione media dell'armatura

... e la deformazione media nell'armatura vale:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - 0.5 \frac{A_{c,eff} f_{ct}}{A_s \sigma_s} \right)$$



33/59

### Differenza tra le deformazioni medie

La differenza tra le deformazioni medie vale

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - 0.5 \frac{A_{c,eff} f_{ct}}{A_s \sigma_s} \right) - 0.5 \frac{f_{ct}}{E_{cm}}$$

... e può essere espressa anche come segue

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - 0.5 \frac{A_{c,eff} f_{ct}}{A_s \sigma_s} \right] \left( 1 + \frac{E_s}{E_{cm}} \frac{A_s}{A_{c,eff}} \right) \frac{1}{\rho_{eff}}$$

34/59

### Ampiezza delle fessure

$$w_d = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) s_{r,max}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - 0.5 \frac{f_{ct}}{\sigma_s \rho_{eff}} \left( 1 + \frac{E_s}{E_{cm}} \rho_{eff} \right) \right]$$

$$s_{r,max} = 2 l_r = \frac{1}{2} \frac{f_{ct}}{f_b} \frac{\phi}{\rho_{eff}}$$

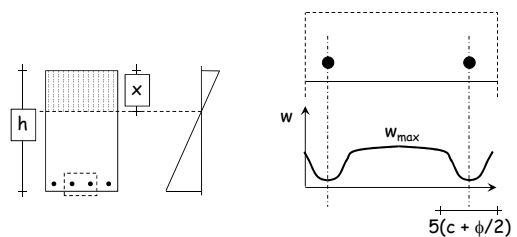
L'ampiezza della fessura cresce col diametro delle barre

N.B. La normativa fornisce formule un po' diverse

35/59

### Ampiezza della fessura tra le barre

L'ampiezza della fessura cresce con la distanza tra le barre e si stabilizza su un valore massimo quando la distanza tra le barre è maggiore di  $5(c + \phi/2)$ .



EC2, punto 7.3.4

36/59

## Verifica dell'ampiezza delle fessure senza calcolo diretto

## Verifica a fessurazione senza calcolo diretto

La verifica dell'ampiezza delle fessure  $w_d$  indotte principalmente da carichi può essere eseguita omettendo il calcolo esplicito se:

- L'armatura tesa è non inferiore ad un valore minimo  $A_{s,min}$
- Il diametro delle barre è non superiore ad un valore massimo  $\phi_{max}$ , o ...
- ... la distanza tra le barre è non superiore ad un valore massimo  $d_{max}$

EC2, punto 7.3.2 e 7.3.3

38/59

## Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s}$$

$k_c$  dipende dalla distribuzione delle tensioni

$A_{ct}$  area di calcestruzzo nella zona tesa

$f_{ct,eff}$  resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio

EC2, punto 7.3.2

39/59

## Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s}$$

$k_c$  dipende dalla distribuzione delle tensioni  
vale 1.0 per trazione

0.4 per flessione

valori intermedi per flessione composta

$A_{ct}$  area di calcestruzzo nella zona tesa

$f_{ct,eff}$  resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio

EC2, punto 7.3.2

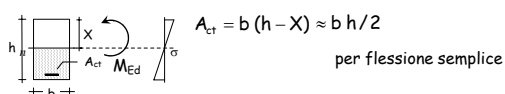
40/59

## Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s}$$

$k_c$  dipende dalla distribuzione delle tensioni

$A_{ct}$  area di calcestruzzo nella zona tesa



$f_{ct,eff}$  resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio

EC2, punto 7.3.2

41/59

## Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s}$$

$k_c$  dipende dalla distribuzione delle tensioni

$A_{ct}$  area di calcestruzzo nella zona tesa

$f_{ct,eff}$  resistenza a trazione efficace del calcestruzzo  
si assume pari a  $f_{ctm}$  o ad un valore minore se la fessurazione è prevista prima di 28 giorni

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio

EC2, punto 7.3.2

42/59

### Armatatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s} \approx 0.4 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \frac{b h}{2} \approx 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \quad \text{Nel caso di flessione}$$

$k_c$  dipende dalla distribuzione delle tensioni

$A_{ct}$  area di calcestruzzo nella zona tesa

$f_{ct,eff}$  resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio  
si assume non superiore ad  $f_{yk}$

EC2, punto 7.3.2

43/59

### Diametro massimo delle barre

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio considerando la sezione fessurata per la condizione di carico pertinente

EC2, punto 7.3.3

44/59

### Diametro massimo delle barre

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$$\phi_{max} = \phi_{max}^* \frac{f_{ct,eff}}{2.9} \frac{k_c (h - x')}{2(h - d)} \quad \text{per flessione semplice}$$

EC2, punto 7.3.3

45/59

### Diametro massimo delle barre

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$$\phi_{max} \approx \phi_{max}^* \frac{f_{ct,eff}}{2.9} \frac{k_c h}{4c} \quad \text{per flessione semplice}$$

EC2, punto 7.3.3

46/59

### Distanza massima tra le barre

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio considerando la sezione fessurata per la condizione di carico pertinente

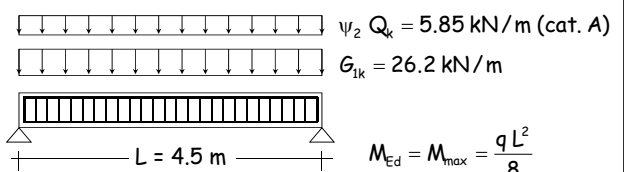
EC2, punto 7.3.3

47/59

### Esempio numerico combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione 30x50 Calcestruzzo C25/30  
Armature  $A_s = 3\varnothing 20 + 1\varnothing 14$  Acciaio B450C  
 $A'_s = 2\varnothing 14$



48/59



### Esempio numerico combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione 30x50 Calcestruzzo C25/30  
Armature  $A_s = 3\varnothing 20 + 1\varnothing 14$  Acciaio B450C  
 $A'_s = 2\varnothing 14$

Procedura:

- 1 - determinazione dell'armatura tesa minima
- 2 - determinazione della tensione di lavoro dell'armatura
- 3 - determinazione della distanza massima tra le barre o il diametro massimo

49/59

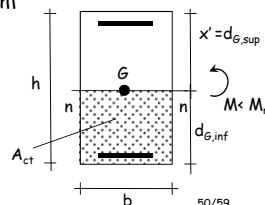
### Calcolo dell'armatura tesa minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s}$$

per flessione semplice

$$A_{ct} = b(h - x') = b d_{G,inf} = 30 \times 24.34 = 730.2 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow \approx b h/2 = 30 \times 25 = 750 \text{ cm}^2$$



50/59

### Calcolo dell'armatura tesa minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c f_{ct,eff} A_{ct}}{\sigma_s} = \frac{0.4 \times 2.56 \times 730.2}{450} = 1.66 \text{ cm}^2$$

$$A_{ct} = 730 \text{ cm}^2$$

$$k_c = 0.4 \text{ (flessione)}$$

$$f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2.56 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

L'armatura disposta è ben maggiore,  $A_s = 10.96 \text{ cm}^2$

51/59

### Distanza massima tra le barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

$\sigma_s$  tensione nell'acciaio considerando la sezione fessurata per la condizione di carico pertinente (combinazione quasi permanente nel caso in esame)

52/59

### Distanza massima tra le barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

$$\sigma_s = 187.2 \text{ MPa}$$

Da verifica su tensioni in esercizio

53/59

### Distanza massima tra le barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

$$\sigma_s = 187.2 \text{ MPa}$$

Per armature poco sensibili e condizioni ambientali ordinarie deve essere  $w_d < 0.3 \text{ mm}$

54/59

### Distanza massima tra le barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

La distanza massima tra le barre deve essere non superiore di  $(300+250)/2=275 \text{ mm}$

Nella sezione in esame vi sono 4 barre ad una distanza di circa 70 mm e la verifica è soddisfatta

55/59

... o in alternativa

### Diametro massimo delle barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$\sigma_s = 187.2 \text{ MPa}$

Per armature poco sensibili e condizioni ambientali ordinarie deve essere  $w_d < 0.3 \text{ mm}$

57/59

### Diametro massimo delle barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$$\phi_{\max}^* = \frac{32 + 25}{2} = 28.5 \text{ mm}$$

58/59

### Diametro massimo delle barre combinazione di carico quasi permanente

$\sigma_s$	$w_d \leq 0.4 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.3 \text{ mm}$	$w_d \leq 0.2 \text{ mm}$
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$$\phi_{\max} = \phi_{\max}^* \frac{f_{ct,eff}}{2.9} \frac{k_c}{4} \frac{h}{c} = 28.5 \times \frac{2.56}{2.9} \times \frac{0.4 \times 50}{4 \times 5} = 25.2 \text{ mm}$$

Nella sezione in esame sono state utilizzate barre  $\phi 20$  e la verifica è soddisfatta

59/59