

Corso di laurea in Ingegneria civile strutturale e geotecnica

# Tecnica delle costruzioni

## modulo A

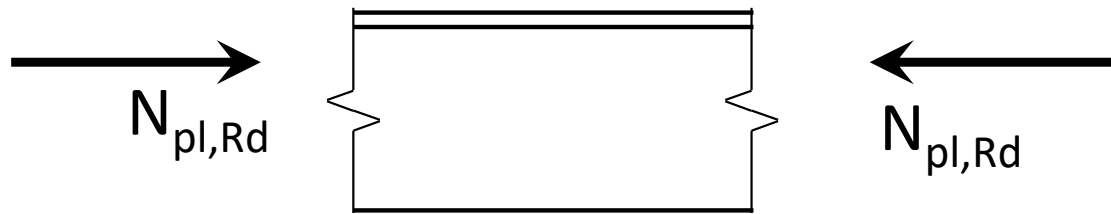
10a – Compressione

Aurelio Gherzi

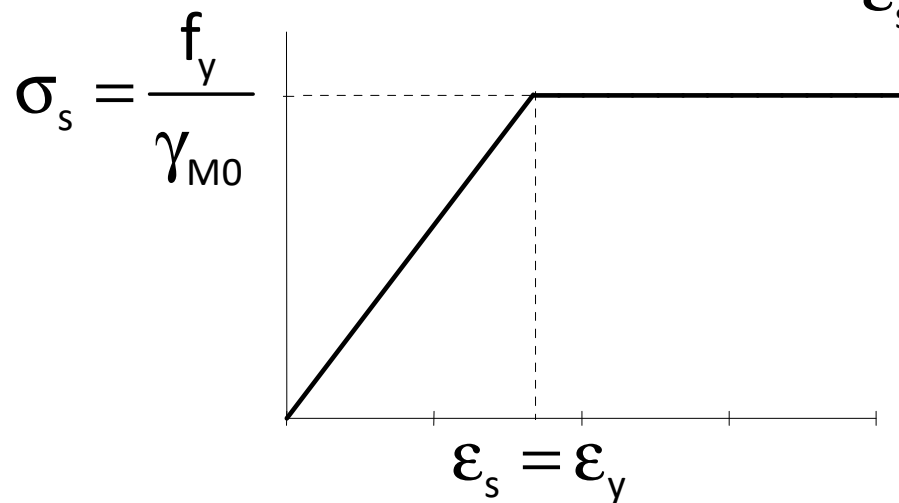
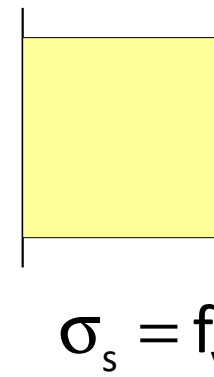
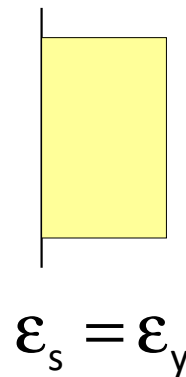
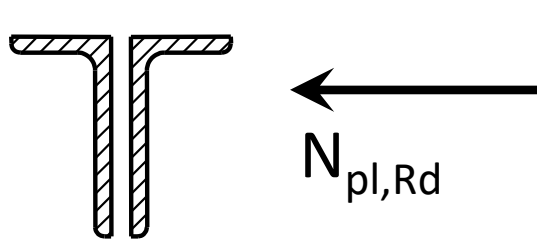
20/10/2020

# Comportamento ultimo

## resistenza plastica della sezione



una sezione o un concio di  
asta tozzo tende ad  
accorciarsi plasticamente

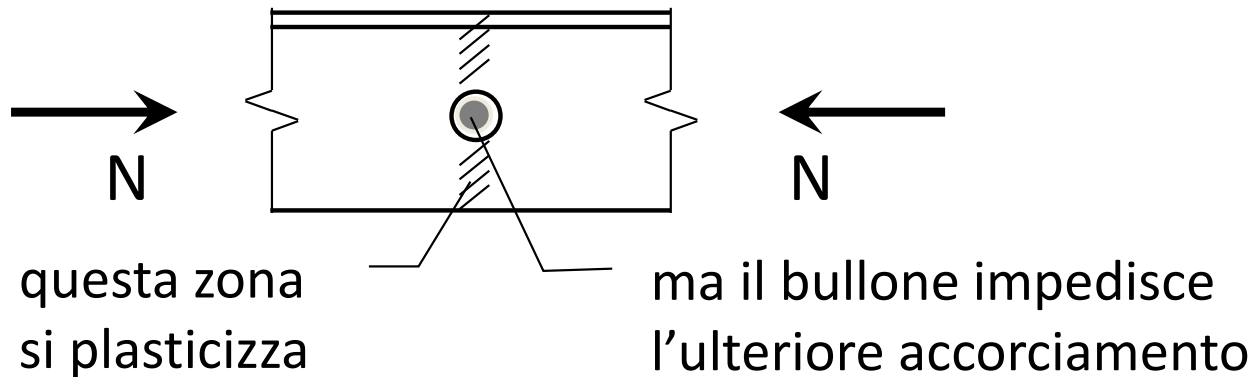


$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

come per trazione

# Comportamento

quando vi sono dei fori (attraversati da bulloni)



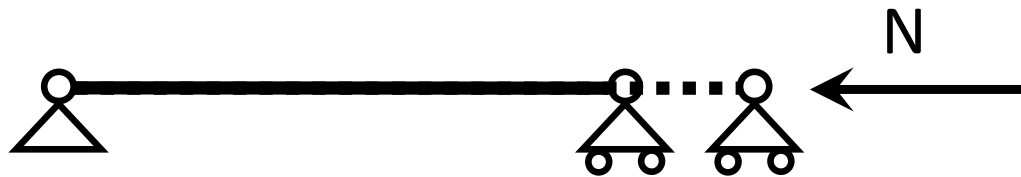
- Una sezione, o un'asta tozza, compressa hanno la stessa resistenza di una sezione compressa
- La presenza di fori (che contengono bulloni) non inficia la resistenza

... ma questo vale solo per la sezione, o per un elemento tozzo, non per le aste usuali

# Modalità di collasso di aste compresse



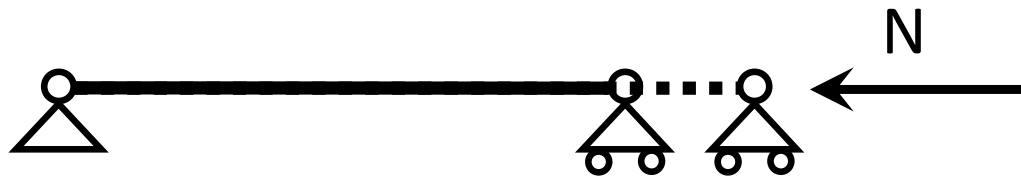
# Modalità di collasso di aste compresse



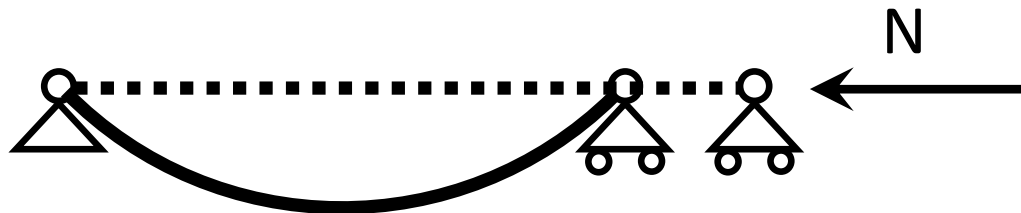
Plasticizzazione della  
sezione trasversale  
dell'asta



# Modalità di collasso di aste compresse



Plasticizzazione della  
sezione trasversale  
dell'asta



Instabilità laterale dell'asta

# Comportamento di aste compresse (ideali)

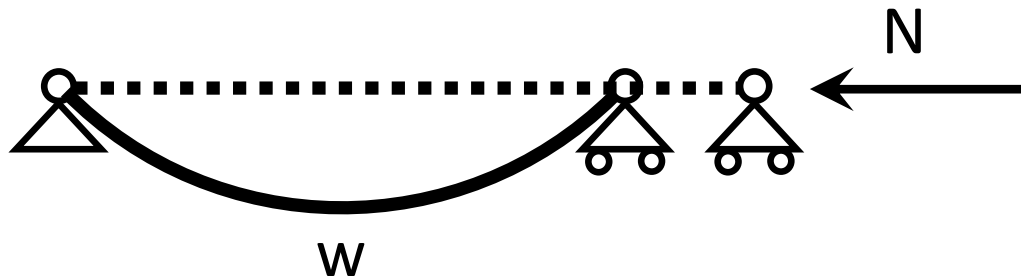
## instabilità laterale (asta ideale)

Come esaminare questo caso?

- Provare se esiste una deformata alternativa a quella rettilinea di puro accorciamento

$$M = N w \quad w'' = -\frac{M}{EI}$$

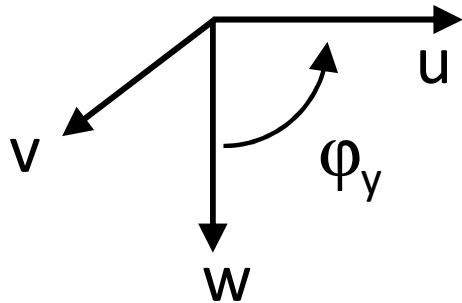
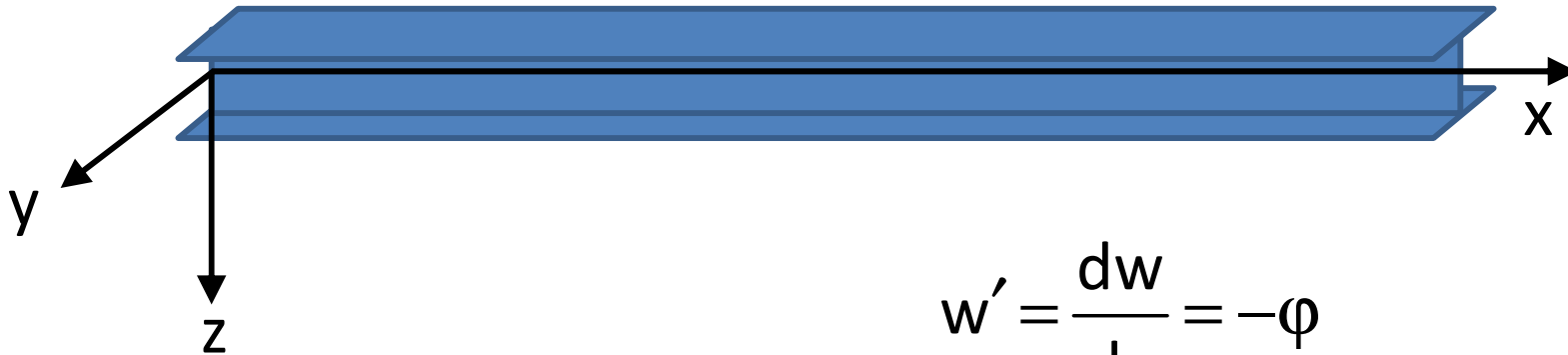
Relazioni tra:  
Sforzo normale e momento flettente  
Momento flettente e curvatura



Instabilità laterale dell'asta

# Richiami

## Equazioni indefinite d'equilibrio



$$w' = \frac{dw}{dx} = -\varphi$$

$$-w'' = \frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{M_y}{EI}$$

$$-EI w''' = \frac{dM_y}{dx} = V_z$$

$$-EI w'''' = \frac{dV_z}{dx} = -q_z$$



# Comportamento di aste compresse

## instabilità laterale

Come esaminare questo caso?

- Provare se esiste una deformata alternativa a quella rettilinea di puro accorciamento

$$M = N w \quad w'' = -\frac{M}{EI}$$

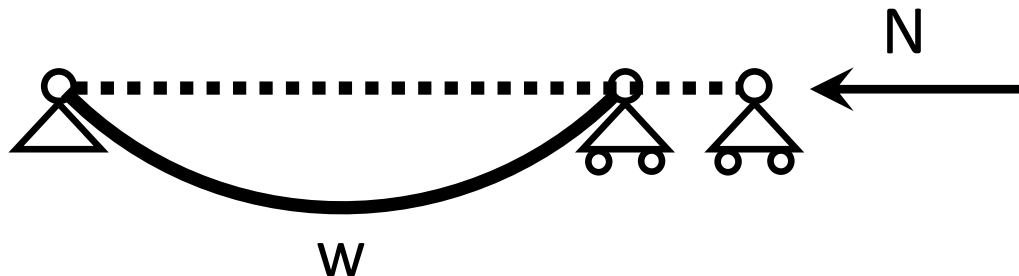
Relazioni tra:

Sforzo normale e momento flettente

Momento flettente e curvatura

$$EI w'' + N w = 0$$

Equazione differenziale



Instabilità laterale dell'asta

Possibile soluzione

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

# Comportamento di aste compresse

## instabilità laterale

Come esaminare questo caso?

- Provare se esiste una deformata alternativa a quella rettilinea

$$M = N w \qquad w'' = -\frac{M}{EI} \qquad EI w'' + N w = 0$$

Possibile soluzione

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l} \qquad w'' = -\frac{\pi^2}{l^2} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

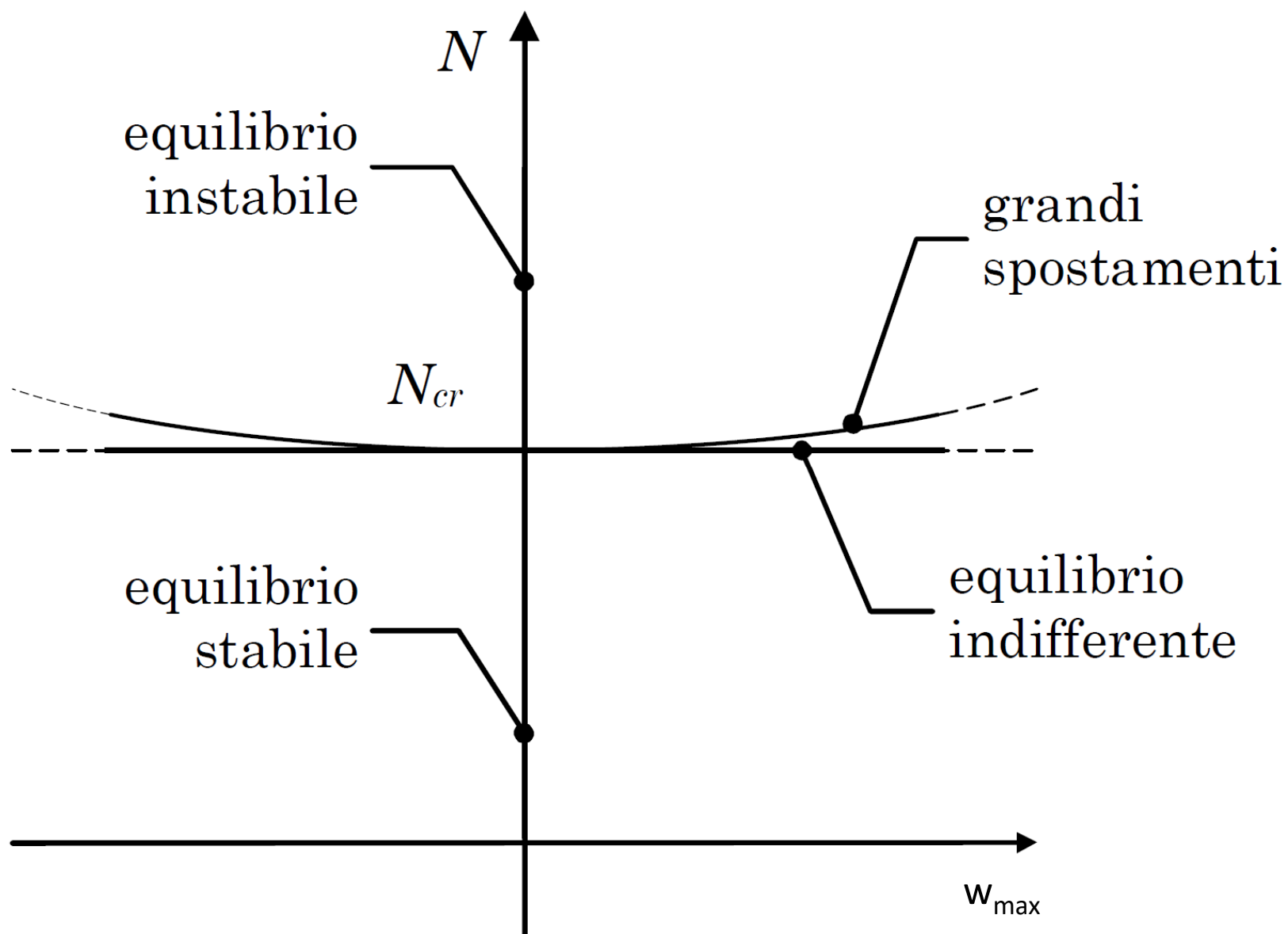
$$-EI \frac{\pi^2}{l^2} a \sin \frac{\pi x}{l} + N a \sin \frac{\pi x}{l} = 0$$

$$\left( -EI \frac{\pi^2}{l^2} + N \right) a \sin \frac{\pi x}{l} = 0$$

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

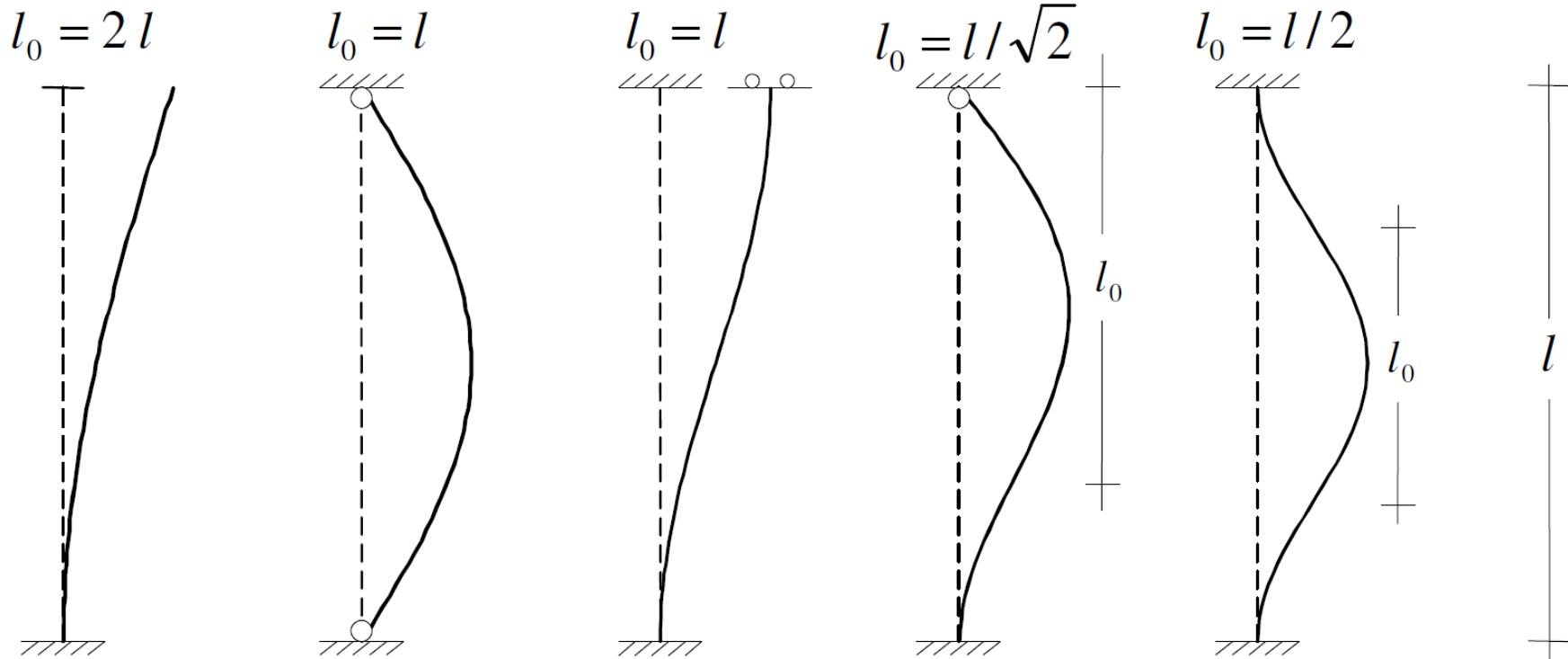
# Comportamento di aste compresse

## instabilità laterale



# Più in generale

per varie situazioni di vincolo



$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

# Comportamento di aste compresse

## instabilità laterale (asta ideale)

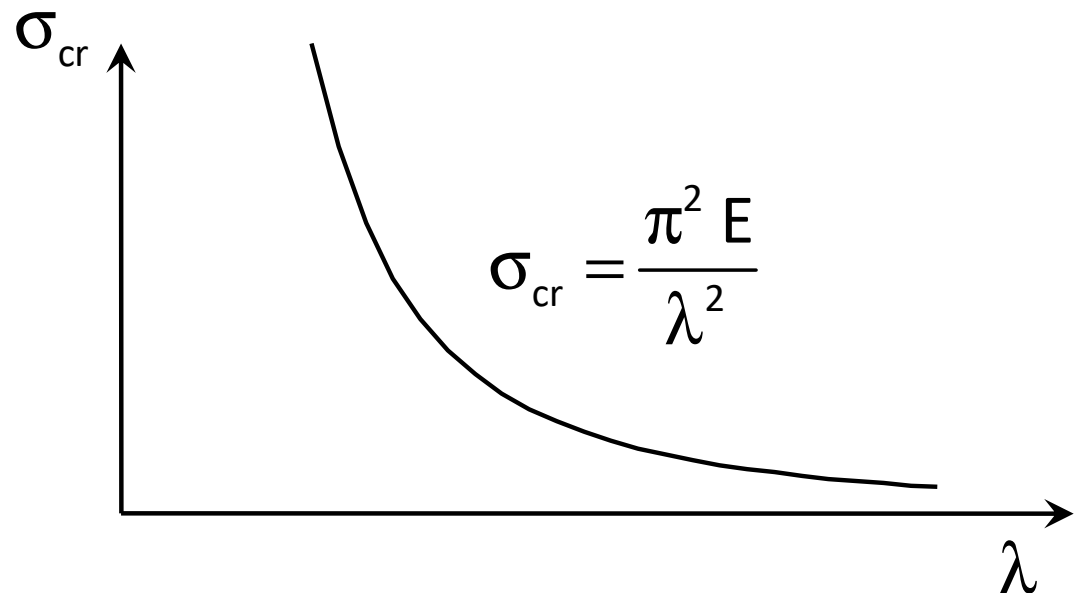
- Relazione tra tensione critica e snellezza

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{raggio d'inerzia della sezione}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

$\lambda$  = snellezza dell'asta



# Comportamento delle aste reali

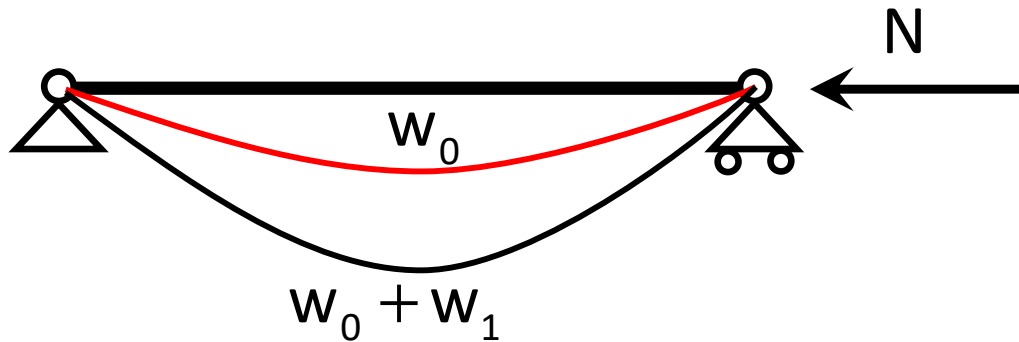
## Imperfezioni

Nelle aste reali sono sempre presenti imperfezioni di tipo geometrico e meccanico:

- Imperfezioni geometriche – ad esempio:
  - L'asse dell'asta non è mai perfettamente rettilineo
- Imperfezioni meccaniche – ad esempio:
  - La sezione trasversale dell'asta è sede di tensioni (residue) ancor prima dell'applicazione dei carichi sulla struttura

# Comportamento di aste compresse

## in presenza di imperfezioni



$$M = N(w_0 + w_1)$$

$$w_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$EI w_1'' = -N(w_0 + w_1)$$

$$w_0 = e \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$-EI \frac{\pi^2}{l^2} a \sin \frac{\pi x}{l} = -N(e + a) \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$w_1 = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

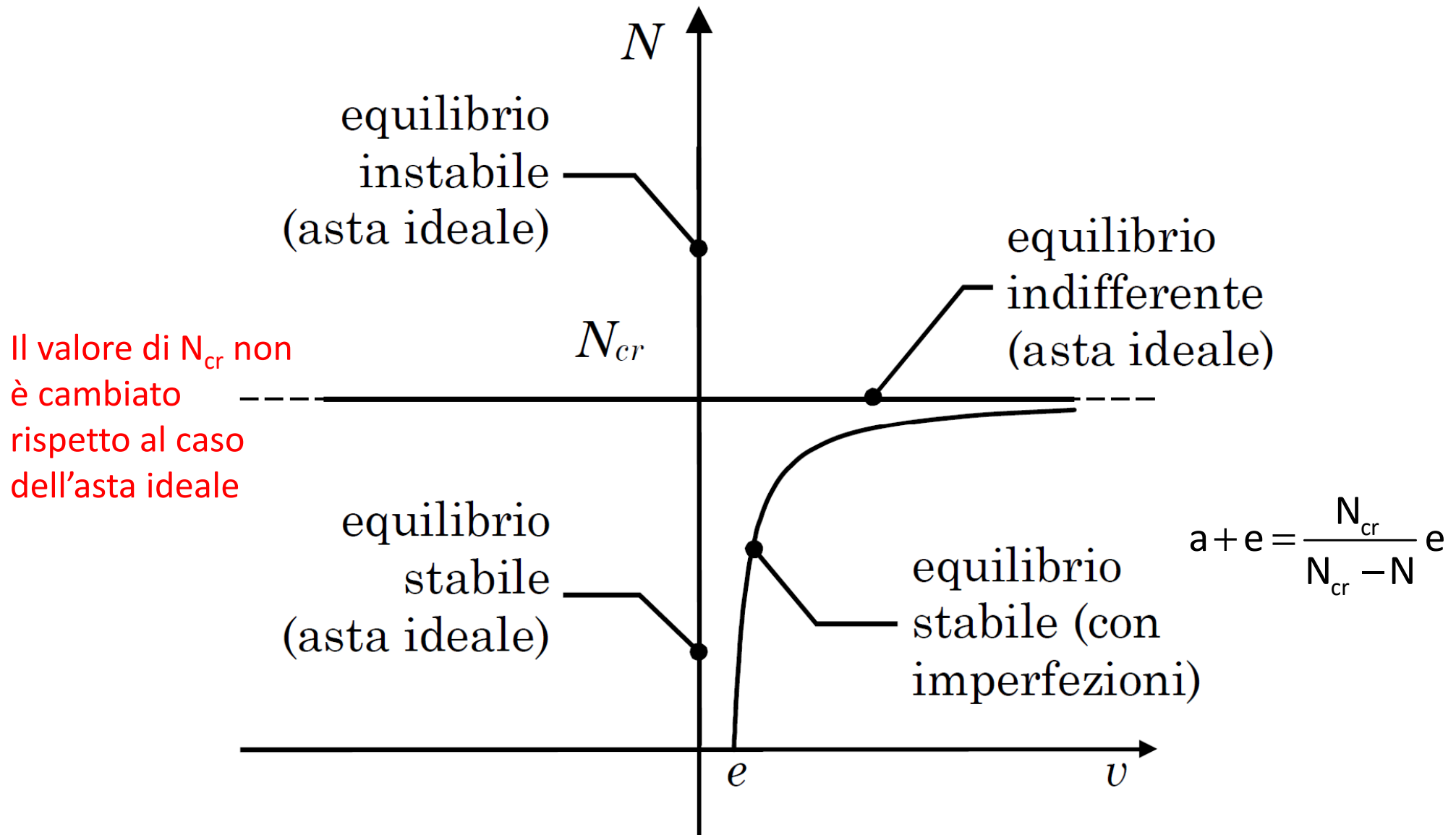
$$-EI \frac{\pi^2}{l^2} a = -N(e + a)$$

$$-N_{cr} a = -N(e + a)$$

$$a = \frac{N}{N_{cr} - N} e$$

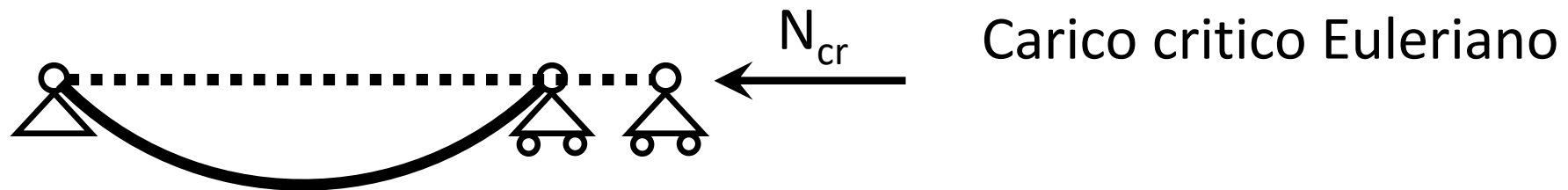
$$a + e = \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N} e$$

# Comportamento di aste compresse in presenza di imperfezioni





# Comportamento ultimo di un'asta ideale tenendo conto dello snervamento



$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2}$$

$I$  = momento d'inerzia della sezione

$l_0$  = lunghezza libera d'inflessione

Dividendo per l'area della sezione si ottiene la tensione critica di un'asta ideale:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$\lambda$  = snellezza dell'asta

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = raggio d'inerzia della sezione

# Comportamento ultimo di un'asta ideale tenendo conto dello snervamento

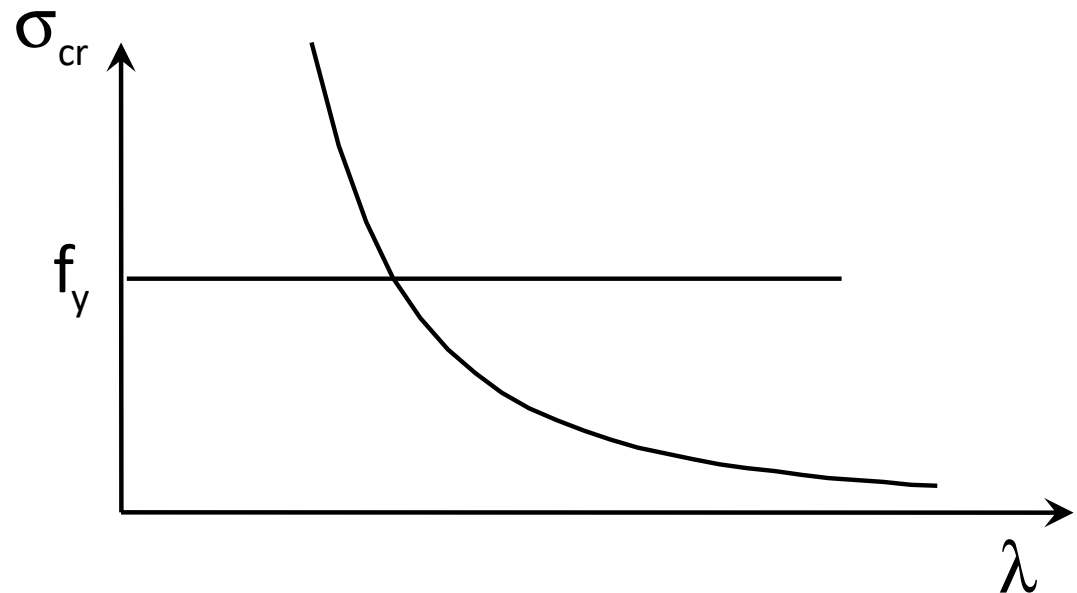
$$\sigma = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Instabilità dell'asta

inoltre  $\sigma = f_y$

Collasso plastico

Quando  $\sigma = f_y$  l'intera sezione si plasticizza



# Comportamento ultimo di un'asta ideale tenendo conto dello snervamento

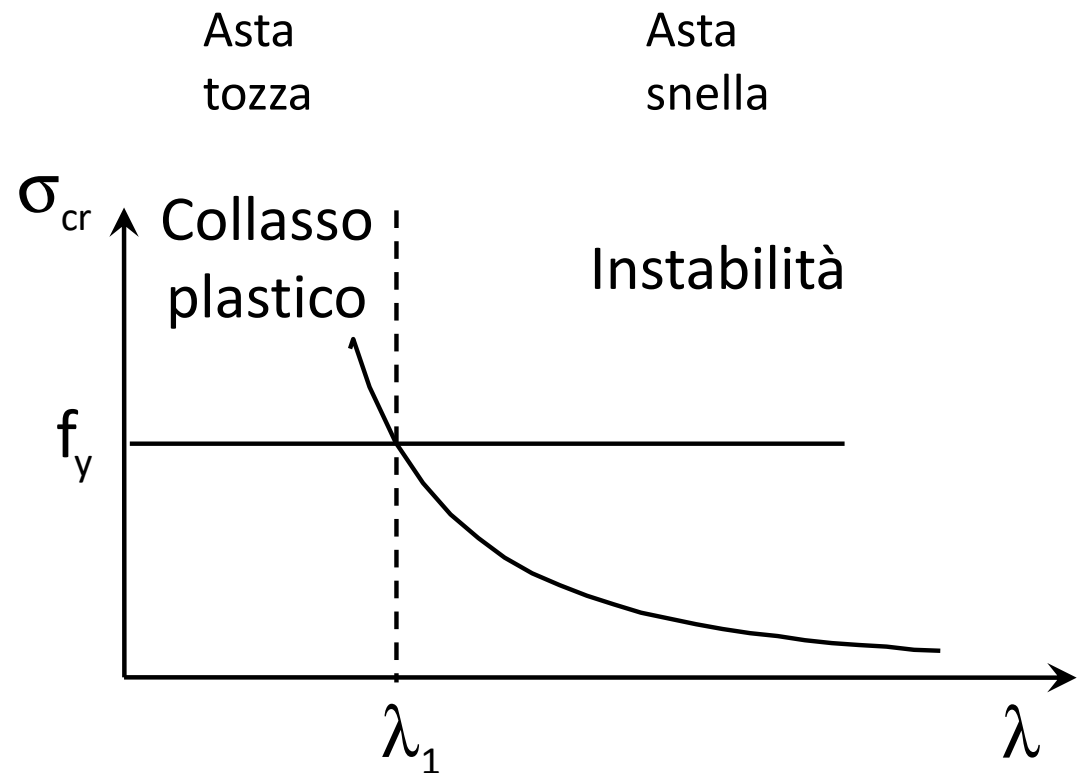
$$\sigma = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Instabilità dell'asta

inoltre  $\sigma = f_y$

Collasso plastico

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

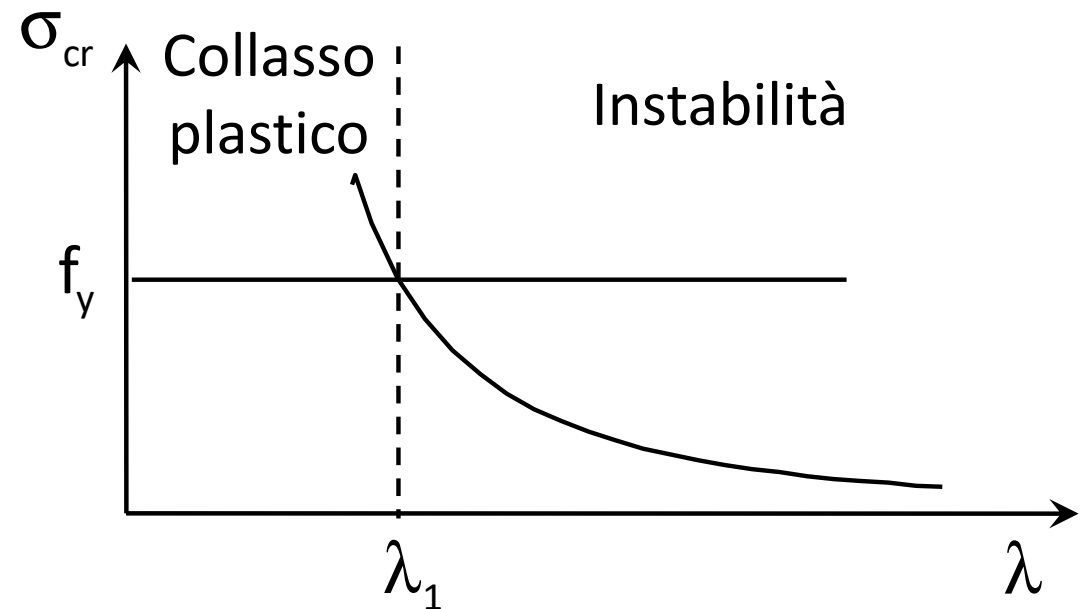
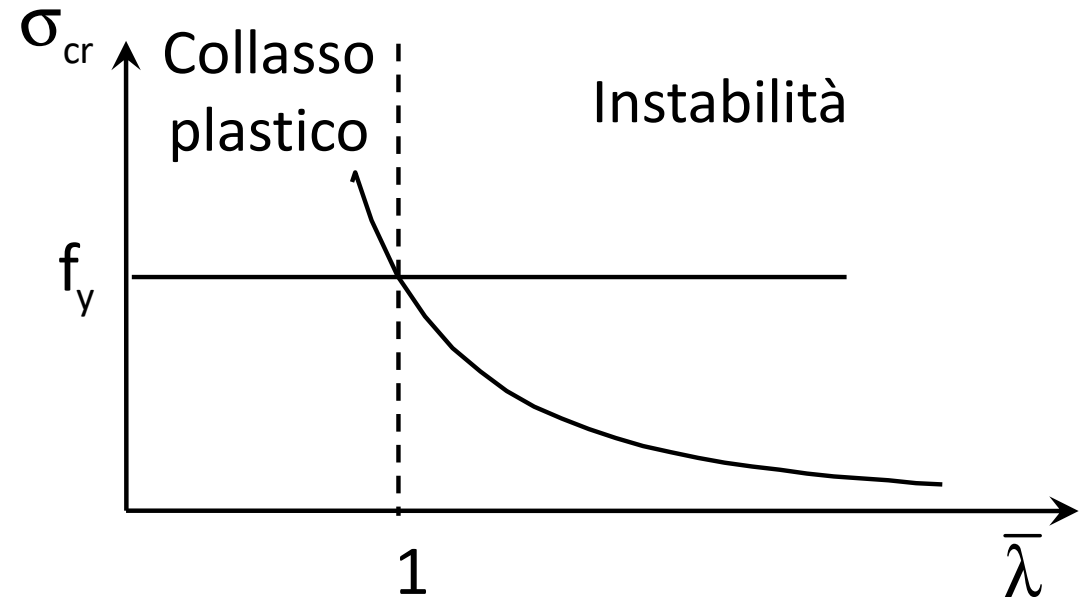


# Comportamento ultimo di un'asta ideale tenendo conto dello snervamento

- Il diagramma può essere anche rappresentato in forma normalizzata

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$



# Comportamento ultimo di un'asta ideale tenendo conto dello snervamento

- Il diagramma può essere anche rappresentato in forma normalizzata

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$$

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{A f_y}{N_{cr}}$$

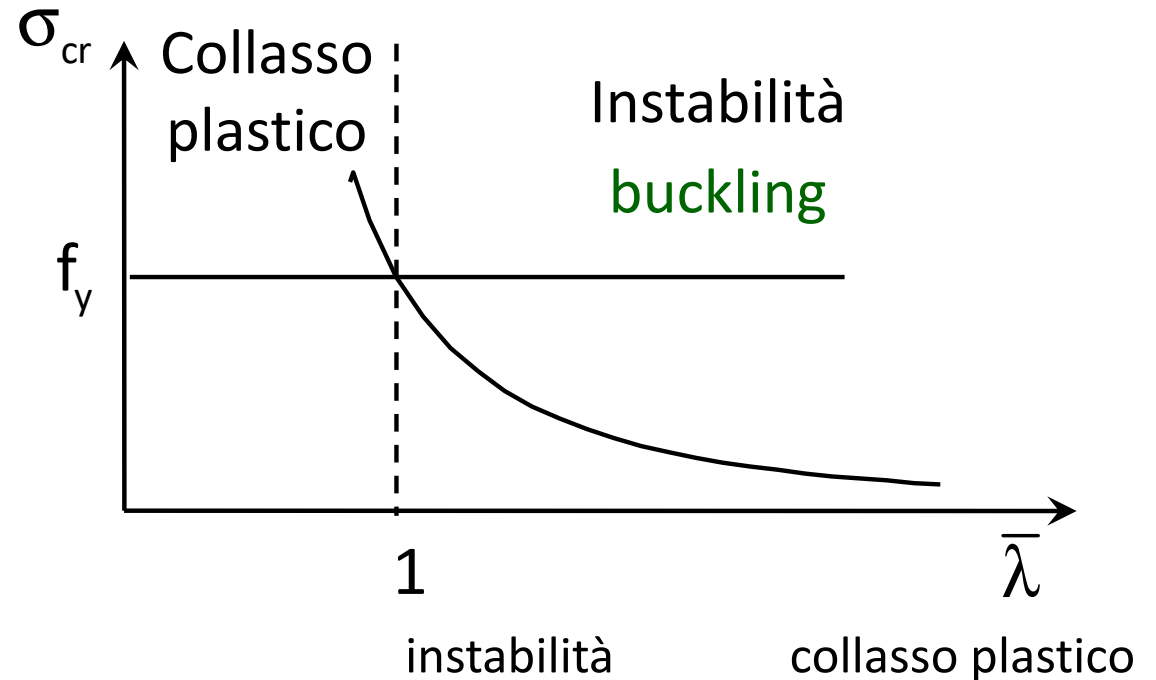
$$N_{cr} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} A f_y$$

$$\leq A f_y$$

- Indicando con  $N_b$  il valore per cui si ha l'instabilità o il collasso plastico

$$N_b = \chi A f_y$$

$$\chi = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \leq 1$$



# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

A causa delle imperfezioni la resistenza all'instabilità di un'asta reale è inferiore a quella dell'asta di Eulero.

- Per esempio, se l'asse dell'asta non è rettilineo nasce anche un momento flettente e le tensioni nella sezione non sono costanti.
- La resistenza viene calcolata tenendo conto degli effetti del secondo ordine (incremento di freccia e di momento flettente al crescere di  $N$ ) e considerando come limite il raggiungimento di  $f_u$  nel punto più sollecitato.
- La  $\sigma_{cr}$  (calcolata come  $N_{cr}/A$ ) è più piccola di quanto previsto per aste perfette.

# Comportamento ultimo di un'asta reale

## tenendo conto dello snervamento

- Nell'asta reale, a causa di un asse non rettilineo nasce momento flettente  
 $M_{\max} = N (e+a)$
- Possiamo ritenere che quando la sezione inizia a plasticizzarsi (cioè la  $\sigma_{\max}$  diventa pari a  $f_y$ ) la sezione abbia raggiunto la sua capacità massima
  - Nota 1: appena l'asta inizia a plasticizzarsi perde rigidità e quindi è maggiormente soggetta al rischio di instabilità

- Nota 2: abbiamo visto che 
$$a = \frac{N}{N_{cr} - N} e$$

quindi 
$$e + a = \left( 1 + \frac{N}{N_{cr} - N} \right) e = \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N} e = \frac{1}{1 - N/N_{cr}} e$$

# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- $M_{\max} = N (e+a)$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{N(e+a)}{W} = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{1}{1-N/N_{cr}} e \frac{A}{W} \right)$$

- Ponendo  $\eta = e \frac{A}{W}$  (parametro che tiene conto dell'imperfezione) si ha

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \left( \frac{1-N/N_{cr} + \eta}{1-N/N_{cr}} \right)$$

- Indico con  $N_b$  il valore di  $N$  per cui si ha  $\sigma_{\max} = f_y$

$$f_y = \frac{N_b}{A} \left( \frac{1-N_b/N_{cr} + \eta}{1-N_b/N_{cr}} \right)$$

$$1 - \frac{N_b}{N_{cr}} = \frac{N_b}{A f_y} (1 + \eta - N_b / N_{cr})$$



# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- L'espressione

$$1 - \frac{N_b}{N_{cr}} = \frac{N_b}{A f_y} (1 + \eta - N_b / N_{cr})$$

abbiamo visto che  $N_{cr} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} A f_y$   $N_b = \chi A f_y$

quindi  $\frac{N_b}{N_{cr}} = \frac{\chi A f_y}{\frac{1}{\bar{\lambda}^2} A f_y} = \chi \bar{\lambda}^2$   $\frac{N_b}{A f_y} = \chi$

l'espressione diventa  $1 - \chi \bar{\lambda}^2 = \chi (1 + \eta - \chi \bar{\lambda}^2)$

# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- L'espressione

$$1 - \frac{N_b}{N_{cr}} = \frac{N_b}{A f_y} \left( 1 + \eta - N_b / N_{cr} \right)$$

diventa  $1 - \chi \bar{\lambda}^2 = \chi (1 + \eta - \chi \bar{\lambda}^2)$

$$1 - \chi \bar{\lambda}^2 = \chi (1 + \eta) - \chi^2 \bar{\lambda}^2$$

$$\chi^2 \bar{\lambda}^2 - \chi (1 + \eta + \bar{\lambda}^2) + 1 = 0$$

Pongo

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \eta + \bar{\lambda}^2)$$

$$\bar{\lambda}^2 \chi^2 - 2\varphi \chi + 1 = 0$$

Equazione di  
secondo grado in  $\chi$

# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- L'equazione  $\bar{\lambda}^2 \chi^2 - 2\varphi \chi + 1 = 0$

$$\text{con } \varphi = \frac{1}{2} (1 + \eta + \bar{\lambda}^2)$$

ha come soluzione

$$\chi = \frac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\bar{\lambda}^2} \quad \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

Avevamo posto, con riferimento all'asse non rettilineo  $\eta = e \frac{A}{W}$

Più in generale poniamo  $\eta = \alpha (\bar{\lambda} - 0.2)$  con  $\alpha$  fattore di imperfezione

Quindi 
$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- Riepilogando

$$N_b = \chi A f_y$$

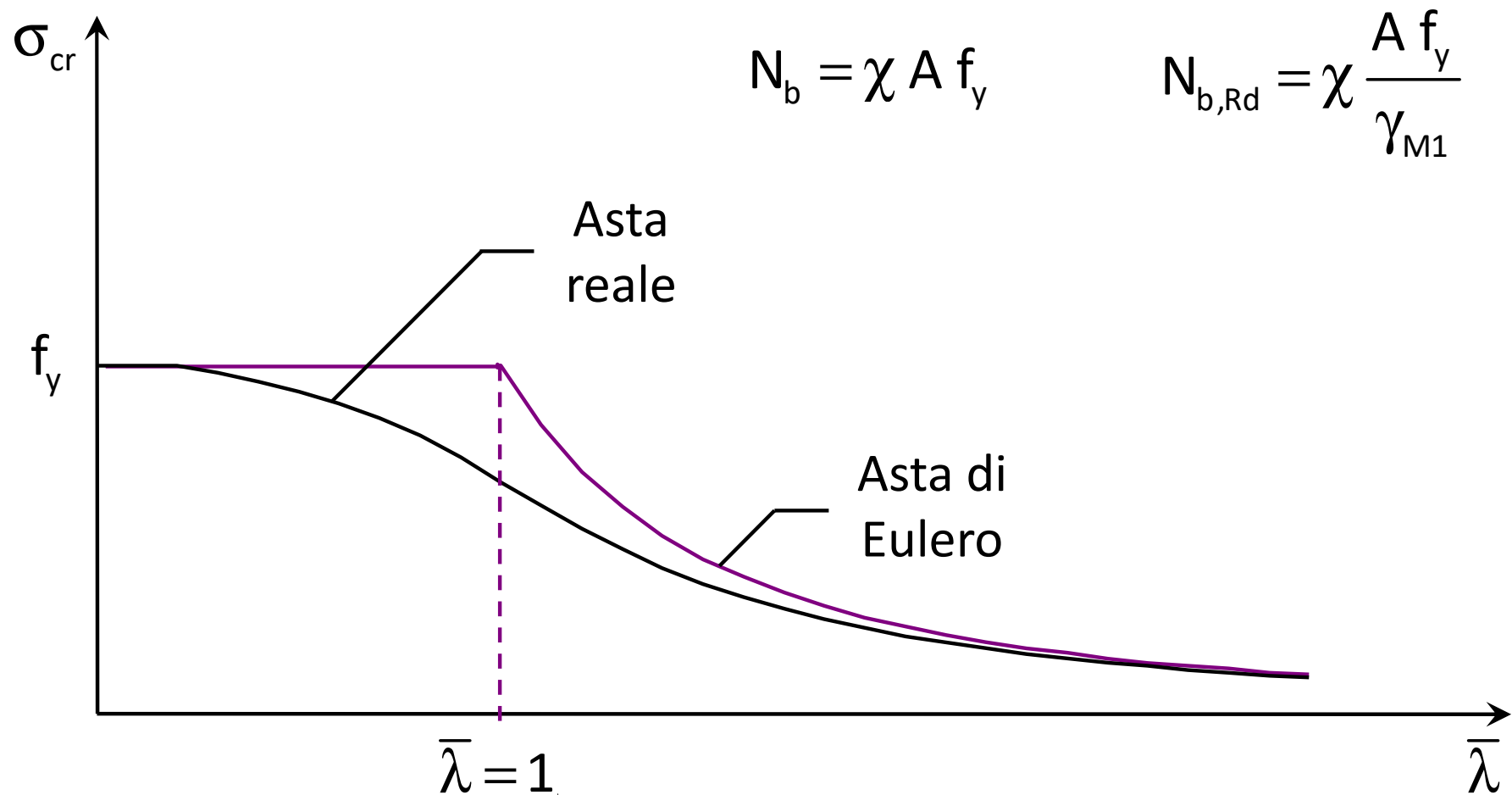
$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

| Curva di instabilità             | $a_0$ | a    | b    | c    | d    |
|----------------------------------|-------|------|------|------|------|
| Fattore di imperfezione $\alpha$ | 0,13  | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |

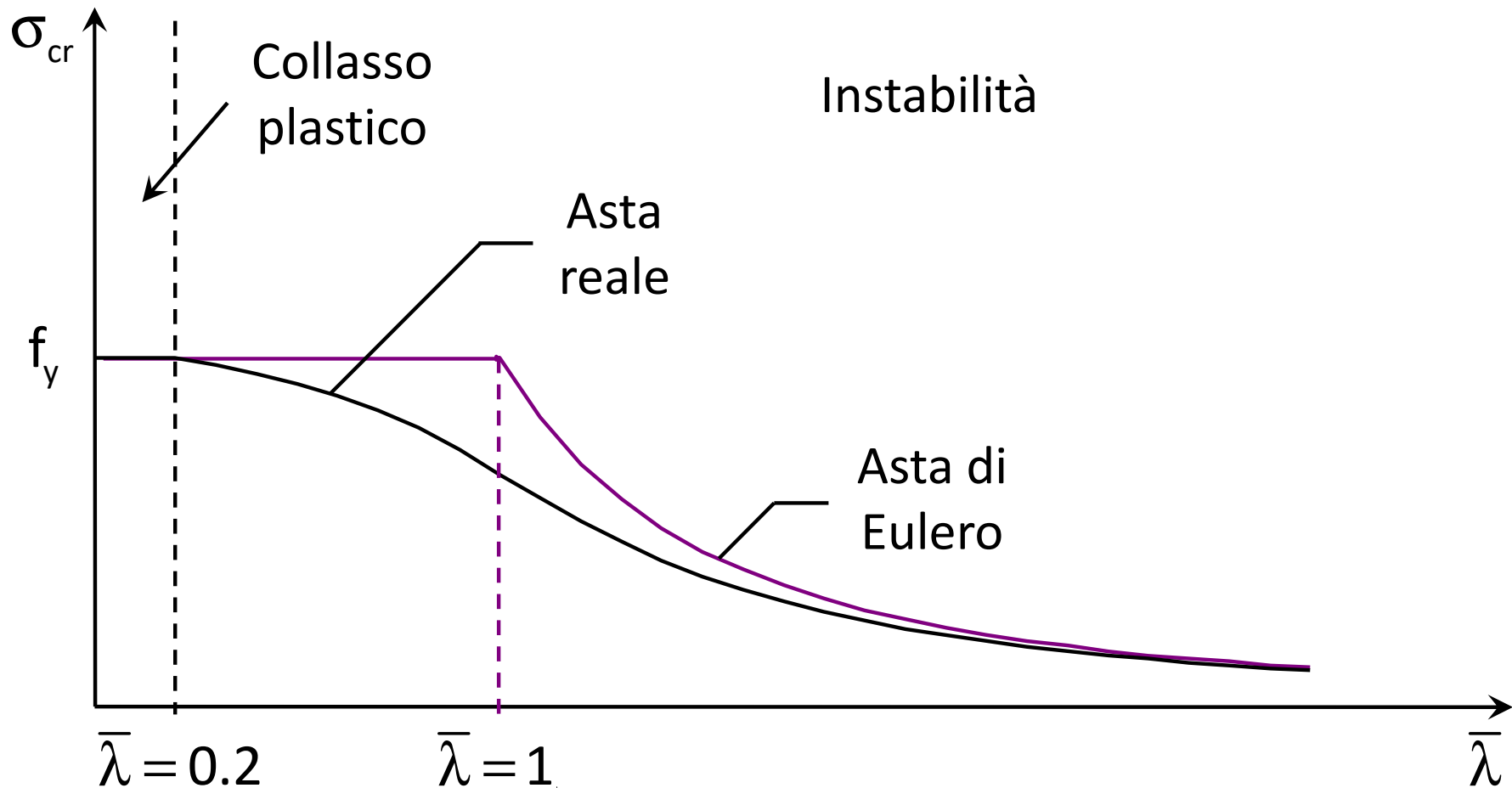
# Comportamento ultimo di un'asta reale tenendo conto dello snervamento

- A causa delle imperfezioni la resistenza all'instabilità di un'asta reale è inferiore a quella dell'asta di Eulero



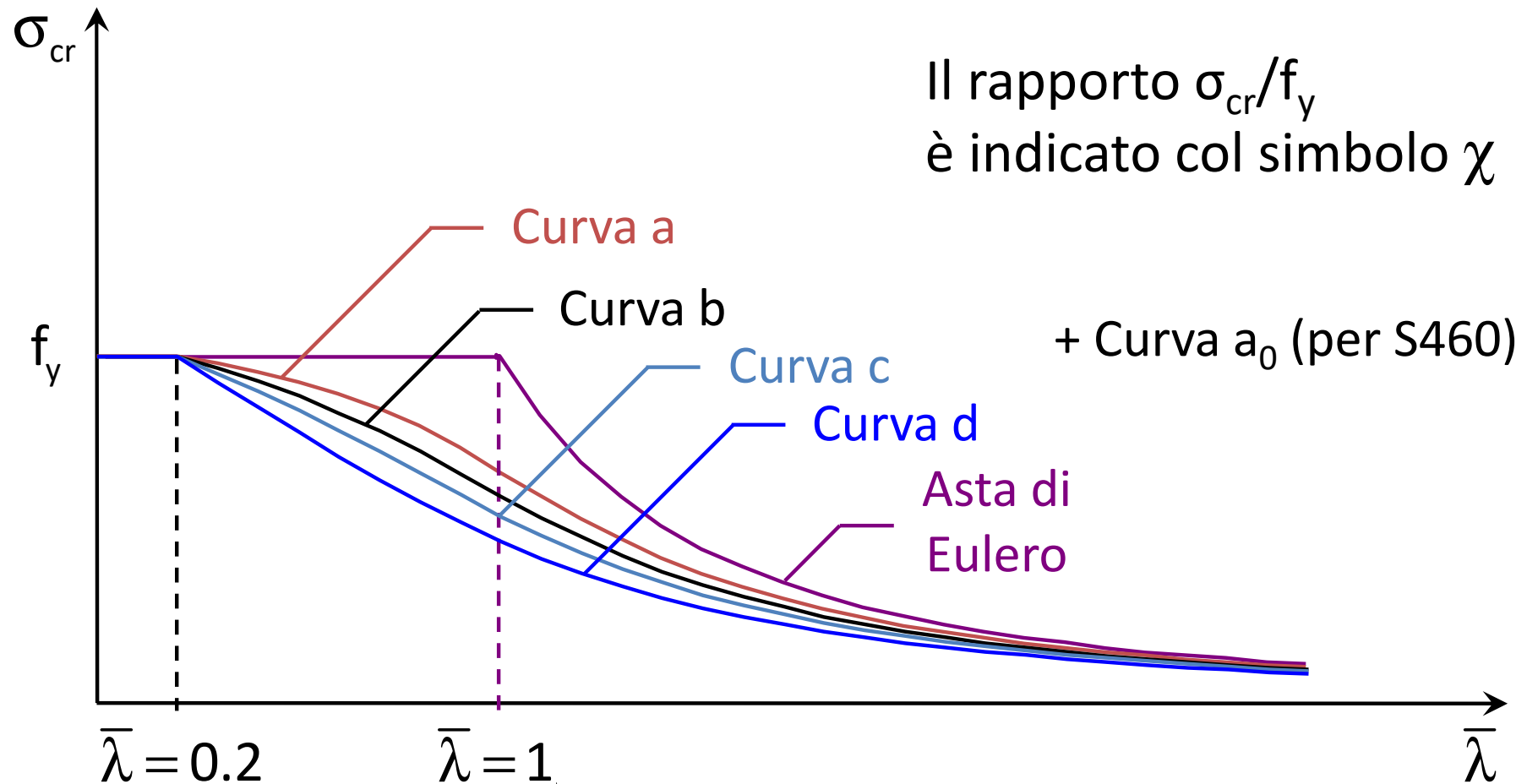
# Comportamento delle aste reali

- Il collasso plastico avviene solo per valori di snellezza molto bassi  $\bar{\lambda} \leq 0.2 \lambda_1$ .



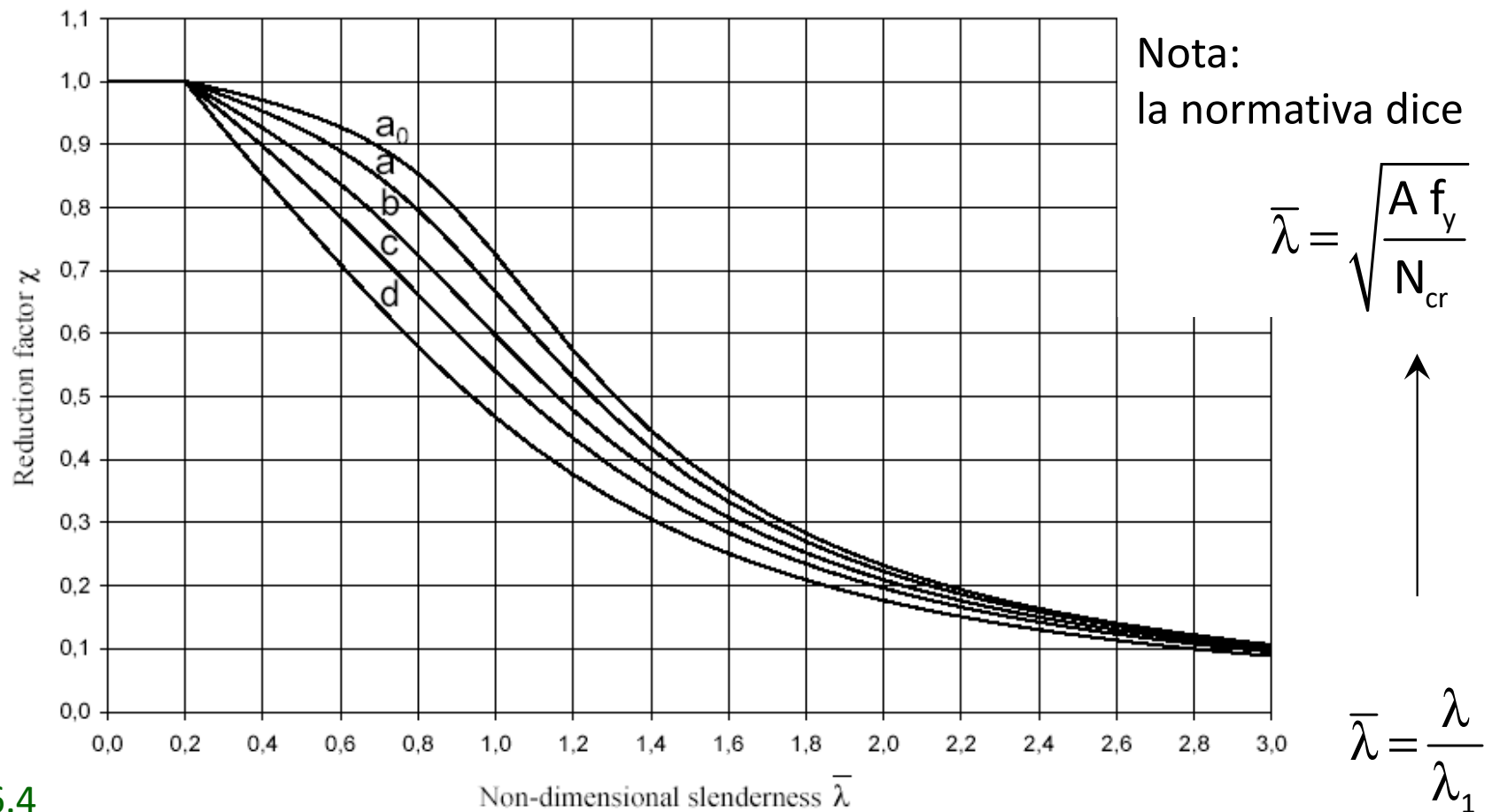
# Comportamento delle aste reali

- Il comportamento dipende dal tipo di profilato. La normativa (NTC18, EC3) distingue 5 curve di stabilità



# Comportamento delle aste reali

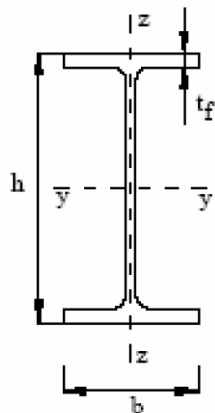
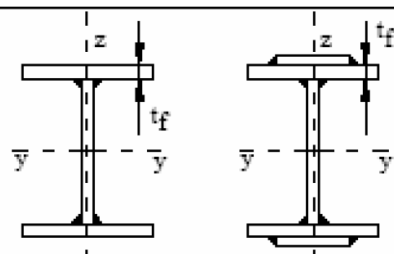
- Il comportamento dipende dal tipo di profilato. La normativa (NTC18, EC3) distingue 5 curve di stabilità





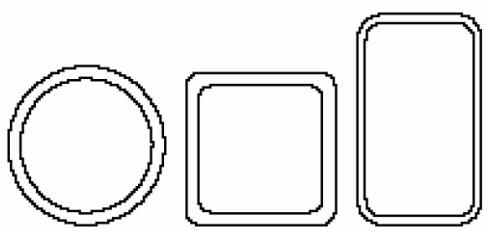
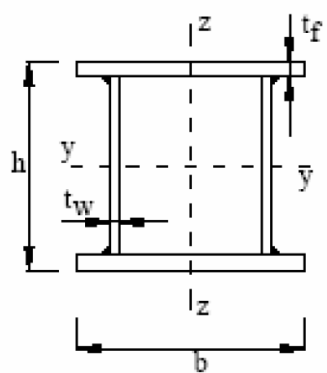
# Comportamento delle aste reali

- Le imperfezioni (e quindi la scelta tra le curve) dipende dalla forma del profilo

| Sezione trasversale     |   | Limiti                   | Inflessione<br>intorno<br>all'asse        | Curva di instabilità            |        |                |
|-------------------------|---|--------------------------|---|---------------------------------|--------|----------------|
|                         |   |                          |   | S235,<br>S275,<br>S355,<br>S420 | S460   |                |
| Sezioni laminate        |   | $h/b > 1,2$              | $t_f \leq 40 \text{ mm}$                  | y-y<br>z-z                      | a<br>b | $a_0$<br>$a_0$ |
|                         |   |                          | $40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$ | y-y<br>z-z                      | b<br>c | a<br>a         |
|                         |   | $h/b \leq 1,2$           | $t_f \leq 100 \text{ mm}$                 | y-y<br>z-z                      | b<br>c | a<br>a         |
|                         |   |                          | $t_f > 100 \text{ mm}$                    | y-y<br>z-z                      | d<br>d | c<br>c         |
| Sezioni ad I<br>saldate |  | $t_f \leq 40 \text{ mm}$ |   | y-y<br>z-z                      | b<br>c | b<br>c         |
|                         |   | $t_f > 40 \text{ mm}$    |   | y-y<br>z-z                      | c<br>d | c<br>d         |

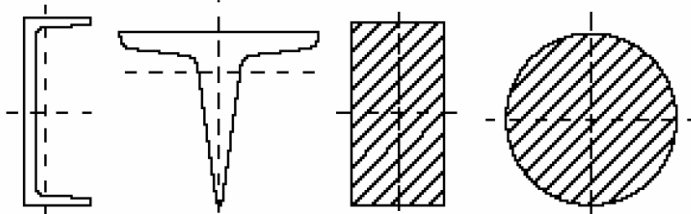
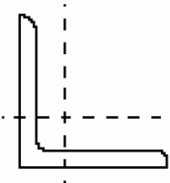
# Comportamento delle aste reali

- Le imperfezioni (e quindi la scelta tra le curve) dipende dalla forma del profilo

| Sezione trasversale       |   | Limiti  | Inflessione intorno all'asse | Curva di instabilità   |       |
|---------------------------|---|---|------------------------------|------------------------|-------|
|                           |   |   |                              | S235, S275, S355, S420 | S460  |
| Sezioni cave              |   | Sezione formata "a caldo"                                       | qualunque                    | a                      | $a_0$ |
|                           |   | Sezione formata "a freddo"                                      | qualunque                    | c                      | c     |
| Sezioni scatolari saldate |  | In generale   | qualunque                    | b                      | b     |
|                           |   | saldature "spesse": $a > 0.5t_f$<br>$b/t_f < 30$ ; $h/t_w < 30$ | qualunque                    | c                      | c     |

# Comportamento delle aste reali

- Le imperfezioni (e quindi la scelta tra le curve) dipende dalla forma del profilo

| Sezione trasversale     |   | Limiti | Inflessione intorno all'asse | Curva di instabilità   |      |
|-------------------------|---|--------|------------------------------|------------------------|------|
|                         |   |        |                              | S235, S275, S355, S420 | S460 |
| Sezioni piene, ad U e T |  |        | qualunque                    | c                      | c    |
| Sezioni ad L            |  |        | qualunque                    | b                      | b    |

| Curva di instabilità             | $a_0$ | a    | b    | c    | d    |
|----------------------------------|-------|------|------|------|------|
| Fattore di imperfezione $\alpha$ | 0,13  | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |