

Trave su suolo elastico alla Winkler

Aurelio Ghersi

1. Suolo elastico alla Winkler

Per suolo elastico si intende un mezzo che, a contatto con la superficie di un corpo, esercita su di esso un'azione p , ortogonale alla superficie, che dipende dallo spostamento v che la superficie ha avuto in tale direzione. In particolare il suolo elastico si dice alla Winkler se l'azione in questione dipende in maniera lineare dallo spostamento, secondo la legge

$$p = -k v \quad (1)$$

in cui il segno meno indica che l'azione è sempre opposta allo spostamento. La costante di sottofondo k dimensionalmente è una forza diviso una lunghezza al cubo [F L^{-3}], ed è solitamente espressa in N mm^{-3} . In sostanza, quindi, un suolo alla Winkler può essere visto come un insieme di molle linearmente elastiche, indipendenti l'una dall'altra (si parla, a volte, di "letto di molle").

Il modello di suolo elastico alla Winkler è utilizzato principalmente per schematizzare il comportamento del terreno a contatto con elementi di fondazione. Dal punto di vista geotecnico è un modello molto semplificato, perché

- il terreno non si comporta in maniera perfettamente elastica, ma ha un comportamento elastoplastico;
- non è vero che la reazione sia dipendente solo dallo spostamento del singolo punto; in realtà la reazione del terreno dipende anche dallo spostamento di tutti i punti della superficie di contatto tra il corpo e il suolo, ad esso adiacenti.

Per schematizzare il terreno esistono altri modelli molto più sofisticati, come quello del semispazio elastico omogeneo e isotropo (modello di Boussinesq), ma il vantaggio del modello di Winkler sta nel rapporto tra semplicità di esecuzione e attendibilità dei risultati.

Il modello di suolo elastico alla Winkler non è però da associare al solo caso del contatto tra fondazione e terreno, ma è utilizzabile nella schematizzazione di altre situazioni di interesse pratico. Ad esempio:

- *serbatoio circolare*: nel caso di un serbatoio circolare le fibre anulari, soggette alla pressione del fluido interno (carico a simmetria radiale), tendono a variare di diametro in maniera proporzionale al carico. Le fibre longitudinali si comportano come travi su un suolo elastico, mentre le fibre anulari fungono da suolo (in questo caso l'ipotesi di elasticità lineare del suolo è più verosimile);
- *travetto di ripartizione di un solaio in cemento armato*: anche questo può essere studiato come una trave su suolo elastico, dove il letto di molle è costituito dall'insieme dei travetti del solaio.

Osservazioni sull'uso del modello di suolo alla Winkler per il terreno

Il terreno, fatta eccezione per le argille che offrono una minima resistenza a trazione, reagisce solo a compressione. A rigore si dovrebbe quindi utilizzare un modello di suolo alla Winkler con resistenza unilaterale. In tal caso la risoluzione è più complicata, perché, in genere, non si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Salvo specifiche indicazioni, in quanto segue si intenderà che il suolo reagisce anche a trazione.

2. Trave su suolo elastico

Fermo restando che è possibile considerare elementi bidimensionali su suolo elastico (piastre di fondazione), è interessante soffermarsi su elementi che, nella superficie di contatto con il suolo, hanno una dimensione preponderante rispetto all'altra; si parlerà quindi di *travi su suolo elastico*. Per una trave su suolo elastico, di larghezza b , il suolo trasmette un carico q per unità di lunghezza che vale

$$q = -k b v \quad (2)$$

Anche in questo caso il segno meno sottolinea che la reazione del terreno è sempre opposta allo spostamento.

La trave su suolo elastico è in genere considerata come deformabile (*trave elastica* su suolo elastico). Nei casi in cui la deformazione della trave è piccola, cioè gli spostamenti relativi sono trascurabili

rispetto agli spostamenti assoluti, si potrà assumere il modello di *trave rigida* su suolo elastico. Questo modello è utilizzabile solo se la trave risulterebbe labile in assenza del letto di molle costituito dal terreno (Fig. 1).

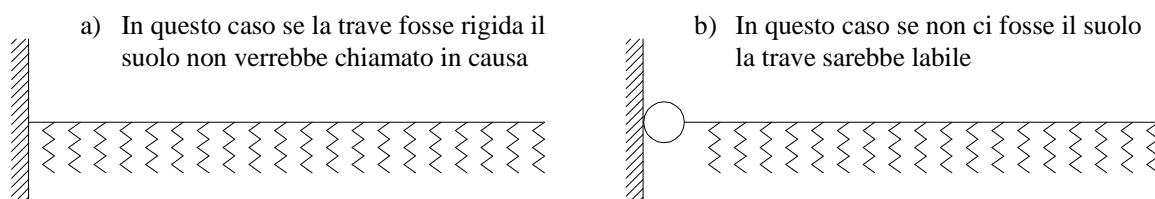


Fig. 1. Casi in cui la trave non può (a) o può (b) essere considerata rigida

3. Trave rigida su suolo elastico

Nel caso di trave rigida su suolo elastico lo schema viene risolto esclusivamente con condizioni di equilibrio. Si procede disegnando innanzitutto una deformata rigida generica, compatibile con gli eventuali vincoli esterni e interni, ed indicando le reazioni di questi vincoli. Le incognite del problema sono i parametri necessari per individuare la deformata rigida e le reazioni dei vincoli. Il numero di incognite è sempre pari a due volte il numero di tratti distinti in cui è divisa la struttura (con “tratti distinti” si intende tratti rigidi separati da sconnessioni interne). Ad esempio per la trave in figura 2, costituita da un unico tratto (senza sconnessioni interne) e priva di vincoli esterni, sono sufficienti due parametri, che possono essere gli spostamenti dei due estremi (v_A e v_B) oppure lo spostamento di un estremo e l'angolo di rotazione (v_A e ϕ_A).

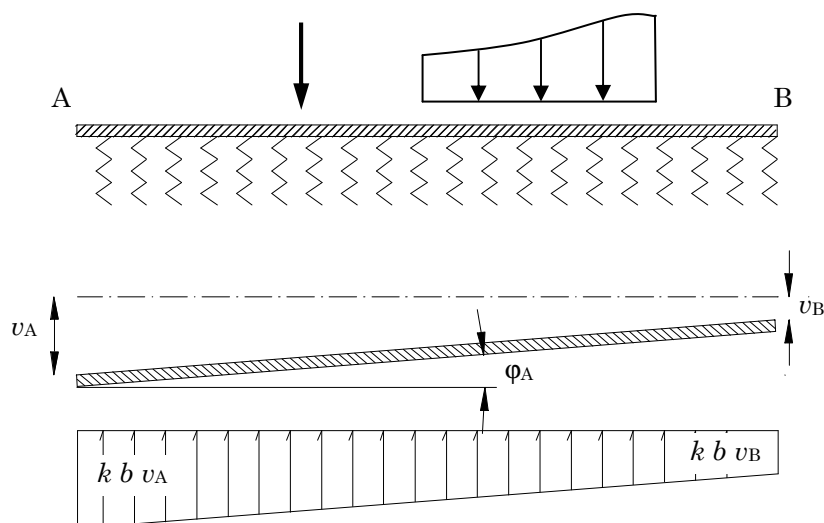


Fig. 2. Trave con unico tratto rigido

Alcuni semplici esempi

Trave rigida su suolo elastico con carico concentrato

Si consideri lo schema di figura 3. In questo caso, per la simmetria, il diagramma degli abbassamenti è uniforme, come anche la reazione del terreno. È sufficiente una sola condizione di equilibrio alla traslazione per determinare gli abbassamenti

$$F = k b v_1 L \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{F}{k b L} \quad (3)$$

Tolto il terreno e sostituita ad esso la sua reazione si ha uno schema labile ma equilibrato per il quale, attraverso condizioni di equilibrio, si può determinare l'andamento del taglio e del momento flettente sezione per sezione.

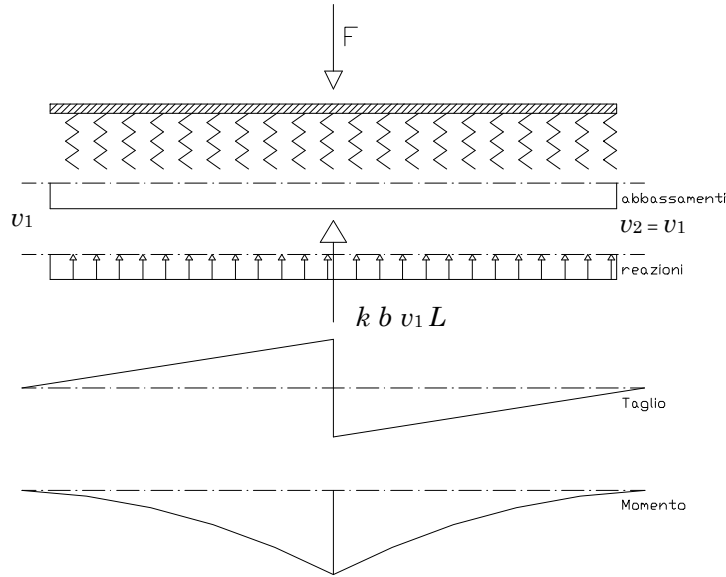


Fig. 3. Trave rigida con forza concentrata in mezzeria

Trave rigida su suolo elastico con carico linearmente variabile

In questo caso (Fig. 4) il diagramma delle reazioni del terreno deve essere anch'esso lineare con risultante coincidente e direttamente opposta alla risultante dei carichi. In questo caso i diagrammi del momento flettente e del taglio sono nulli.

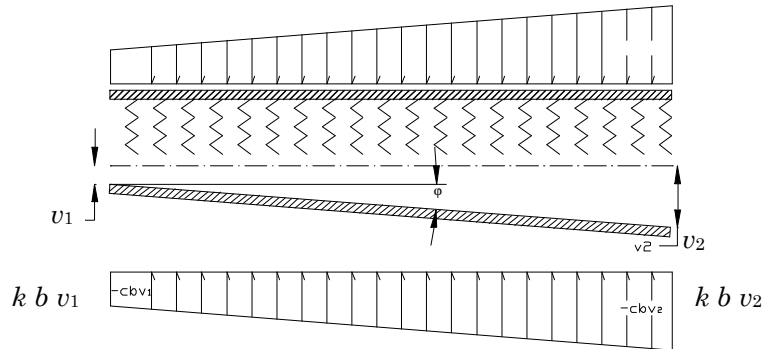


Fig. 4. Trave rigida con carico linearmente variabile

Trave rigida su suolo elastico con carico concentrato non applicato in mezzeria

Se il carico concentrato è applicato in un punto qualsiasi della trave si ha lo schema di figura 5.

Il diagramma delle reazioni ha forma di trapezio. Si consiglia di scomporlo sempre in due carichi triangolari (piuttosto che in un rettangolo ed in un triangolo). Si indicano con R_1 ed R_2 le risultanti rispettivamente della porzione triangolare di sinistra e di destra, applicate a $L/3$ e a $2L/3$ del diagramma delle reazioni, che valgono

$$R_1 = \frac{c b v_1 L}{2} \quad R_2 = \frac{c b v_2 L}{2} \quad (4)$$

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto Q si ha

$$-F \left(a - \frac{2}{3} L \right) - R_1 \frac{1}{3} L = 0 \quad (5)$$

mentre per l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto P si ha

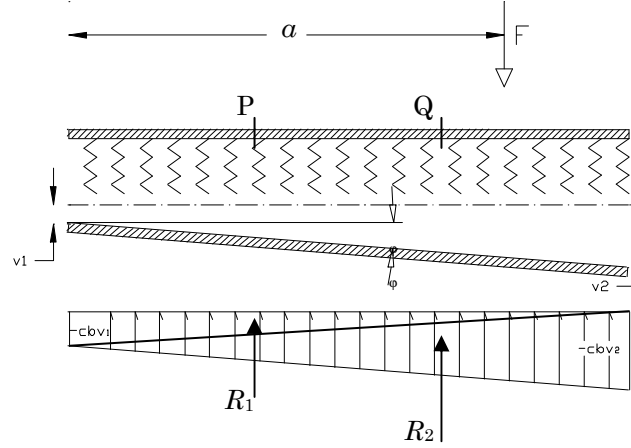


Fig. 5. Trave rigida con forza concentrata non applicata in mezzeria

$$-F \left(a - \frac{1}{3}L \right) + R_2 \frac{1}{3}L = 0 \quad (6)$$

Dalle (5) e (6) si ottengono immediatamente R_1 ed R_2 e utilizzando le (4), si ottengono, le soluzioni

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2F}{c b L} \left(\frac{3a}{L} - 2 \right) \\ v_2 &= \frac{2F}{c b L} \left(\frac{3a}{L} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Nel caso in cui la forza viene applicata ad un estremo si hanno diagrammi degli spostamenti e delle reazioni intrecciati, il che è compatibile all'ipotesi di terreno come vincolo bilatero.

Nel caso in cui il terreno non reagisce a trazione (Fig. 6) le espressioni (7) sono valide fino a quando

$$\frac{L}{3} \leq a \leq \frac{2L}{3} \quad (8)$$

Se questa condizione non si verifica è necessario riscrivere le condizioni di equilibrio alla rotazione e alla traslazione, considerando il terreno non reagente a trazione.

Nella stessa ipotesi sul terreno, in presenza di una coppia, non possono esistere configurazioni di equilibrio.

Si può concludere che uno schema con una forza applicata in un punto qualsiasi è equilibrato anche quando il terreno non reagisce a trazione; se si ha una forza agente a un estremo, oppure una coppia, il terreno che reagisce in un solo verso non è in grado di equilibrare il carico.

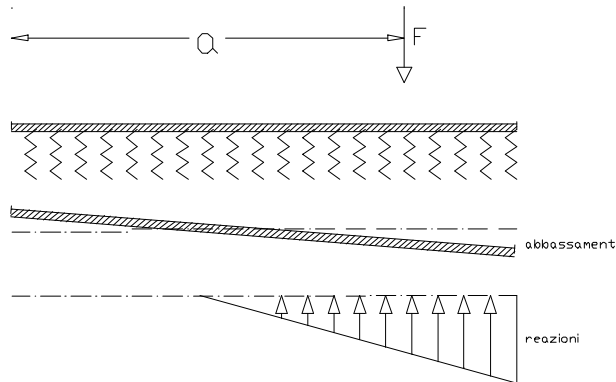


Fig. 6. Trave rigida con forza concentrata non applicata in mezzeria su suolo non reagente a trazione

4. Travi elastiche su suolo elastico

Quando si considera la trave deformabile occorre tenere conto in maniera opportuna della reazione del terreno, scrivendo le relazioni elastiche che esistono tra componenti di movimento e caratteristiche della sollecitazione.

L'equazione della linea elastica in assenza della deformabilità tagliante e di carichi flettenti distribuiti è

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI} \quad (9)$$

La (9) vale in generale per una trave, una volta assegnata la legge di carico, e in assenza di discontinuità, vale cioè per tratti compresi tra vincoli interni ed esterni ed azioni concentrate una volta definite le condizioni al contorno.

In presenza del suolo elastico l'espressione della (9) cambia, in considerazione del fatto che, punto per punto, la legge di carico è

$$q(z) = q'(z) - k b v(z) \quad (10)$$

sostituendo (e trascurando sempre la deformabilità a taglio e la presenza di azioni flettenti distribuite) si ha

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{k b}{EI} v = \frac{q'}{EI} \quad (11)$$

Si è soliti porre $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k b}{4 EI}}$. Così facendo la (11) diventa

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4 \lambda^4 v = \frac{q'}{EI} \quad (12)$$

La soluzione della (12) è data dalla somma tra la soluzione dell'equazione omogenea associata (integrale generale) e un integrale particolare (funzione del tipo di carico).

Soluzione dell'omogenea associata

L'equazione omogenea associata alla (12) è

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4 \lambda^4 v = 0 \quad (13)$$

che è valida in tutti quei casi in cui il carico distribuito risulti nullo. Tale equazione può essere scritta per ogni tratto di trave che non presenti discontinuità, e può essere risolta una volta determinate quattro condizioni al contorno.

La soluzione generale della (13) è

$$v(z) = C_1 e^{\lambda z} \sin \lambda z + C_2 e^{\lambda z} \cos \lambda z + C_3 e^{-\lambda z} \sin \lambda z + C_4 e^{-\lambda z} \cos \lambda z \quad (14)$$

La derivata della (14) fornisce la rotazione sezione per sezione

$$v'(z) = C_1 \lambda e^{\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) + C_2 \lambda e^{\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) + C_3 \lambda e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) + C_4 \lambda e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z - \cos \lambda z) = -\varphi \quad (15)$$

La derivata seconda è in relazione al momento flettente, ed è

$$v''(z) = 2 C_1 \lambda^2 e^{\lambda z} \cos \lambda z - 2 C_2 \lambda^2 e^{\lambda z} \sin \lambda z - 2 C_3 \lambda^2 e^{-\lambda z} \cos \lambda z + 2 C_4 \lambda^2 e^{-\lambda z} \sin \lambda z = -\frac{M}{EI} \quad (16)$$

La derivata terza è legata al taglio

$$v'''(z) = 2 C_1 \lambda^3 e^{\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) + 2 C_2 \lambda^3 e^{\lambda z} (-\sin \lambda z - \cos \lambda z) + 2 C_3 \lambda^3 e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) + 2 C_4 \lambda^3 e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) = -\frac{V}{EI} \quad (17)$$

Derivando ulteriormente la (17) si ritrova la (13).

Soluzioni particolari

Si devono determinare delle soluzioni v_p da sommare alla (13) prima di eseguire le derivate successive per determinare rotazioni, momento e taglio.

Se v_p è un polinomio di grado inferiore a quattro allora $\frac{d^4 v_p}{dz^4} = 0$, quindi per le diverse forme di carico si hanno i risultati riportati di seguito.

Carico distribuito costante

In presenza di un carico distribuito costante $q(z) = q_0$ si ha:

$$4 \lambda^4 v_p = \frac{q_0}{EI} \quad (18)$$

dalla quale, tenuto conto dell'espressione di λ , si ricava:

$$v_p = \frac{q_0}{4 \lambda^4 EI} = \frac{q_0}{k b} \quad (19)$$

Carico con legge lineare

In presenza di un carico distribuito avente legge lineare $q(z) = q_0 + q_1 z$ si ha

$$4 \lambda^4 v_p = \frac{q_0 + q_1 z}{EI} \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{q_0 + q_1 z}{4 \lambda^4 EI} = \frac{q_0 + q_1 z}{k b} \quad (20)$$

Condizioni al contorno

Per la risoluzione di una trave su suolo elastico è necessario riconoscere i tratti da cui è formata, individuando le discontinuità rappresentate dai vincoli esterni, interni e dalle azioni concentrate. Per ciascun tratto è possibile, poi, scrivere la legge (13), e la soluzione generale (14), eventualmente con l'aggiunta della soluzione particolare in dipendenza della legge di carico.

Per ciascun tratto, quindi sono note – derivate della (14) – le espressioni della rotazione, del momento flettente e del taglio, a meno di quattro costanti da determinarsi mediante le condizioni al contorno. Quindi sarà necessario scrivere quattro condizioni al contorno di ogni tratto di trave, dove è possibile imporre valori ai parametri di spostamento o alle caratteristiche della sollecitazione.

Per la risoluzione di una trave su suolo elastico composta da N tratti saranno dunque necessarie $4N$ equazioni nelle incognite $C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots, C_{N1}, C_{N2}, C_{N3}, C_{N4}$.

Alcuni esempi

Trave elastica con spostamenti e rotazioni di estremità assegnati

È lo schema base da analizzare per costruire la matrice di rigidezza di un'asta su suolo elastico alla Winkler (si veda il libro A. Ghersi, Analisi matriciale di strutture intelaiate, CUEN, Napoli, 1990; rispetto alla attuale trattazione si può notare nel libro una differenza di segni dovuta alla diversa scelta degli assi di riferimento).

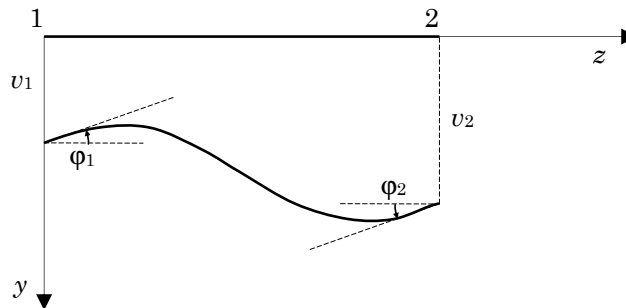


Fig. 7. Trave elastica con spostamenti e rotazioni di estremità assegnati (nota: le molle non sono disegnate)

Nella figura 7 sono mostrati le rotazioni e gli spostamenti di estremità, tutti indicati con il verso positivo. Indicando con l la lunghezza della trave, le condizioni al contorno sono quindi

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 & v(l) &= v_2 \\ \varphi(0) &= \varphi_1 & \varphi(l) &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Ponendo, per chiarezza di scrittura

$$\begin{aligned} s' &= e^{\lambda l} \sin \lambda l & s'' &= e^{-\lambda l} \sin \lambda l \\ c' &= e^{\lambda l} \cos \lambda l & c'' &= e^{-\lambda l} \cos \lambda l \end{aligned} \quad (22)$$

si ottiene il sistema di quattro equazioni

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= v_1 \\ -\lambda C_1 - \lambda C_2 - \lambda C_3 + \lambda C_4 &= \varphi_1 \\ s' C_1 + c' C_2 + s'' C_3 + c'' C_4 &= v_2 \\ \lambda (-s' - c') C_1 + \lambda (s' - c') C_2 + \lambda (s'' - c'') C_3 + \lambda (s'' + c'') C_4 &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Una volta risolto questo sistema, inserendo i valori trovati per le quattro incognite nelle relazioni (14)-(17) si può determinare spostamento, rotazione, momento flettente e taglio in un punto qualsiasi.

Trave elastica con forze e coppie di estremità assegnate

Questo schema è utile se si vuole risolvere una trave elastica su suolo elastico con azioni concentrate partendo da schemi di trave di lunghezza infinita e poi correggendoli per annullare i valori delle caratteristiche di sollecitazione alle estremità (si veda il libro di M. Pagano, Teoria degli edifici, vol. 2, Edifici in cemento armato, Liguori editore, Napoli, 1977; nel libro è però suggerito di effettuare questa correzione in maniera iterativa, usando gli schemi di trave di lunghezza semi-infinita).

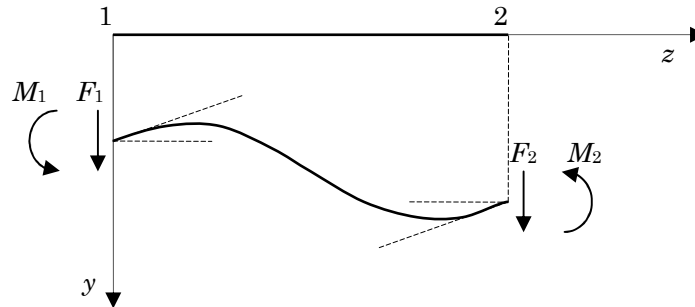


Fig. 8. Trave elastica con forze e coppie di estremità assegnate (nota: le molle non sono disegnate)

Nella figura 8 sono mostrati le forze e le coppie di estremità, tutte indicati con il verso positivo. Tenendo conto delle diverse convenzioni di segno tra azioni e caratteristiche di sollecitazione, le condizioni al contorno sono quindi

$$\begin{aligned} M(0) &= -M_1 & M(l) &= M_2 \\ V(0) &= -F_1 & V(l) &= F_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Con la stessa simbologia adottata in precedenza si ottiene il sistema di quattro equazioni

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 C_1 - 2\lambda^2 C_3 &= M_1 / EI \\ 2\lambda^3 C_1 - 2\lambda^3 C_2 + 2\lambda^3 C_3 + 2\lambda^3 C_4 &= F_1 / EI \\ -2\lambda^2 c' C_1 + 2\lambda^2 s' C_2 + 2\lambda^2 c'' C_3 - 2\lambda^2 s'' C_4 &= M_2 / EI \\ 2\lambda^3 (s' - c') C_1 + 2\lambda^3 (s' + c') C_2 + 2\lambda^3 (-s'' - c'') C_3 + 2\lambda^3 (s'' - c'') C_4 &= F_2 / EI \end{aligned} \quad (25)$$

Una volta risolto questo sistema, inserendo i valori trovati per le quattro incognite nelle relazioni (14)-(17) si può determinare spostamento, rotazione, momento flettente e taglio in un punto qualsiasi.

Trave elastica di lunghezza infinita con forza e coppia assegnate

È lo schema classico suggerito da Pagano per analizzare una trave di fondazione (almeno come punto di partenza). Poiché l'effetto della forza e della coppia si smorzano allontanandosi dal punto di applicazione, spostamenti, rotazioni, momenti flettenti e tagli devono essere nulli all'infinito. Di conseguenza, poiché per z che tende a infinito $e^{-\lambda z}$ tende a zero mentre $e^{\lambda z}$ tende a infinito, i coefficienti C_1 e C_2 devono essere nulli.

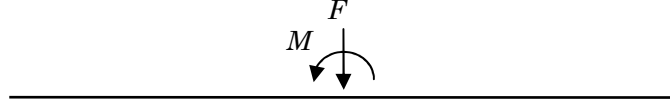


Fig. 8. Trave elastica di lunghezza infinita con forza e coppia assegnate (nota: le molle non sono disegnate)

Si considera quindi per la simmetria solo mezza trave (ad esempio la parte che va dal punto di applicazione di F ed M verso destra) caricata con metà forza e metà coppia. Le incognite sono solo due e possono essere ricavate ponendo condizioni al contorno in corrispondenza del punto di applicazione di F ed M . Si considera separatamente l'effetto delle due azioni.

Se si considera F , il punto di applicazione si abbassa senza ruotare; le condizioni al contorno sono

$$\varphi(0) = 0 \quad V(0) = -F/2 \quad (26)$$

Si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{aligned} \lambda C_3 - \lambda C_4 &= 0 \\ 2\lambda^3 C_3 + 2\lambda^3 C_4 &= F/2EI \end{aligned} \quad (27)$$

che fornisce come soluzione

$$C_3 = C_4 = \frac{F}{8\lambda^3 EI} \quad (28)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{F}{8\lambda^3 EI} e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) = \frac{F\lambda}{2kb} A_{\lambda z} \\ \varphi(z) &= \frac{F}{4\lambda^2 EI} e^{-\lambda z} \sin \lambda z = \frac{F\lambda^2}{kb} B_{\lambda z} \\ M(z) &= \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) = -\frac{F}{4\lambda} C_{\lambda z} \\ V(z) &= -\frac{F}{2} e^{-\lambda z} \cos \lambda z = -\frac{F}{2} D_{\lambda z} \end{aligned} \quad (29)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} A_{\lambda z} &= e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) \\ B_{\lambda z} &= e^{-\lambda z} \sin \lambda z \\ C_{\lambda z} &= e^{-\lambda z} (\sin \lambda z - \cos \lambda z) \\ D_{\lambda z} &= e^{-\lambda z} \cos \lambda z \end{aligned} \quad (30)$$

Se si considera M , il punto di applicazione ruota senza abbassarsi; le condizioni al contorno sono

$$v(0) = 0 \quad M(0) = -M/2 \quad (31)$$

Si ottengono in questo caso due equazioni, ciascuna delle quali contiene solo un'incognita e quindi

$$C_3 = -\frac{M}{4\lambda^2 EI} \quad C_4 = 0 \quad (32)$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned}
v(z) &= -\frac{M}{4 \lambda^2 E I} e^{-\lambda z} \sin \lambda z = -\frac{M \lambda^2}{k b} B_{\lambda z} \\
\varphi(z) &= \frac{M}{4 \lambda E I} e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z + \cos \lambda z) = -\frac{M \lambda^3}{k b} C_{\lambda z} \\
M(z) &= -\frac{M}{2} e^{-\lambda z} \cos \lambda z = -\frac{M}{2} D_{\lambda z} \\
V(z) &= \frac{M \lambda}{2} e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) = \frac{M \lambda}{2} A_{\lambda z}
\end{aligned} \tag{33}$$

I diagrammi che si ottengono sono mostrati più avanti. Si noti che, poiché le funzioni seno e coseno hanno un periodo pari a 2π e si annullano ogni π , può essere utile fare riferimento alla lunghezza $L^* = \pi/\lambda$, che viene denominata lunghezza caratteristica. Così si può dire, ad esempio, che il momento flettente prodotto da una forza concentrata si annulla e poi si inverte di segno a $0.25 L^*$, il taglio si annulla a $0.5 L^*$, e così via.

Trave elastica di lunghezza semi-infinita con forza e coppia assegnate

È un altro schema classico suggerito da Pagano per analizzare una trave di fondazione (come fase finale, per correggere lo schema di trave infinita). Poiché l'effetto della forza e della coppia si smorzano allontanandosi dal punto di applicazione, spostamenti, rotazioni, momenti flettenti e tagli devono essere nulli all'infinito. Di conseguenza, poiché per z che tende a infinito $e^{-\lambda z}$ tende a zero mentre $e^{\lambda z}$ tende a infinito, i coefficienti C_1 e C_2 devono essere nulli.



Fig. 8. Trave elastica di lunghezza semi-infinita con forza e coppia assegnate (nota: le molle non sono disegnate)

Le incognite sono solo due e possono essere ricavate ponendo condizioni al contorno in corrispondenza del punto di applicazione di F ed M . Si considera separatamente l'effetto delle due azioni.

Se si considera F , le condizioni al contorno sono

$$M(0) = 0 \quad V(0) = -F \tag{34}$$

Si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{aligned}
C_3 &= 0 \\
2 \lambda^3 C_3 + 2 \lambda^3 C_4 &= F / E I
\end{aligned} \tag{35}$$

che fornisce come soluzione

$$C_3 = 0 \quad C_4 = \frac{F}{2 \lambda^3 E I} \tag{36}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
v(z) &= \frac{F}{2 \lambda^3 E I} e^{-\lambda z} \cos \lambda z = \frac{2 F \lambda}{k b} D_{\lambda z} \\
\varphi(z) &= \frac{F}{2 \lambda^2 E I} e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) = \frac{2 F \lambda^2}{k b} A_{\lambda z} \\
M(z) &= \frac{F}{\lambda} e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z) = -\frac{F}{\lambda} B_{\lambda z} \\
V(z) &= F e^{-\lambda z} (\sin \lambda z - \cos \lambda z) = F C_{\lambda z}
\end{aligned} \tag{37}$$

Se si considera M , le condizioni al contorno sono

$$M(0) = -M \quad V(0) = 0 \quad (38)$$

Si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{aligned} -2 \lambda^2 C_3 &= M / E I \\ C_3 + C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

che fornisce come soluzione

$$C_3 = -C_4 = -\frac{M}{2 \lambda^2 E I} \quad (40)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} v(z) &= -\frac{M}{2 \lambda^2 E I} e^{-\lambda z} (\sin \lambda z - \cos \lambda z) = -\frac{2 M \lambda^2}{k b} C_{\lambda z} \\ \varphi(z) &= \frac{M}{\lambda E I} e^{-\lambda z} \cos \lambda z = \frac{4 M \lambda^3}{k b} D_{\lambda z} \\ M(z) &= M e^{-\lambda z} (-\sin \lambda z - \cos \lambda z) = -M A_{\lambda z} \\ V(z) &= 2 M \lambda e^{-\lambda z} \sin \lambda z = 2 M \lambda B_{\lambda z} \end{aligned} \quad (41)$$

I diagrammi che si ottengono sono mostrati più avanti. Anche in questo caso può essere utile fare riferimento alla lunghezza caratteristica $L^* = \pi/\lambda$. Così si può dire, in questo, che il momento flettente prodotto da una forza concentrata si annulla e poi si inverte di segno a L^* , il taglio si annulla a $0.25 L^*$, e così via.

Trave elastica di lunghezza finita con forze e coppie assegnate

Un modo possibile per risolvere agevolmente lo schema consiste nel considerare la trave come se fosse di lunghezza infinita, calcolare gli effetti di ciascuna forza o coppia e sommarli. Si ottengono così dei valori alle estremità non nulli. Occorre quindi risolvere lo schema di trave di lunghezza finita al quale si applicano alle estremità forze e coppie opposte ai valori squilibrati precedentemente determinati. Si sommano questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, ricavando così i risultati finali.

L'alternativa più "classica" consisteva però nel determinare le azioni correttive, una volta trovati i valori non nulli di taglio e momento alle estremità, facendo riferimento a due schemi di trave di lunghezza semi-infinita.

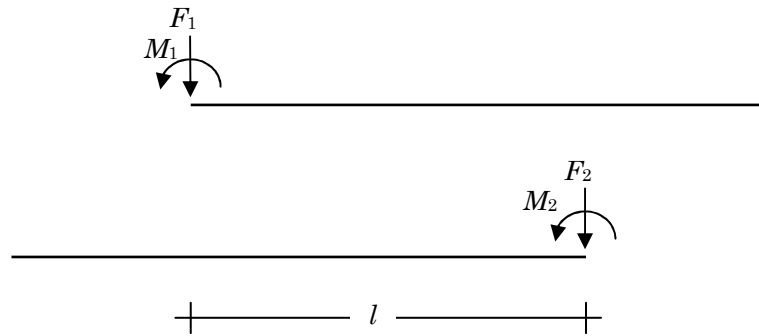


Fig. 9. Travi elastiche di lunghezza semi-infinita con forza e coppia correttive (nota: le molle non sono disegnate)

Il taglio e il momento al primo ed al secondo estremo si calcolano con le espressioni precedentemente ricavate. Assumendo un riferimento con origine al primo estremo, si ottiene

$$\begin{aligned} V(0) &= -F_1 - C_{\lambda l} F_2 + 2 \lambda B_{\lambda l} M_2 \\ M(0) &= -M_1 - \frac{B_{\lambda l}}{\lambda} F_2 + A_{\lambda l} M_2 \\ V(l) &= C_{\lambda l} F_1 + 2 \lambda B_{\lambda l} M_1 + F_2 \end{aligned} \quad (42)$$

$$M(l) = -\frac{B_{\lambda l}}{\lambda} F_1 - A_{\lambda l} M_1 + M_2$$

È possibile ricavare F_1 e M_1 dalle prime due equazioni

$$F_1 = -C_{\lambda l} F_2 + 2 \lambda B_{\lambda l} M_2 - V(0)$$

$$M_1 = -\frac{B_{\lambda l}}{\lambda} F_2 + A_{\lambda l} M_2 - M(0) \quad (43)$$

e sostituirli nelle altre due equazioni ottenendo

$$\begin{aligned} (1 - 2 B_{\lambda l}^2 - C_{\lambda l}^2) F_2 + 4 \lambda B_{\lambda l}^2 M_2 &= V(l) + C_{\lambda l} V(0) + 2 \lambda B_{\lambda l} M(0) \\ 2 \frac{B_{\lambda l}^2}{\lambda} F_2 + (1 - A_{\lambda l}^2 - 2 B_{\lambda l}^2) M_2 &= M(l) - \frac{B_{\lambda l}}{\lambda} V(0) - A_{\lambda l} M(0) \end{aligned} \quad (44)$$

Si noti che nel fare i passaggi si è effettuata una sostituzione, essendo $A_{\lambda l} + C_{\lambda l} = 2 B_{\lambda l}$.

Questo è un sistema di due equazioni in due incognite che può essere risolto immediatamente, ad esempio applicando la regola di Kramer. Posto

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - 2 B_{\lambda l}^2 - C_{\lambda l}^2 & b_1 &= 4 \lambda B_{\lambda l}^2 & c_1 &= V(l) + C_{\lambda l} V(0) + 2 \lambda B_{\lambda l} M(0) \\ a_2 &= 2 \frac{B_{\lambda l}^2}{\lambda} & b_2 &= 1 - A_{\lambda l}^2 - 2 B_{\lambda l}^2 & c_2 &= M(l) - \frac{B_{\lambda l}}{\lambda} V(0) - A_{\lambda l} M(0) \end{aligned} \quad (45)$$

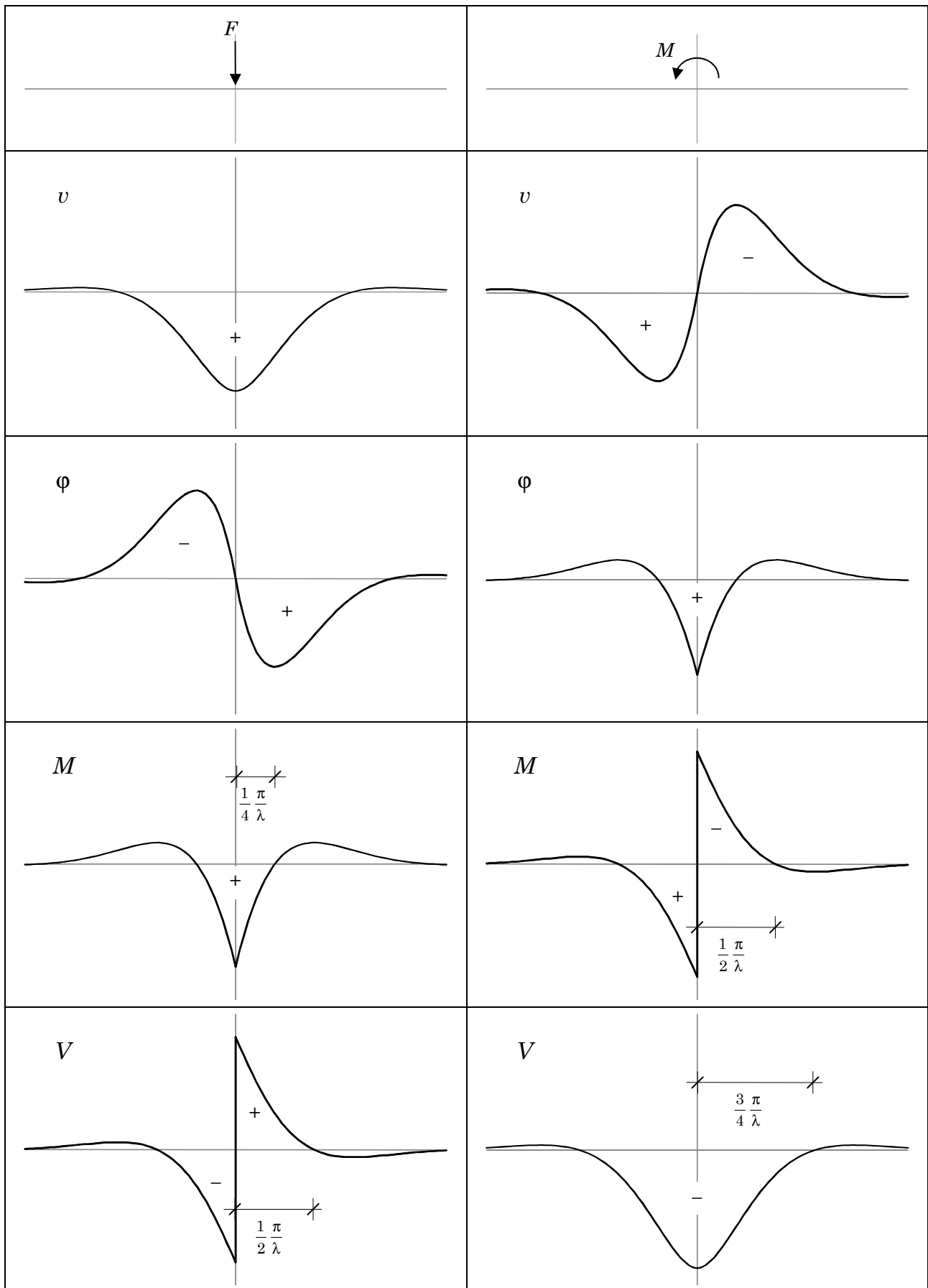
si ottiene

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ M_2 &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned} \quad (46)$$

e infine dalle (43) si ottengono le altre due incognite.

Come altra alternativa, si potrebbe dividere la trave in più tratti (imponendo divisioni ovunque è applicata una forza o una coppia). Per ogni tratto i vi sarà una funzione abbassamento da definire mediante 4 parametri C_1^i , C_2^i , C_3^i , C_4^i . Se i tratti sono n , vi saranno $4 n$ incognite. Occorrerà poi scrivere condizioni di equilibrio e congruenza, che saranno 4 per ogni nodo intermedio e 2 per ogni nodo di estremità e quindi in totale $4 n$, cioè quanto le incognite. Una volta risolto il sistema si potranno calcolare abbassamenti, rotazioni, momenti flettenti e tagli. L'onere computazionale è oggi facilmente affrontabile anche con un semplice foglio di calcolo, grazie alla ripetitività delle relazioni, ma è sicuramente più alto di quello conseguente alla impostazione precedentemente suggerita.

Trave di lunghezza infinita



Trave di lunghezza semi-infinita

