

# Tecnica delle costruzioni

## mod. A - Acciaio

Catania, 2019/20

10 – Flessione composta: tensoflessione

Aurelio Gherzi

# Flessione composta

cioè sforzo normale e momento flettente

Si esamina nell'ordine:

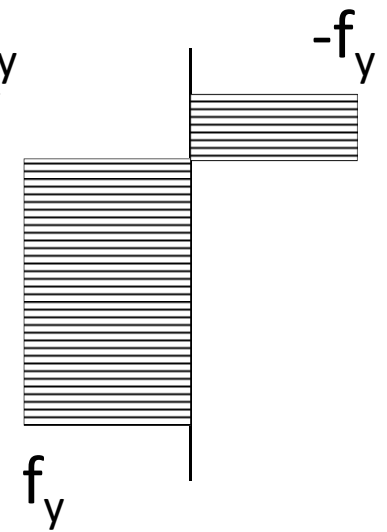
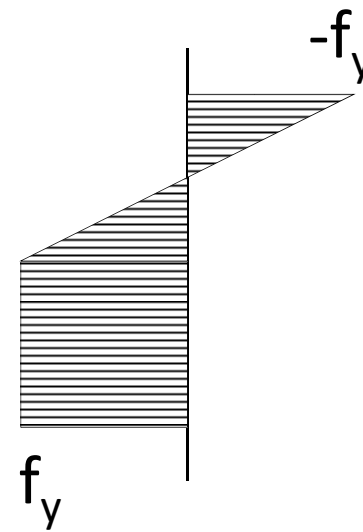
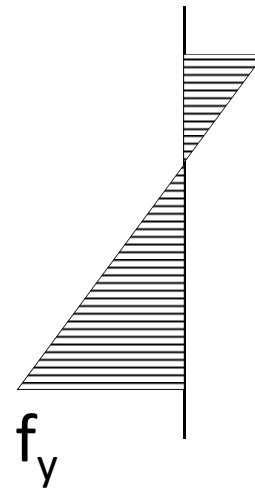
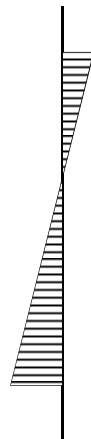
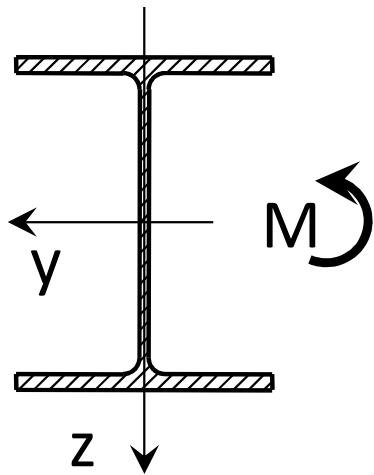
- Tensoflessione retta
  - Per definire i concetti generali
- Tensoflessione deviata
  - Formulazione generale in presenza di due componenti del momento flettente
- Pressoflessione retta
  - Che risente dell'effetto dell'instabilità
- Pressoflessione deviata
  - Solo per citare le formule generali

# Tensoflessione retta

- Per sezioni di classe 3
  - Si usano le formule del modello elastico lineare
  - Si impone come limite tensionale  $f_y / \gamma_{M0}$

# Tensoflessione retta

- Per sezioni di classe 1 e 2



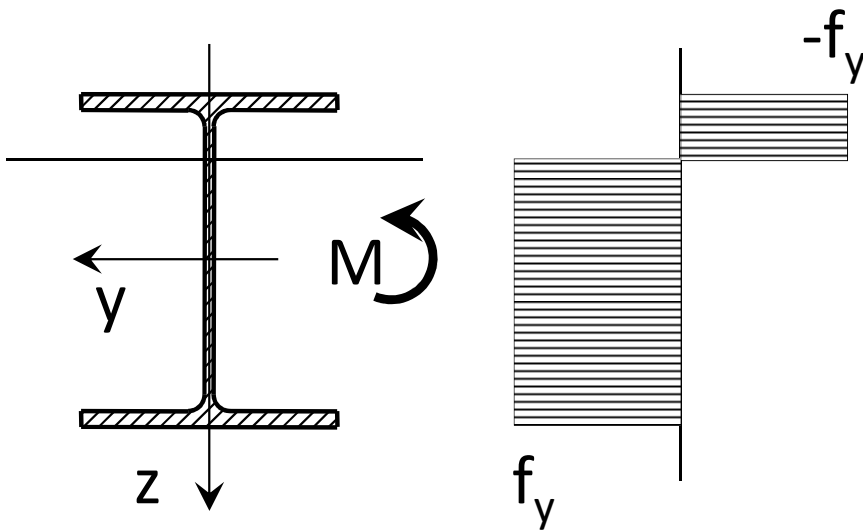
N trazione

# Tensoflessione retta

- Per sezioni di classe 1 e 2
  - a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)
  - b. Data una posizione dell'asse neutro si calcola  $N$  (o viceversa dato  $N$  si calcola la posizione dell'asse neutro)
  - c. Si determina il momento resistente corrispondente a  $N$ :  $M_{N,Rd}$

# Tensoflessione retta

- a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)



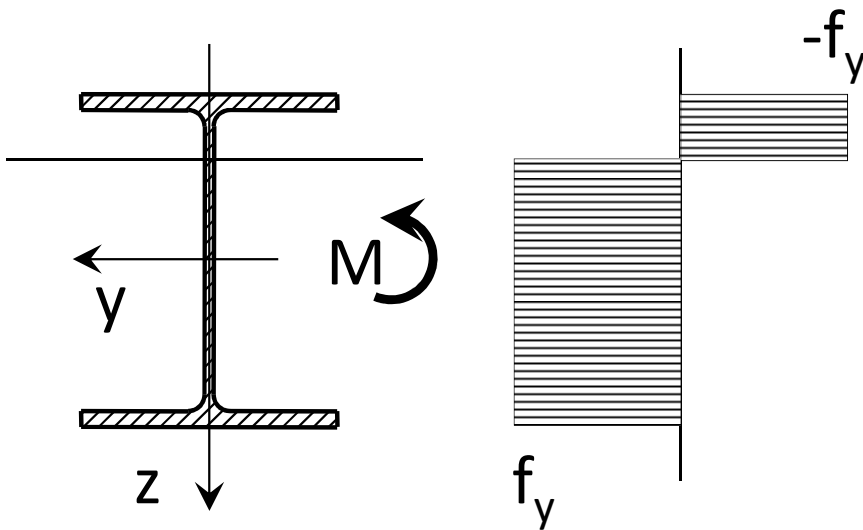
N trazione

- b. Data una posizione dell'asse neutro si calcola N

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma \, dA = \int_{\text{tesa}} \sigma \, dA + \int_{\text{comp}} \sigma \, dA = \\ &= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} A_{\text{tesa}} - \frac{f_y}{\gamma_{M0}} A_{\text{comp}} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}}) \end{aligned}$$

# Tensoflessione retta

- a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)



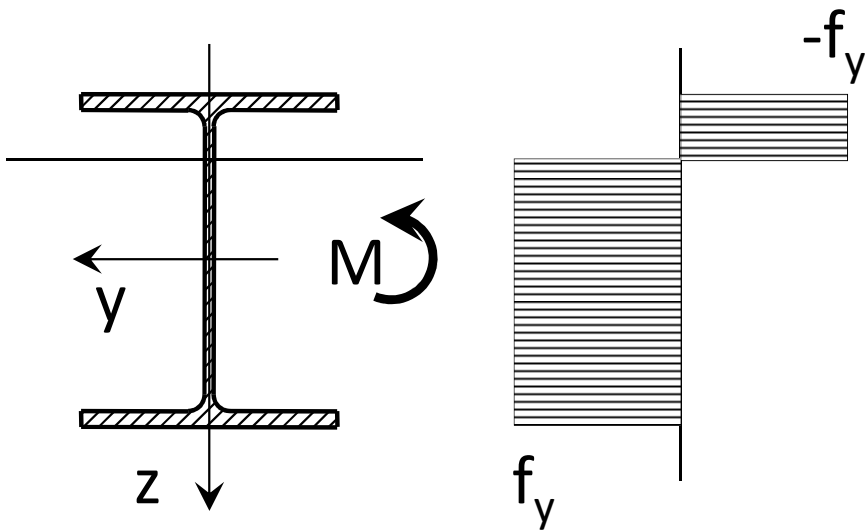
- b. O viceversa dato N si calcola la posizione dell'asse neutro n

N trazione

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}}) = \\
 &= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - (A - A_{\text{tesa}})) \quad \Rightarrow \quad A_{\text{tesa}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N \gamma_{M0}}{f_y} + A \right]
 \end{aligned}$$

# Tensoflessione retta

c. Si determina il momento resistente corrispondente a N:  $M_{N,Rd}$



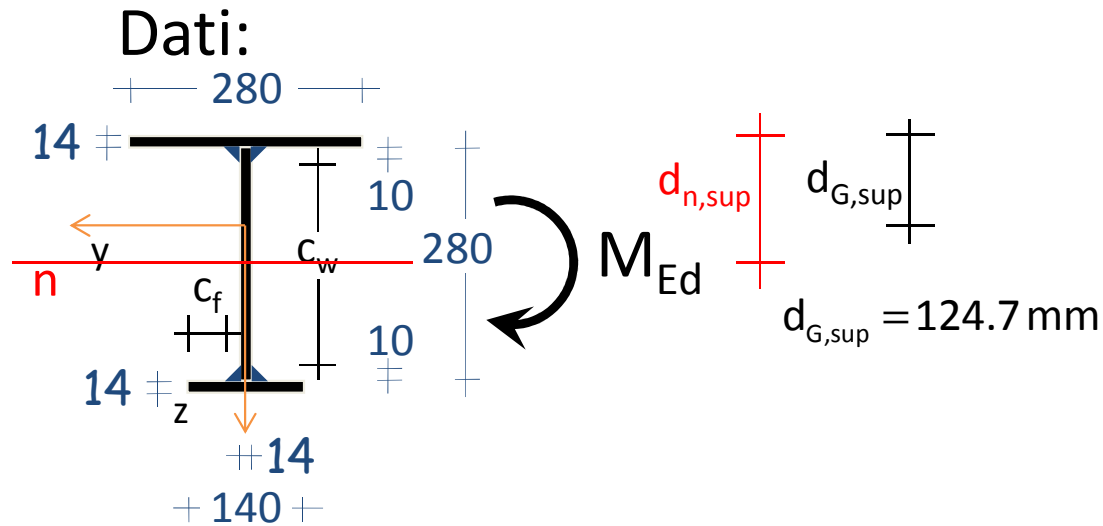
N trazione

$$M_y = \int \sigma z dA = \int_{\text{tesa}} \sigma z dA + \int_{\text{comp}} \sigma z dA =$$

$$= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} S_{A_{\text{tesa}}} - \frac{f_y}{\gamma_{M0}} S_{A_{\text{comp}}} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (2 S_{A_{\text{tesa}}})$$



# Esempio – sezione composta di classe 1



$$M_{Ed} = -200 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

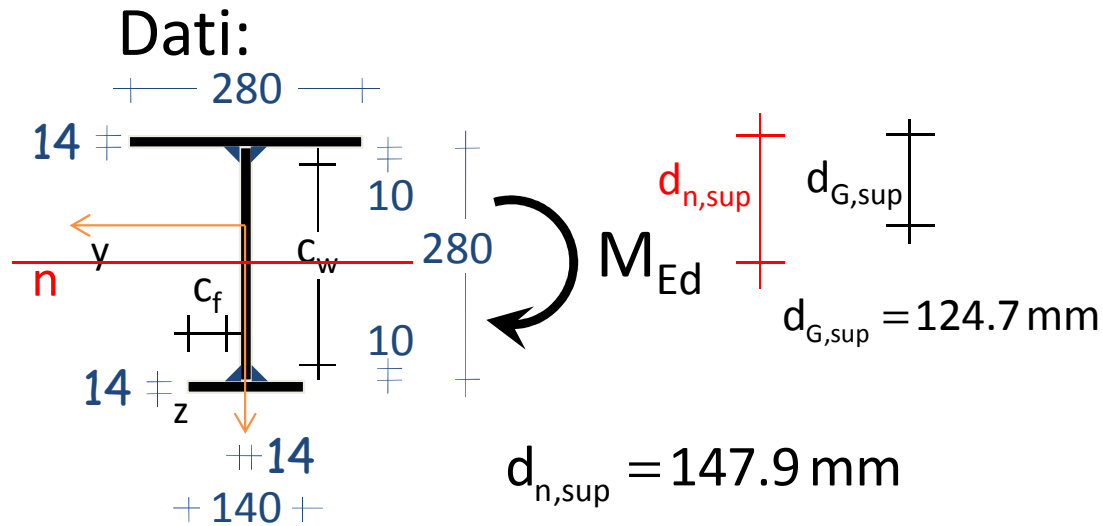
Acciaio S235

$$A = 98 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{tesa}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N \gamma_{M0}}{f_y} + A \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{400 \times 10^3 \times 1.05}{235} + 98 \times 10^2 \right] = 57.94 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$d_{n,sup} = 147.9 \text{ mm}$$

# Esempio – sezione composta di classe 1



$$M_{Ed} = -200 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

Acciaio S235

$$S_{tesa} = 280 \times 14 \times 117.7 + 133.9 \times 14 \times 43.8 = 543.49 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{N,Rd} = 2 S_{A_{tesa}} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 2 \times 543.49 \times 10^3 \frac{235}{1.05} \times 10^{-6} = 243.3 \text{ kNm}$$

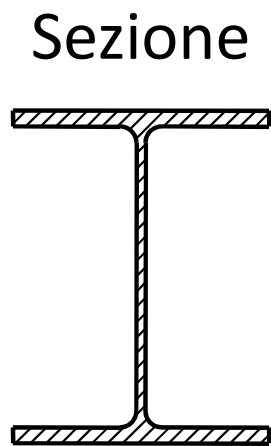
# Tensoflessione retta

- Quello indicato è un procedimento generale che si può sempre utilizzare
- Per sezioni comuni la normativa fornisce espressioni approssimate che descrivono l'interazione tra  $N$  e  $M_{N,Rd}$  (dominio di resistenza)

# Domini di resistenza

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

Per ricavare una coppia M-N del dominio



Si assegna una posizione dell'asse neutro

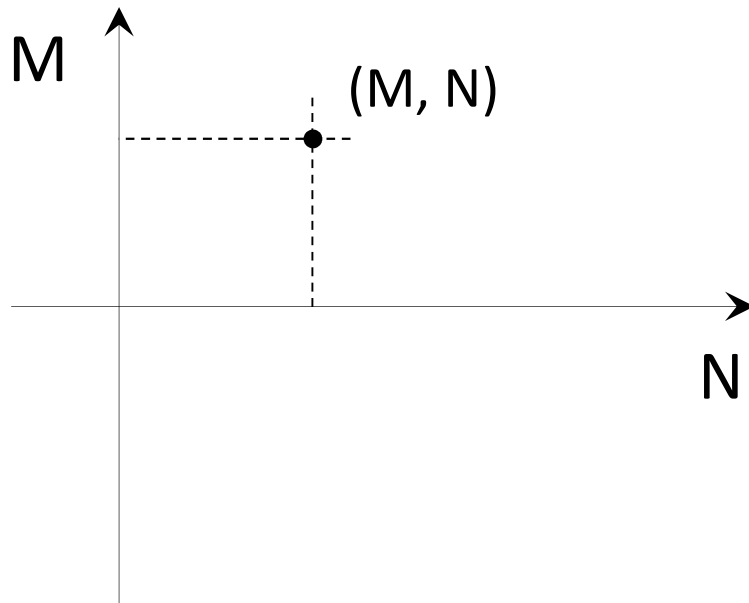
Si determina N

Si determina M ( $M_{pl,N}$  o  $M_{el,N}$ )

# Domini di resistenza

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

Per ricavare una coppia M-N del dominio



Si assegna l'asse neutro

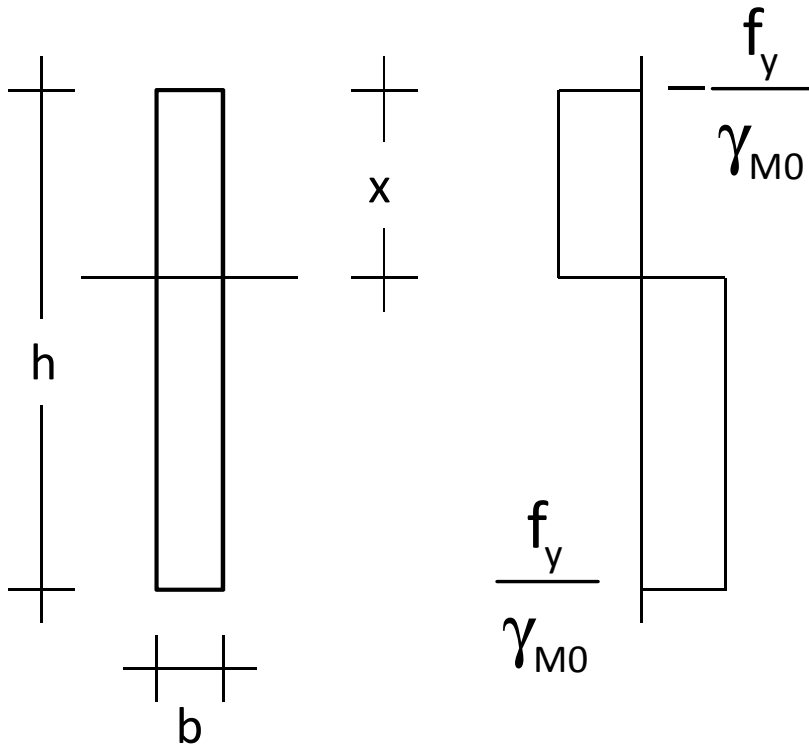
Si determina N

Si determina M ( $M_{pl,N}$  o  $M_{el,N}$ )

e si riporta la coppia  
M – N nel diagramma

# Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)

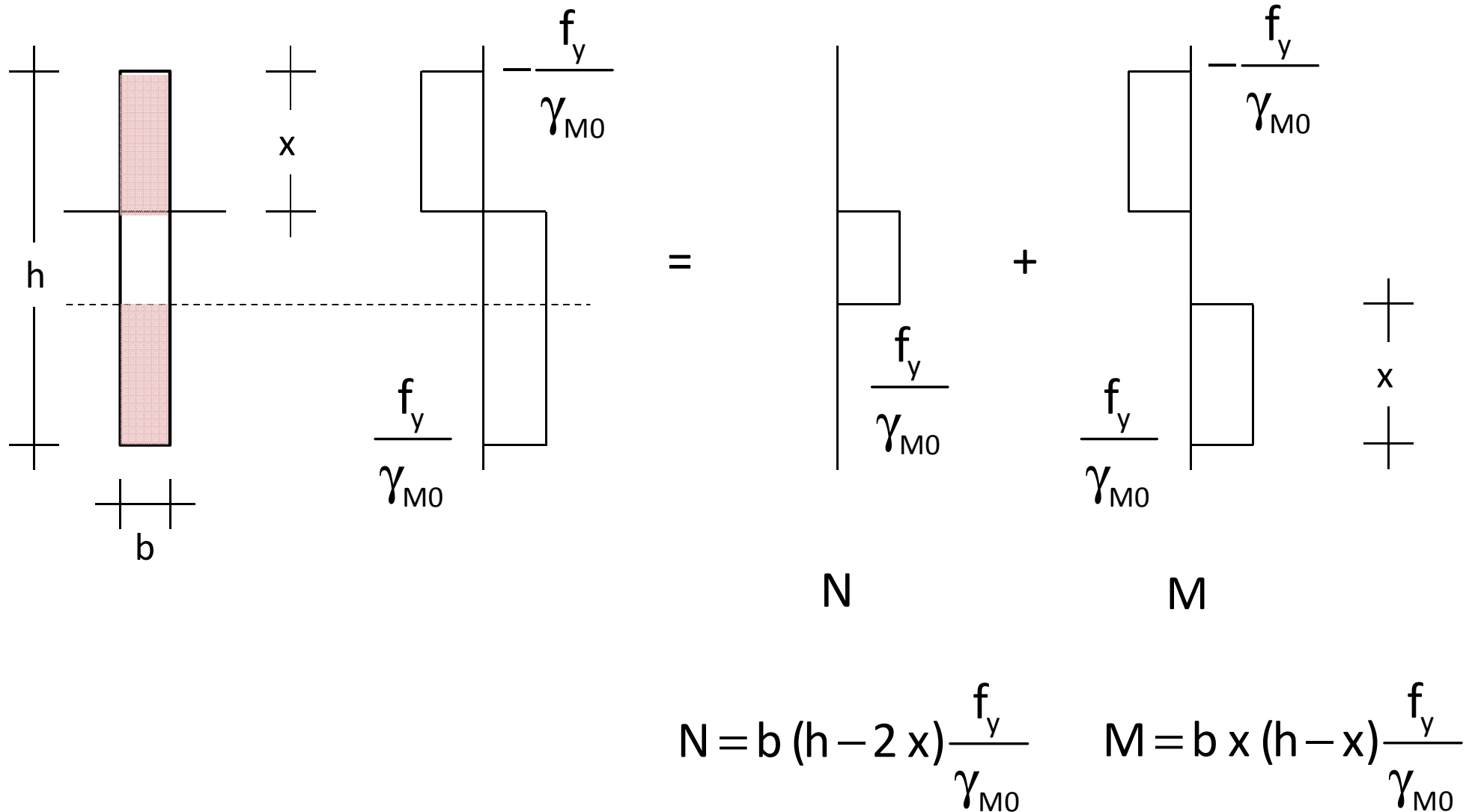


$$N = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}}) = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} [b(h-x) - bx] =$$
$$= b(h-2x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M_y = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (2 S_{A_{\text{tesa}}}) = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \left[ 2bx \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] =$$
$$= bx(h-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

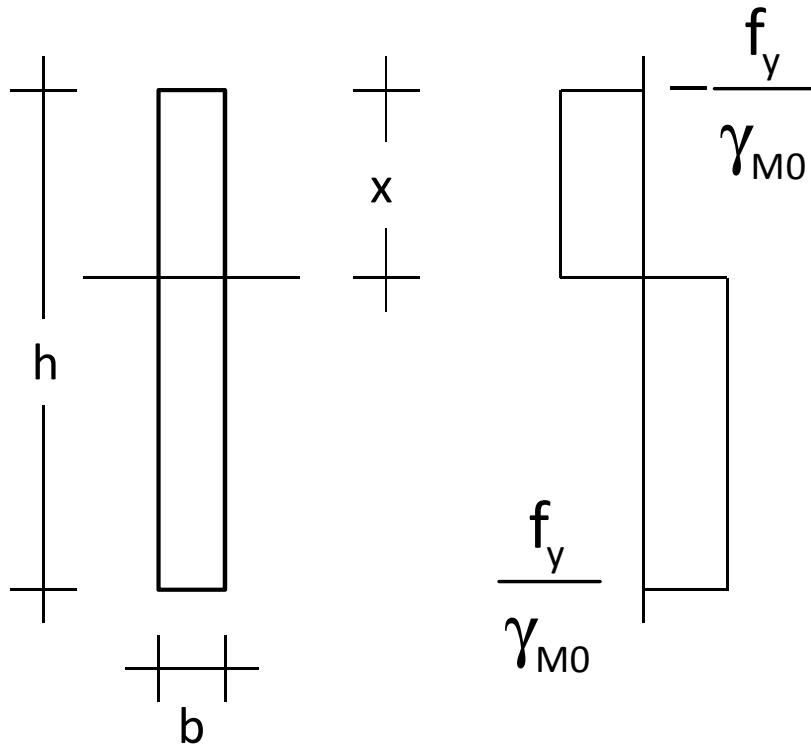
# Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)



# Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)



$$N = b (h - 2 x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$x = \frac{1}{2} \left( h - \frac{N \gamma_{M0}}{b f_y} \right) = \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{N \gamma_{M0}}{b h f_y} \right) = \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{N}{N_{Rd}} \right)$$

$$h - x = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{N}{N_{Rd}} \right)$$

$$M = b x (h - x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

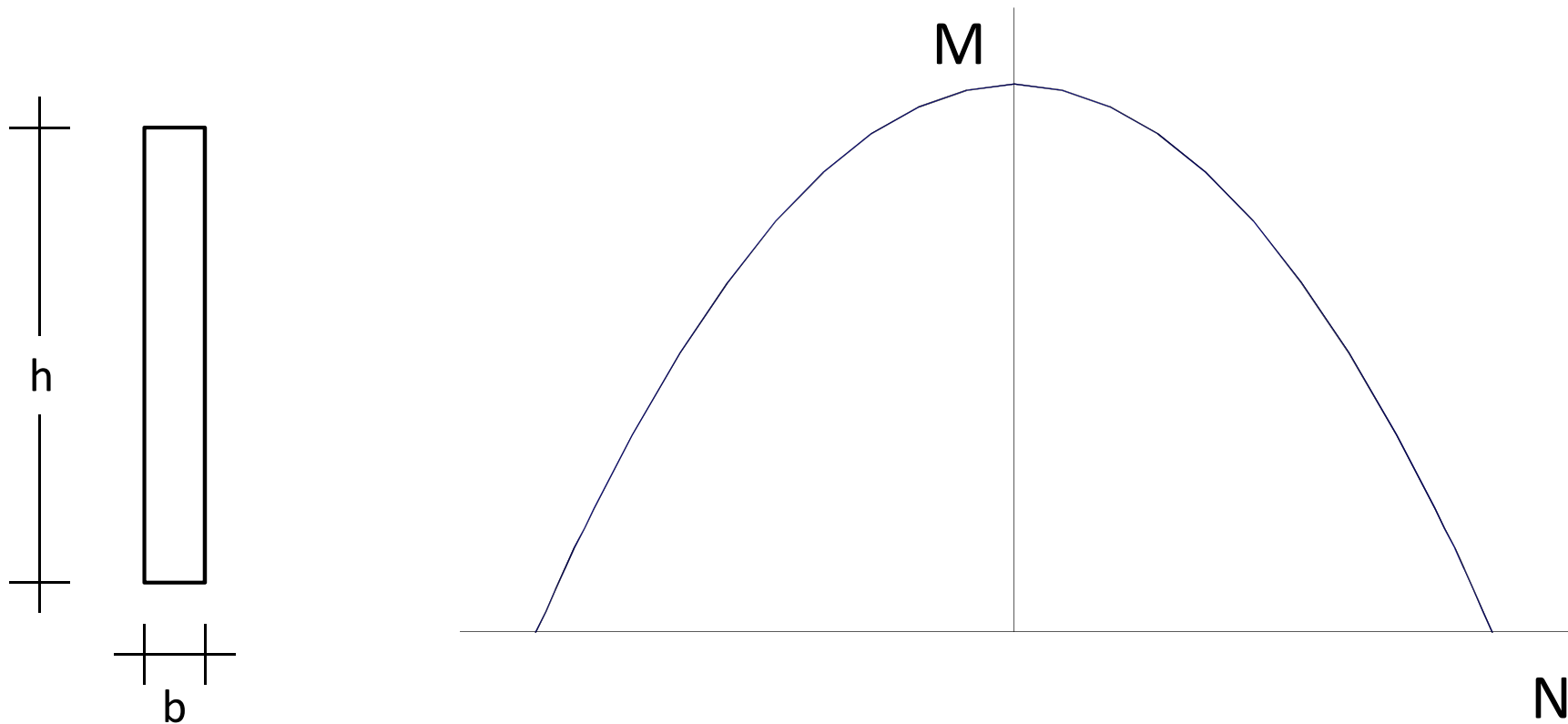
$$M = \frac{b h^2}{4} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \left[ 1 - \left( \frac{N}{N_{Rd}} \right)^2 \right]$$

$$\frac{M}{M_{Rd}} = \left[ 1 - \left( \frac{N}{N_{Rd}} \right)^2 \right]$$



# Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)

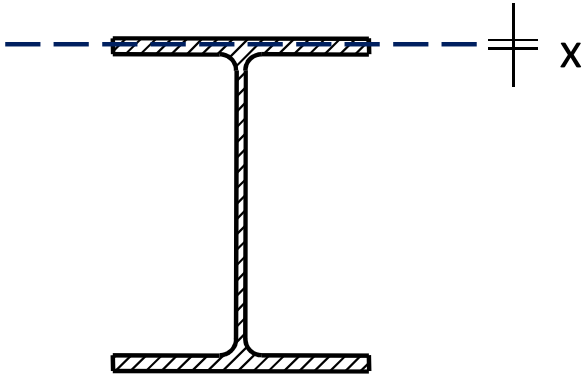


Il dominio ha un andamento parabolico

Questo vale solo per sezioni rettangolari (ad esempio un piatto)

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte



Per  $x=0$

$$N = A \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd}$$

$$M = 0$$

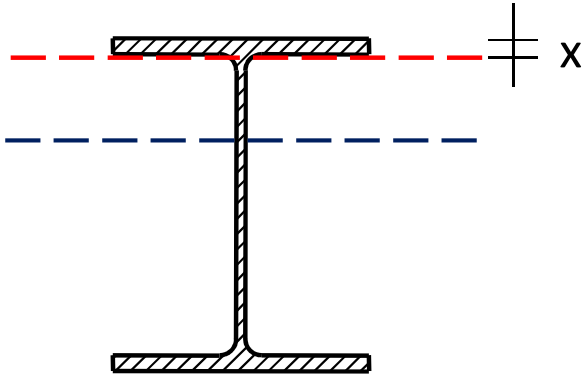
Per  $0 \leq x \leq t_f$

$$N = (A - 2bx) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 2bx \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = bx(h-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte



Per  $0 \leq x \leq t_f$

$$N = (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 2bt_f \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_1$$

$$M = bt_f (h - t_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = M_1$$

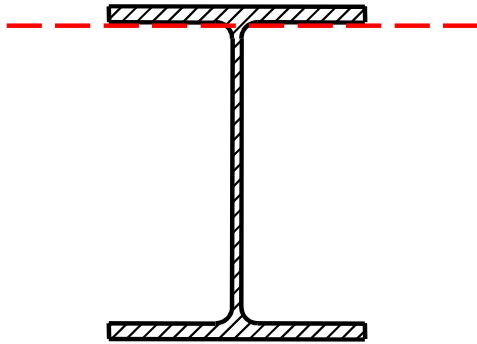
Per  $t_f \leq x \leq h - t_f$

$$N = (h - 2x) t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = M_{Rd} - \left( \frac{h}{2} - x \right)^2 t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte

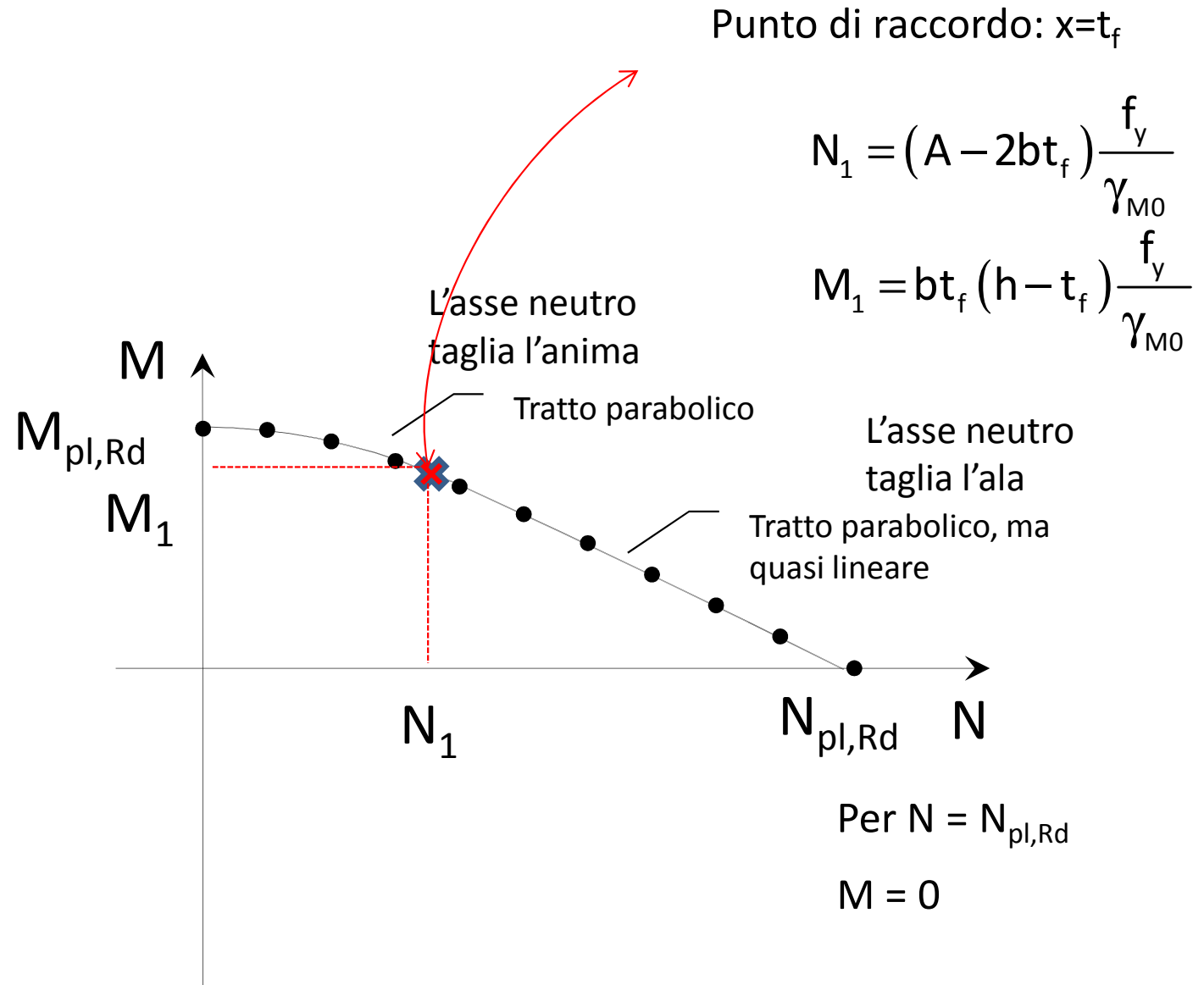


Per  $N = 0$

$$M = M_{pl,Rd}$$

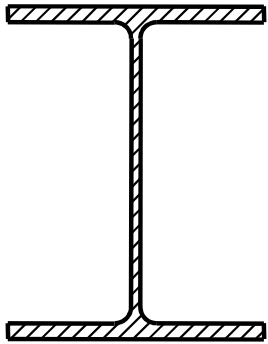
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd}$$

$$N \leq \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

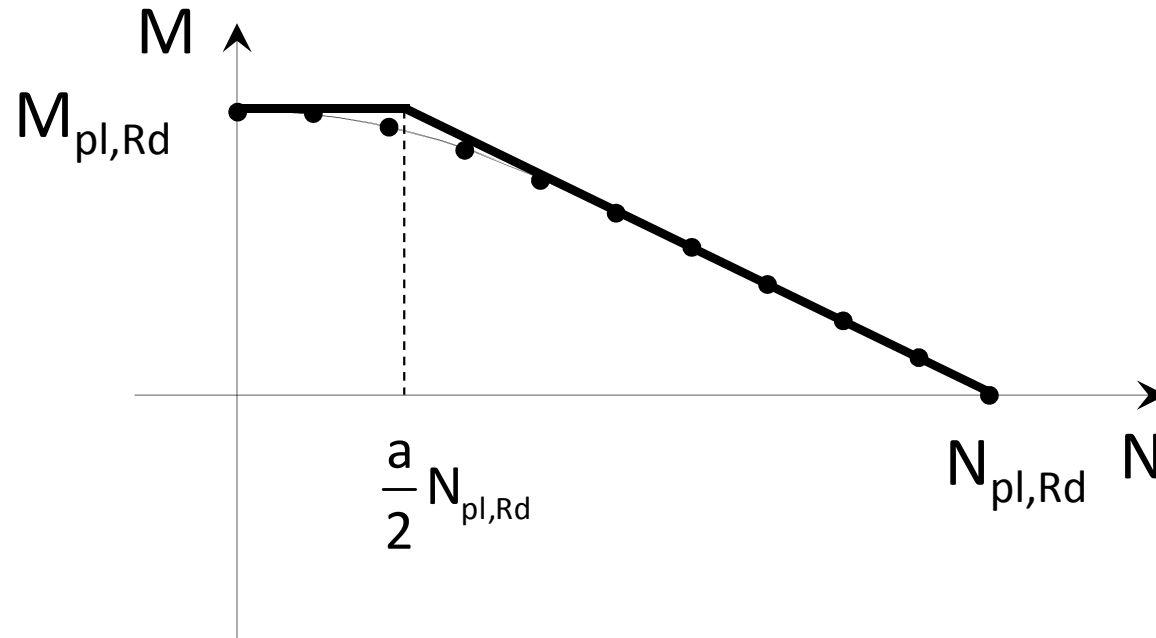
$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5a}$$

$$N > \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

$$a = \frac{A - 2bt_f}{A} \leq 0.5$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$$

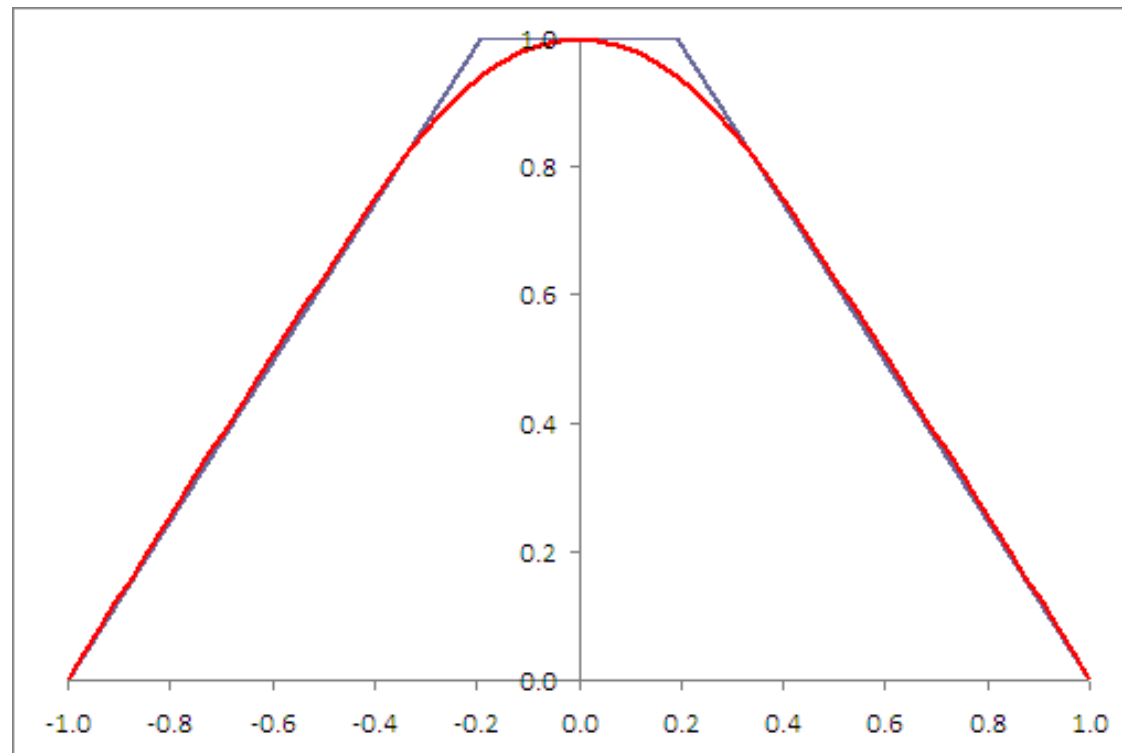
$$N_1 = \frac{(A - 2bt_f)}{A} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} A = a N_{Rd}$$



# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte

- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)



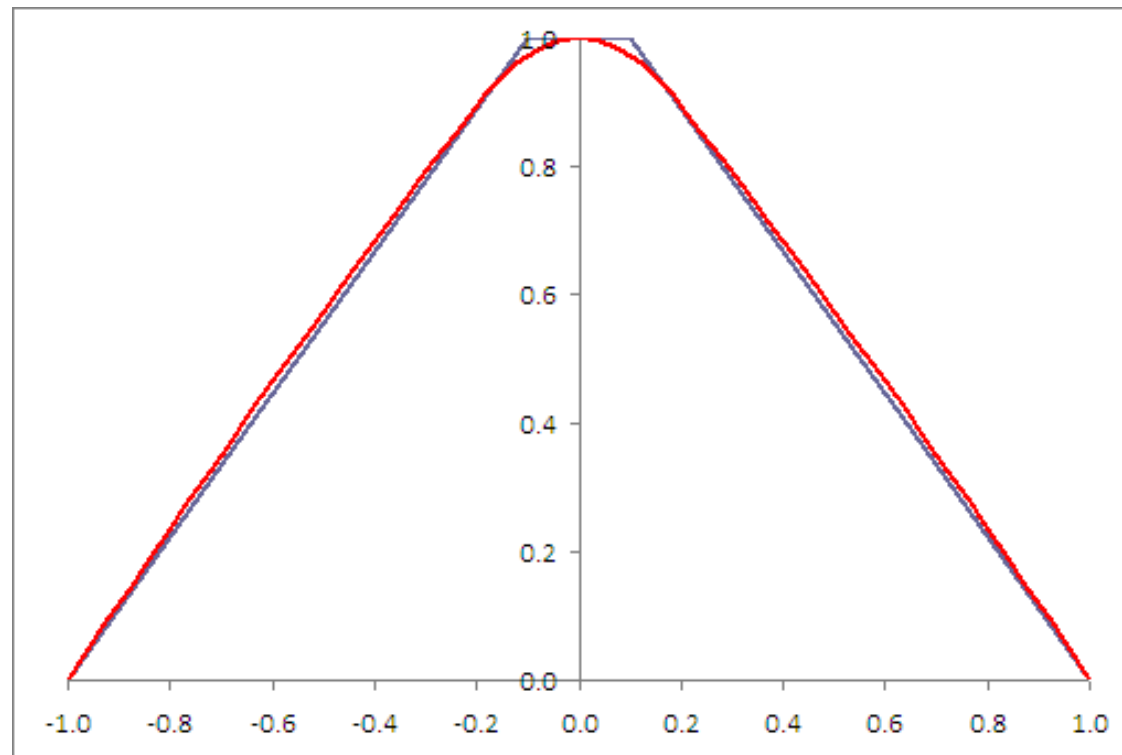
$$\frac{a}{2} \cong 0.2$$

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte

- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)

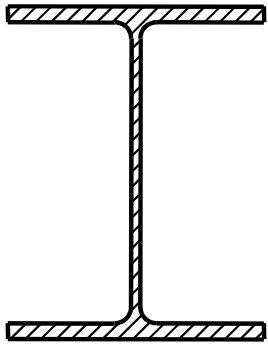


$$\frac{a}{2} \cong 0.1$$

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd}$$

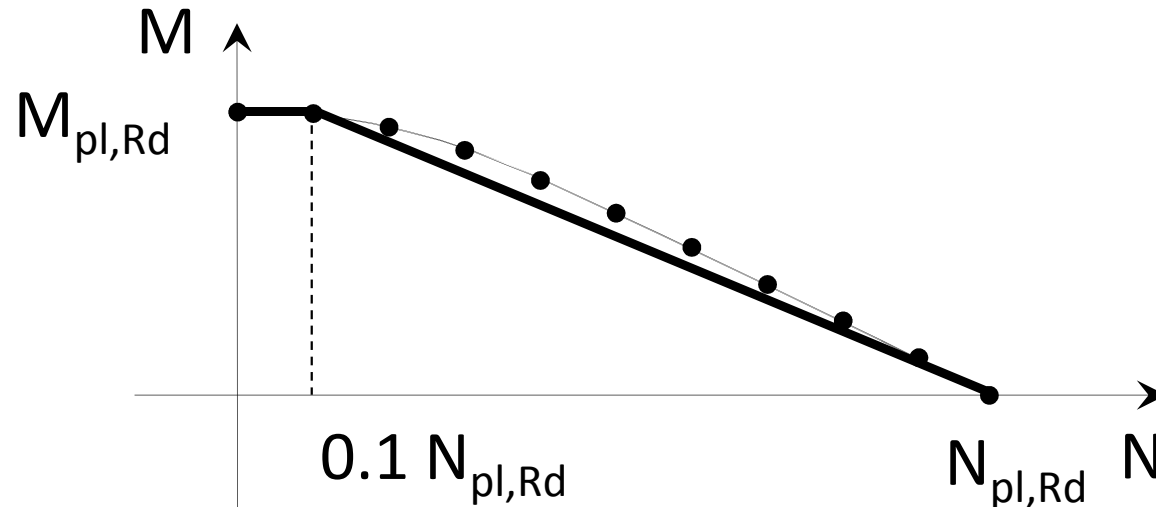
$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right)$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

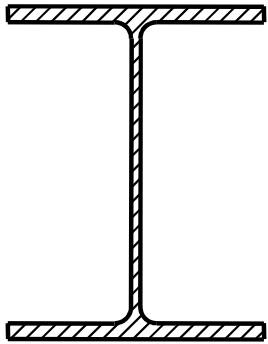


Un tempo si suggeriva  
questa semplificazione



# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse forte



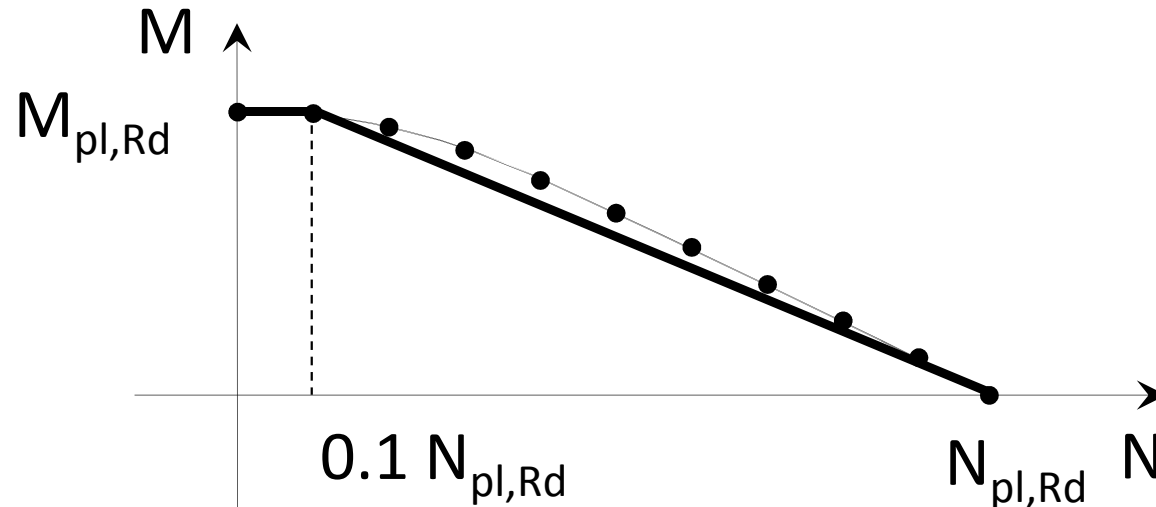
$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \quad N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

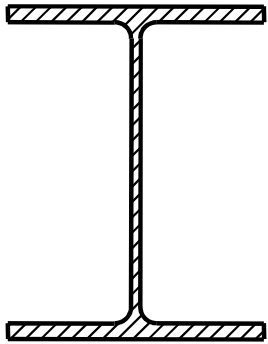
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$



$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

Semplificazione cautelativa,  
va bene per profili HE

# Dominio di resistenza per sezioni di classe 3

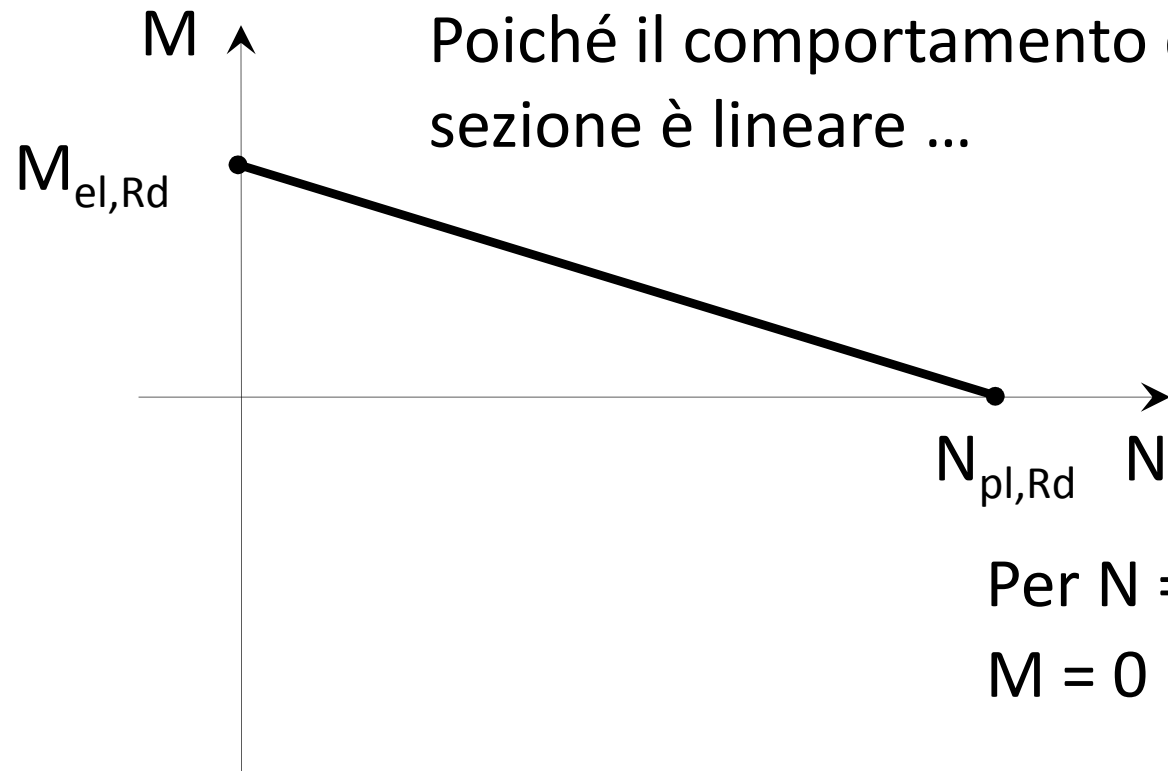


$$M_{el,N,Rd} = M_{el,Rd} \left( 1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right)$$

Per  $N = 0$   
 $M = M_{el,Rd}$

$$M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}}$$

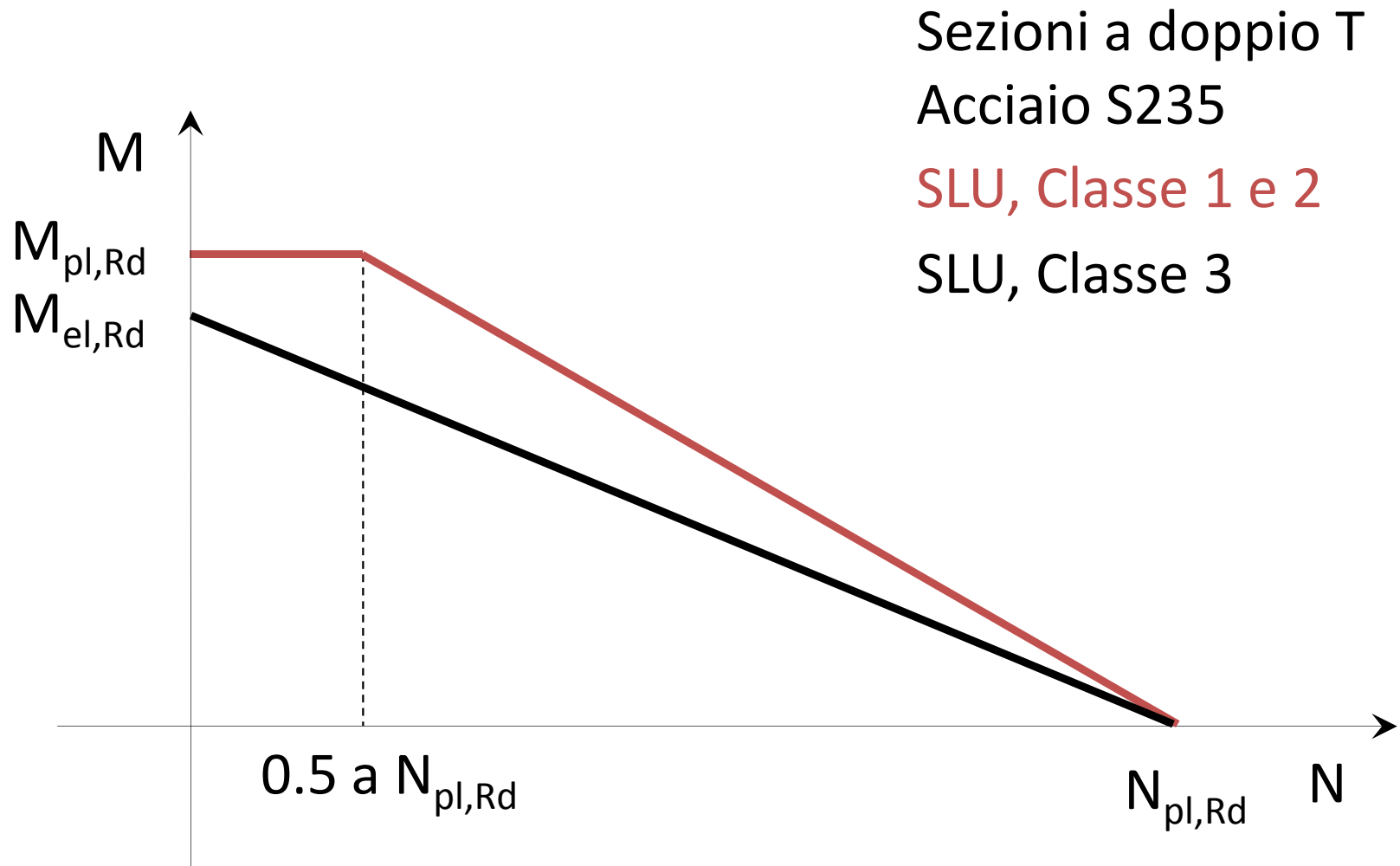
$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Per  $N = N_{pl,Rd}$   
 $M = 0$

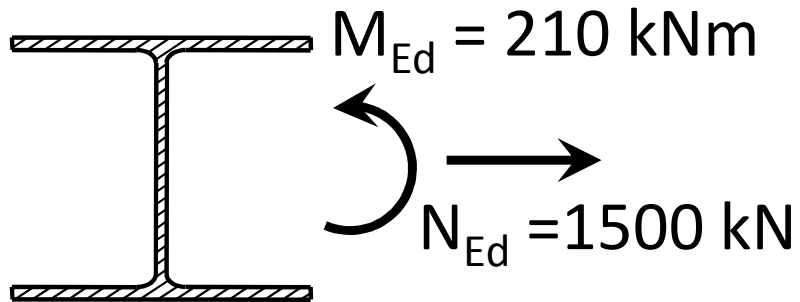
# Dominio di resistenza

## confronto tra classe 1-2 e classe 3



# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	$149 \text{ cm}^2$
$W_{pl}$	$1868 \text{ cm}^3$
Acciaio	S235

## 1 - Classe della sezione

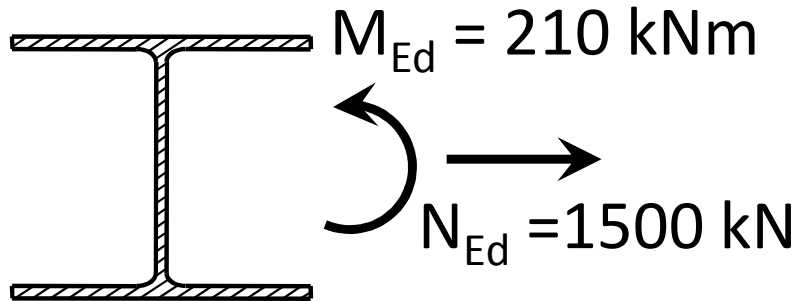
Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{208}{11} = 19 \leq 72 \varepsilon = 72$

Ala:  $\frac{c}{t_f} = \frac{117.5}{19} = 6.2 \leq 9 \varepsilon = 9$

La sezione appartiene alla classe 1.

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	149 cm <sup>2</sup>
$W_{pl}$	1868 cm <sup>3</sup>
Acciaio	S235

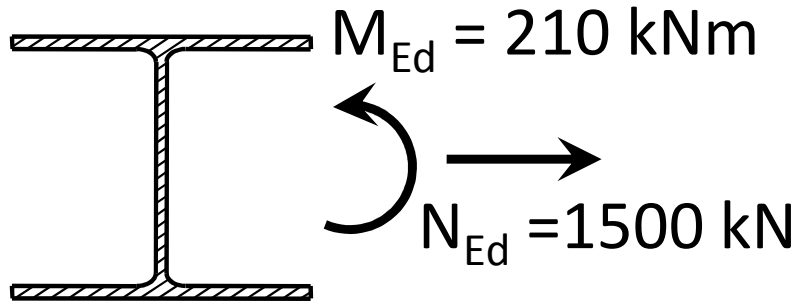
2 - Determinazione di  $N_{pl,Rd}$  ed  $M_{pl,Rd}$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 149}{1.05 \times 10} = 3334.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 1868}{1.05 \times 10^3} = 418.1 \text{ kNm}$$

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	$149 \text{ cm}^2$
$W_{pl}$	$1868 \text{ cm}^3$
Acciaio	S235
$b=300 \text{ mm}$	$t=19 \text{ mm}$

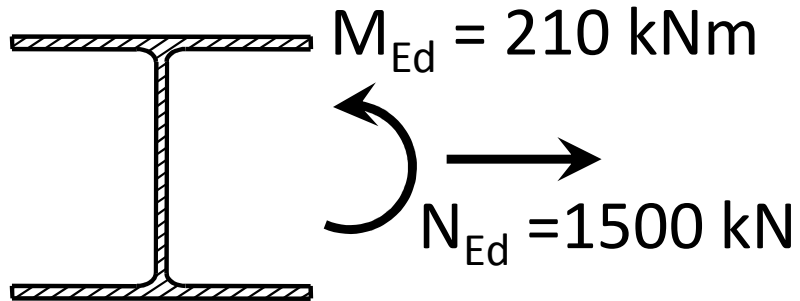
3 - Determinazione di a

$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} = \frac{14900 - 2 \times 300 \times 19}{14900} = 0.235$$

$$\frac{a}{2} N_{pl,Rd} = \frac{0.235}{2} 3334.8 = 391.8 \text{ kN}$$

# Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
Acciaio	S235
$N_{pl,Rd}$	3334.8 kN
$M_{pl,Rd}$	418.1 kNm

4 - Determinazione di  $M_{pl,N,Rd}$  e verifica

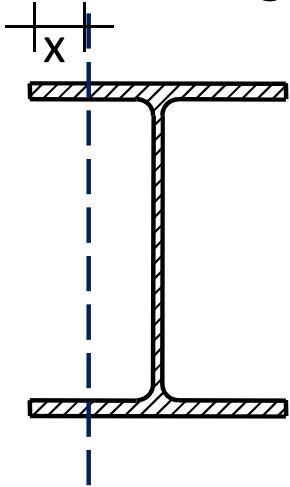
$$N_{Ed} = 1500 \text{ kN} \geq \frac{a}{2} N_{pl,Rd} = 391.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5 \times 0.235} = 260.7 \text{ kNm} > M_{Ed} = 210.0 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse debole



Per  $x=0$

$$N = A \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd}$$

$$M = 0$$

Per  $0 \leq x \leq (b-t_w)/2$

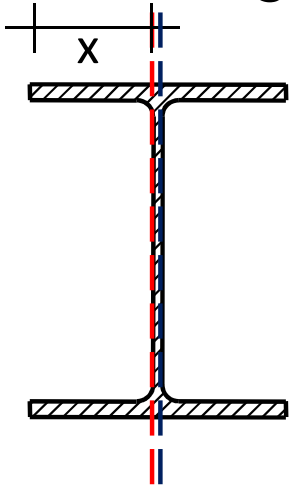
$$N = (A - 4xt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 4xt_f \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = 2xt_f (b-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$



# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse debole



Per  $x = (b - t_w)/2$

$$N = (A - 2(b - t_w)t_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \cong (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = x t_f (b + t_w) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Per  $(b - t_w)/2 \leq x \leq (b + t_w)/2$

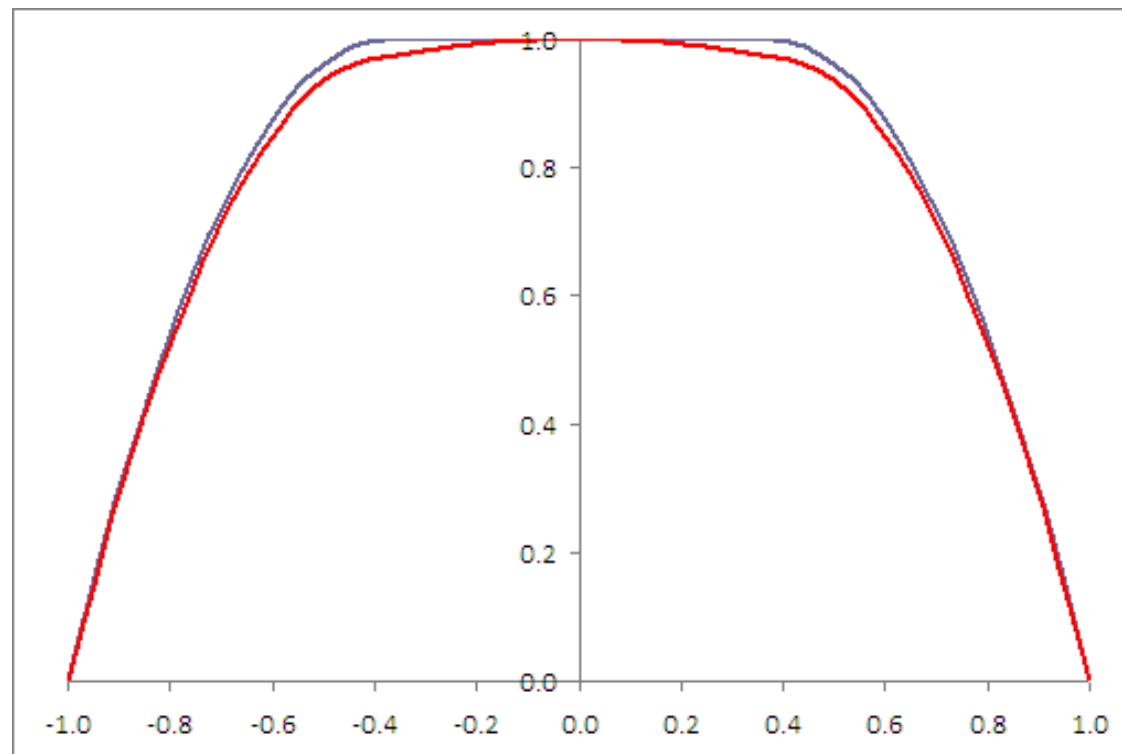
$$N = (b - 2x) t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = M_{Rd} - \left( \frac{b}{2} - x \right)^2 h \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse debole

- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)

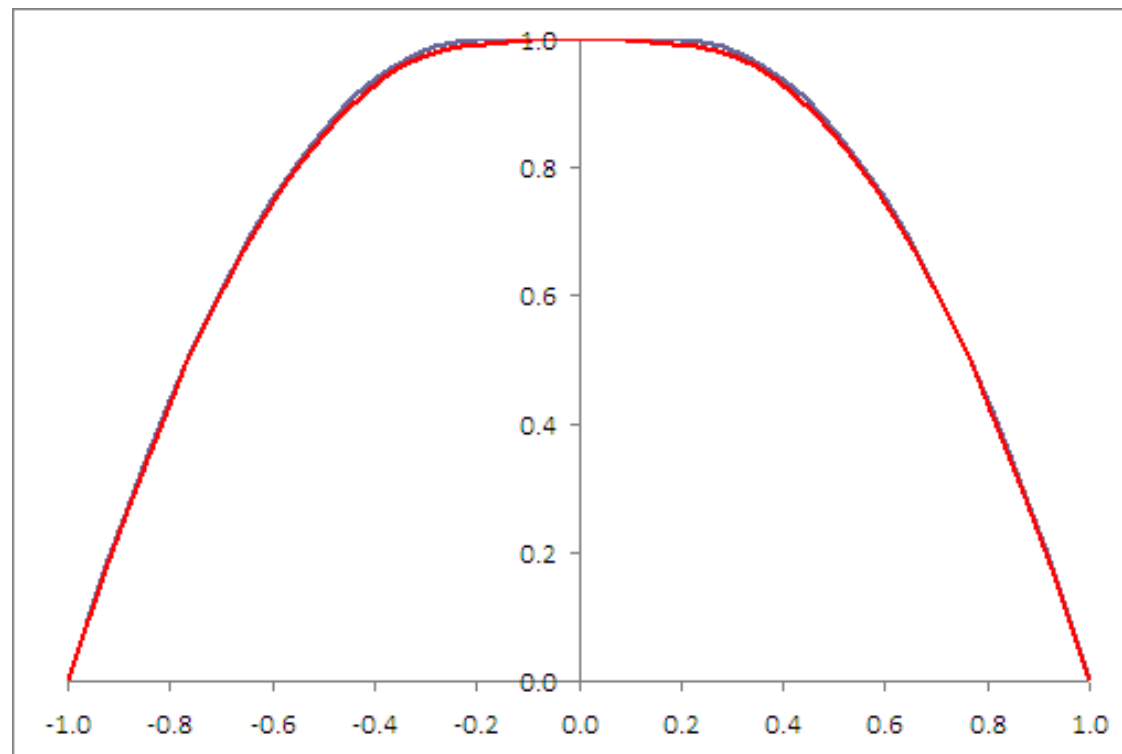


Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse debole

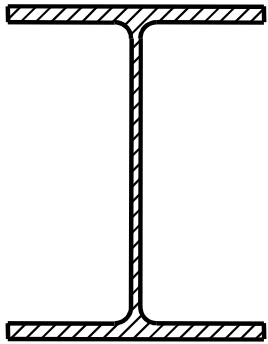
- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)



Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## sezione a doppio T con M nell'asse debole



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq a N_{pl,Rd}$$

$$N \leq a N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left[ 1 - \left( \frac{N/N_{pl,Rd} - a}{1 - a} \right)^2 \right] \quad N > a N_{pl,Rd}$$

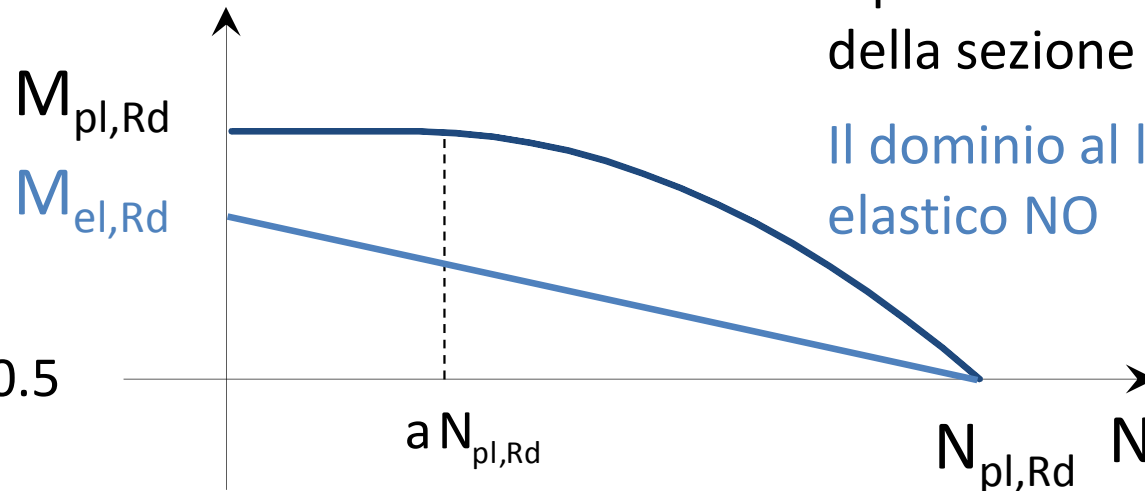
$$N > a N_{pl,Rd}$$

M

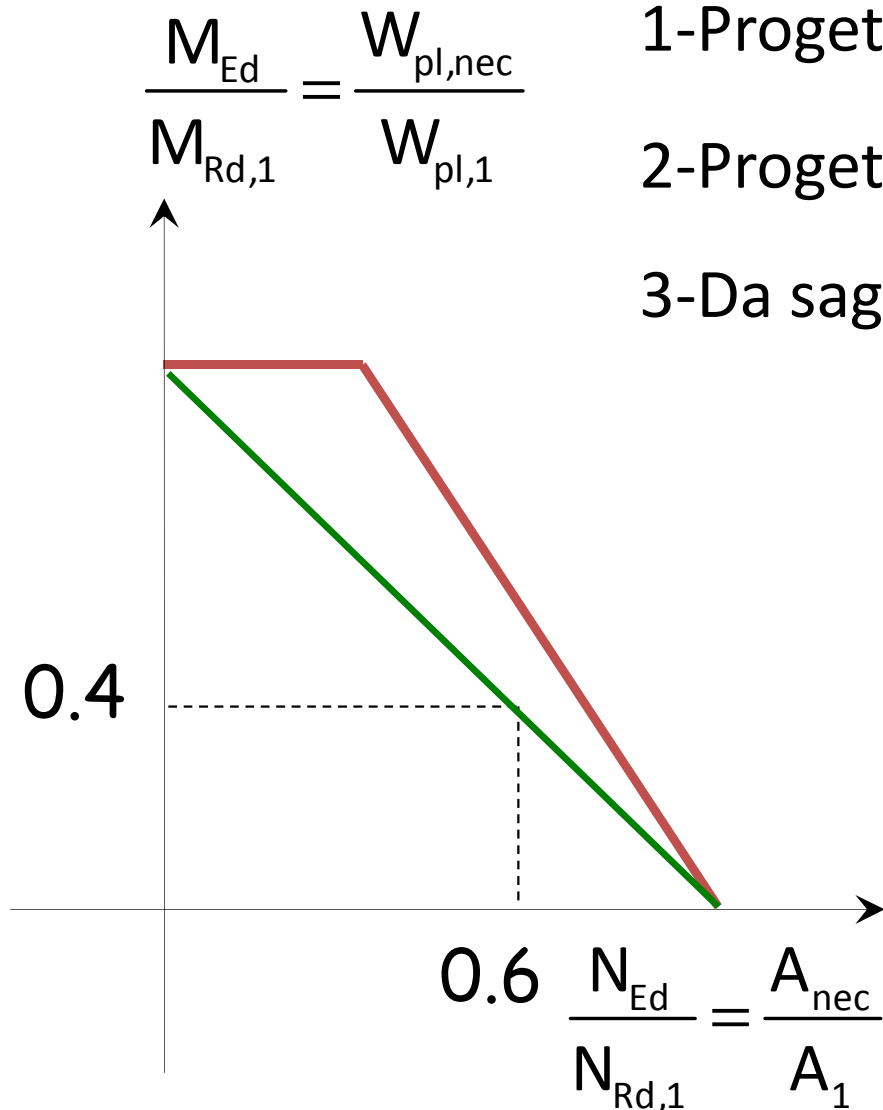
Il dominio plastico  
dipende dalla forma  
della sezione

Il dominio al limite  
elastico NO

$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} \leq 0.5$$



# Considerazioni di progetto



1-Progetto a flessione ( $M_{Ed}$ )  $\rightarrow W_{pl,nec}$

2-Progetto a sforzo normale ( $N_{Ed}$ )  $\rightarrow A_{nec}$

3-Da sagomario scelgo il profilo  $\rightarrow A_1$

Come proporzionare  $A_1$  e  $W_{pl,1}$ ?

Considero il diagramma lineare, a vantaggio di sicurezza:

Scelta l'area  $A_1 \rightarrow \frac{A_{nec}}{A_1}$

Dovrò avere:  $\frac{W_{pl,nec}}{W_{pl,1}} = 1 - \frac{A_{nec}}{A_1}$

# Tensoflessione deviata

- Per sezioni di classe 3
  - Si usano le formule del modello elastico lineare
  - Si impone come limite tensionale  $f_y / \gamma_{M0}$

$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \right| + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \right| \leq 1$$

# Tensoflessione deviata

- Per sezioni di classe 1 e 2
  - Per sezioni con doppio asse di simmetria la normativa fornisce espressioni semplificate

$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \right|^2 + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \right|^{5n} \leq 1$$

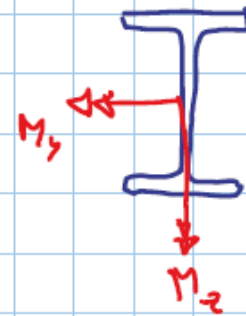
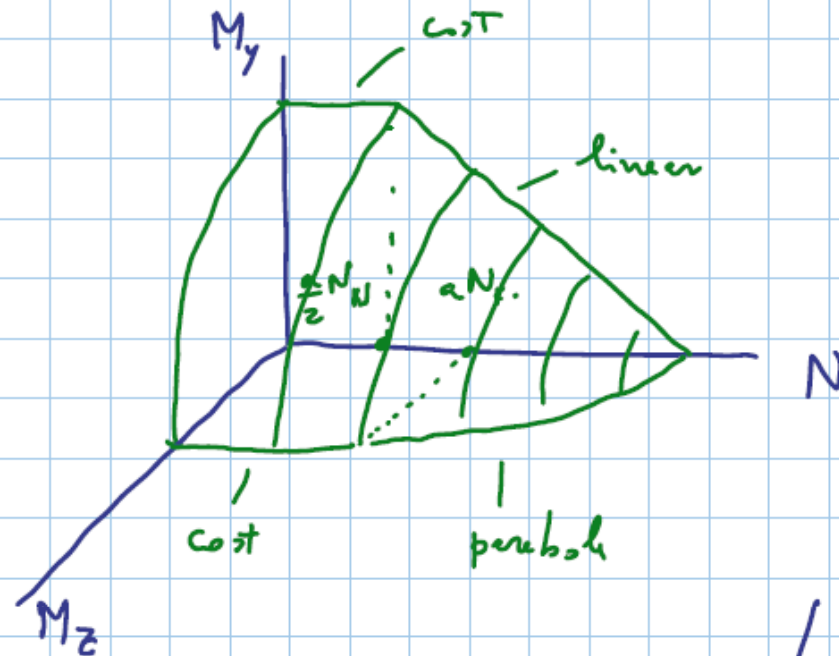
$$\text{con } n = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$$

col limite per esponente  $\geq 1$

# Tensoflessione deviata

FLESSIONE COMPOSTA DEVIATA

$M_y$   $M_z$   $N$



assegnato  $N_{Ed}$

$M_{y,Rd}$

$M_{z,Rd}$

$$\left( \frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \right)^2 + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{N,z,Rd}} \right|^{5m} \leq 1$$

$$m = \max \left( \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} ; 0.2 \right)$$