

Tecnica delle costruzioni

modulo A

Catania, 2018/19

04 – Instabilità locale

Aurelio Ghersi

Riferimenti

Normativa

- EN 1993-1-3, Eurocodice 3, parte 1-3:
Regole generali - Regole supplementari per l'impiego dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo
- EN 1993-1-5, Eurocodice 3, parte 1-5:
Elementi strutturali a lastra

Testi

- A.C. Walker, Design and Analysis of Cold-formed Sections, London, Intertext books, 1975
- A. Gherzi, R. Landolfo, F.M. Mazzolani, Design of Metallic Cold-formed Thin-walled Members, Spon Press, London and New York, 2002
- V. Dipaola, G. Prete, F. Prete, I profili formati a freddo nelle opere di carpenteria metallica, Aracne editrice, 2010

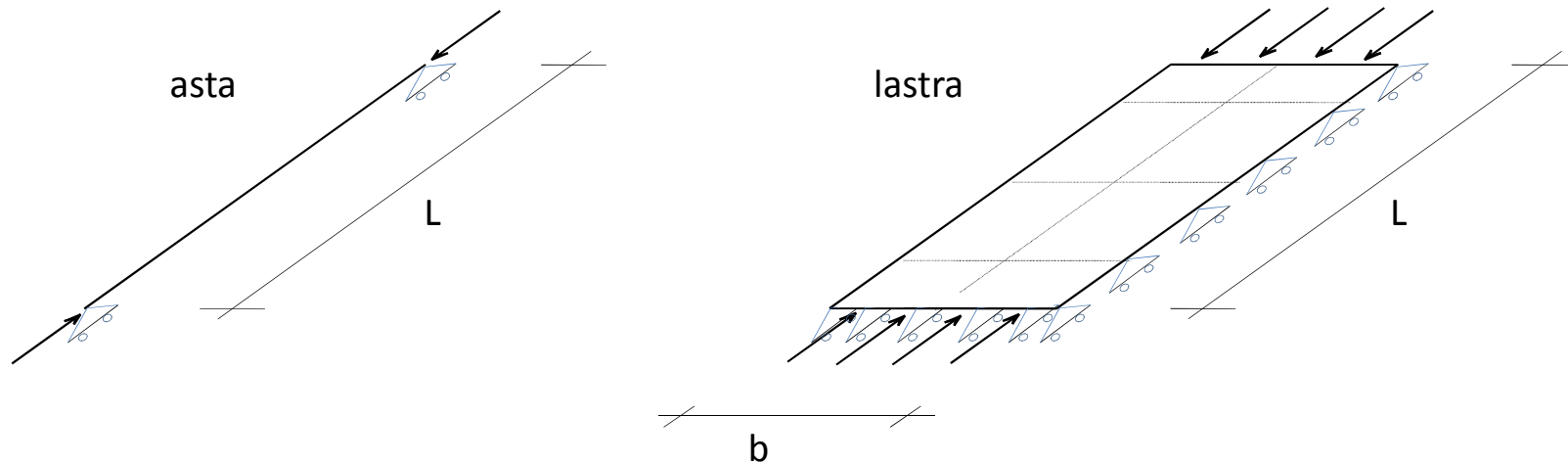
Instabilità di un'asta o una lastra compressa

asta

elemento monodimensionale
vincolata agli estremi in modo da consentire spostamenti
solo nella direzione del carico

lastra

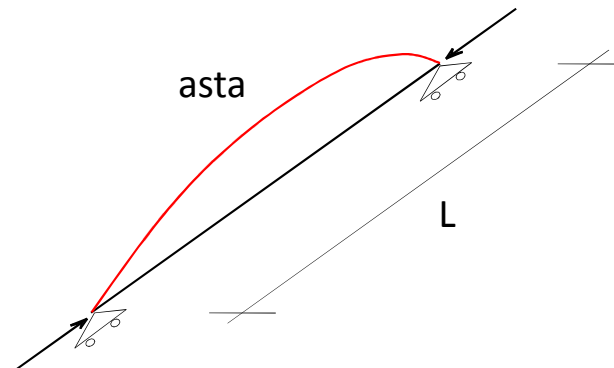
elemento bidimensionale
vincolata lungo i bordi in modo da consentire
spostamenti solo nella direzione del carico



Carico critico di un'asta compressa

asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- la deformata critica è
un'unica onda, con
semi-lunghezza d'onda
pari alla lunghezza
dell'asta l



Carico critico di un'asta compressa

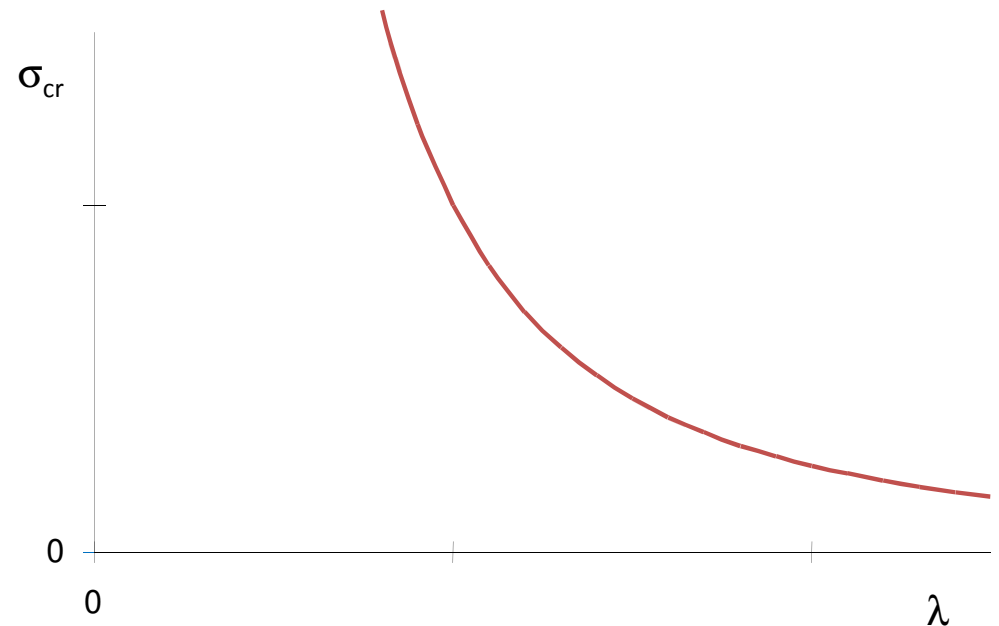
asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

La teoria, sviluppata da Eulero, fornisce

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

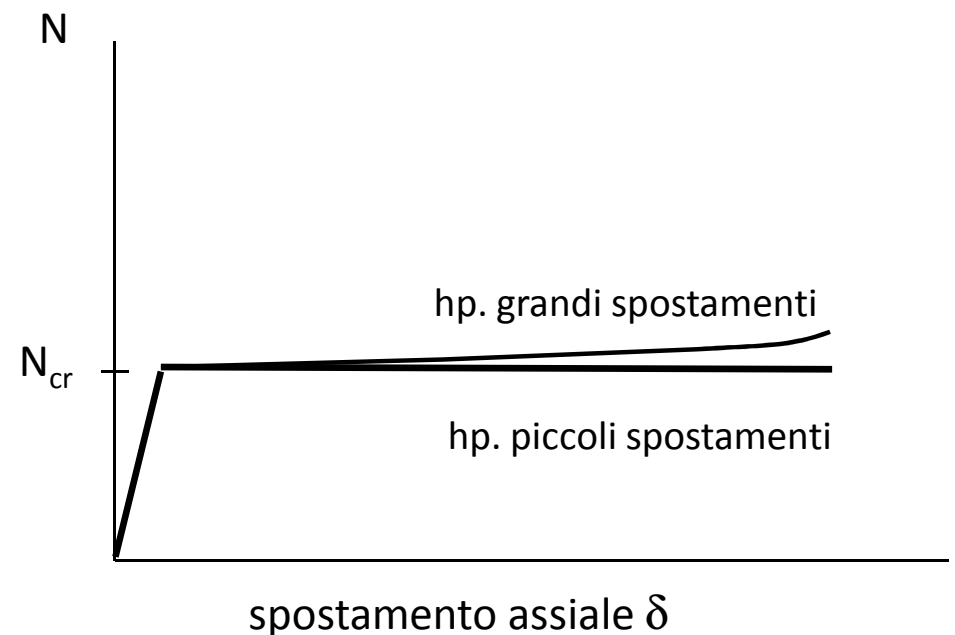
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \lambda = \frac{l}{i}$$



Comportamento post-critico di un'asta compressa

asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico si hanno spostamenti trasversali molto grandi per piccolissimi incrementi di carico
- in pratica il carico non può aumentare ulteriormente e la rigidità assiale si può considerare nulla

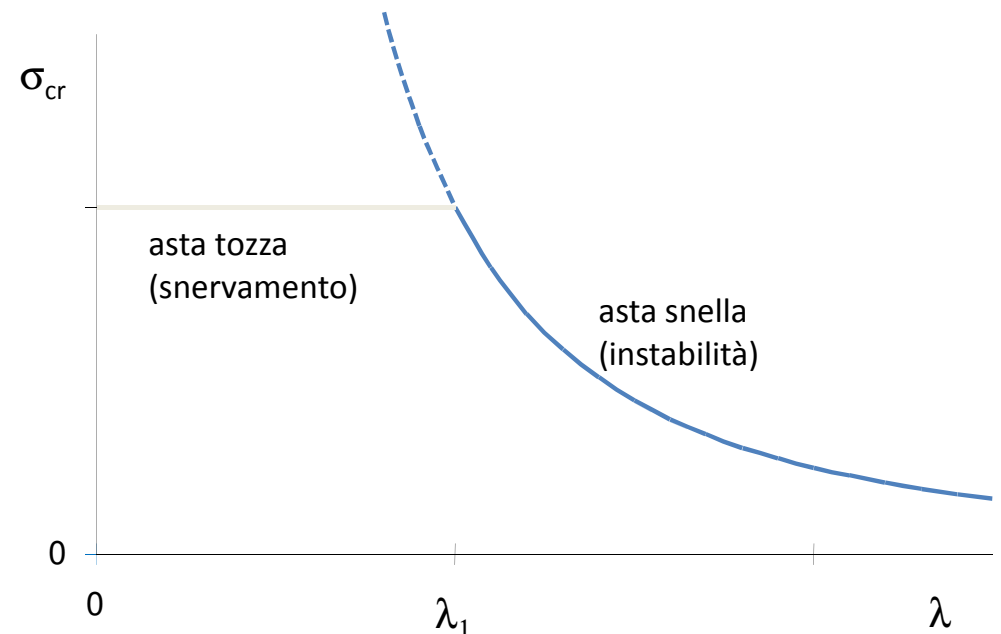


Carico critico di un'asta compressa

asta perfetta ma di materiale elastico-perfettamente
plastico

- la tensione critica non può superare la tensione di snervamento
- **aste tozze**: si snervano prima di instabilizzarsi
aste snelle: si instabilizzano in campo elastico
- il limite è costituito dalla snellezza λ_1 che corrisponde alla tensione di snervamento

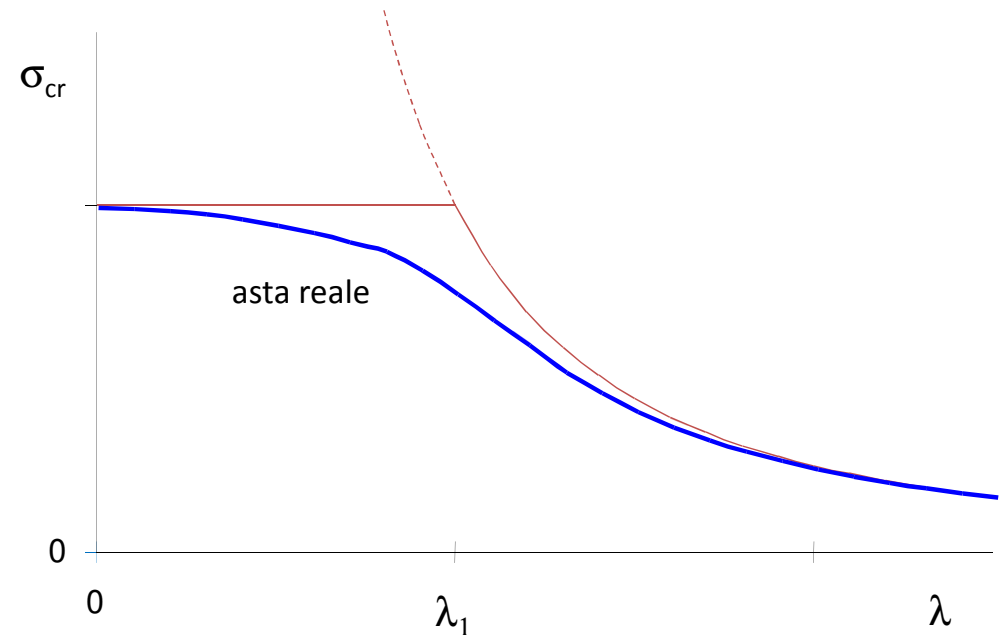
$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$



Carico critico di un'asta compressa

asta reale con imperfezioni e costituita da materiale
elastico-perfettamente plastico

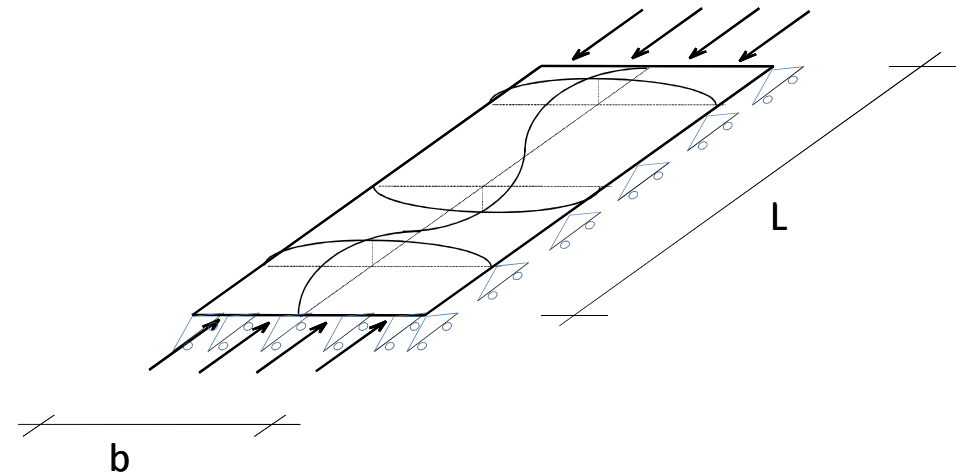
- la tensione critica è minore di quella che si avrebbe nel caso di asta perfetta
- il comportamento post-critico è comunque analogo a quello dell'asta perfetta



Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- le ondulazioni che si formano hanno una lunghezza della semi-onda comparabile con la larghezza b



Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- tenendo conto che

$$A = b t \qquad I = \frac{b t^3}{12}$$

si ha

$$N_{cr} = \frac{k \pi^2 EI}{(1-\nu^2) b^2} = \frac{k \pi^2 E t^3}{12 (1-\nu^2) b}$$

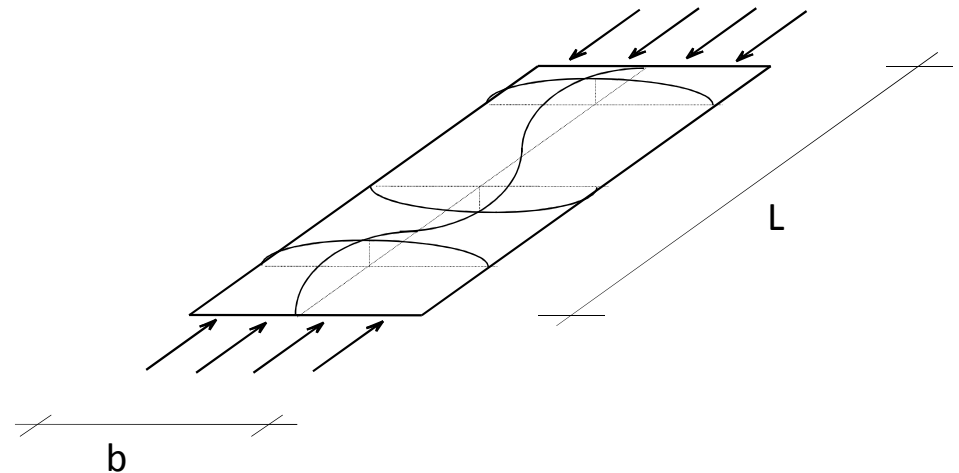
$$\sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1-\nu^2) (b/t)^2}$$

$$k = \left(\frac{l}{m b} \right)^2 + 2 + \left(\frac{m b}{l} \right)^2$$

m = numero di
semi-onde

per $l > 4 b$

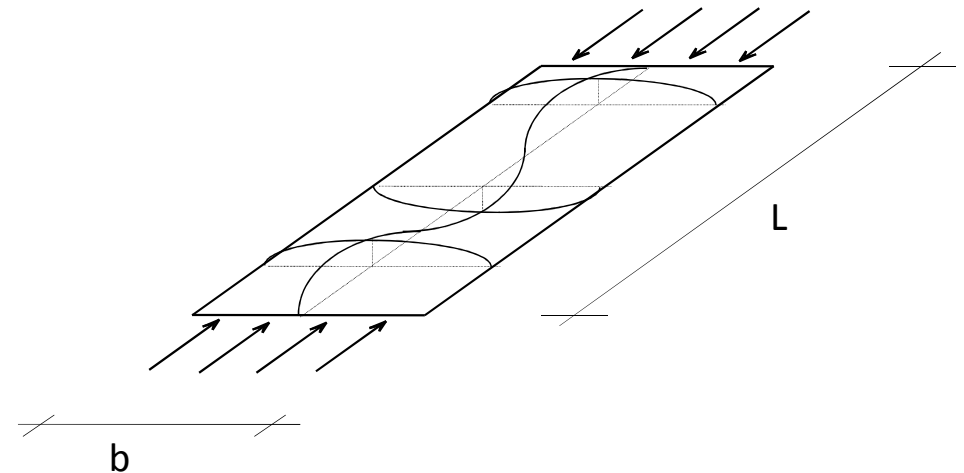
$k \rightarrow 4$



Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidezza estensionale

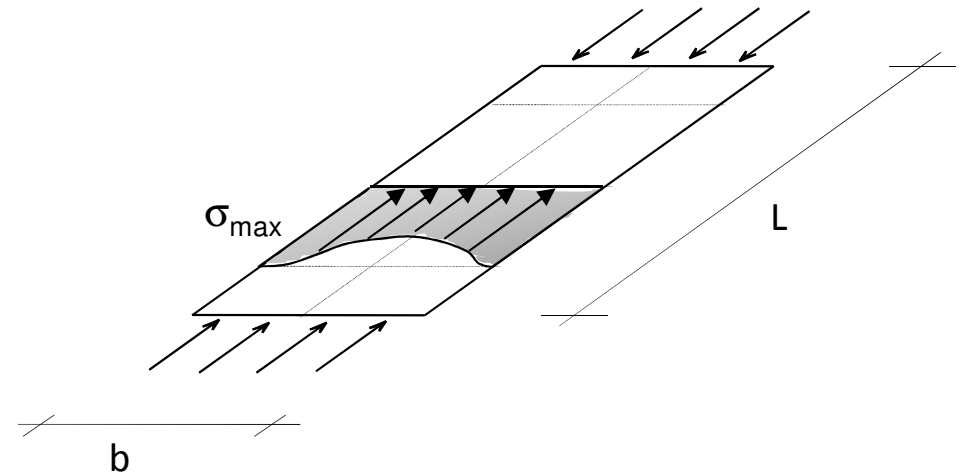


- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- per $N > N_{cr}$
 - le fibre longitudinali più vicine al bordo, più vincolate, sono più rigide di quelle centrali e portano un carico maggiore
 - il diagramma delle tensioni in mezzeria non è uniforme, ma ha un valore massimo in prossimità dei bordi e minimo al centro



$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

Walker, 1975

Tensione massima (σ_{max}) rispetto a quella critica (σ_{cr}) calcolata in funzione di N (diviso Ncr)

σ_{max}/σ_{cr} N/N_{cr} $\Delta N/\Delta s$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

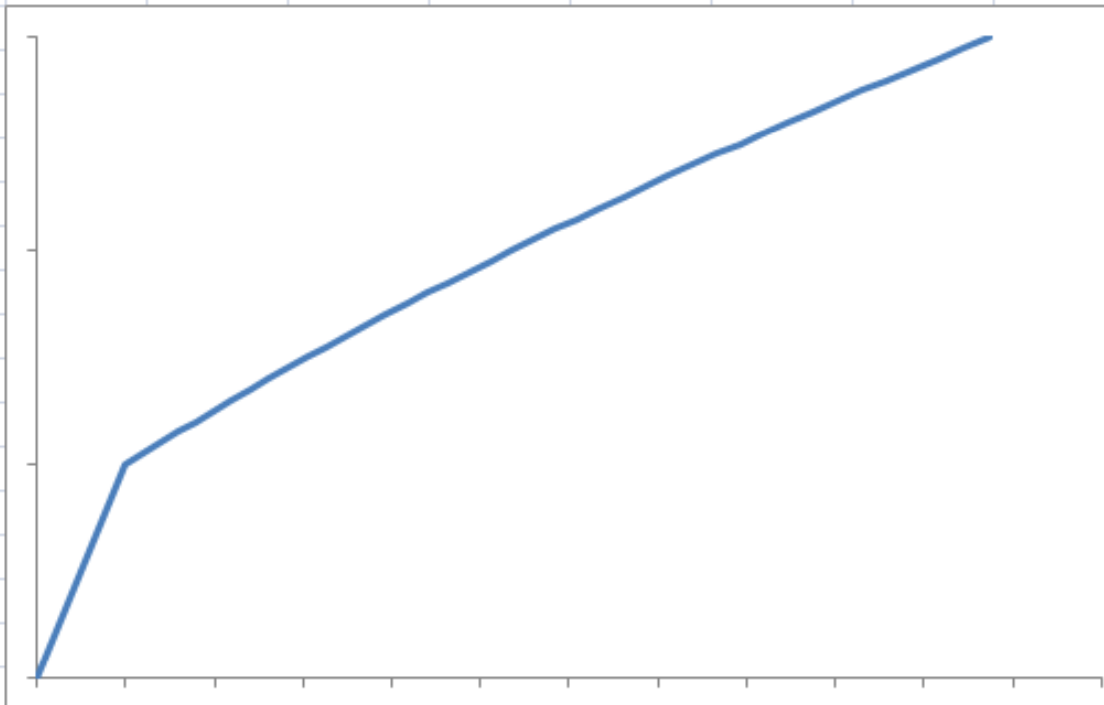


Diagramma di N/N_{cr} in funzione di σ_{max}/σ_{cr}

Si può ritenere che l'accorciamento ϵ_{ps} max sia proporzionale a σ_{max} quindi il diagramma mostra anche N in funzione di ϵ_{ps}

Si nota la brusca riduzione di rigidezza dopo N_{cr}

Il tratto post critico non è esattamente lineare (ma quasi)

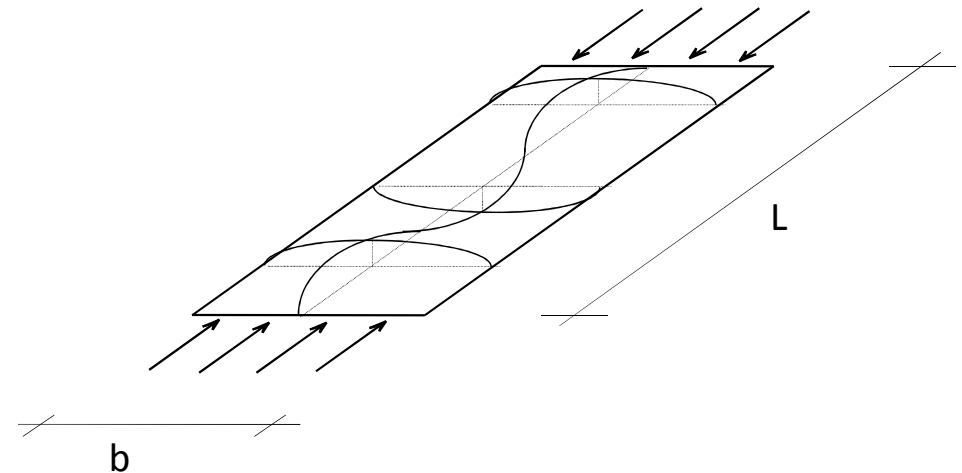
la pendenza (rigidezza) post-critica è qui circa il 20% di quella elastica

Vedi file Instabilità locale, foglio sigma max

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidità estensionale

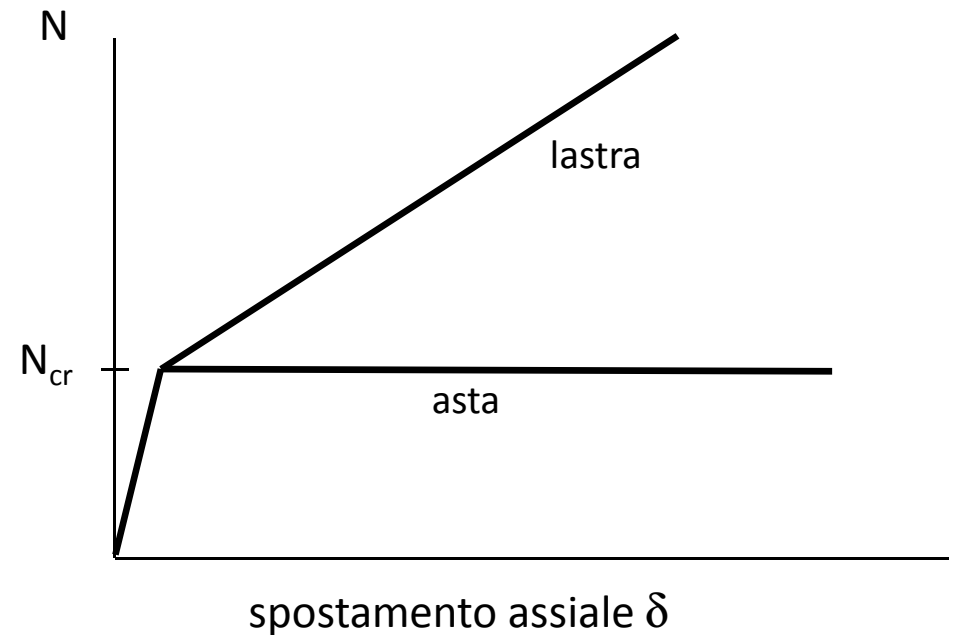


- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico
 - la rigidità assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da
materiale linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidezza estensionale
- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico
 - la rigidezza assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla



Carico massimo di una lastra compressa

lastra perfetta ma di materiale elastico-perfettamente
plastico

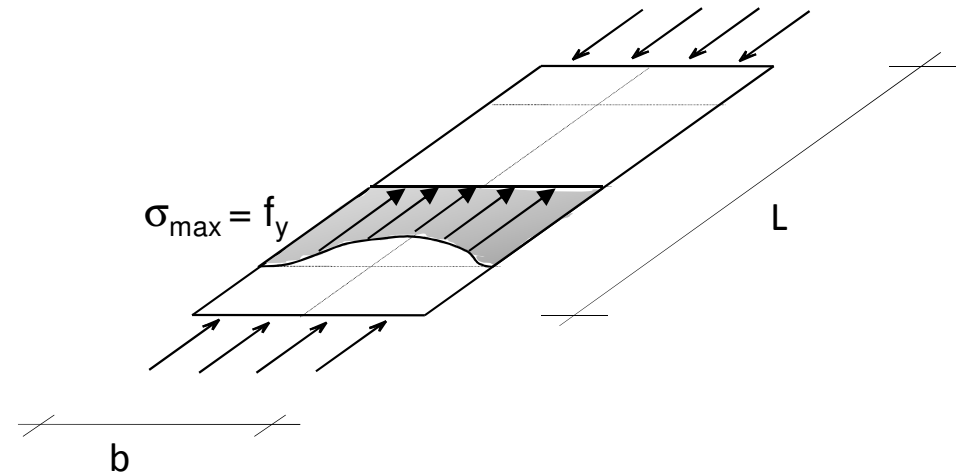
- il carico massimo corrisponde al raggiungimento della tensione di snervamento nella fibra più sollecitata

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

$$\sigma_{\max} = f_y \quad \downarrow$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

Walker, 1975



$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

Ncr/Ny	Nu/Ny	err	Nu/Ny
0.00	0.000		0.000
0.005	0.086	0.0000	0.086
0.01	0.116	-0.0008	0.116
0.02	0.153	-0.0001	0.154
0.05	0.219	0.0000	0.220
0.10	0.287	-0.0004	0.287
0.15	0.339	-0.0002	0.339
0.20	0.385	-0.0002	0.385
0.25	0.428	0.0010	0.428
0.30	0.469	0.0000	0.470
0.35	0.510	-0.0002	0.510
0.40	0.549	0.0000	0.549
0.45	0.588	0.0001	0.588
0.50	0.626	-0.0001	0.626
0.55	0.664	-0.0001	0.664
0.60	0.702	0.0000	0.702
0.65	0.740	-0.0003	0.739
0.70	0.777	0.0000	0.777
0.75	0.815	-0.0010	0.814
0.80	0.852	0.0000	0.851
0.85	0.889	0.0001	0.889
0.90	0.926	-0.0002	0.926
0.95	0.963	0.0000	0.963
1.00	1.000	0.0000	1.000

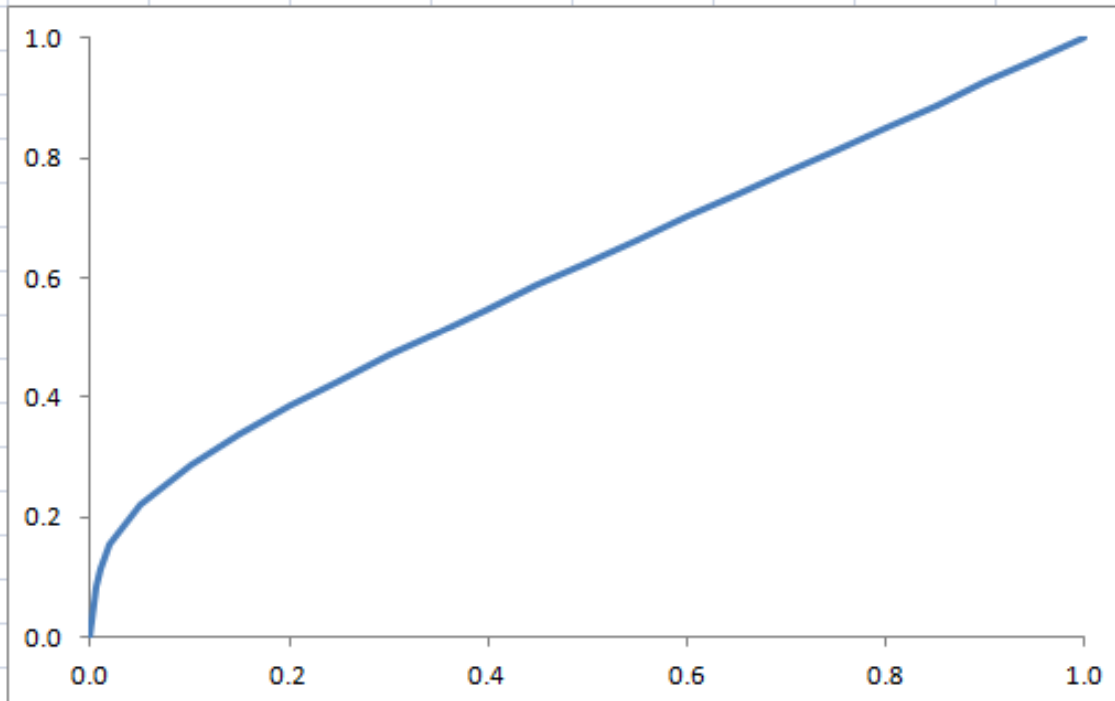


Diagramma di Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

Esempio

Determinazione di Ncr e Nult											
b	200	mm									
l	950	mm									
t	2.5	mm									
E	210000	MPa									
v	0.3										
fy	235	MPa									
l/b	4.75										
b/t	80.00										
m	5										
k	4.011										
σ_{cr}	118.9										
Ncr	59.5	kN									
Ny	117.5	kN									
Ncr/Ny	0.506										
Nult/Ny	0.631										
Nult	74.1	kN									

$$k = \left(\frac{l}{m b} \right)^2 + 2 + \left(\frac{m b}{l} \right)^2$$

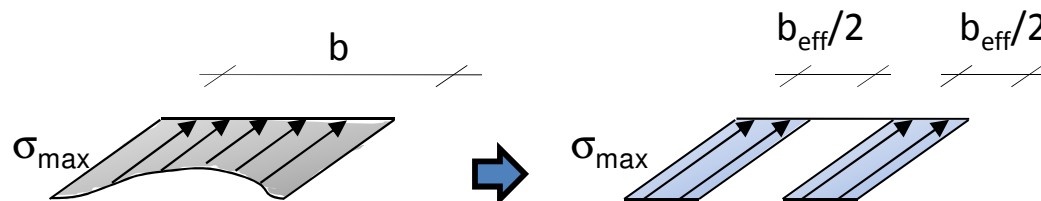
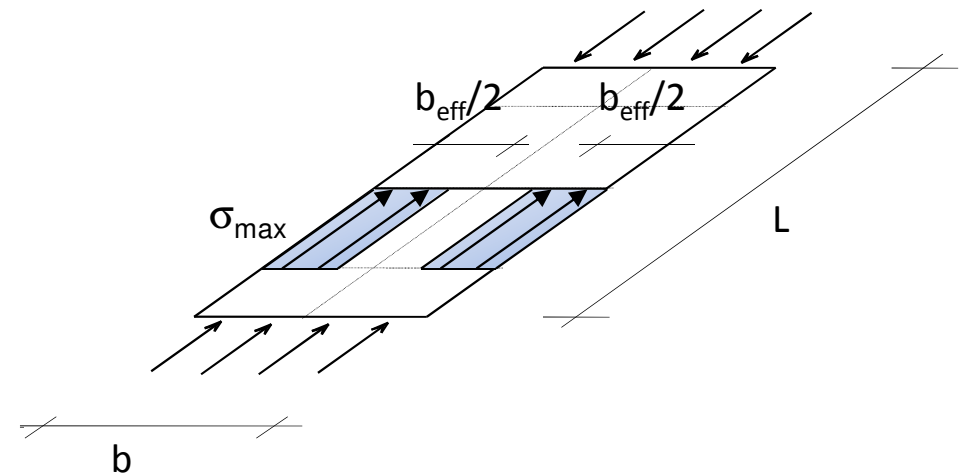
$$\sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - v^2) (b/t)^2}$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932

- per $N > N_{cr}$
 - si assume che il diagramma delle tensioni sia costante (pari a σ_{max}) ma agisca solo su una parte b_{eff} della lastra
 - la larghezza b_{eff} è tale da mantenere invariata la risultante delle tensioni



b_{eff} è detta
larghezza efficace

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932
(asta perfetta)

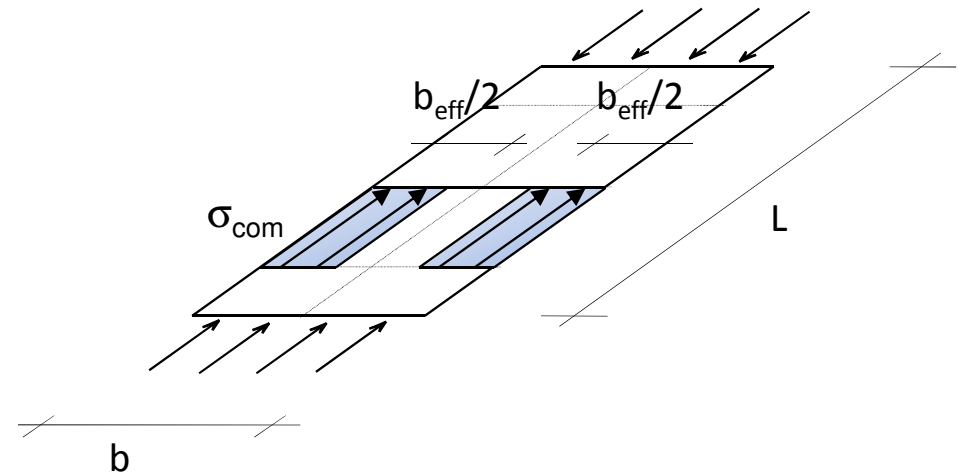
- la larghezza efficace potrebbe essere calcolata dalle espressioni mostrate in precedenza

es. per $N=N_{ult}$

$$\frac{b_{eff}}{b} = \frac{N_{ult}}{N_y}$$

- ma si preferisce assumere che, per un dato σ_{com} , b_{eff} sia la larghezza per la quale questa tensione è critica

$$\sigma_{cr}(b_{eff}) = \sigma_{com} \quad \sigma_{com} = \sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1-\nu^2) (b_{eff}/t)^2} \quad \Rightarrow \quad b_{eff}$$



Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3
(asta perfetta)

$$\sigma_{com} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b_{eff}/t)^2}$$



$$\sigma_{com} = \frac{k \pi^2 E (b/b_{eff})^2}{12 (1 - \nu^2) (b/t)^2}$$



$$\frac{b}{b_{eff}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2) \sigma_{com}}{k \pi^2 E}}$$

$$\bar{\lambda}_p \quad (\text{per } \sigma_{com} = f_y)$$



$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$



$$\bar{\lambda}_p = \frac{b/t}{28.4 \varepsilon \sqrt{k}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Si noti che è anche

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}}$$

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3

lastra perfetta:

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$

L'espressione viene
generalizzata nell'Eurocodice
3
per tener conto di vincoli
differenti e distribuzioni di
tensioni non uniformi

lastra reale, con imperfezioni:

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.22}{\bar{\lambda}_p^2}$$

– internal compression elements:

$$\rho = 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055 (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,673, \text{ where } (3 + \psi) \geq 0$$

– outstand compression elements:

$$\rho = 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,748$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,748$$

Indicazioni di normativa

Eurocodice 3, parte 1-5, punto 4.4

Table 4.1: Internal compression elements

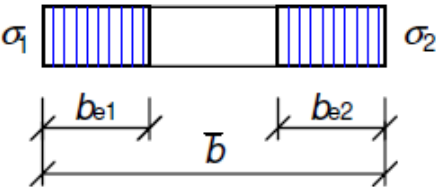
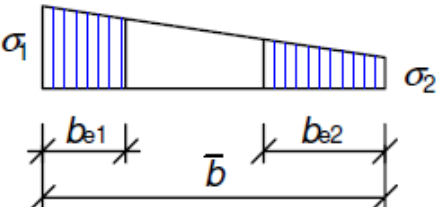
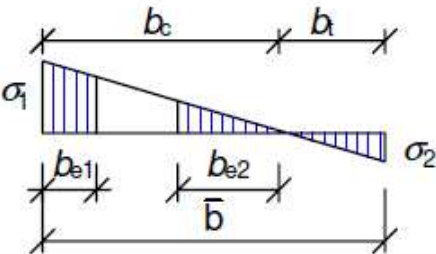
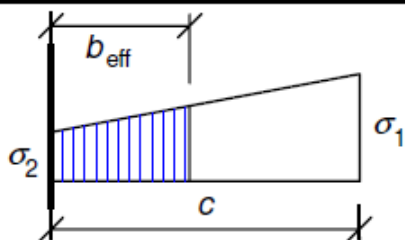
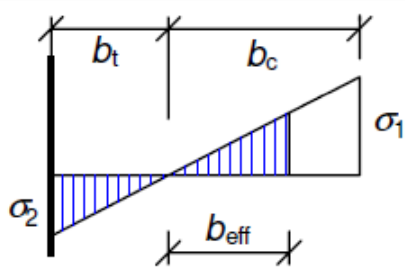
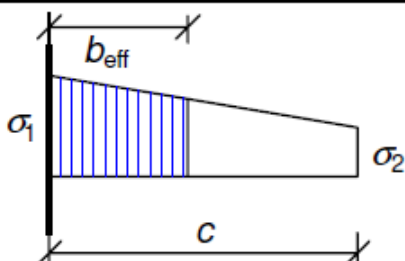
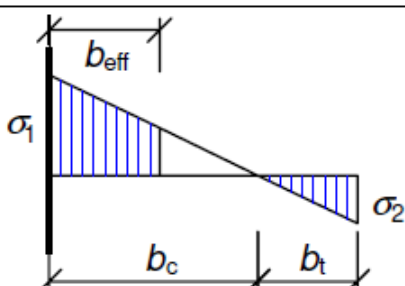
Stress distribution (compression positive)				Effective ^p width b_{eff}		
				$\psi = 1:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff} \quad b_{e2} = 0,5 b_{eff}$		
				$1 > \psi > 0:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff} \quad b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\psi < 0:$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff} \quad b_{e2} = 0,6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Buckling factor k_σ	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$

Table 4.2: Outstand compression elements

Stress distribution (compression positive)		Effective ^p width b_{eff}			
		$1 > \psi \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho c$			
		$\psi < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho c / (1-\psi)$			
$\psi = \sigma_2/\sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$	
Buckling factor k_σ	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	
		$1 > \psi \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho c$			
		$\psi < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho c / (1-\psi)$			
$\psi = \sigma_2/\sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$		0	$0 > \psi > -1$
Buckling factor k_σ	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$		1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$
					23,8

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3

Per elementi soggetti a tensioni $< f_y$ si usa

$$\bar{\lambda}_{p,red} = \bar{\lambda}_p \sqrt{\frac{\sigma_{com,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}}$$

con la stessa espressione di ρ

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2}$$

precedenti versioni dell'EC3 consideravano troppo cautelativa
l'espressione e suggerivano

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2} + 0.18 \frac{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p,red}}{\bar{\lambda}_p - 0.6}$$

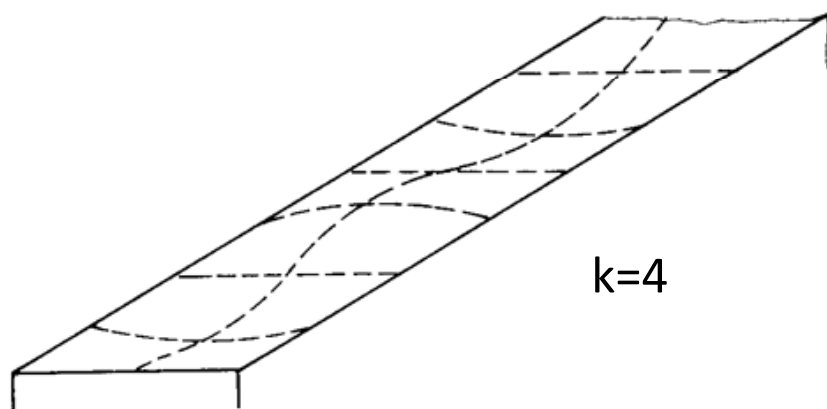
Comportamento post-critico di una lastra compressa

Differenti possibili approcci semplificati:

- larghezza efficace
 - è l'approccio base, il più utilizzato
- spessore efficace
 - è usato per ridurre il contributo degli irrigidimenti nella parte 1-3 dell'Eurocodice 3
 - è usato diffusamente nell'Eurocodice 9 (alluminio)
- area efficace
 - è citato come approccio generale nella parte 1-5 dell'Eurocodice 3
- tensione ridotta
 - era usato nel passato

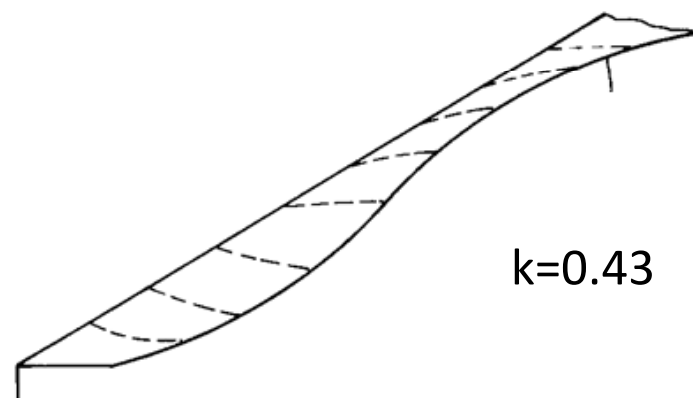
Lastra con un bordo longitudinale libero

- il comportamento è analogo a quello della lastra in cui entrambi i bordi longitudinali sono vincolati, ma il suo carico critico è molto più basso
- la tensione critica può essere calcolata con le stesse espressioni valide per lastra vincolata a entrambi i bordi, ponendo però $k=0.43$



$k=4$

vincolata su due lati



$k=0.43$

vincolata su un solo lato

Esempio

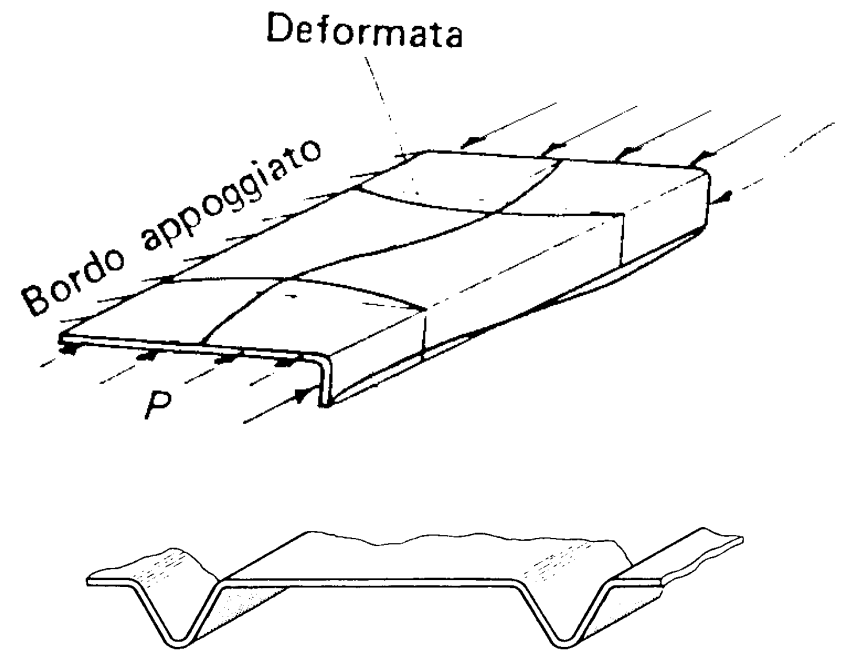
Larghezza efficace				
lastra vincolata su due bordi longitudinali				
b	200	mm		
t	2.5	mm		
k	4			
E	210000	MPa		
ν	0.3			
f_y	235	MPa		
b/t	80			
σ_{cr}	118.6	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
λ_p	1.408			
b_{eff}/b	0.710		0.599	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	0.996			
b_{eff}/b	1.000		0.782	

lastra con un bordo longitudinale libero				
b	100	mm		
t	2.5	mm		
k	0.43			
E	210000	MPa		
ν	0.3			
f_y	235	MPa		
b/t	40			
σ_{cr}	51.0	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
λ_p	2.148			
b_{eff}/b	0.466		0.418	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	1.519			
b_{eff}/b	0.658		0.563	

Vedi file Instabilità locale, foglio b eff

Lastre molto snelle

- per annullare o limitare la riduzione del carico critico (e quindi della capacità portante) si possono aggiungere degli irrigidimenti
 - per lastre con un bordo libero: irrigidimenti di bordo
 - per tutte le lastre : irrigidimenti intermedi



occorre verificare l'efficacia degli irrigidimenti
(controllare che non vadano in carico critico)