

Corso di laurea in Ingegneria civile strutturale e geotecnica

# Tecnica delle costruzioni

## modulo A

19 – Flessione composta - pressoflessione

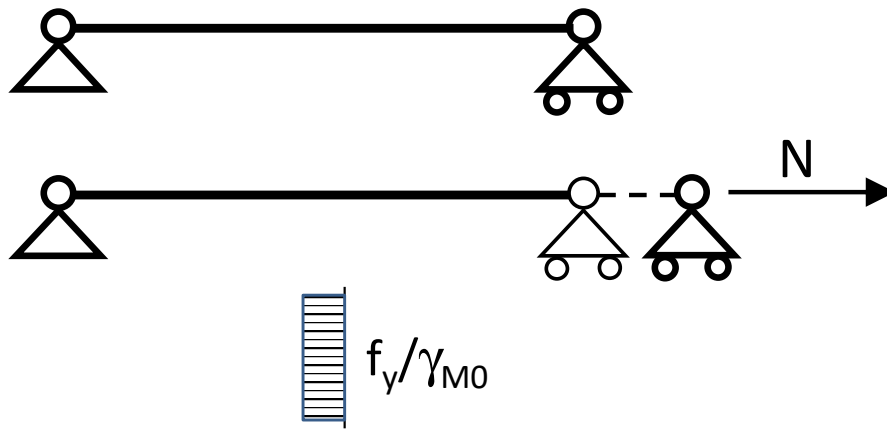
Aurelio Gherzi

16 e 17/11/2020

# Verifica di resistenza

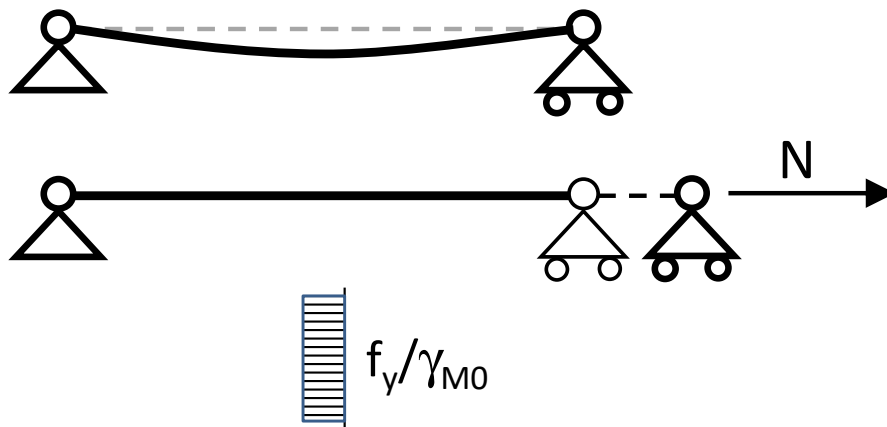
## trazione

asta perfetta



$$N_{Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

asta imperfetta

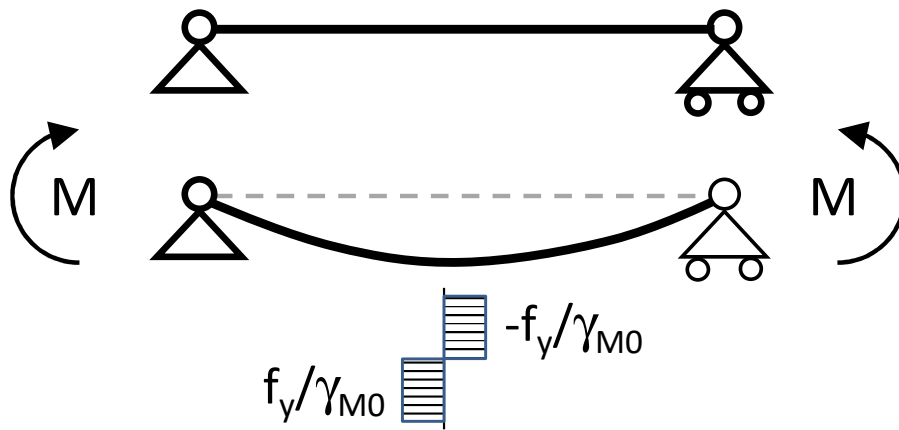


$$N_{Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Verifica di resistenza

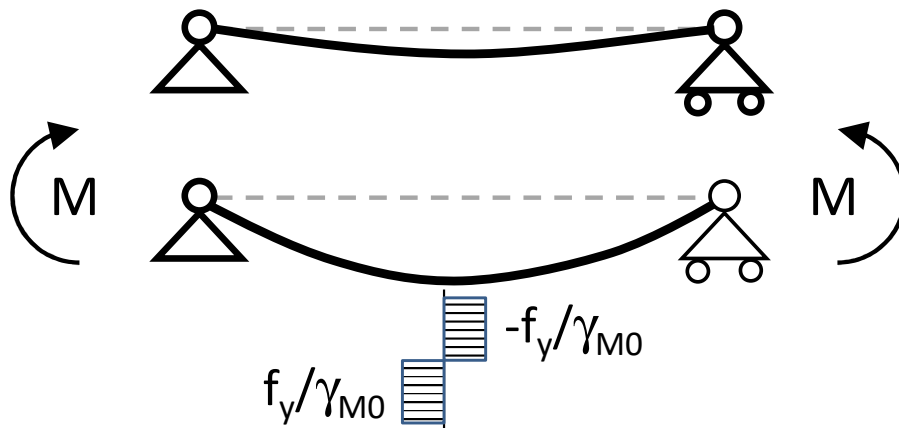
## flessione

asta perfetta



$$M_{Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

asta imperfetta

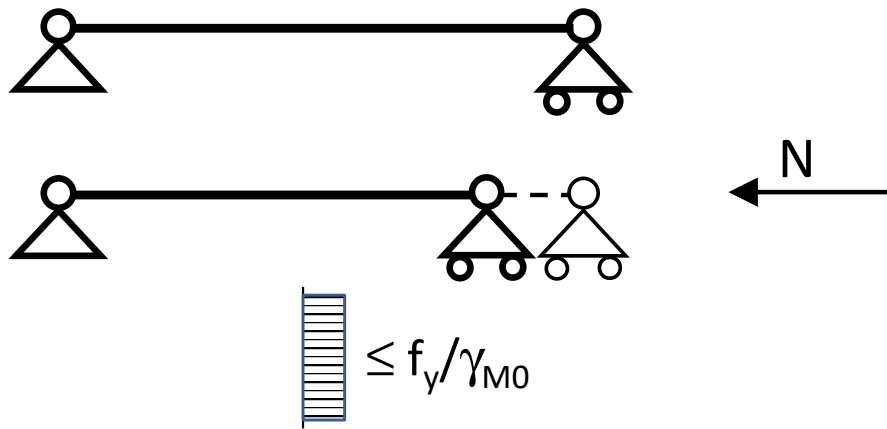


$$M_{Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Verifica di resistenza

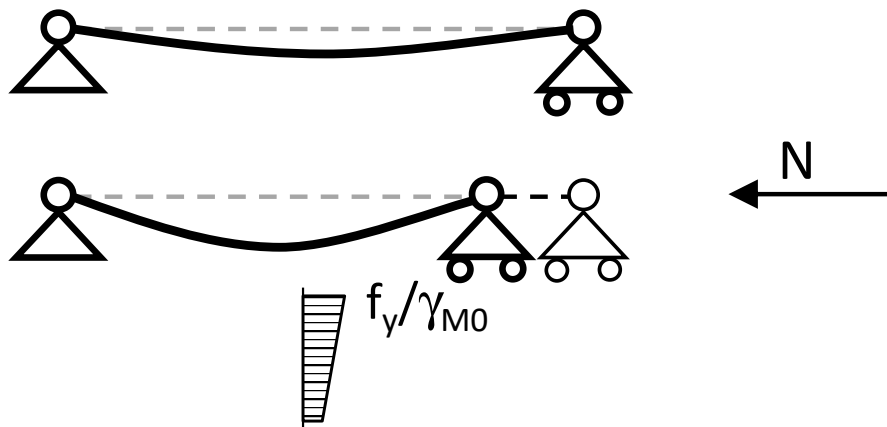
## compressione

asta perfetta



$$N_{b,Rd} = \frac{A \min(f_y, \sigma_{cr})}{\gamma_{M0}}$$

asta imperfetta

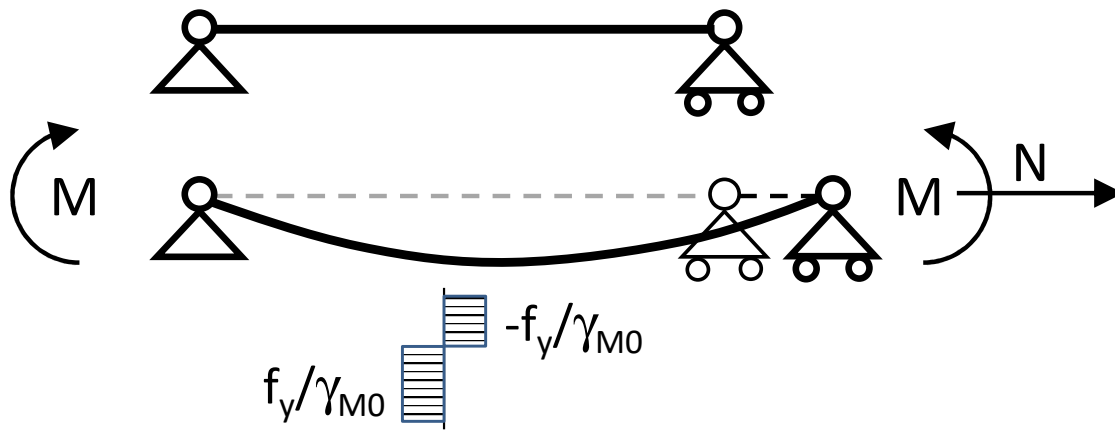


$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M0}}$$

# Verifica di resistenza

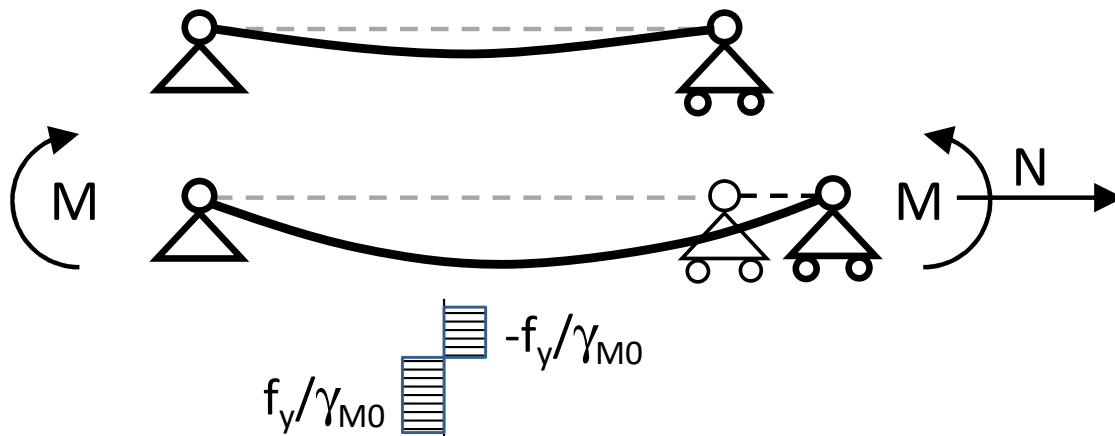
## tensoflessione

asta perfetta



$M_{N,Rd}$  funzione di  $M_{Rd}$  e  $\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$

asta imperfetta



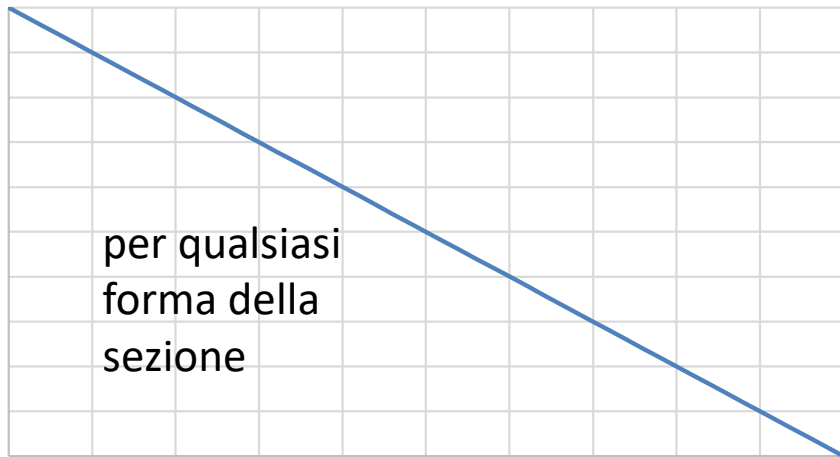
$M_{N,Rd}$  funzione di  $M_{Rd}$  e  $\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$

# Domini di resistenza M-N

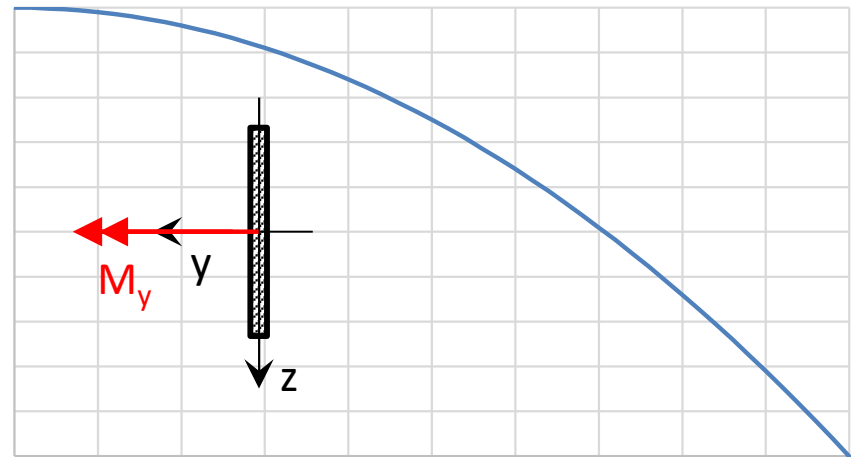
## tensoflessione

Sezione classe 3

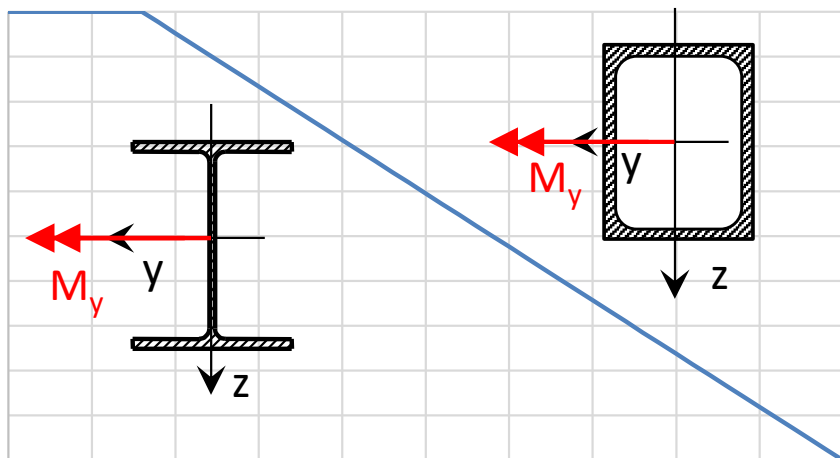
per qualsiasi  
forma della  
sezione



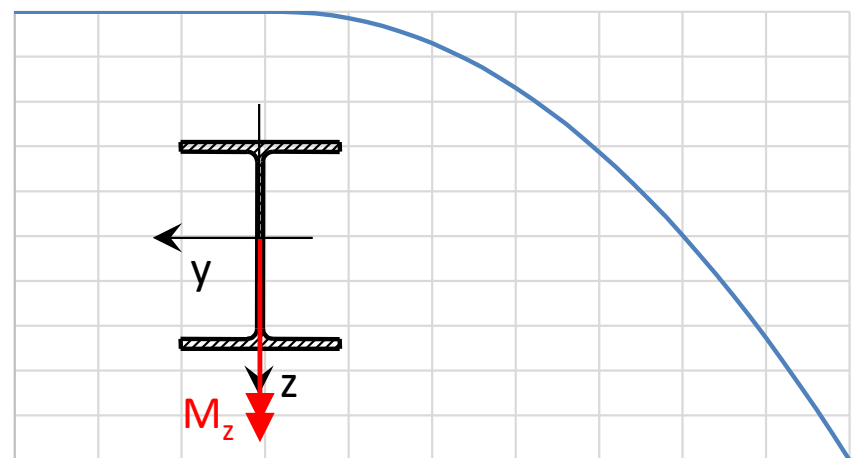
Sezione rettangolare



Sezione doppio T asse forte



Sezione doppio T asse debole

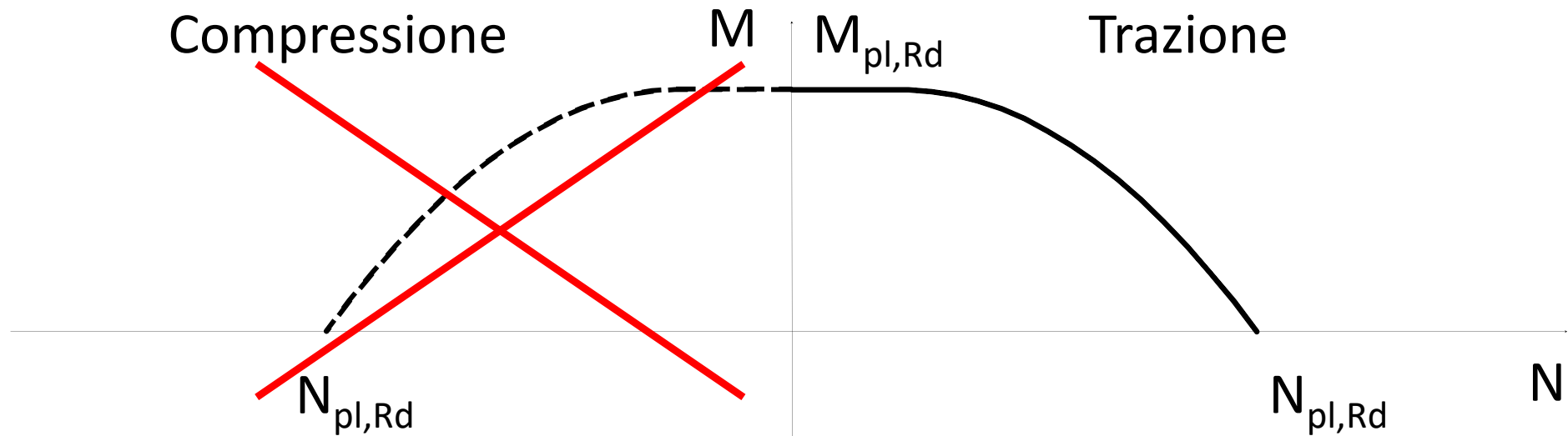


# Domini di resistenza

## pressoflessione

Si possono ottenere semplicemente ribaltando il dominio M-N costruito nel caso di tensoflessione?

No: va bene per la singola sezione, ma per l'asta bisogna tener conto dell'instabilità

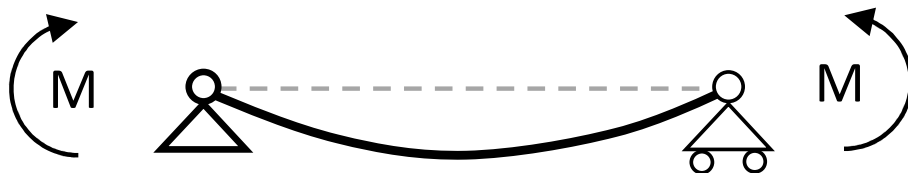


Nota: valori di  $N$  negativi,  
ma li indico senza il segno

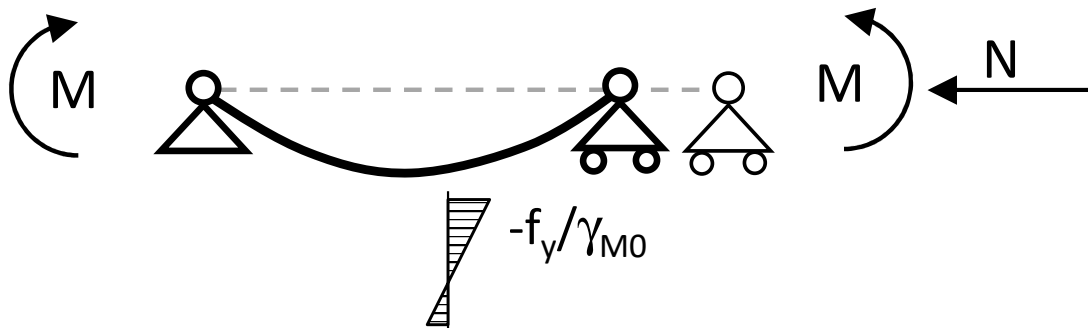
# Verifica di resistenza

## pressoflessione

asta imperfetta



Si applica un momento  
flettente  $M \leq M_{Rd}$

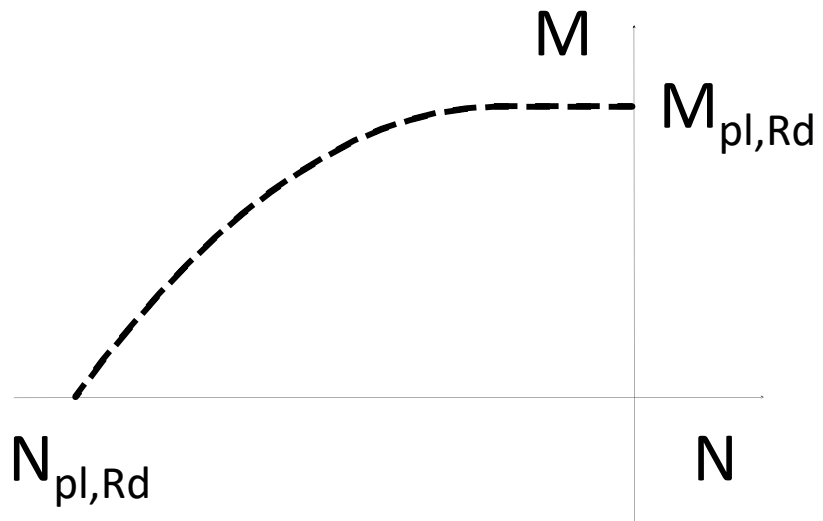


Si applica uno sforzo  
normale  $N$  crescente fino  
a raggiungere la tensione  
 $f_y/\gamma_{M0}$

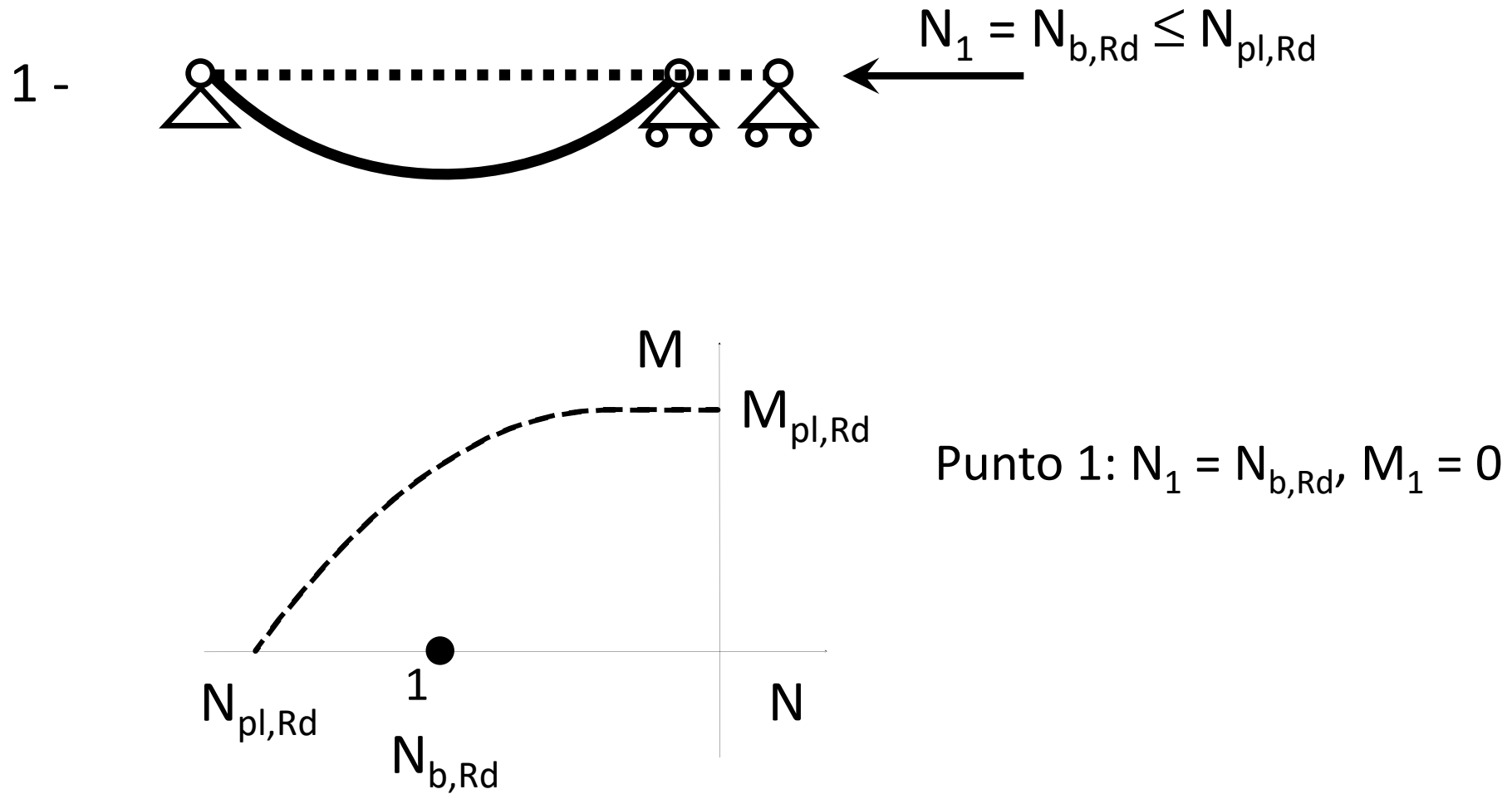
O, viceversa, si applica  $N \leq N_{b,Rd}$  e si fa crescere  $M$



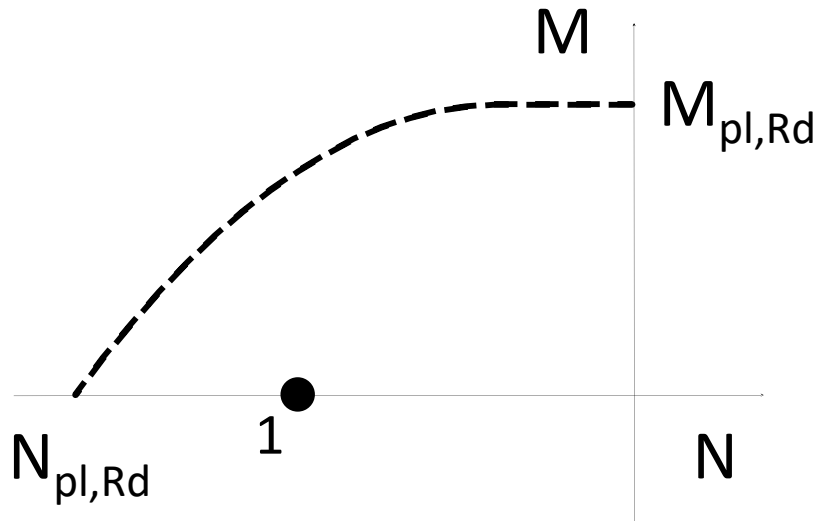
# Costruzione del dominio di resistenza



# Costruzione del dominio di resistenza

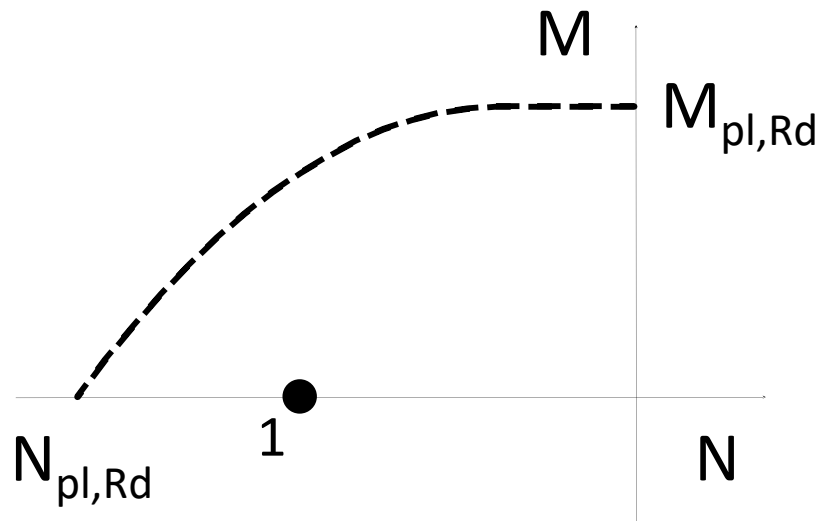
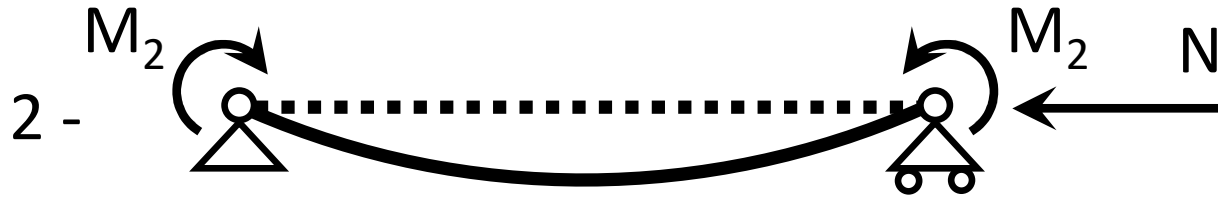


# Costruzione del dominio di resistenza



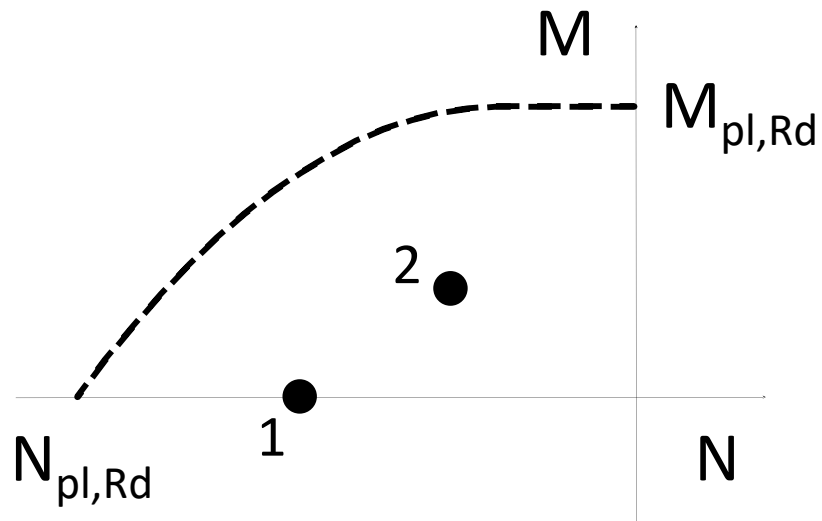
Punto 1:  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

# Costruzione del dominio di resistenza



Punto 1:  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

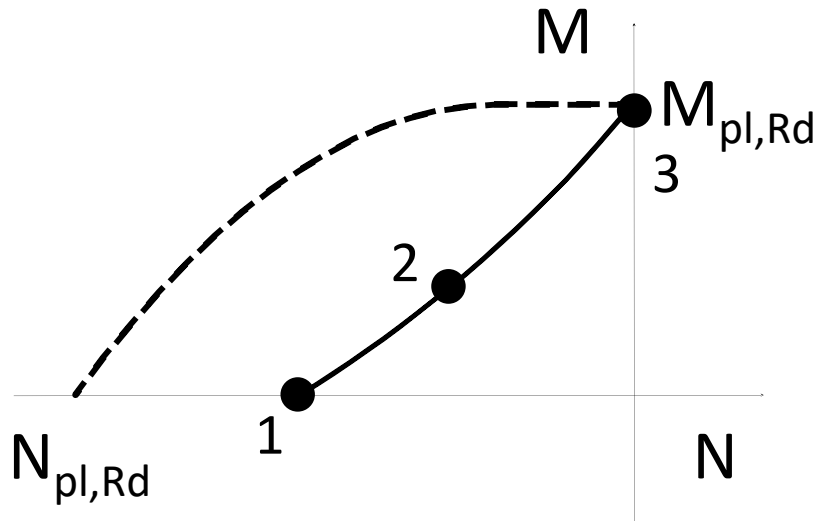
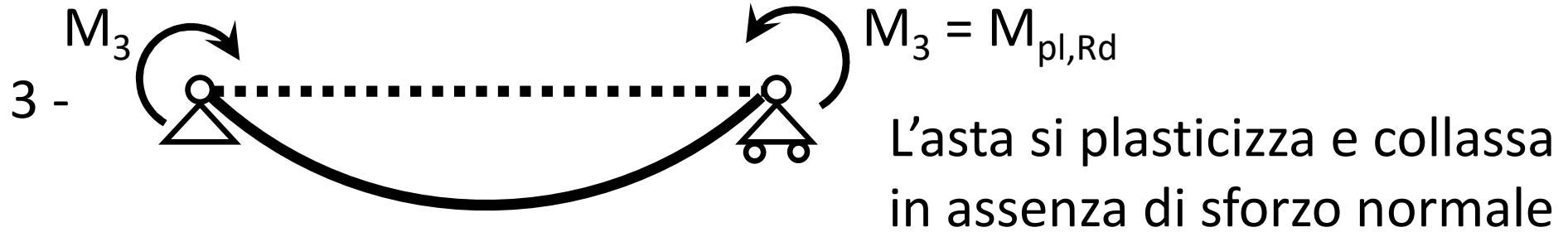
# Costruzione del dominio di resistenza



Punto 1:  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

Punto 2:  $N_2 < N_{b,Rd}$ ,  $M_2 < M_{pl,Rd}$

# Costruzione del dominio di resistenza



Punto 1:  $N_1 = N_{b,Rd}$ ,  $M_1 = 0$

Punto 2:  $N_2 < N_{b,Rd}$ ,  $M_2 < M_{pl,Rd}$

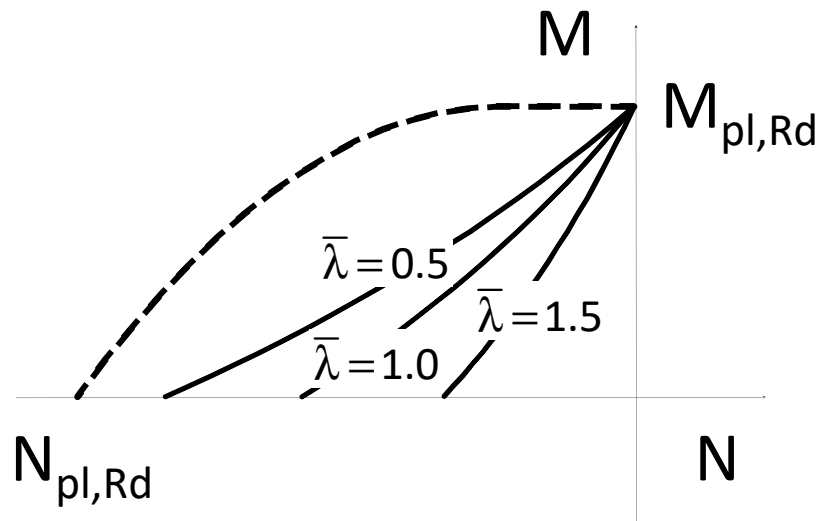
Punto 3:  $N_3 = 0$ ,  $M_3 = M_{pl,Rd}$

Collegando i punti si ottiene il dominio

# Influenza della snellezza

Il dominio dipende dalla snellezza dell'asta:

- L'ampiezza del dominio si riduce all'aumentare della snellezza perché si riduce  $N_{b,Rd}$



$$\bar{\lambda} = 0.5$$



$$\bar{\lambda} = 1.0$$

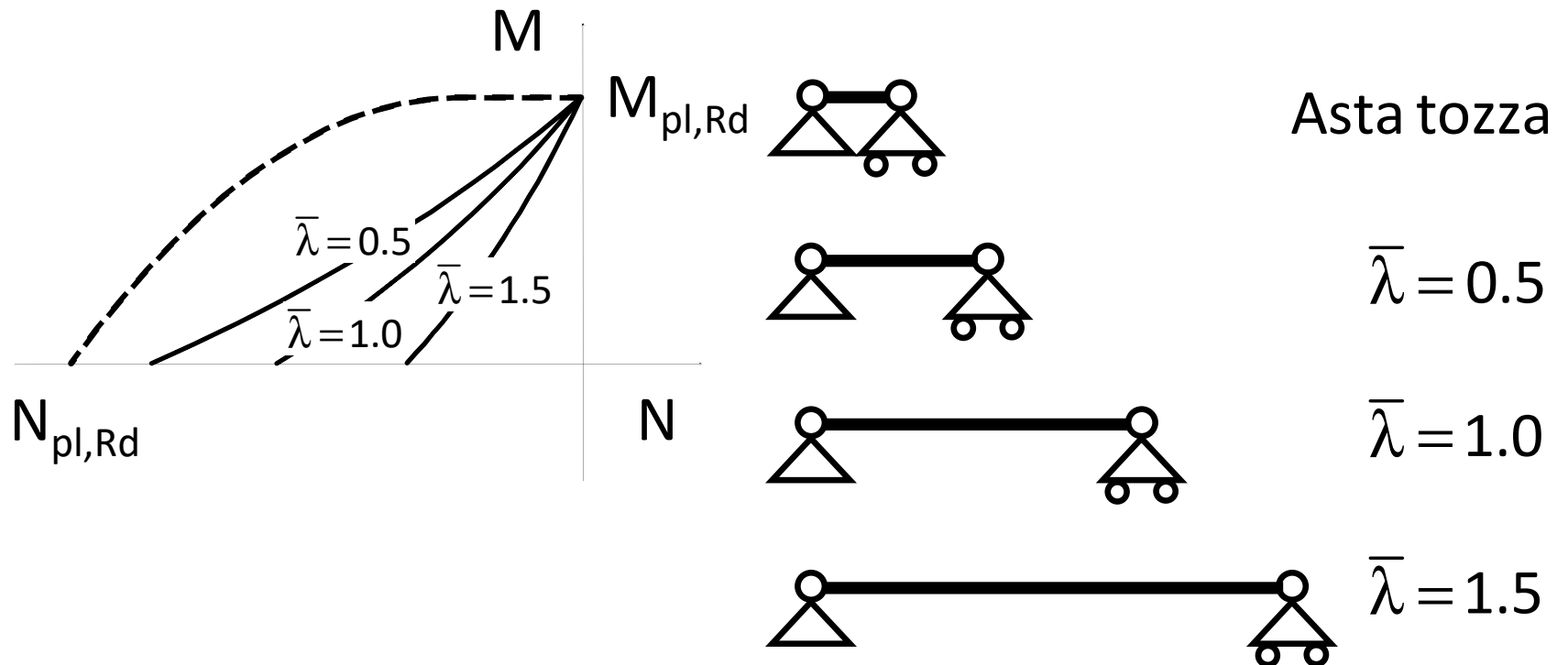


$$\bar{\lambda} = 1.5$$

# Influenza della snellezza

Il dominio dipende dalla snellezza dell'asta:

- Nel caso di aste tozze coincide con quello per presso-flessione della sezione





# Pressoflessione

nel caso di momento costante nell'asta

# Dominio di resistenza pressoflessione (con instabilità)

La normativa italiana propone due approcci (metodo A e B):

- Metodo A

$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_{min} f_y A} + \frac{M_{y,eq,Ed} \gamma_{M1}}{f_y W_y \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eq,Ed} \gamma_{M1}}{f_y W_z \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

o, in sostanza:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eq,Ed}}{M_{z,Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

Il termine  $M_{eq}$  è per tener conto della possibilità che il momento non sia costante nell'asta

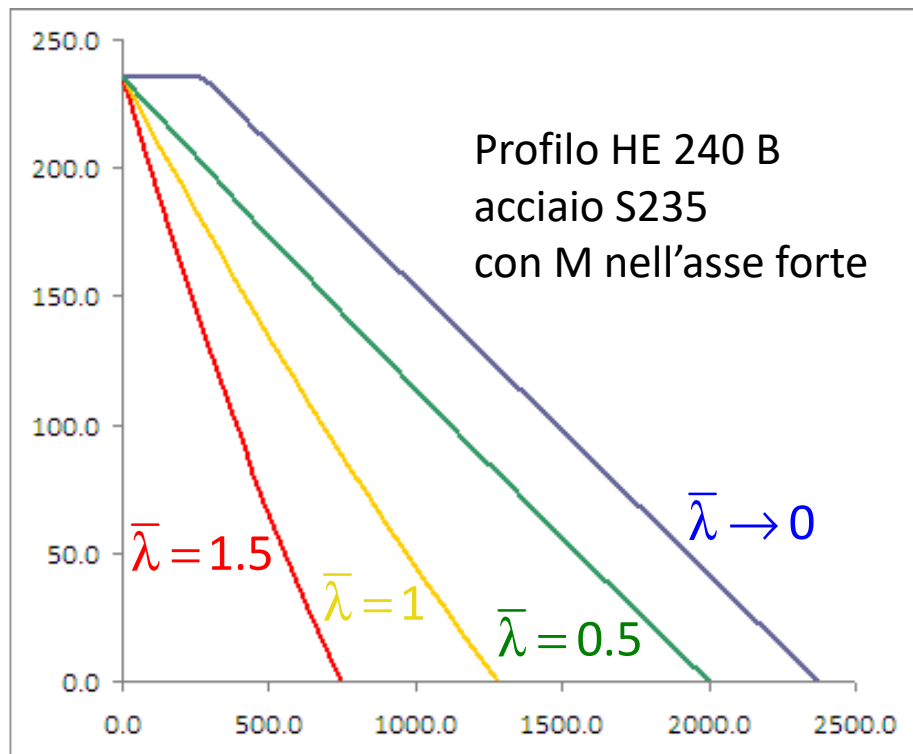
$N_{cr}$  è il carico critico Euleriano

Nota: in presenza di instabilità flessio-torsionale compare un ulteriore termine riduttivo

# Dominio di resistenza

## metodo A

- Nel caso di pressoflessione retta (per N ed  $M_y$ ) si ottengono le curve mostrate sotto



$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} = 1$$

La relazione sarebbe lineare  
se non ci fosse il termine

$$\left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)$$

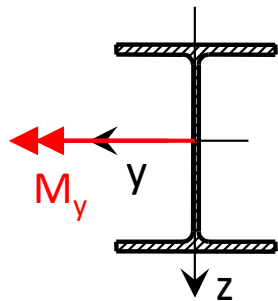
che comunque è molto  
vicino a 1

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## metodo A - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$i_y = 103.1 \text{ mm}$$

$$i_z = 60.8 \text{ mm}$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_z = 65.79$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = 0.7005$$

curva c

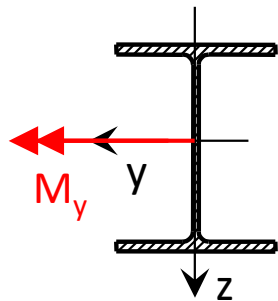
$$\chi = 0.7244$$

$$N_{b,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

# Dominio di resistenza

## metodo A - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\chi = 0.7244$$

$$I_y = 11260 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$N_{b,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

- Sull'asta agiscono  $N_{Ed} = 1400$  kN e  $M_{y,Ed} = 72$  kNm  
Verificare l'asta

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} = 1$$

$$\frac{1400}{1718.5} + \frac{72}{235.7 \times 0.904} = 1.153$$

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_0^2} = 14586 \text{ kN}$$

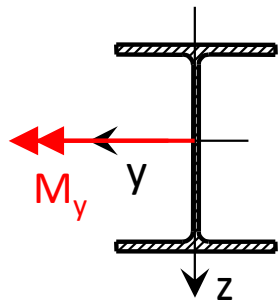
$$1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} = 0.904$$

L'asta non è verificata

# Dominio di resistenza

## metodo A - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\chi = 0.7244$$

$$I_y = 11260 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$N_{b,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

- Sull'asta agisce  $N_{Ed} = 1400$  kN; determinare il massimo valore di  $M_{y,Ed}$  che l'asta può sopportare

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} = 1$$

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = 14586 \text{ kN}$$

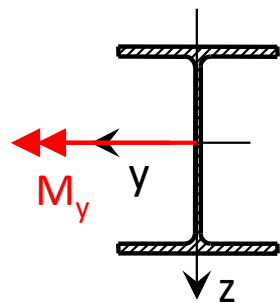
$$1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} = 0.904$$

$$\frac{1400}{1718.5} + \frac{M_{y,Ed}}{235.7 \times 0.904} = 1 \Rightarrow M_{y,Ed} = 235.7 \times 0.904 \times \left( 1 - \frac{1400}{1718.5} \right) = 39.5 \text{ kNm}$$

# Dominio di resistenza

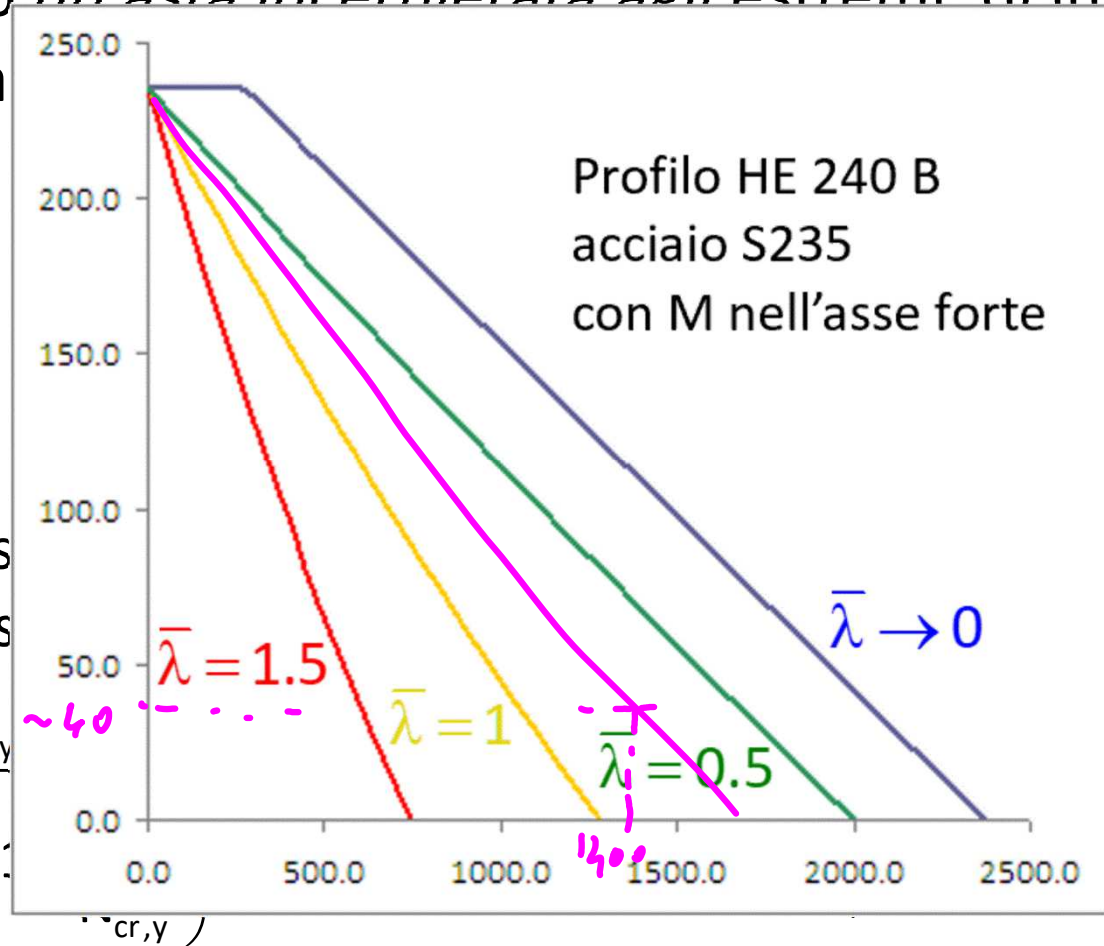
## metodo A - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi di lunghezza  $L=4.00$  m, rea  $A=1718.5$  mm<sup>2</sup>, acciaio S235



- Sull'asta agisce un momento  $M_{y,Ed}$  che l'asta

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$



valore di

kN

$$\frac{1400}{1718.5} + \frac{M_{y,Ed}}{235.7 \times 0.904} = 1 \Rightarrow M_{y,Ed} = 235.7 \times 0.904 \times \left( 1 - \frac{1400}{1718.5} \right) = 39.5 \text{ kNm}$$

# Dominio di resistenza

## metodo B

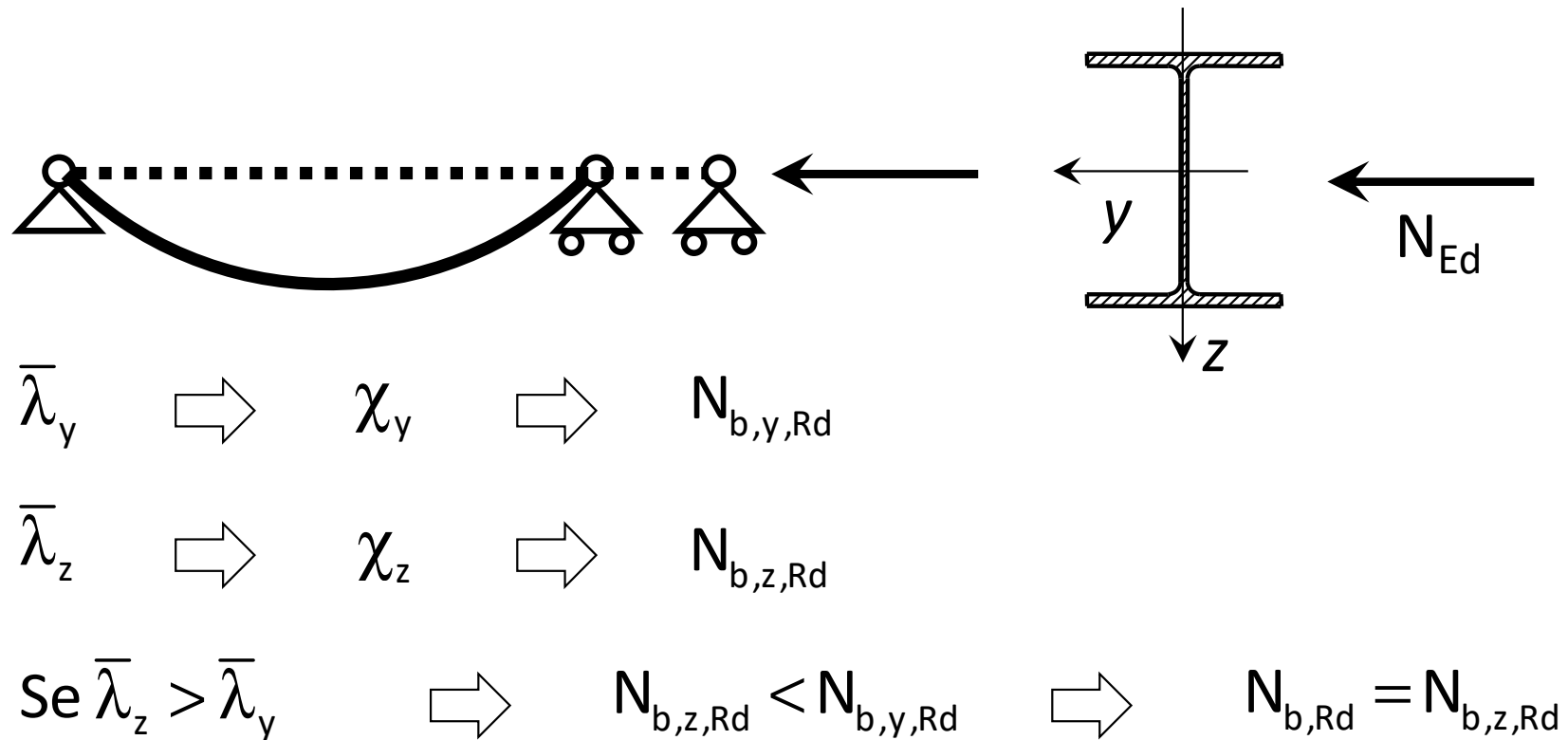
- Perché un altro metodo?
  - Il primo metodo nasce fondamentalmente pensando a pressoflessione retta, cioè con momento flettente applicato ed instabilità euleriana intorno allo stesso asse
  - In realtà molto spesso il momento flettente è applicato rispetto all'asse di maggior rigidezza ( $y$ ) mentre l'instabilità avviene con rotazioni intorno all'asse di minor rigidezza ( $z$ )



# Dominio di resistenza

## metodo B

Un'asta in acciaio soggetta a compressione si instabilizza nel piano con minor resistenza

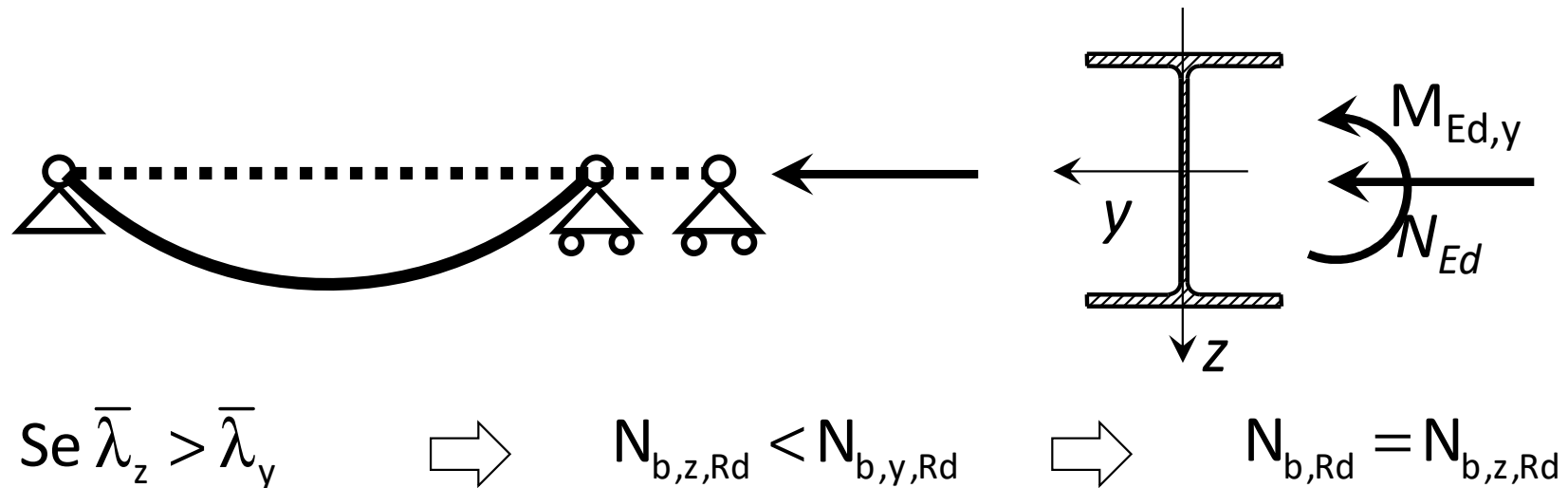


L'instabilità si verifica nel piano ortogonale all'asse  $z$

# Dominio di resistenza

## metodo B

Un'asta in acciaio soggetta a compressione si instabilizza nel piano con minor resistenza



L'instabilità si verifica nel piano ortogonale all'asse z

La presenza di un **momento**  $M_{y,Ed}$  favorisce l'instabilità dell'asta  
quanto un **momento**  $M_{z,Ed}$ ?

Probabilmente NO

# Dominio di resistenza

## metodo B

La normativa italiana propone quindi una seconda formula:

- Metodo B

$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_y A f_y} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} \gamma_{M1}}{W_y f_y} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} \gamma_{M1}}{W_z f_y} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_z A f_y} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} \gamma_{M1}}{W_y f_y} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} \gamma_{M1}}{W_z f_y} \leq 1$$

o, in sostanza:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

Nota: in presenza di instabilità flessione-torsionale compare un ulteriore termine riduttivo

# Dominio di resistenza

## metodo B

- Metodo B

si noti che in questo caso le verifiche sono due  
e il denominatore di N è diverso a seconda del piano in cui  
agisce M

è meno gravoso quando c'è solo momento rispetto all'asse forte, mentre  
l'asta sbanda intorno all'asse debole

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

# Dominio di resistenza

## confronto metodo A e metodo B

- Metodo A

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} + \frac{M_{z,eq,Ed}}{M_{z,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}} \right)} \leq 1$$

Qui compare  $N_{b,Rd}$

- Metodo B

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

Qui invece compaiono  
in maniera distinta

$N_{b,y,Rd}$  e  $N_{b,z,Rd}$

# Dominio di resistenza

## confronto metodo A e metodo B

- Metodo A

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} + \frac{M_{z,eq,Ed}}{M_{z,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}} \right)} \leq 1$$

Qui compare un momento  
equivalente per tener  
conto di M variabile  
e un termine che tiene  
conto della vicinanza al  
carico critico euleriano

- Metodo B

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1$$

Il coefficiente k  
tiene conto di entrambi  
gli aspetti

# Dominio di resistenza metodo B

- Metodo B

I coefficienti k si calcolano con apposite formule

k	Tipi di sezione	Sezioni di classe 3 e 4 (proprietà delle sezioni calcolate in campo elastico)	Sezioni di classe 1 e 2 (proprietà delle sezioni calcolate in campo plastico)
$k_{yy}$	I, H, Sezioni cave	$\alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$	$\alpha_{my} \cdot \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left( 1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
$k_{yz}$	I, H, Sezioni cave	$k_{zz}$	$0,6 \cdot k_{zz}$
$k_{zy}$	I, H, Sezioni cave	$0,8 \cdot k_{yy}$	$0,6 \cdot k_{yy}$
$k_{zz}$	I, H	$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$	$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + (2\bar{\lambda}_y - 0,6) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 1,4 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
	Sezioni cave		$\alpha_{mz} \cdot \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left( 1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
Per pressoflessione retta, $M_{y,Ed} \neq 0$ , , $k_{zy} = 0$ ( $M_{z,Ed}=0$ ).			

# Dominio di resistenza

## metodo B

- Metodo B

In particolare, per momento solo nell'asse forte ( $M_{y,Ed} \neq 0$ ,  $M_{z,Ed} = 0$ ) si ha

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + \cancel{k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}}} \leq 1$$
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + \cancel{k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}}} + \cancel{k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}}} \leq 1$$

Inoltre in questo caso la normativa indica

$$k_{yy} = 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} \leq 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}}$$

$$k_{zy} = 0$$



# Dominio di resistenza

## metodo B

- Metodo B

Si ha quindi, per momento solo nell'asse forte ( $M_{y,Ed} \neq 0$ ,  $M_{z,Ed} = 0$ )

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \leq 1$$

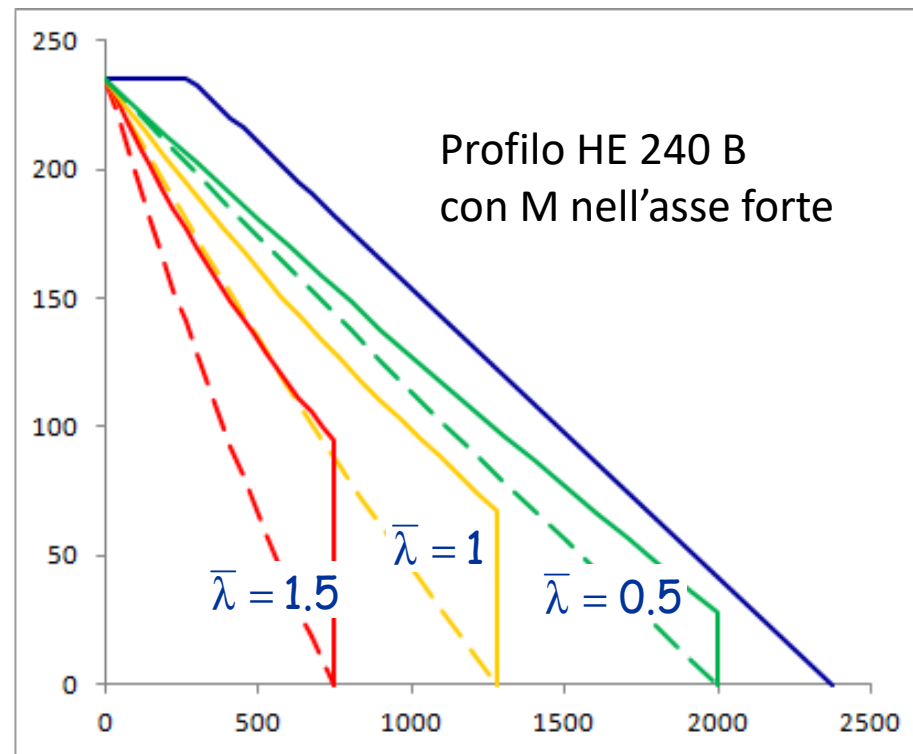
con

$$k_{yy} = 1 + (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} \leq 1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}}$$

# Dominio di resistenza

## metodo B

- Per  $M_{y,Ed} \neq 0$ ,  $M_{z,Ed} = 0$  si ottengono le curve mostrate sotto (con tratteggio sono indicate le curve del metodo A)



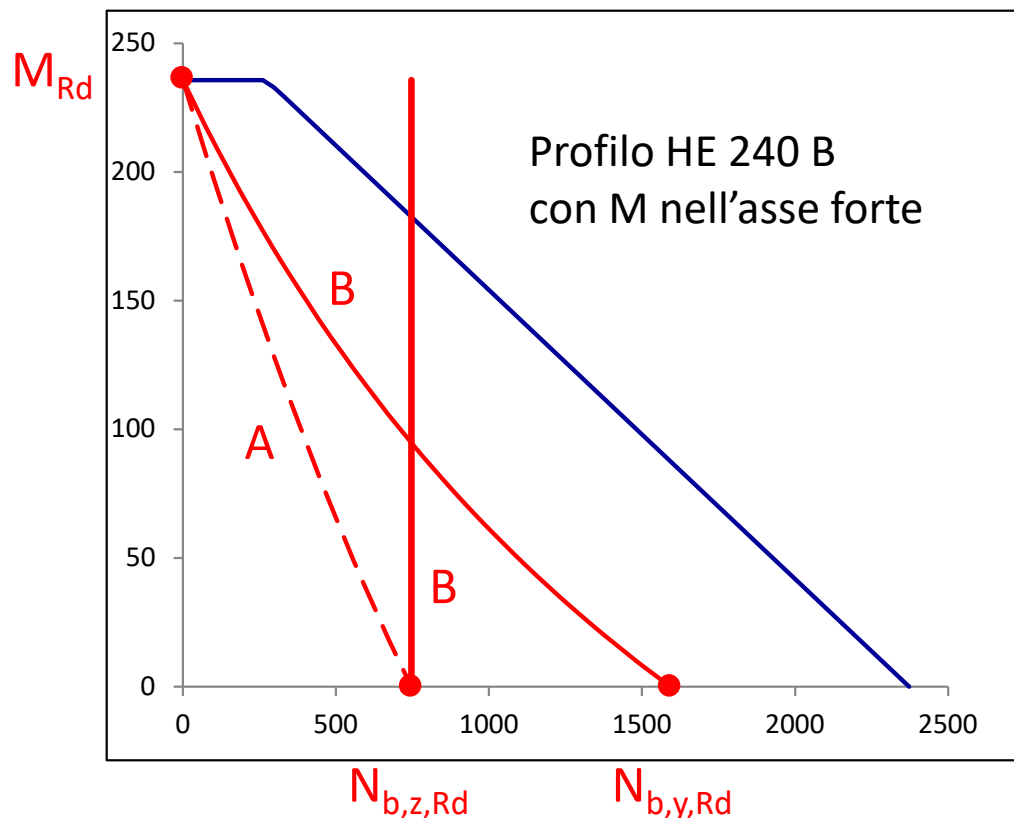
In questo caso  
il metodo A è  
molto  
cautelativo

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## metodo B (e confronto con A)

- Per  $M_{y,Ed} \neq 0$ ,  $M_{z,Ed} = 0$  si ottengono le curve mostrate sotto (con tratteggio sono indicate le curve del metodo A)



È utile osservare che il dominio è ottenuto dall'intersezione di

- una curva (quasi retta) che unisce il punto  $0; M_{Rd}$  al punto  $N_{b,y,Rd}; 0$
- una retta verticale  $N = N_{b,z,Rd}$

Mentre col metodo A vi è solo

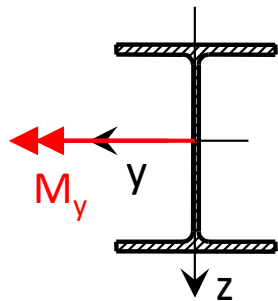
- una curva (quasi retta) che unisce il punto  $0; M_{Rd}$  al punto  $N_{b,z,Rd}; 0$

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## metodo B - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$i_y = 103.1 \text{ mm}$$

$$i_z = 60.8 \text{ mm}$$

$$\lambda_y = 38.30$$

$$\bar{\lambda}_y = 0.4131$$

$$\text{curva b}$$

$$\chi_y = 0.9208$$

$$N_{b,y,Rd} = 2184.6 \text{ kN}$$

$$\lambda_z = 65.79$$

$$\bar{\lambda}_z = 0.7005$$

$$\text{curva c}$$

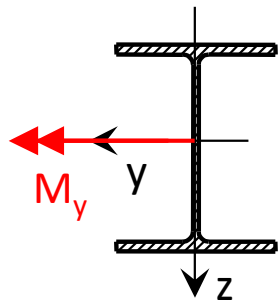
$$\chi_z = 0.7244$$

$$N_{b,z,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

# Dominio di resistenza

## metodo B - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$\chi_y = 0.9208 \quad \bar{\lambda}_y = 0.4131 \quad N_{b,y,Rd} = 2184.6 \text{ kN}$$

$$\chi_z = 0.7244$$

$$N_{b,z,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

- Sull'asta agiscono  $N_{Ed} = 1400$  kN e  $M_{y,Ed} = 72$  kNm

Verificare l'asta

$$k_{yy} = 1 + (\bar{\lambda}_y - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} = 1 + (0.4131 - 0.2) \frac{1400}{2184.6} = 1.137$$

$$k_{yy} \leq 1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} = 1 + 0.8 \frac{1400}{2184.6} = 1.513 \quad k_{yy} = 1.137$$

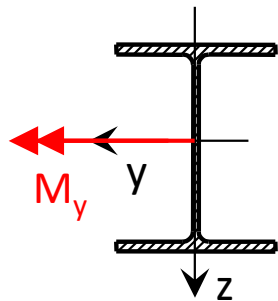
$$\frac{1400}{2184.6} + 1.137 \times \frac{72}{235.7} = 0.988$$

L'asta è verificata

# Dominio di resistenza

## metodo B - esempio

- Consideriamo un'asta incernierata agli estremi, di lunghezza  $L=4.00$  m, realizzata con un profilo HE 240 B di acciaio S235



$$A = 106.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

$$N_{Rd} = 2372.4 \text{ kN}$$

$$W_y = 1053 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{y,Rd} = 235.7 \text{ kNm}$$

$$\chi_y = 0.9208 \quad \bar{\lambda}_y = 0.4131 \quad N_{b,y,Rd} = 2184.6 \text{ kN}$$

$$\chi_z = 0.7244$$

$$N_{b,z,Rd} = 1718.5 \text{ kN}$$

- Sull'asta agisce  $N_{Ed} = 1400$  kN; determinare il massimo valore di  $M_{y,Ed}$  che l'asta può sopportare

$$k_{yy} = 1 + (\bar{\lambda}_y - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} = 1 + (0.4131 - 0.2) \frac{1400}{2184.6} = 1.137$$

$$k_{yy} \leq 1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} = 1 + 0.8 \frac{1400}{2184.6} = 1.513 \quad k_{yy} = 1.137$$

$$\frac{1400}{2184.6} + 1.137 \times \frac{M_{y,Ed}}{235.7} = 1 \Rightarrow M_{y,Ed} = \frac{235.7}{1.137} \times \left( 1 - \frac{1400}{2184.6} \right) = 74.5 \text{ kNm}$$

# Pressoflessione

nel caso di momento variabile nell'asta

# Dominio di resistenza

pressoflessione (con instabilità) - metodo A

- Le curve mostrate in precedenza si riferiscono al caso di momento flettente costante lungo l'asta
- Se il momento flettente varia, si considera un momento equivalente

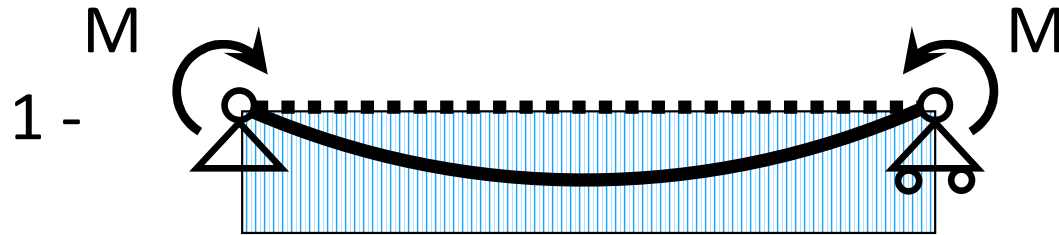
$$M_{eq,Ed} = \alpha_m M_{Ed,max}$$

con  $\alpha_m \leq 1$  che dipende dalla distribuzione di M

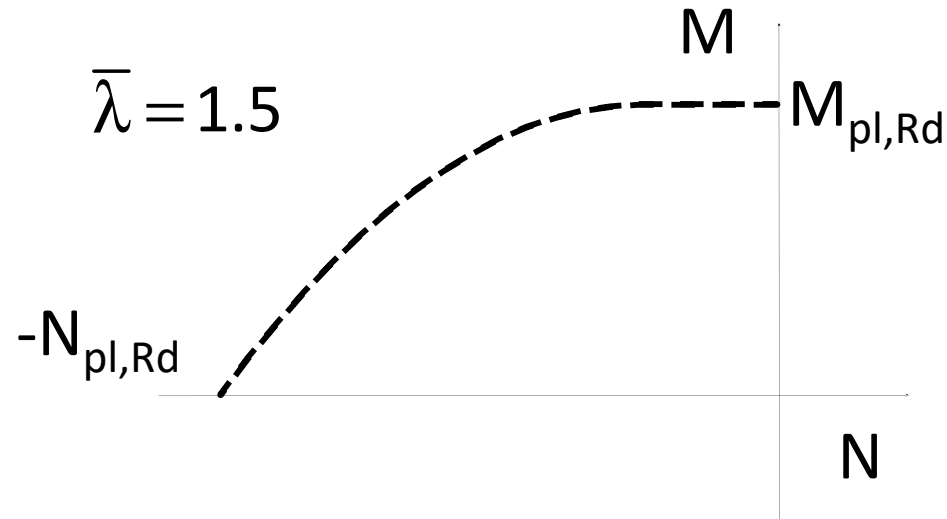


# Dominio di resistenza

influenza del diagramma del momento



Distribuzione di  
momenti tipo 1  
(costante)

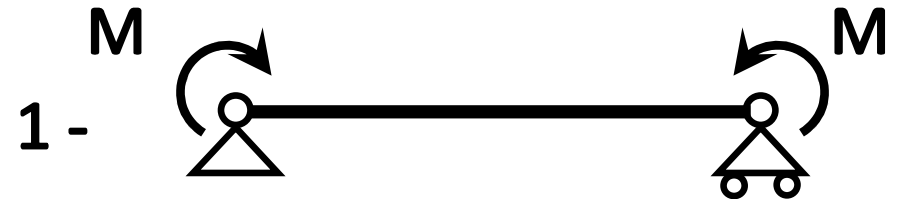
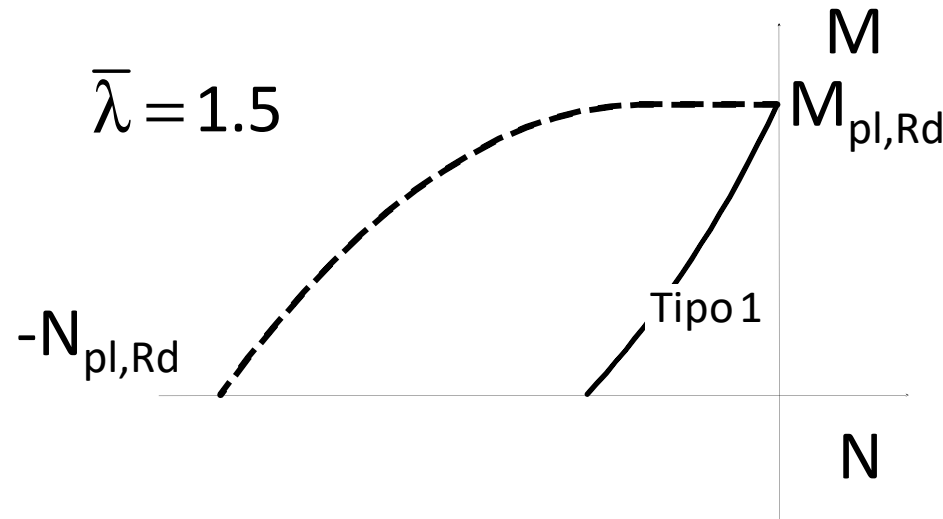


# Dominio di resistenza

influenza del diagramma del momento

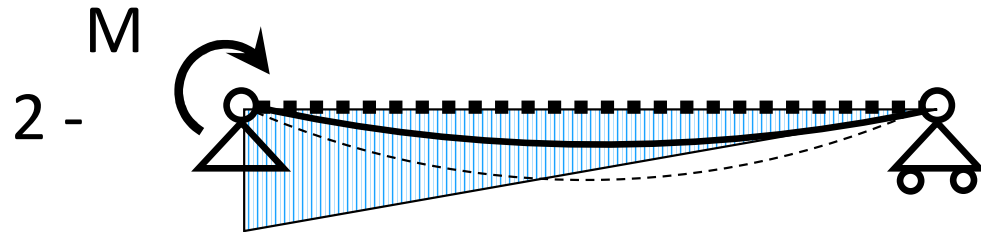


Distribuzione di  
momenti tipo 1  
(costante)

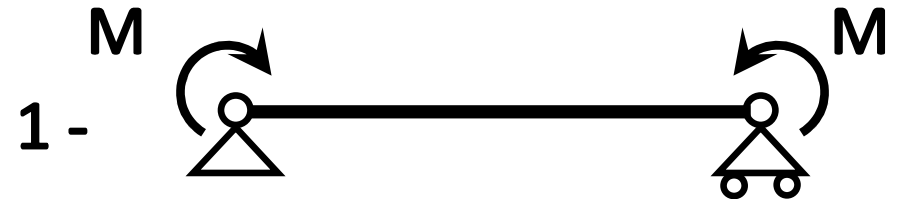
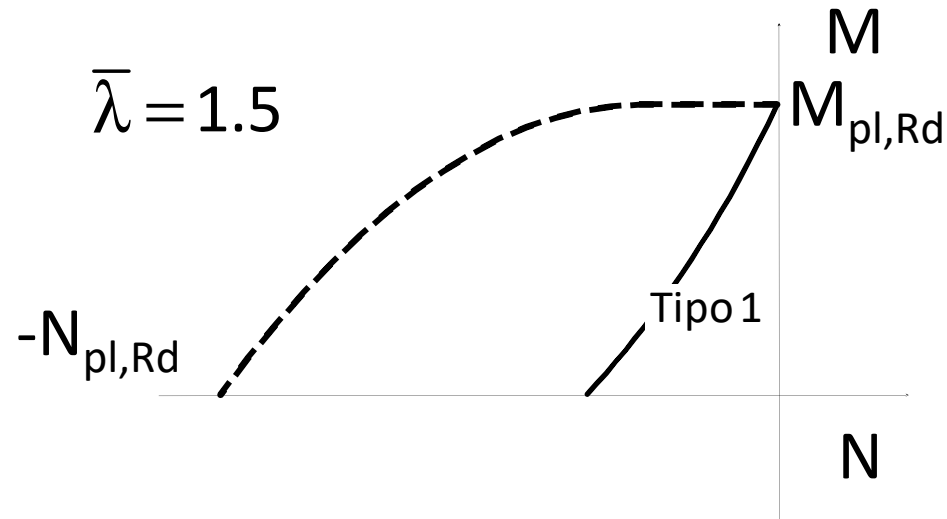


# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma del momento



Distribuzione di  
momenti tipo 2  
(lineare)

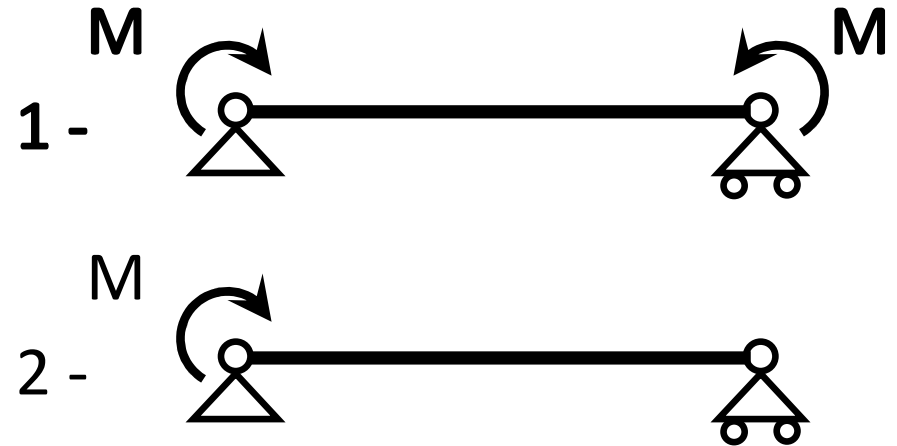
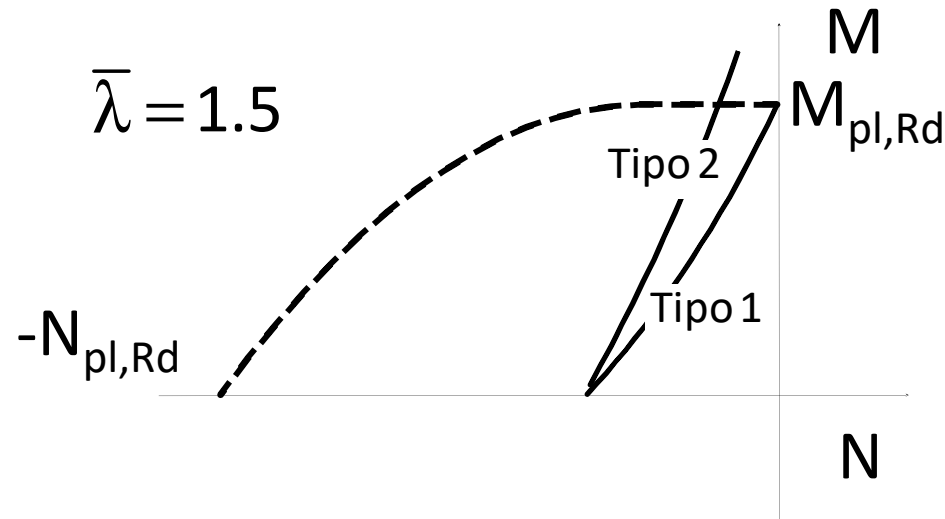


# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma del momento

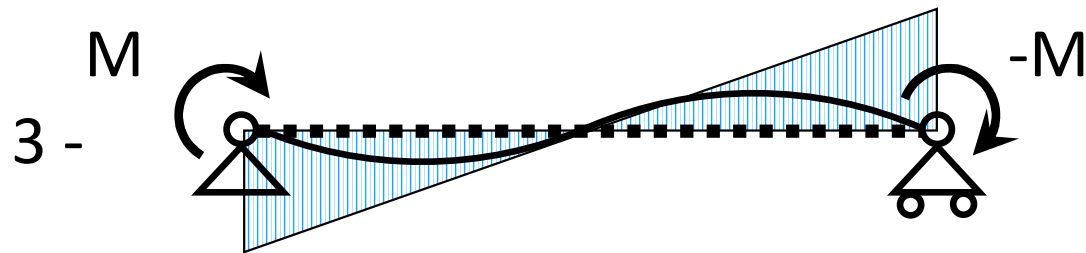


Distribuzione di  
momenti tipo 2  
(lineare)

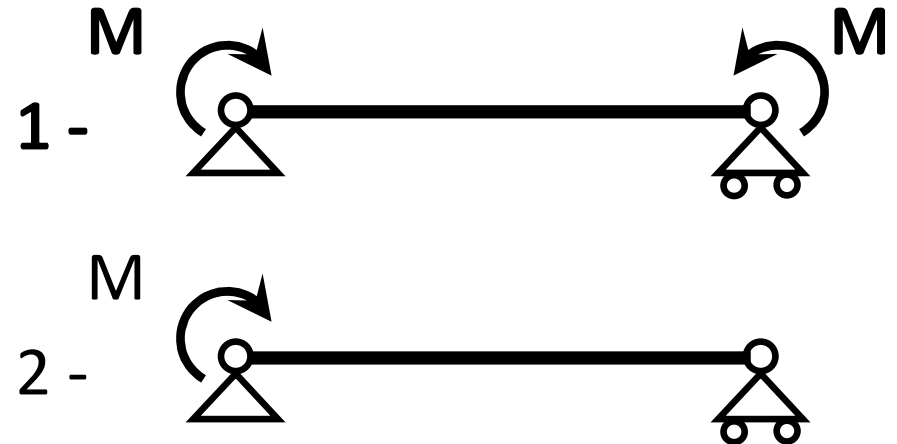
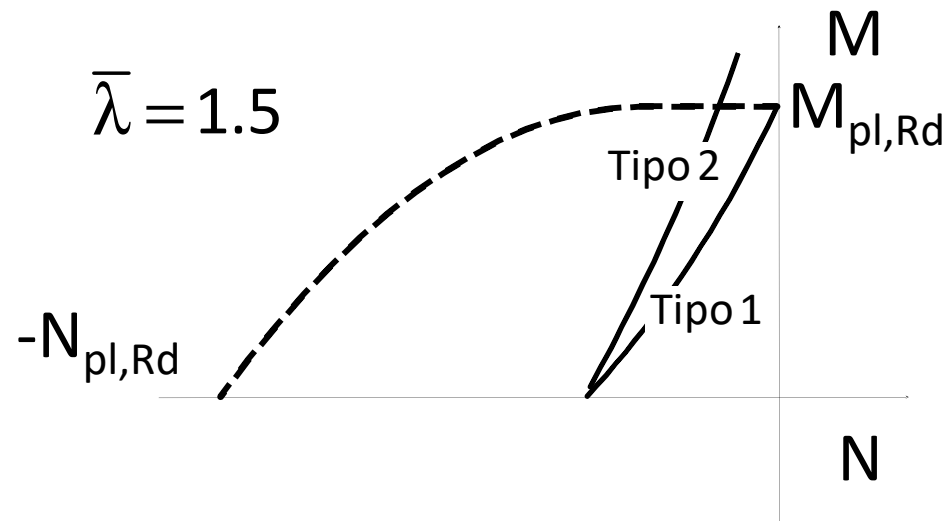


# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma del momento

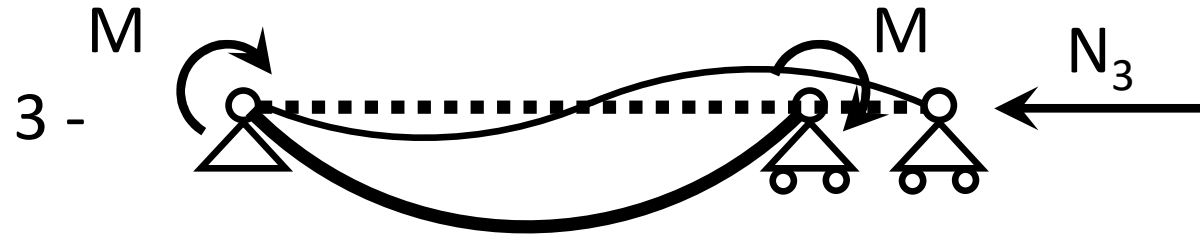


Distribuzione di  
momenti tipo 3  
(a farfalla)

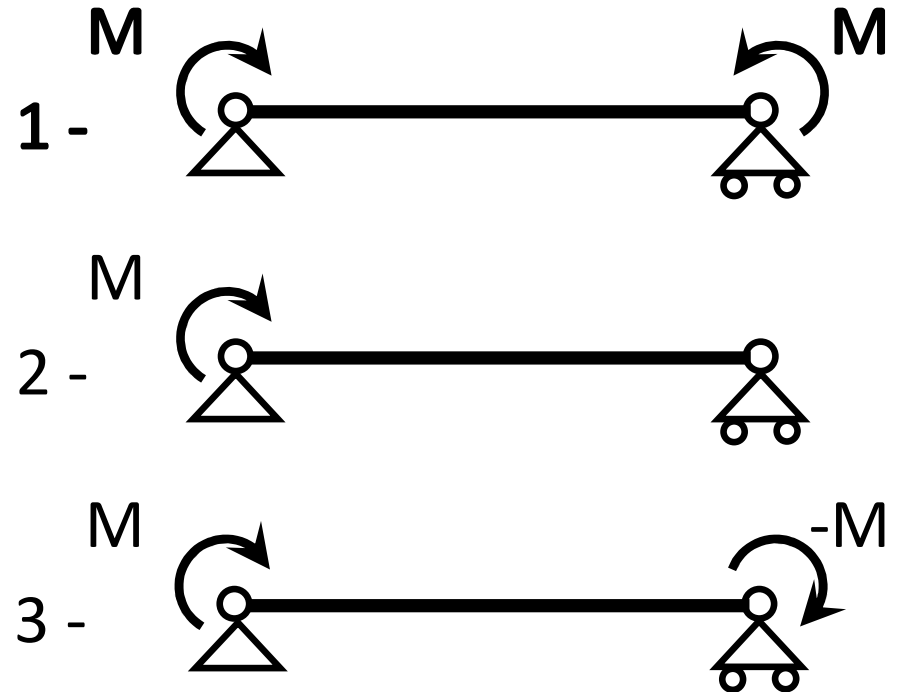
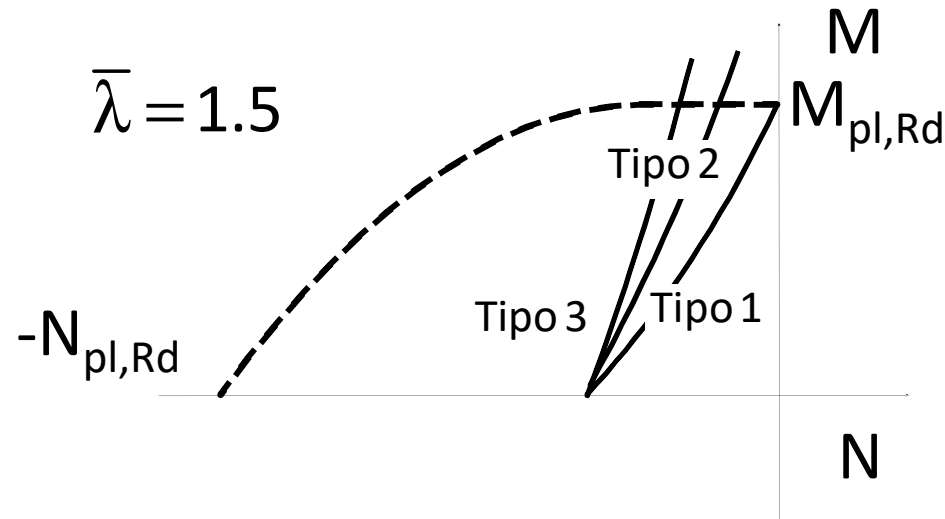


# Dominio di resistenza

influenza del diagramma del momento



Distribuzione di  
momenti tipo 3  
(a farfalla)

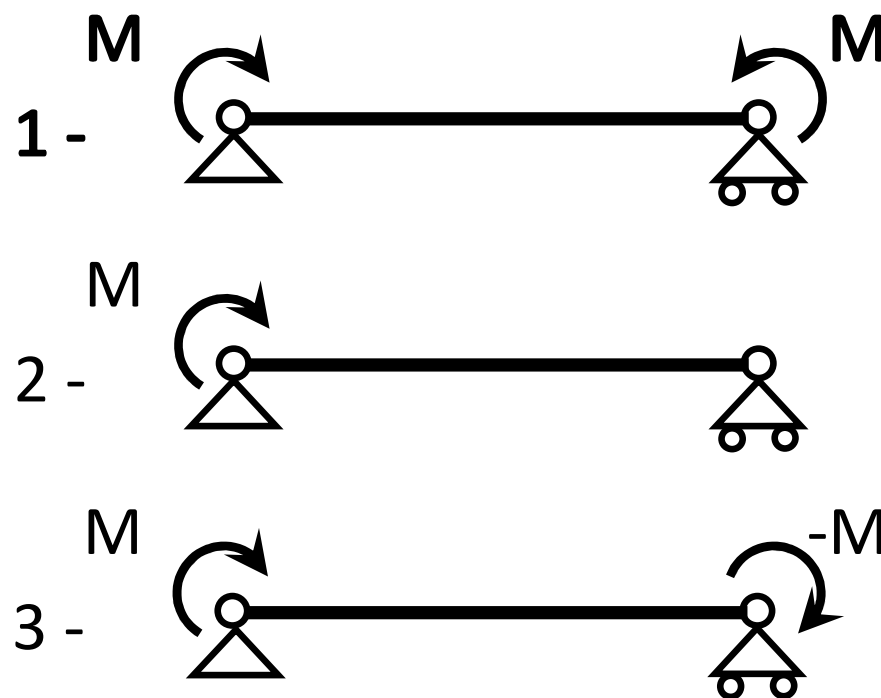
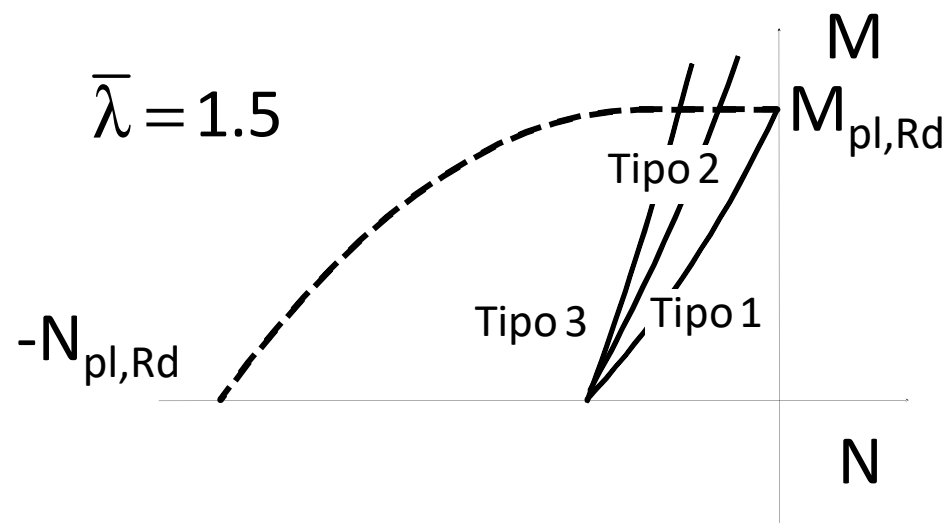


# Dominio di resistenza

influenza del diagramma del momento

Il dominio dipende dall'andamento del diagramma del momento flettente:

- L'ampiezza del dominio aumenta passando dal diagramma di tipo 1 a quello di tipo 3.



# Dominio di resistenza

influenza del diagramma di M (metodo A)

- Il momento equivalente  $M_{eq,Ed}$  tiene conto della variazione del momento nell'asta e può essere preso pari a

$$M_{eq,Ed} = 1.3 M_{m,Ed}$$

assumendo comunque  $0.75 M_{max,Ed} \leq M_{eq,Ed} \leq M_{max,Ed}$

$M_{m,Ed}$  è il valore medio del momento nell'asta

- Per asta vincolata agli estremi con momento variabile linearmente si può assumere

$$M_{eq,Ed} = 0.6 M_a - 0.4 M_b$$

assumendo comunque  $M_{eq,Ed} \geq 0.4 M_a$

$M_a$  è il massimo tra i due ed il segno si riferisce al verso della coppia M  
(se  $M_a = -M_b$  il diagramma di M è costante e  $M_{eq,Ed} = M_a$ )



# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma di M (metodo B)


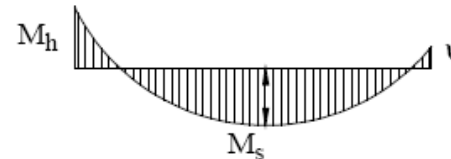
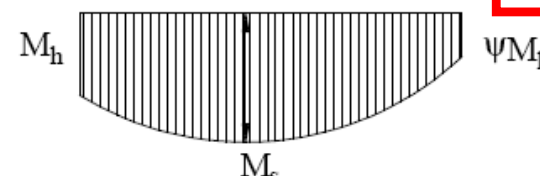
- Se si usa il metodo B sono fornite espressioni più complesse

Diagramma del momento	Intervallo		Coefficienti $\alpha_{my}$ , $\alpha_{mz}$ , $\alpha_{mLT}$	
			Carico uniforme	Carico concentrato
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $\alpha_s = M_s / M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,1(1 - \psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
 $\alpha_h = M_h / M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h (1 + 2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h (1 + 2\psi)$

# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma di M (metodo B)

- Se si usa il metodo B sono fornite espressioni più complesse

Diagramma del momento	Intervallo	Coefficienti $\alpha_{my}$ , $\alpha_{mz}$ , $\alpha_{mLT}$		
		Carico uniforme	Carico concentrato	
			$0,5 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $\alpha_s = M_s/M_h$			$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$ $-0,8\alpha_s \geq 0,4$	
 $\alpha_h = M_h/M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h (1 + 2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h (1 + 2\psi)$

Nota:  $M_s$  è il momento in mezzeria, non il massimo momento in campata (queste figure possono trarre in inganno, l'EC3 è più chiaro)

Nota:  $M_s$  è il momento in mezzzeria, non il massimo momento in campata  
(queste figure possono trarre in inganno, l'EC3 è più chiaro)

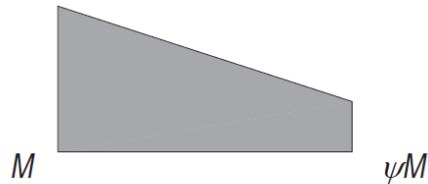
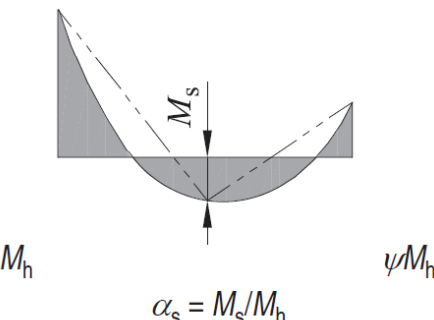
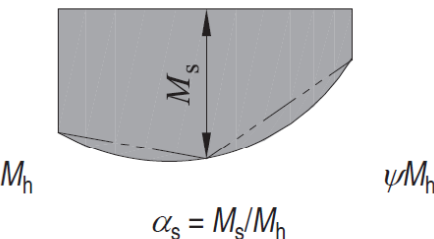
# Nell'Eurocodice 3

Coefficienti di interazione	Tipi di sezioni	Ipotesi di progetto	
		Proprietà elastiche delle sezioni trasversali classe 3, classe 4	Proprietà plastiche delle sezioni trasversali classe 1, classe 2
$k_{yy}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari	$C_{my} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{yz}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari	$k_{zz}$	$0,6 k_{zz}$
$k_{zy}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari	$0,8 k_{yy}$	$0,6 k_{yy}$
$k_{zz}$	Sezioni a I	$C_{mz} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left( 1 + (2 \bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	Sezioni tubolari rettangolari		$C_{mz} \left( 1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
Per sezioni a I e H e per sezioni tubolari rettangolari soggette a compressione assiale e momento flettente $M_{y,Ed}$ può assumersi $k_{zy} = 0$ .			

# Nell'Eurocodice 3

Coefficienti di interazione	Tipi di sezioni	Ipotesi di progetto	
		Proprietà elastiche delle sezioni trasversali classe 3, classe 4	Proprietà plastiche delle sezioni trasversali classe 1, classe 2
$k_{yy}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari	$C_{my} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{yz}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari	<div style="border: 2px solid red; padding: 10px; text-align: center;"> <p><b>Nota: nella Circolare è indicato con <math>\alpha_m</math> quello che qui (sull'EC3) è indicato con <math>C_m</math></b></p> </div>	
$k_{zy}$	Sezioni a I Sezioni tubolari rettangolari		
$k_{zz}$	Sezioni a I		
$k_{zz}$	Sezioni a I	$C_{mz} \left( 1 + 0,6 \bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left( 1 + (2 \bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	Sezioni tubolari rettangolari	$\leq C_{mz} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left( 1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
Per sezioni a I e H e per sezioni tubolari rettangolari soggette a compressione assiale e momento flettente $M_{y,Ed}$ può assumersi $k_{zy} = 0$ .			

# Nell'Eurocodice 3

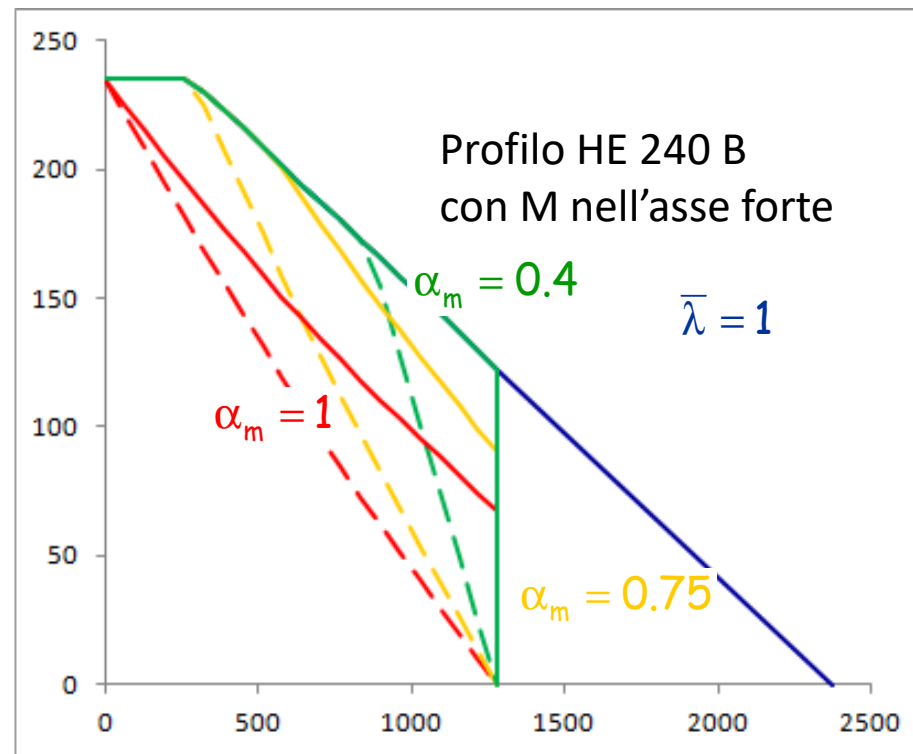
Diagramma del momento	Intervallo		$C_{my}$ e $C_{mz}$ e $C_{mLT}$	
			carico costante	carico variabile
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4 \psi \geq 0,4$	
	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8 \alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8 \alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8 \alpha_s \geq 0,4$	$-0,8 \alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,1(1 - \psi) - 0,8 \alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8 \alpha_s \geq 0,4$
	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05 \alpha_h$	$0,90 + 0,10 \alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05 \alpha_h$	$0,90 + 0,10 \alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05 \alpha_h (1 + 2 \psi)$	$0,90 + 0,10 \alpha_h (1 + 2 \psi)$
Per membrature con modi instabili laterali si raccomanda che il coefficiente di momento costante equivalente sia assunto rispettivamente pari a: $C_{my}= 0,9$ o $C_{mz}= 0,9$ .				
Si raccomanda che $C_{my}$ , $C_{mz}$ e $C_{mLT}$ siano ottenuti secondo il diagramma del momento flettente compreso tra i punti controventati pertinenti secondo quanto riportato di seguito:				
coefficiente di momento	asse di flessione	punti controventati in direzione		
$C_{my}$	y-y	z-z		
$C_{mz}$	z-z	y-y		
$C_{mLT}$	y-y	y-y		

Eurocodice 3, annesso

# Dominio di resistenza

## influenza del diagramma del momento

- Si ottengono le curve mostrate sotto  
(con tratteggio sono indicate le curve del metodo A)



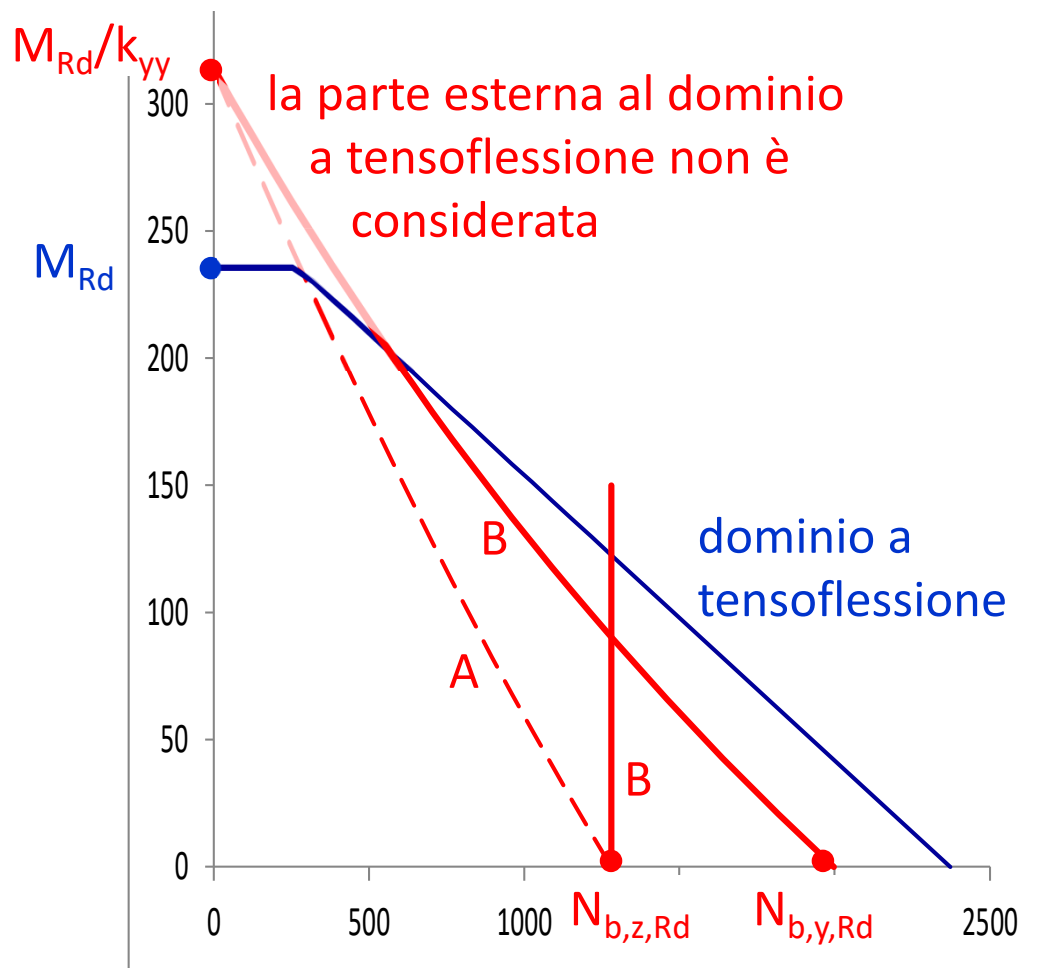
Anche in  
questo caso il  
metodo A  
è molto  
cautelativo

Vedi foglio Excel Flessione composta

# Dominio di resistenza

## metodo B (e confronto con A)

- Per  $M_{y,Ed} \neq 0$ ,  $M_{z,Ed} = 0$  si ottengono le curve mostrate sotto (con tratteggio sono indicate le curve del metodo A)



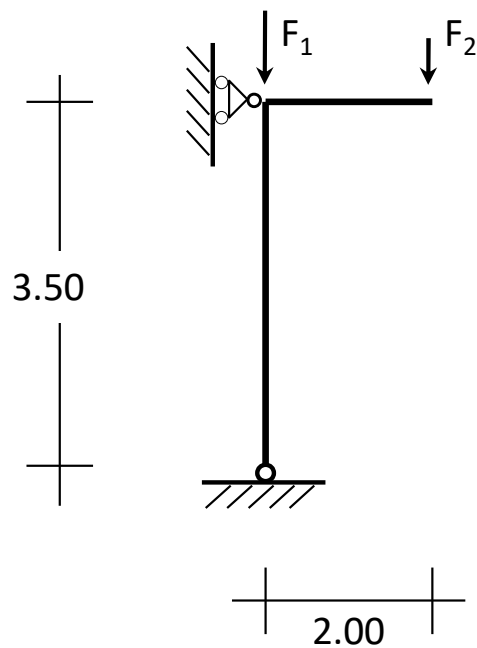
È utile osservare che il dominio è ottenuto dall'intersezione di

- una curva (quasi retta) che unisce il punto  $0; M_{Rd}/k_{yy}$  al punto  $N_{b,y,Rd}; 0$
- una retta verticale  $N = N_{b,z,Rd}$

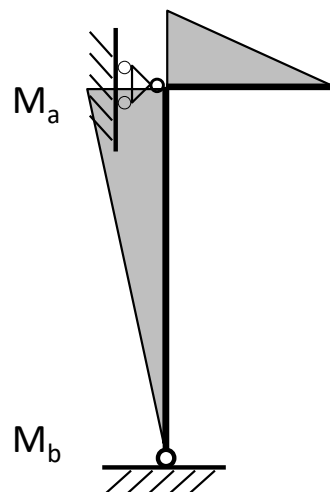
Mentre col metodo A vi è solo

- una curva (quasi retta) che unisce il punto  $0; M_{Rd}/k_{yy}$  al punto  $N_{b,z,Rd}; 0$

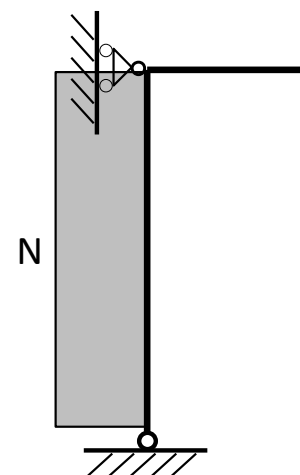
# Esempio



$$F_1 = 800 \text{ kN}$$
$$F_2 = 60 \text{ kN}$$



$$M_a = 120 \text{ kNm}$$
$$M_b = 0 \text{ kNm}$$

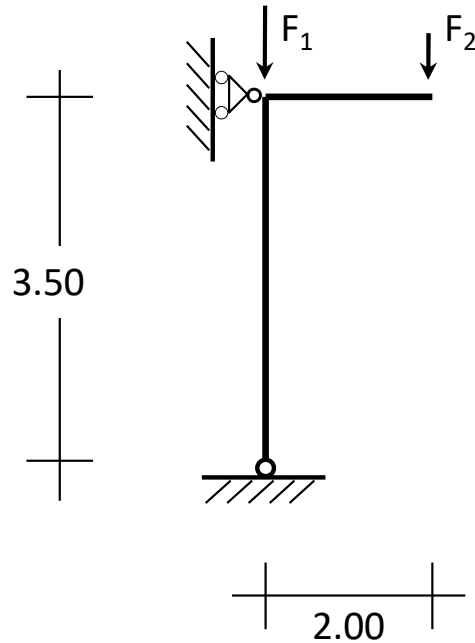


$$N_{Ed} = 860 \text{ kN}$$

$$M_{eq,Ed} = 0.6 \times 120 - 0.4 \times 0 = 72 \text{ kNm}$$



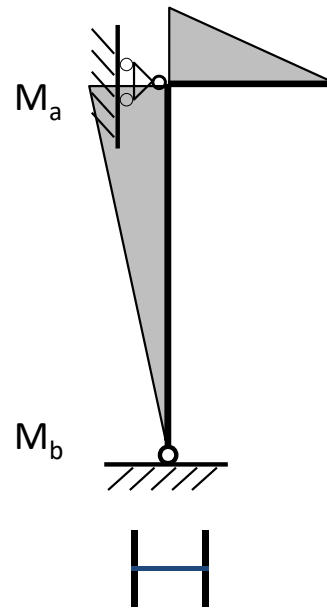
# Esempio



$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_0^2}$$



instabilità intorno a y



Sezione	HE B 300
A	149 cm <sup>2</sup>
$W_{pl}$	1868 cm <sup>3</sup>
Acciaio	S235

$$M_{pl,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

$$N_{b,Rd} = 2826.8 \text{ kN}$$



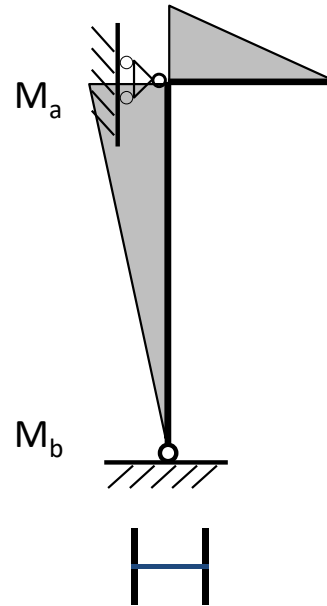
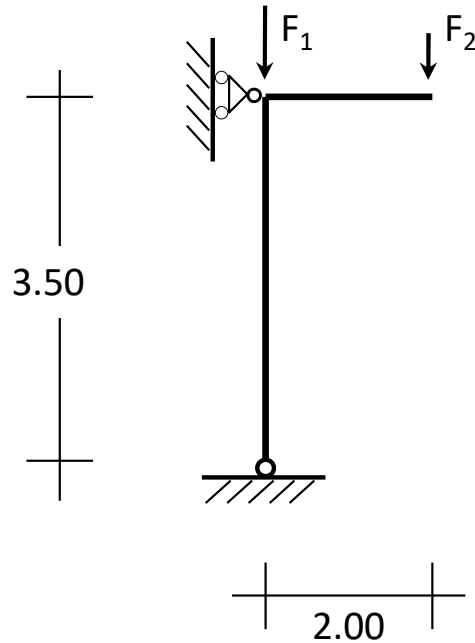
instabilità intorno a z

$$l_0 = 3.50 \text{ m}$$

$$N_{cr} = 42579 \text{ kN}$$

# Esempio

## (metodo A)



Sezione	HE B 300
A	149 cm <sup>2</sup>
$W_{pl}$	1868 cm <sup>3</sup>
Acciaio	S235

$$M_{pl,Rd} = 418.1 \text{ kNm}$$

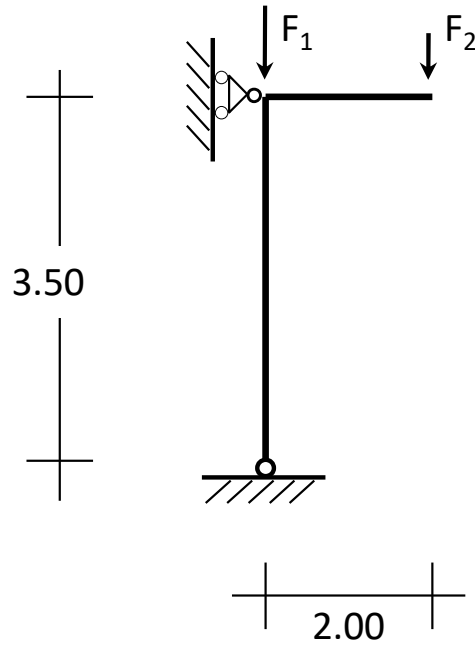
$$N_{b,Rd} = 2826.8 \text{ kN}$$

$$N_{b,Rd,y} = 3231.2 \text{ kN}$$

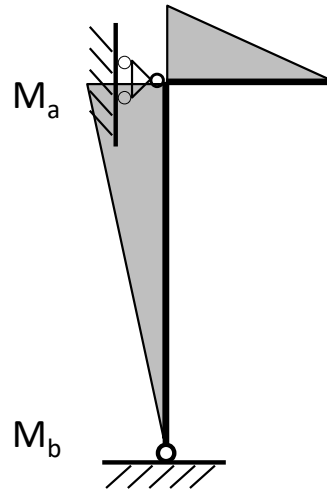
$$\frac{N_{Ed}}{N_{bRd}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{M_{y,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} = \frac{860}{2826.8} + \frac{72}{418.1 \left( 1 - \frac{860}{42579} \right)} =$$

$$= 0.304 + 0.176 = 0.480 \leq 1$$

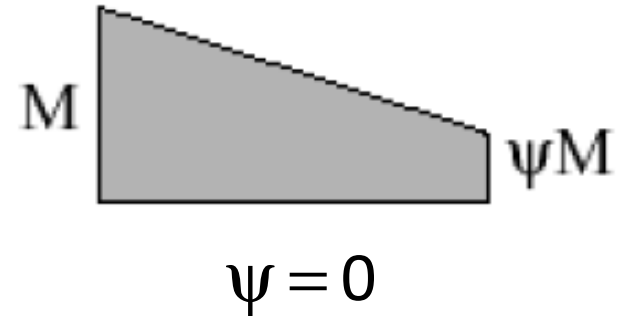
# Esempio (metodo B)



$$F_1 = 800 \text{ kN}$$
$$F_2 = 60 \text{ kN}$$



$$M_a = 120 \text{ kNm}$$
$$M_b = 0 \text{ kNm}$$

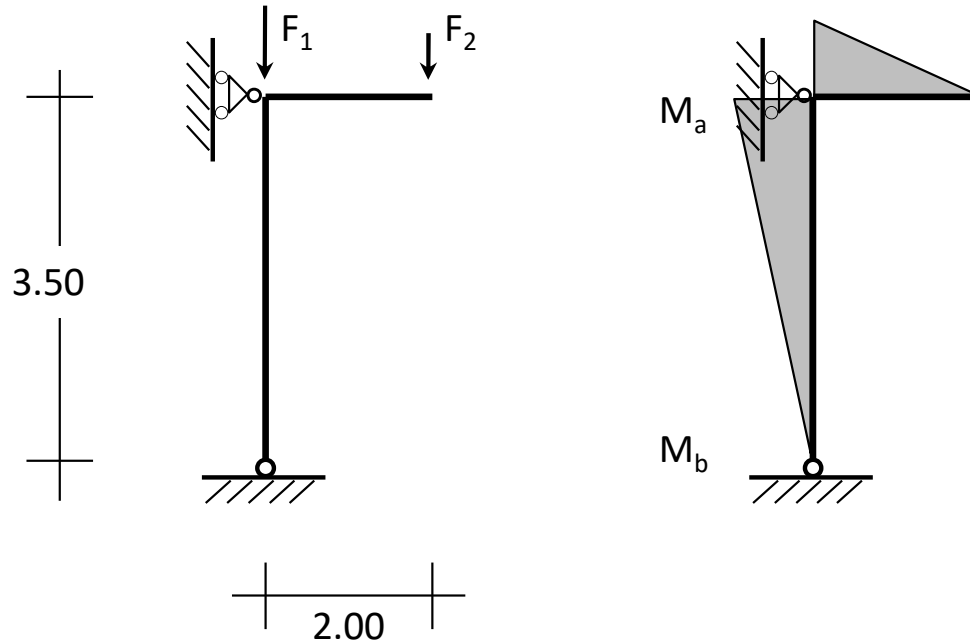


$$N_{Ed} = 860 \text{ kN}$$

$$C_{mx} = 0.6 + 0.4 \psi = 0.6$$

# Esempio

(metodo B) prima condizione



$$\bar{\lambda}_y = 0.287$$

$$\chi_y = 0.9689$$

$$\bar{\lambda}_z = 0.492$$

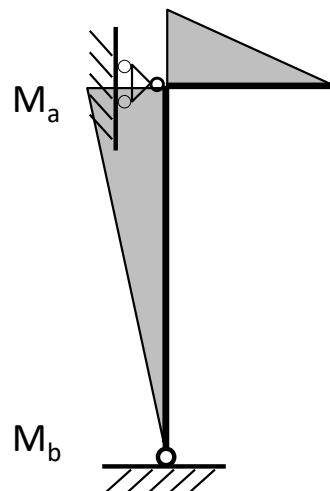
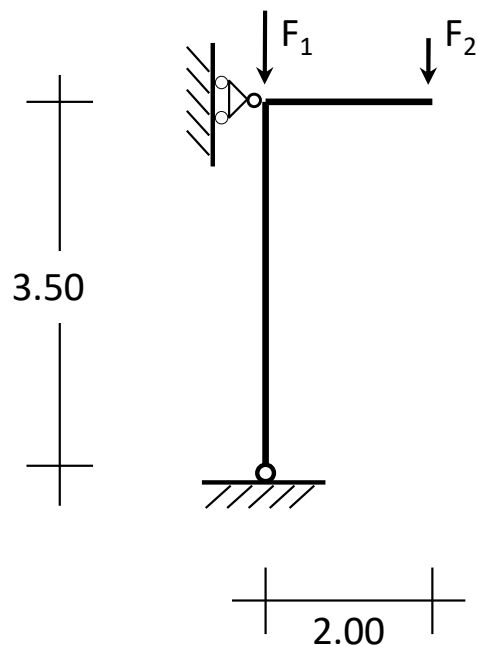
$$\chi_z = 0.8477$$

$$k_{yy} = C_{my} \left[ 1 + (\bar{\lambda}_y - 0.2) \frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_y A f_y} \right] = 0.6 \left[ 1 + (0.287 - 0.2) \frac{860}{3231.2} \right] = 0.614$$

$N_{b,y,Rd}$

# Esempio

(metodo B) prima condizione



$$\bar{\lambda}_y = 0.287$$

$$\chi_y = 0.9689$$

$$\bar{\lambda}_z = 0.492$$

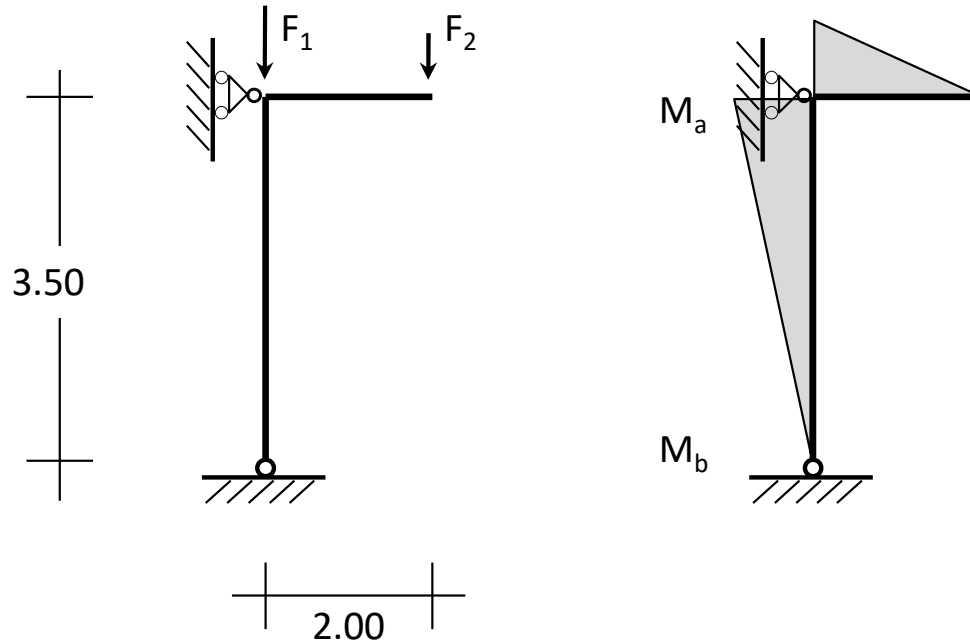
$$\chi_z = 0.8477$$

$$k_{yy} \leq C_{my} \left[ 1 + 0.8 \frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_y A f_y} \right] = 0.6 \left[ 1 + 0.8 \frac{860}{3231.2} \right] = 0.728$$

Ok, quindi  $k_{yy} = 0.614$

# Esempio

(metodo B) prima condizione



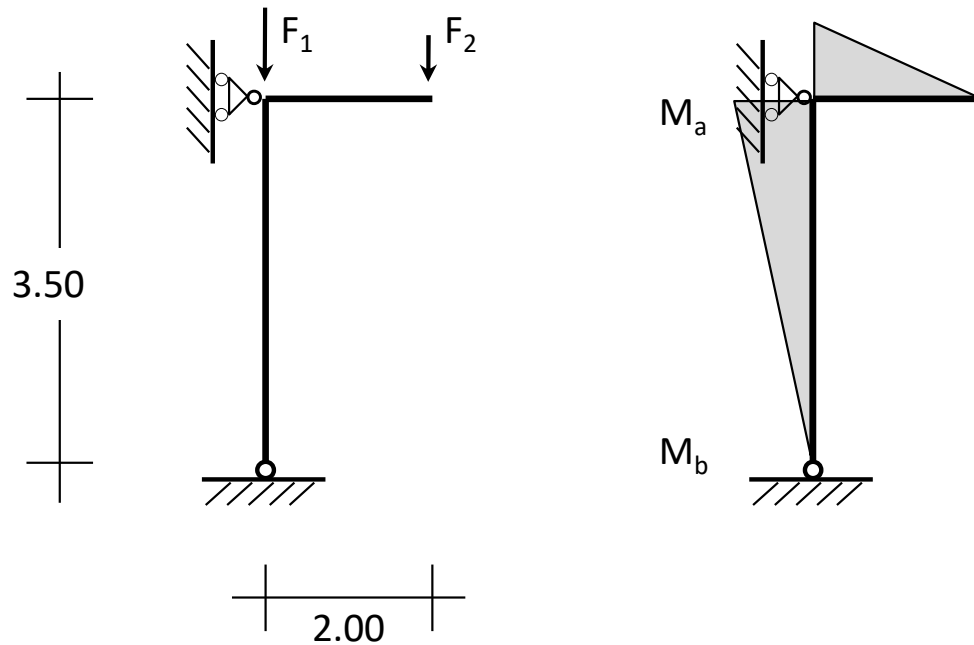
$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_y A f_y} + \frac{k_{yy} M_{y,Ed} \gamma_{M1}}{W_{pl,y} f_y} = \frac{860}{3233.2} + \frac{0.614 \times 120}{418.1} =$$

$$N_{b,y,Rd} \quad M_{pl,y,Rd} = 0.266 + 0.176 = 0.442 < 1$$

Con il Metodo A era 0.480,  
un po' più gravoso

# Esempio

(metodo B) seconda condizione



Perché  $k_{zy} = 0$

$$\frac{N_{Ed} \gamma_{M1}}{\chi_z A f_y} = \frac{860}{2828.6} = 0.304$$

$N_{b,z,Rd}$

non condiziona

Verifica di stabilità con sforzo normale centrato