

Corso di laurea in Ingegneria civile strutturale e geotecnica

# Tecnica delle costruzioni

## modulo A

15 – Flessione (SLE) e progetto

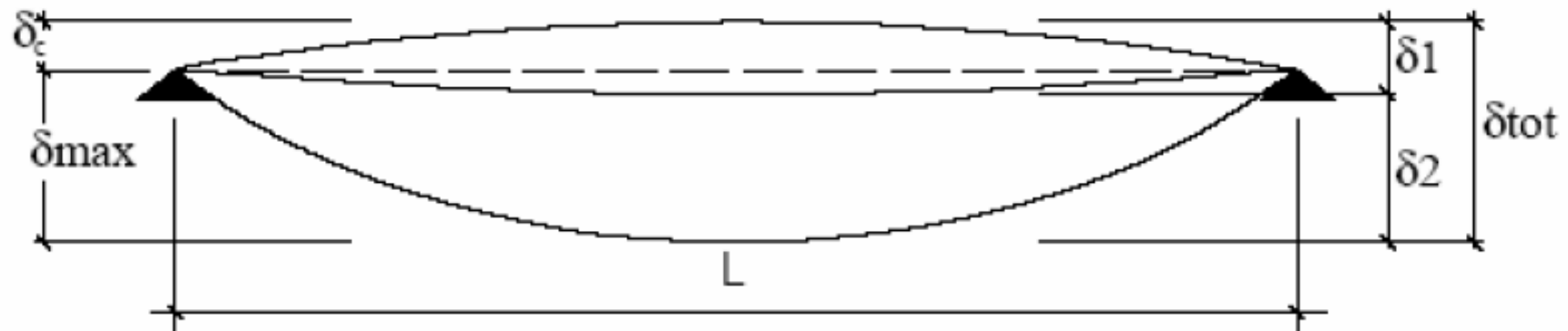
Aurelio Gheresi

4/11/2020

# Flessione

## Verifica agli stati limite di esercizio

- Il progetto degli elementi inflessi è in genere molto condizionato dalla verifica agli spostamenti



$\delta_c$	monta iniziale
$\delta_1$	spostamento elastico dovuto ai carichi permanenti
$\delta_2$	spostamento elastico dovuto ai carichi variabili
$\delta_{max}$	spostamento finale, depurato dalla monta

# Flessione

## Verifica agli stati limite di esercizio

- Il progetto degli elementi inflessi è in genere molto condizionato dalla verifica agli spostamenti

Elementi strutturali	Limiti superiori per gli spostamenti verticali	
	$\frac{\delta_{\max}}{L}$	$\frac{\delta_2}{L}$
Coperture in generale	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{250}$
Coperture praticabili	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{300}$
Solai in generale	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{300}$
Solai o coperture che reggono intonaco o altro materiale di finitura fragile o tramezzi non flessibili	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{350}$
Solai che supportano colonne	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{500}$
Nei casi in cui lo spostamento può compromettere l'aspetto dell'edificio	$\frac{1}{250}$	

*In caso di specifiche esigenze tecniche e/o funzionali tali limiti devono essere opportunamente ridotti.*

# Progetto

a) stato limite ultimo

- 1 - Si assume la classe della sezione (1, 2 o 3)
- 2 - Invertendo l'espressione di verifica SLU si ottiene la formula di progetto della sezione, con la quale si calcola  $W_{el}$  o  $W_{pl}$

Classe 1 e 2:

$$M_{Ed} \leq M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \Rightarrow \quad W_{pl} \geq \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}$$

Classe 3:

$$M_{Ed} \leq M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \Rightarrow \quad W_{el} \geq \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}$$

# Progetto

## b) stato limite di esercizio

3 - Invertendo l'espressione di verifica si ottiene la formula di progetto della sezione, con la quale si calcola I

Ad esempio, per trave appoggiata con carico uniformemente distribuito

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{EI}$$

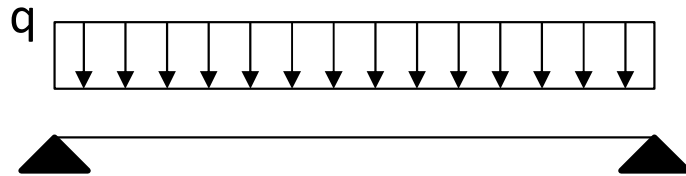
per carichi variabili  $q_k$

$$\delta_2 \leq \frac{L}{k_2} \quad \frac{5}{384} \frac{q_k L^4}{EI} \leq \frac{L}{k_2} \quad \rightarrow \quad I \geq \frac{5 k_2}{384} \frac{q_k L^3}{E}$$

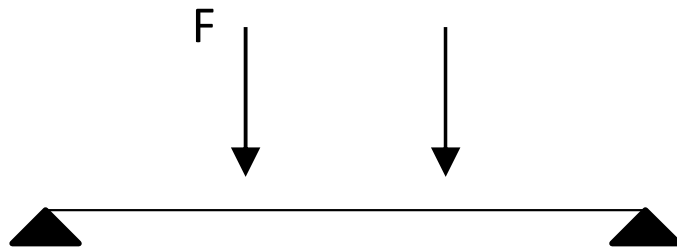
per carichi totali  $g_k + q_k$

$$\delta_{\max} \leq \frac{L}{k_{\max}} \quad \frac{5}{384} \frac{(g_k + q_k) L^4}{EI} \leq \frac{L}{k_{\max}} \quad \rightarrow \quad I \geq \frac{5 k_{\max}}{384} \frac{(g_k + q_k) L^3}{E}$$

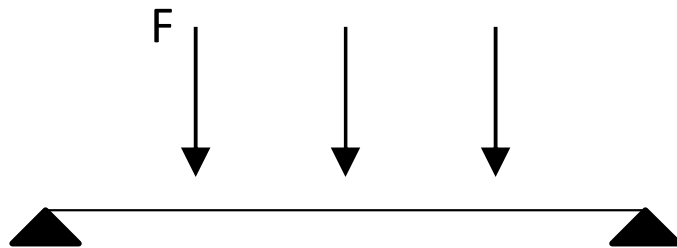
# Frecce in mezzeria per alcuni schemi



$$\delta = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$



$$\delta = \frac{23}{648} \frac{FL^3}{EI}$$



$$\delta = \frac{19}{384} \frac{FL^3}{EI}$$

# Progetto

SLU + SLE

Si sono determinati i valori minimi per  $I$  e  $W_{el}$  o  $W_{pl}$

4 - Si sceglie il profilato

5 - Si verifica la classe del profilato  
(per essere certi di aver preso il  $W$  giusto)

# Flessione

## riepilogo suggerimenti progettuali

- Nelle aste inflesse in molti casi non è facile prevedere se sarà più condizionante lo SLU oppure lo SLE
- È opportuno far riferimento in fase di progetto ad entrambe le situazioni
  - Per SLU (si può ipotizzare classe 1 o 2)

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad W_{pl} \geq \frac{M_{Ed} \gamma_{M0}}{f_y}$$

- Per SLE (con carico uniforme)

per carichi variabili  $q_k$

$$\delta_2 \leq \frac{L}{k_2} \quad I \geq \frac{5 k_2}{384} \frac{q_k L^3}{E}$$

per carichi totali  $g_k + q_k$

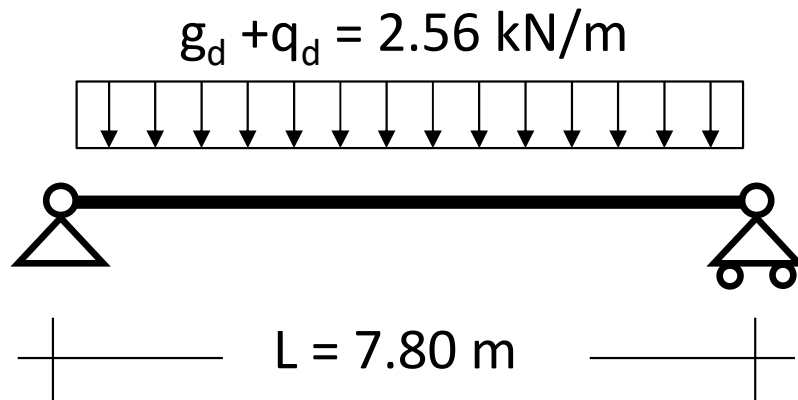
$$\delta_{max} \leq \frac{L}{k_{max}} \quad I \geq \frac{5 k_{max}}{384} \frac{(g_k + q_k) L^3}{E}$$



# Esempio 1

trave secondaria per copertura non praticabile

Dati:



Acciaio

S235

$$g_k = 0.24 \text{ kN/m} \quad g_d = 0.31 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 1.50 \text{ kN/m} \quad q_d = 2.25 \text{ kN/m}$$

$$M_{Ed} = \frac{qL^2}{8} = \frac{2.56 \times 7.80^2}{8} = 19.5 \text{ kNm}$$

1 - Classe della sezione

Suppongo che la sezione appartenga alla classe 1 o 2.

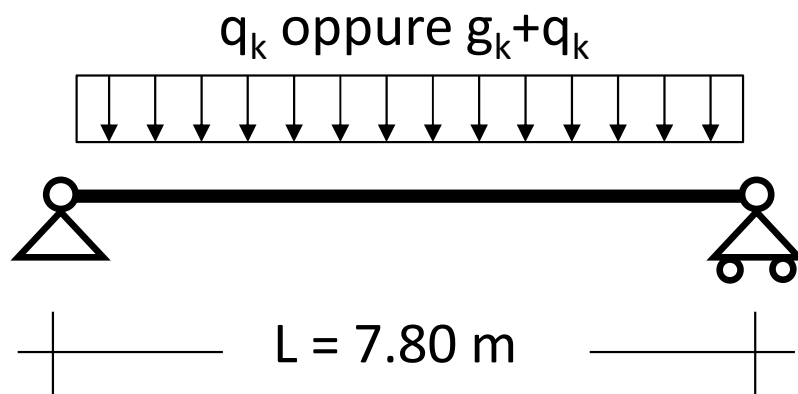
2 - Determinazione del modulo plastico

$$W_{pl} \geq \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} = \frac{19.5 \times 10^6}{235 / 1.05} = 87.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

# Esempio 1

trave secondaria per copertura non praticabile

Dati:



Acciaio S235

$$g_k = 0.24 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 1.50 \text{ kN/m} \quad g_k + q_k = 1.74 \text{ kN/m}$$

Copertura non praticabile

3 - Determinazione del momento d'inerzia ( $k_2 = 250$ )

$$I \geq \frac{5 k_2}{384} \frac{q_k L^3}{E} = \frac{5 \times 250}{384} \frac{1.50 \times 7800^3}{210000} = 1103 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

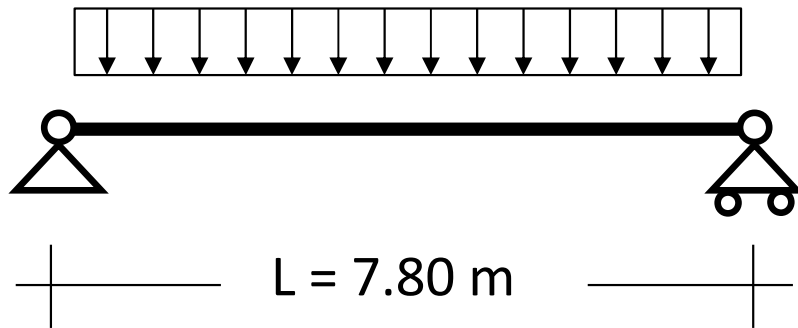
Determinazione del momento d'inerzia ( $k_{\max} = 200$ )

$$I \geq \frac{5 k_{\max}}{384} \frac{(g_k + q_k) L^3}{E} = \frac{5 \times 200}{384} \frac{1.74 \times 7800^3}{210000} = 1024 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

# Esempio 1

trave secondaria per copertura non praticabile

Dati:



Acciaio S235

$$g_k = 0.24 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 1.50 \text{ kN/m}$$

$$W_{pl} \geq 87.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I \geq 1103 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

## 3 - Scelta della sezione

HE 120 A:	$W_{pl} = 119.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 606.2 \times 10^4 \text{ mm}^4$
-----------	---	--------------------------------------

HE 160 A:	$W_{pl} = 245.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 1673 \times 10^4 \text{ mm}^4$
-----------	---	-------------------------------------

IPE 160:	$W_{pl} = 123.9 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 869.3 \times 10^4 \text{ mm}^4$
----------	---	--------------------------------------

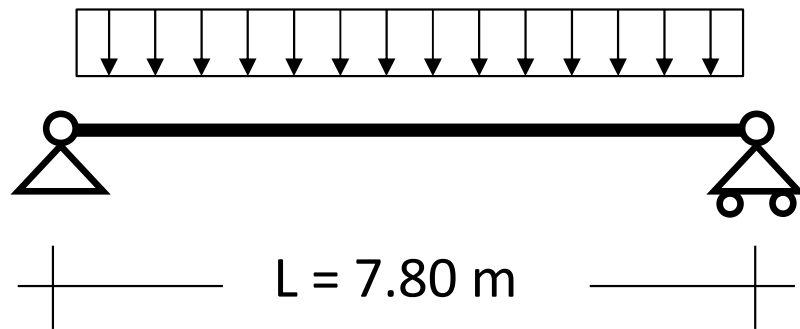
IPE 180:	$W_{pl} = 166.4 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 1317 \times 10^4 \text{ mm}^4$
----------	---	-------------------------------------

Si è scelto un **HE 160 A**

# Esempio 1

trave secondaria per copertura non praticabile

Dati:



Acciaio S235

$$g_k = 0.24 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 1.50 \text{ kN/m}$$

3 - Scelta della sezione

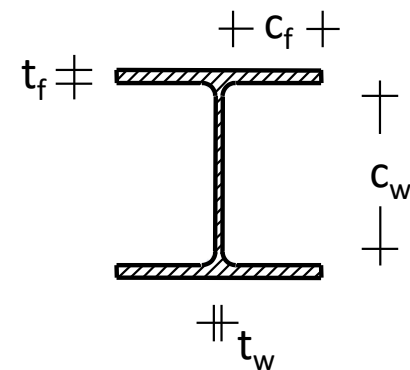
Si è scelto un **HE 160 A**

$$c_w = 104 \text{ mm}$$

$$t_w = 6 \text{ mm}$$

$$c_f = 60.5 \text{ mm}$$

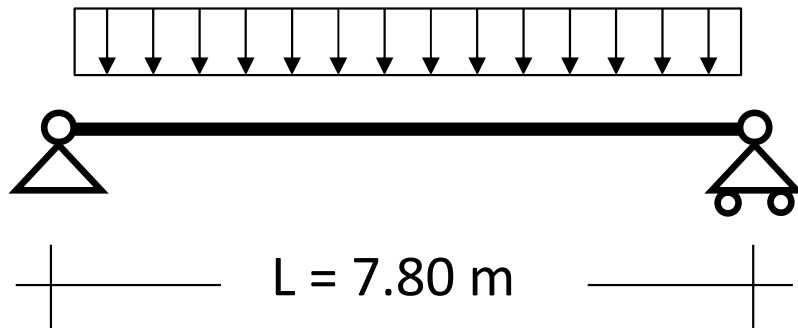
$$t_f = 9 \text{ mm}$$



# Esempio 1

trave secondaria per copertura non praticabile

Dati:



Acciaio	S235
Sezione	serie HEA
$M_{Ed}$	19.5 kNm
$W_{pl}$	$\geq 87.1 \text{ cm}^3$

## 4 - Determinazione della classe della sezione

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{104}{6} = 17.3 \leq 72 \varepsilon = 72$  ( $\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 1$ )

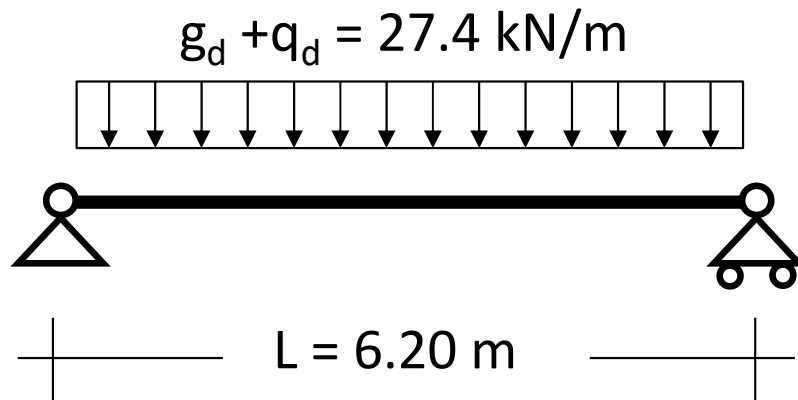
Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{60.5}{9} = 6.72 \leq 9 \varepsilon = 9$

La sezione è realmente di classe 1

# Esempio 2

trave secondaria per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 15.2 \text{ kN/m} \quad g_d = 20.2 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 4.8 \text{ kN/m} \quad q_d = 7.2 \text{ kN/m}$$

$$M_{Ed} = \frac{qL^2}{8} = \frac{27.4 \times 6.20^2}{8} = 131.7 \text{ kNm}$$

1 - Classe della sezione

Suppongo che la sezione appartenga alla classe 1 o 2.

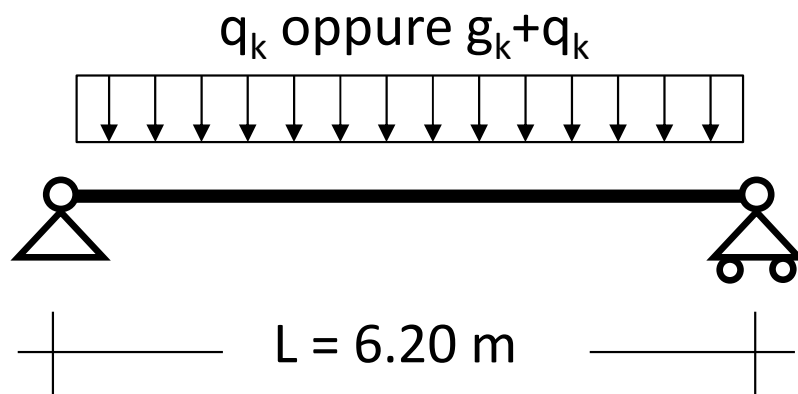
2 - Determinazione del modulo plastico

$$W_{pl} \geq \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} = \frac{131.7 \times 10^6}{275 / 1.05} = 502.9 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

# Esempio 2

trave secondaria per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 15.2 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 4.8 \text{ kN/m} \quad g_k + q_k = 20.0 \text{ kN/m}$$

Solaio con tramezzi non flessibili

3 - Determinazione del momento d'inerzia ( $k_2 = 350$ )

$$I \geq \frac{5 k_2}{384} \frac{q_k L^3}{E} = \frac{5 \times 350}{384} \frac{4.80 \times 6200^3}{210000} = 2483 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

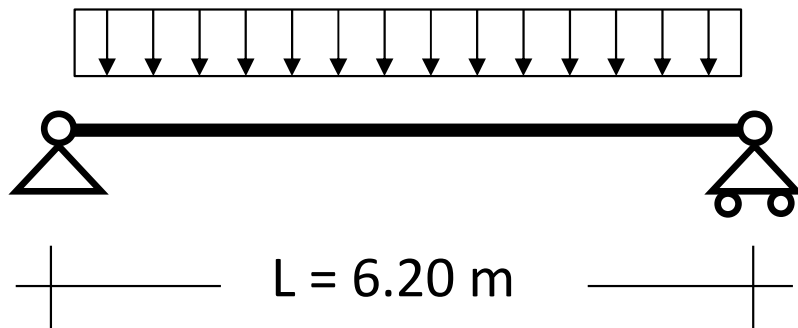
Determinazione del momento d'inerzia ( $k_{\max} = 250$ )

$$I \geq \frac{5 k_{\max}}{384} \frac{(g_k + q_k) L^3}{E} = \frac{5 \times 250}{384} \frac{20.0 \times 6200^3}{210000} = 7389 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

# Esempio 2

## trave secondaria per piano tipo

Dati:



Acciaio S275

$$g_k = 15.2 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 4.8 \text{ kN/m}$$

$$W_{pl} \geq 502.9 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I \geq 7389 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

### 3 - Scelta della sezione

HE 220 A:	$W_{pl} = 568.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 5410 \times 10^4 \text{ mm}^4$
-----------	---	-------------------------------------

HE 240 A:	$W_{pl} = 744.6 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 7763 \times 10^4 \text{ mm}^4$
-----------	---	-------------------------------------

IPE 270:	$W_{pl} = 484.0 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 5790 \times 10^4 \text{ mm}^4$
----------	---	-------------------------------------

IPE 300:	$W_{pl} = 628.4 \times 10^3 \text{ mm}^3$	$I = 8356 \times 10^4 \text{ mm}^4$
----------	---	-------------------------------------

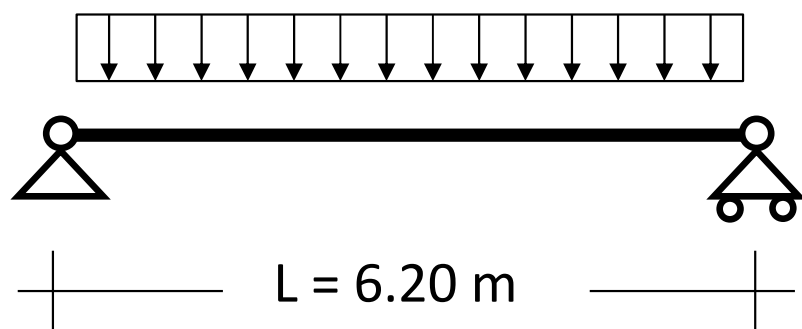
Si è scelto un **IPE 300**



# Esempio 2

trave secondaria per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 15.2 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 4.8 \text{ kN/m}$$

3 - Scelta della sezione

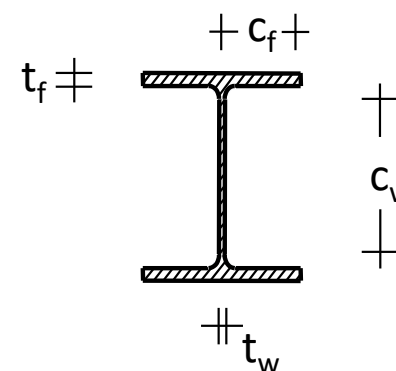
Si è scelto un **IPE 300**

$$c_w = 248.6 \text{ mm}$$

$$t_w = 7.1 \text{ mm}$$

$$c_f = 56.5 \text{ mm}$$

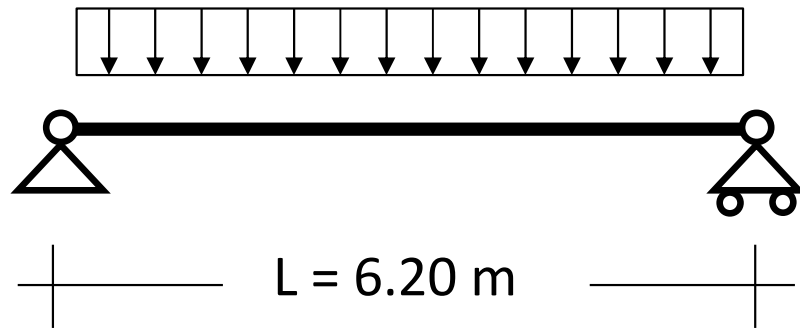
$$t_f = 10.7 \text{ mm}$$



# Esempio 2

trave secondaria per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 15.2 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 4.8 \text{ kN/m}$$

## 4 - Determinazione della classe della sezione

$$\text{Anima: } \frac{c_w}{t_w} = \frac{248.6}{7.1} = 35.0 \leq 72 \varepsilon = 66.2 \quad (\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0.92)$$

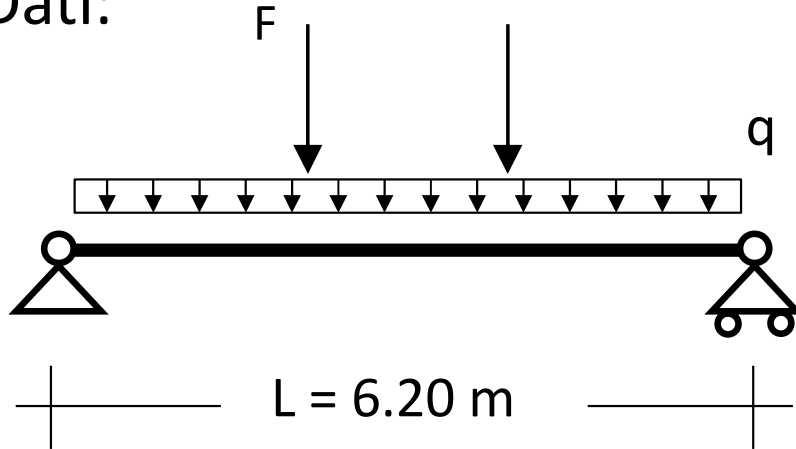
$$\text{Ala: } \frac{c_f}{t_f} = \frac{56.5}{10.7} = 5.28 \leq 9 \varepsilon = 8.3$$

La sezione è realmente di classe 1

# Esempio 3

trave principale per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 8.1 \text{ kN/m}$$

$$g_d = 10.5 \text{ kN/m}$$

$$F_{gk} = 112 \text{ kN}$$

$$F_{gd} = 146 \text{ kN}$$

$$F_{qk} = 30 \text{ kN}$$

$$F_{qd} = 45 \text{ kN}$$

1 - Classe della sezione

Suppongo che la sezione appartenga alla classe 1 o 2.

$$\begin{aligned} M_{Ed} &= \frac{qL^2}{8} + \frac{FL}{3} = \\ &= \frac{10.5 \times 6.20^2}{8} + \frac{191 \times 6.20}{3} = \\ &= 50.5 + 394.7 = 445.2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

2 - Determinazione del modulo plastico

$$W_{pl} \geq \frac{M_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} = \frac{445.2 \times 10^6}{275 / 1.05} = 1700 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

# Verifica SLE

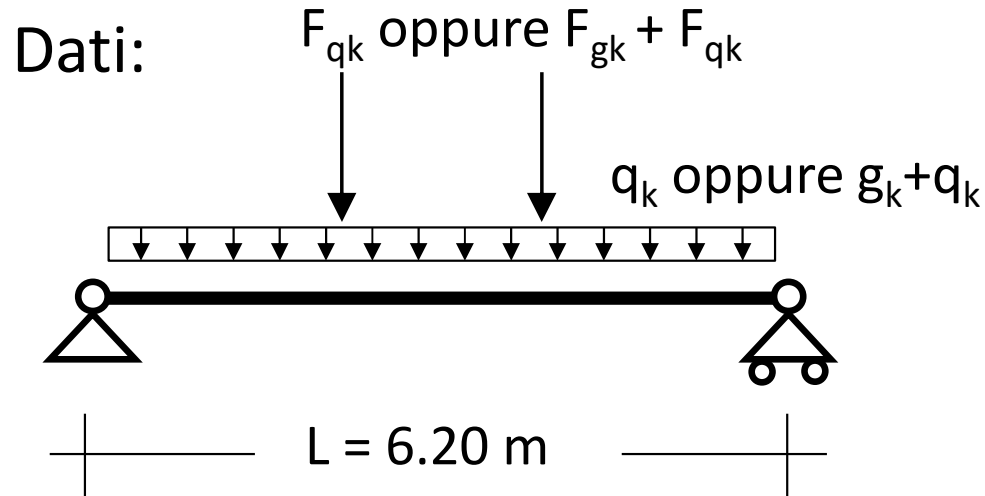
in presenza di carico distribuito e due forze concentrate

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} + \frac{23}{648} \frac{FL^3}{EI} \leq \frac{L}{k}$$

$$I \geq \frac{k}{E} \left( \frac{5}{384} qL + \frac{23}{648} F \right) L^2$$

# Esempio 3

trave principale per piano tipo



Acciaio

S275

$g_k = 8.1 \text{ kN/m}$

$q_k = 0$

$F_{gk} = 112 \text{ kN}$

$F_{qk} = 30 \text{ kN}$

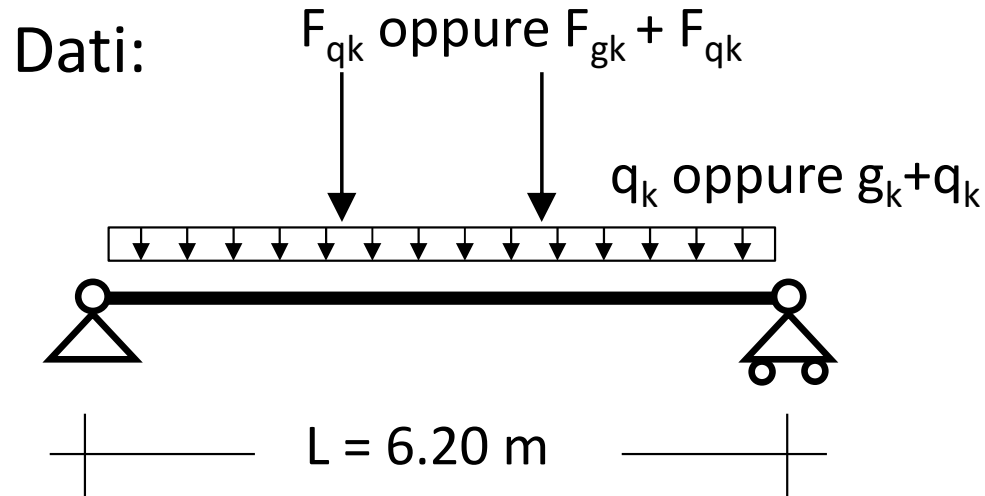
Solaio con tramezzi non flessibili

3 - Determinazione del momento d'inerzia ( $k_2 = 350$ )

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{k_2}{E} \left( \frac{5}{384} q_k L + \frac{23}{648} F_{qk} \right) L^2 = \\ &= \frac{350}{210000} \left( \frac{5}{384} \times 0 + \frac{23}{648} \times 30 \times 10^3 \right) \times (6.20 \times 10^3)^2 = \\ &= 6822 \times 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

# Esempio 3

trave principale per piano tipo



Acciaio

S275

$g_k = 8.1 \text{ kN/m}$

$q_k = 0$

$F_{gk} = 112 \text{ kN}$

$F_{qk} = 30 \text{ kN}$

Solaio con tramezzi non flessibili

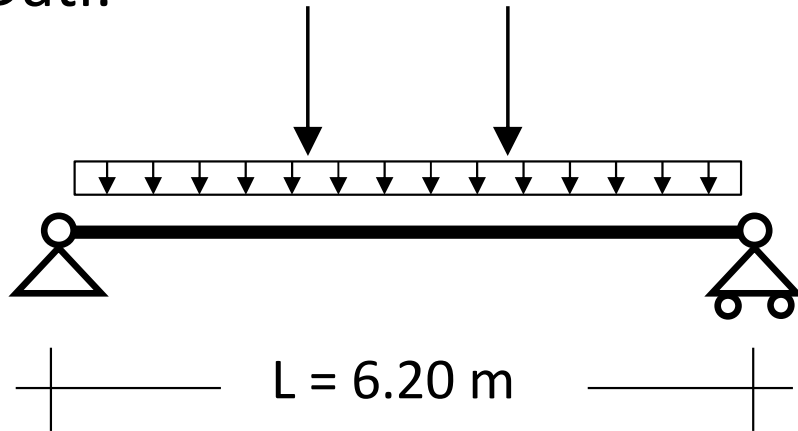
3 - Determinazione del momento d'inerzia ( $k_{\max} = 250$ )

$$\begin{aligned}
 I &\geq \frac{k_{\max}}{E} \left[ \frac{5}{384} (g_k + q_k) L + \frac{23}{648} (F_{gk} + F_{qk}) \right] L^2 = \\
 &= \frac{250}{210000} \left[ \frac{5}{384} \times 8.1 \times 6.20 \times 10^3 + \frac{23}{648} \times 142 \times 10^3 \right] \times (6.20 \times 10^3)^2 = \\
 &= 26057 \times 10^4 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

# Esempio 3

trave principale per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

$$g_k = 8.1 \text{ kN/m} \quad q_k = 0$$

$$F_{gk} = 112 \text{ kN}$$

$$F_{qk} = 30 \text{ kN}$$

$$W_{pl} \geq 1700 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I \geq 26057 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

## 3 - Scelta della sezione

HE 300 B:  $W_{pl} = 1869 \times 10^3 \text{ mm}^3$

$I = 25170 \times 10^4 \text{ mm}^4$

HE 340 A:  $W_{pl} = 1850 \times 10^3 \text{ mm}^3$

$I = 27690 \times 10^4 \text{ mm}^4$

IPE 400:  $W_{pl} = 1307 \times 10^3 \text{ mm}^3$

$I = 23130 \times 10^4 \text{ mm}^4$

IPE 450:  $W_{pl} = 1702 \times 10^3 \text{ mm}^3$

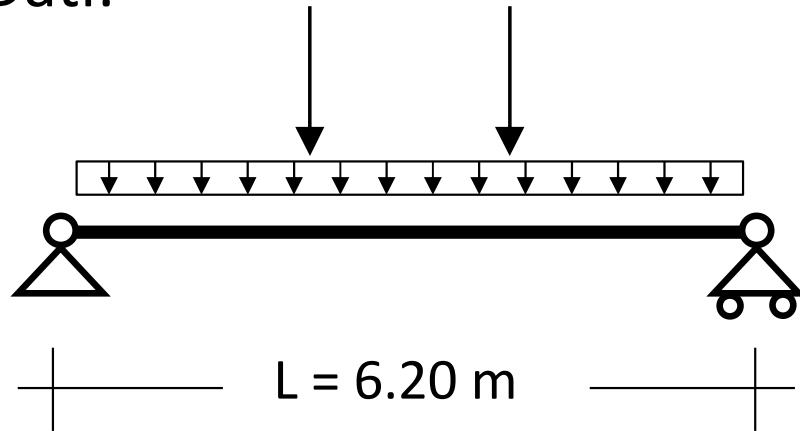
$I = 33740 \times 10^4 \text{ mm}^4$

Si è scelto un **IPE 450**

# Esempio 3

trave principale per piano tipo

Dati:



Acciaio

S275

3 - Scelta della sezione

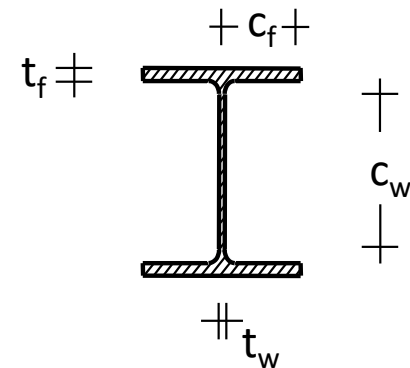
Si è scelto un **IPE 450**

$$c_w = 378.8 \text{ mm}$$

$$t_w = 9.4 \text{ mm}$$

$$c_f = 69.3 \text{ mm}$$

$$t_f = 14.6 \text{ mm}$$

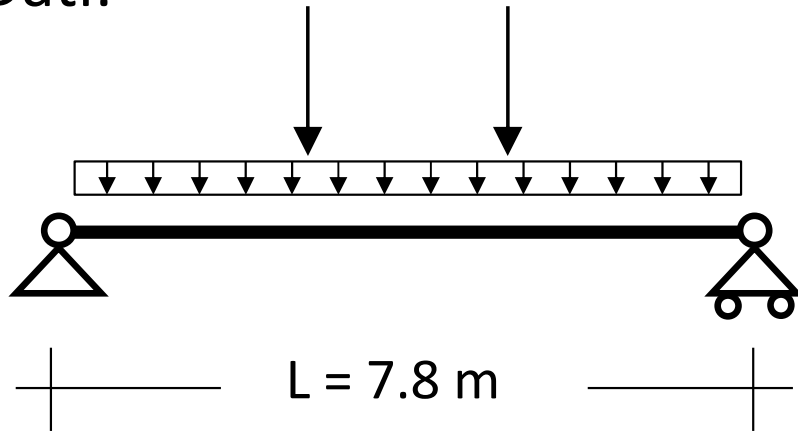




# Esempio 3

trave principale per piano tipo

Dati:



Acciaio

S235

Sezione

serie HEA

$M_{Ed}$

19.5 kNm

$W_{pl}$

$\geq 87.1 \text{ cm}^3$

## 4 - Determinazione della classe della sezione

Anima:  $\frac{c_w}{t_w} = \frac{378.8}{9.4} = 40.3 \leq 72 \varepsilon = 66.2 \quad (\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0.92)$

Ala:  $\frac{c_f}{t_f} = \frac{69.3}{14.6} = 4.75 \leq 9 \varepsilon = 8.3$

La sezione è realmente di classe 1