

Corso di laurea in Ingegneria civile strutturale e geotecnica

Tecnica delle costruzioni

modulo A

12 – Instabilità delle lastre

Aurelio Gheresi

26/10/2020

Riferimenti

Normativa

- EN 1993-1-3, Eurocodice 3, parte 1-3:
Regole generali - Regole supplementari per l'impiego dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo
- EN 1993-1-5, Eurocodice 3, parte 1-5:
Elementi strutturali a lastra

Testi

- A.C. Walker, Design and Analysis of Cold-formed Sections, London, Intertext books, 1975
- A. Gherzi, R. Landolfo, F.M. Mazzolani, Design of Metallic Cold-formed Thin-walled Members, Spon Press, London and New York, 2002
- V. Dipaola, G. Prete, F. Prete, I profili formati a freddo nelle opere di carpenteria metallica, Aracne editrice, 2010

Instabilità

di un'asta o una lastra compressa

asta

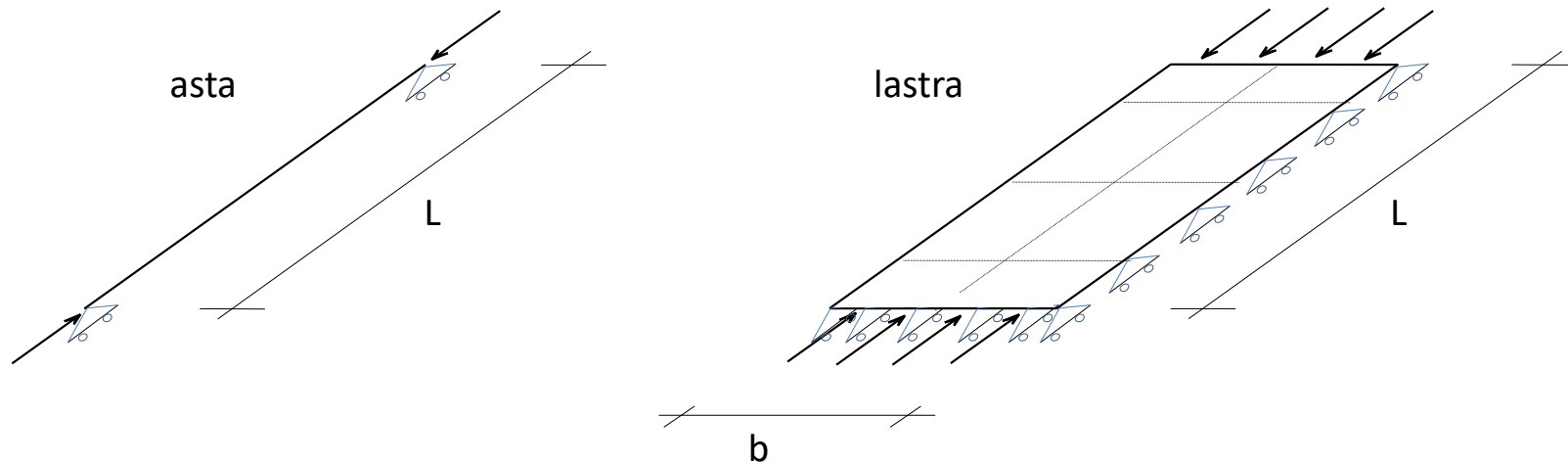
elemento monodimensionale

vincolata agli estremi in modo da consentire spostamenti solo nella direzione del carico

lastra

elemento bidimensionale

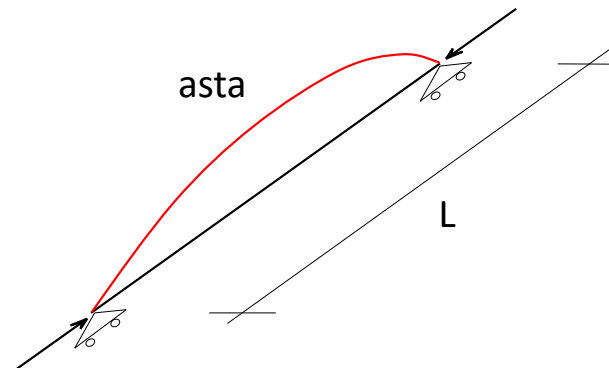
vincolata lungo i bordi in modo da consentire spostamenti solo nella direzione del carico



Carico critico di un'asta compressa

asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- la deformata critica è
un'unica onda, con
semi-lunghezza d'onda
pari alla lunghezza
dell'asta l



Carico critico di un'asta compressa

asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

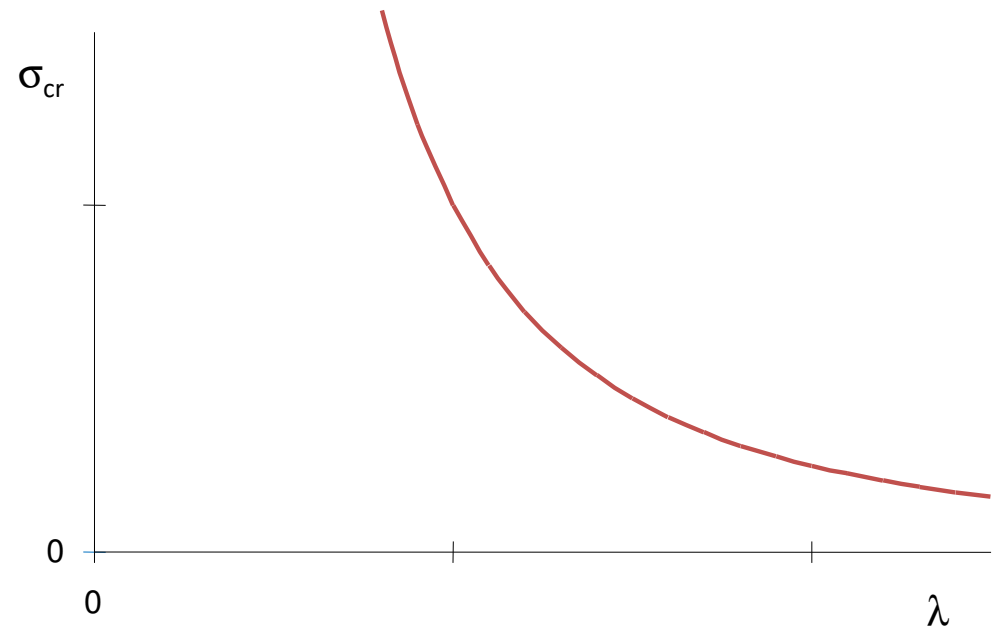
La teoria, sviluppata da Eulero, fornisce

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

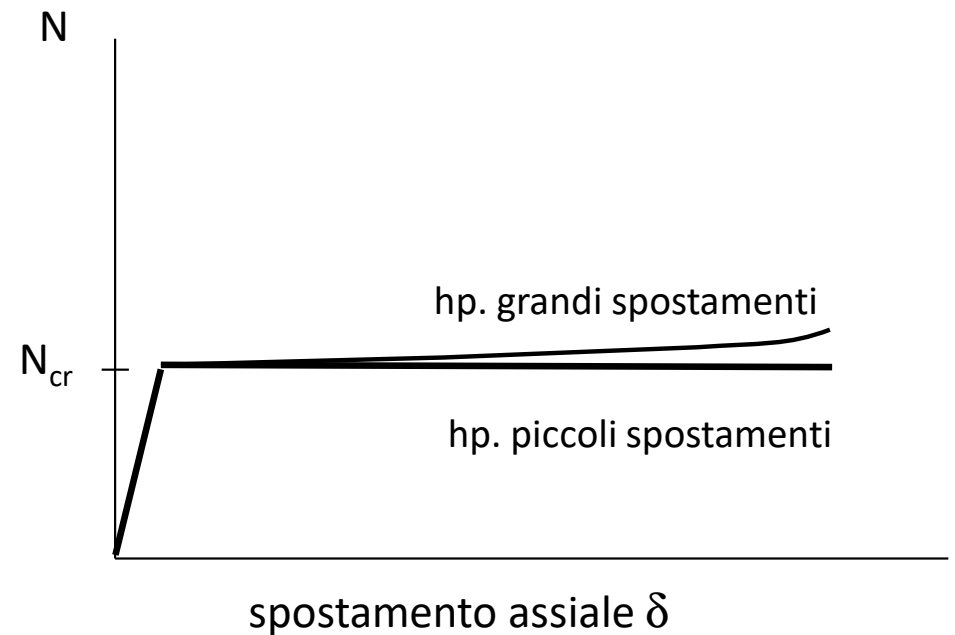
$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$



Comportamento post-critico di un'asta compressa

asta ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico si hanno spostamenti trasversali molto grandi per piccolissimi incrementi di carico
- in pratica il carico non può aumentare ulteriormente e la rigidezza assiale si può considerare nulla



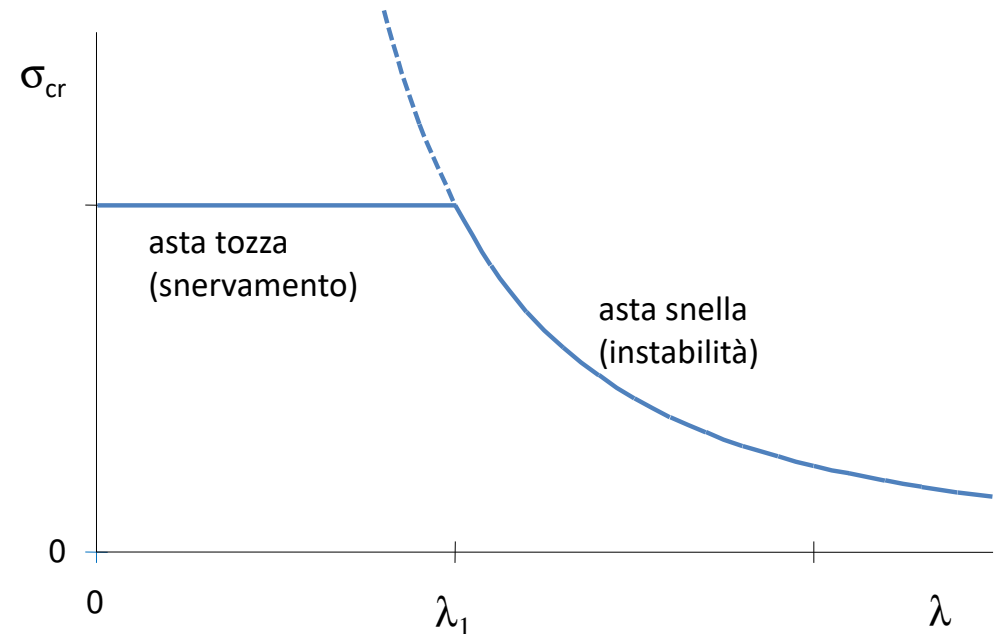
Carico critico di un'asta compressa

asta perfetta

ma di materiale elastico-perfettamente
plastico

- la tensione critica non può superare la tensione di snervamento
- **aste tozze**: si snervano prima di instabilizzarsi
- **aste snelle**: si instabilizzano in campo elastico
- il limite è costituito dalla snellezza λ_1 che corrisponde alla tensione di snervamento

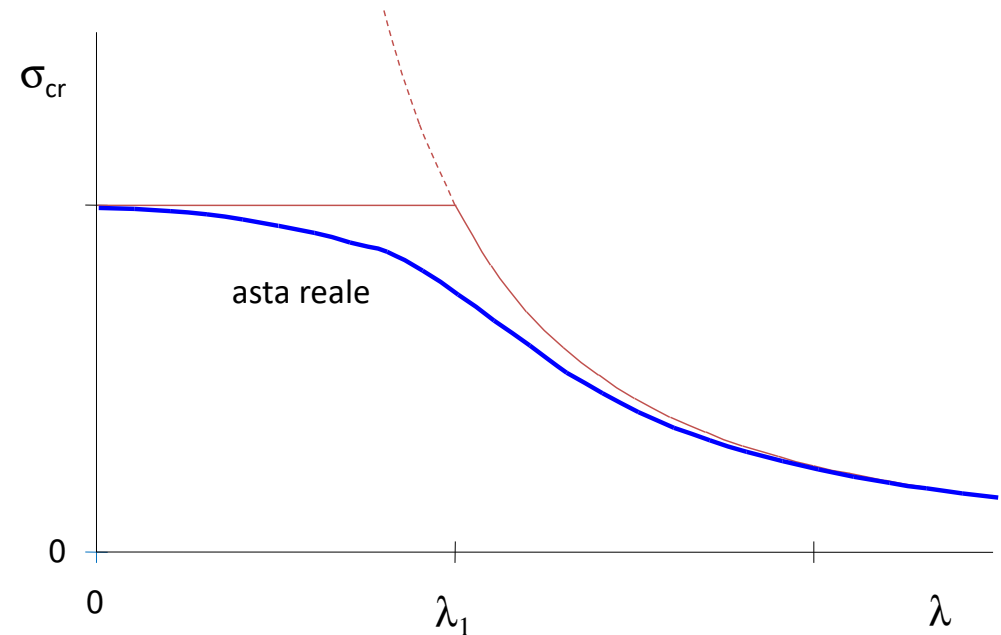
$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$



Carico critico di un'asta compressa

asta reale con imperfezioni e costituita da materiale elastico-perfettamente plastico

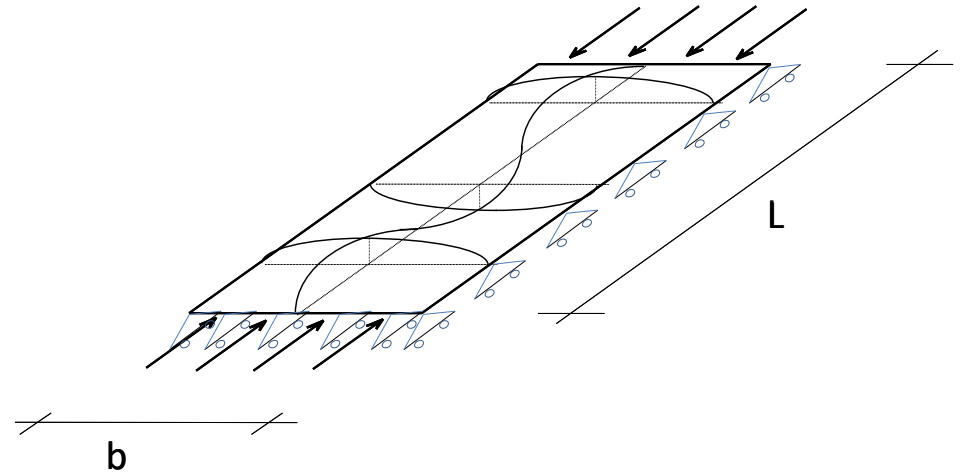
- la tensione critica è minore di quella che si avrebbe nel caso di asta perfetta
- il comportamento post-critico è comunque analogo a quello dell'asta perfetta



Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- le ondulazioni che si formano hanno una lunghezza della semi-onda comparabile con la larghezza b



Carico critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- tenendo conto che

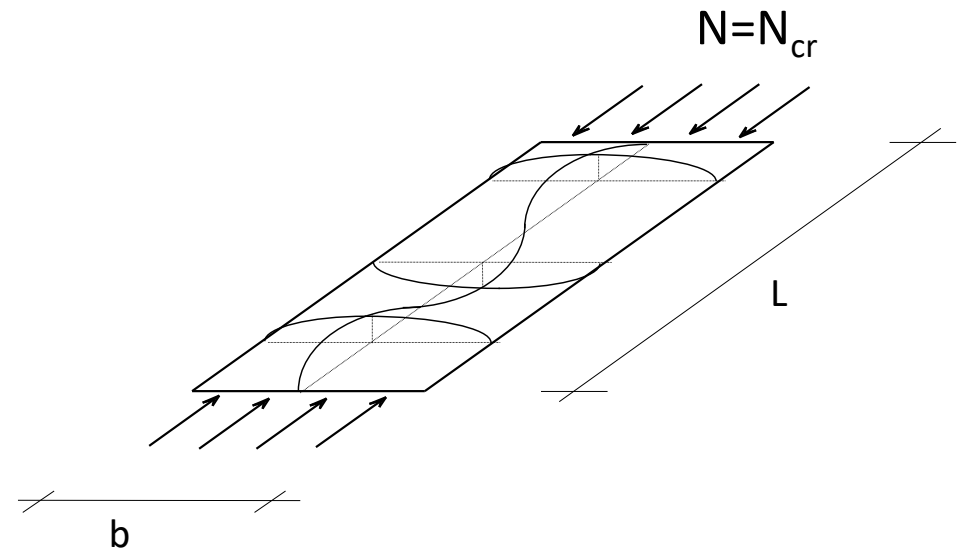
$$A = b \, t \qquad I = \frac{b \, t^3}{12}$$

si ha

$$N_{cr} = \frac{k \, \pi^2 \, E \, I}{(1 - \nu^2) \, b^2} = \frac{k \, \pi^2 \, E \, t^3}{12 \, (1 - \nu^2) \, b}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{k \, \pi^2 \, E}{12 \, (1 - \nu^2) \, (b/t)^2}$$

$$k = \left(\frac{l}{m \, b} \right)^2 + 2 + \left(\frac{m \, b}{l} \right)^2 \qquad m = \text{numero di semi-onde}$$



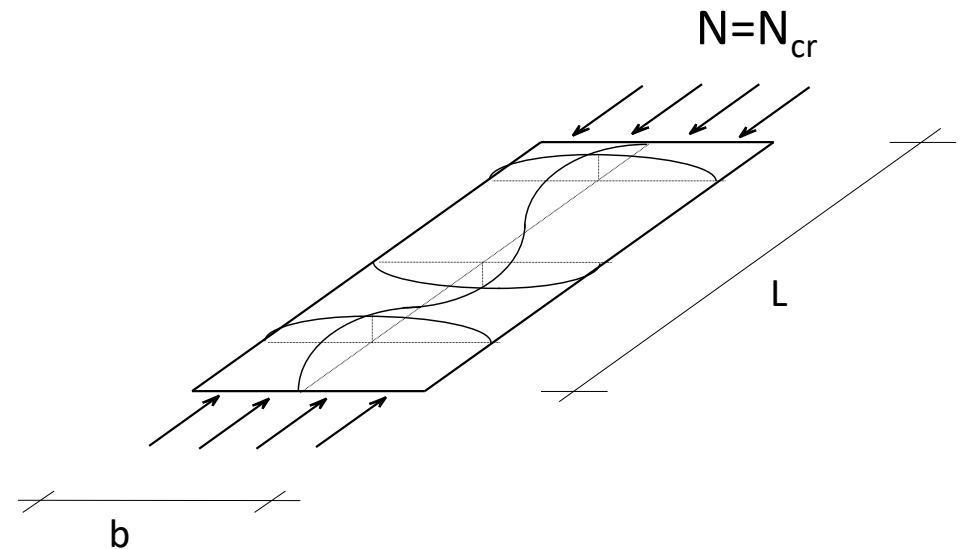
Se l è multiplo di b ($l=mb$) $k=4$

Comunque per $l > 4 \, b$ $k \rightarrow 4$

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidezza estensionale

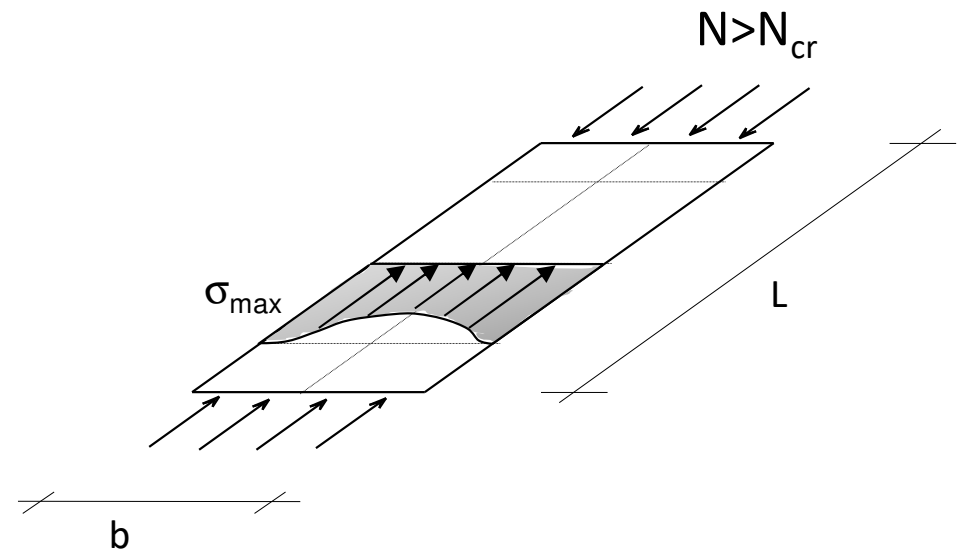


- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- per $N > N_{cr}$
 - le fibre longitudinali più vicine al bordo, più vincolate, sono più rigide di quelle centrali e portano un carico maggiore
 - il diagramma delle tensioni in mezzeria non è uniforme, ma ha un valore massimo in prossimità dei bordi e minimo al centro



$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

Walker, 1975

Tensione massima (σ_{max}) rispetto a quella critica (σ_{cr}) calcolata in funzione di N (diviso Ncr)

σ_{max}/σ_{cr} N/N_{cr} $\Delta N/\Delta s$

0.0000 0.00

1.0000 1.00

1.1928 1.05

1.3882 1.10

1.5862 1.15

1.7868 1.20

1.9900 1.25

2.1958 1.30

2.4042 1.35

2.6152 1.40

2.8288 1.45

3.0450 1.50

3.2638 1.55

3.4852 1.60

3.7092 1.65

3.9358 1.70

4.1650 1.75

4.3968 1.80

4.6312 1.85

4.8682 1.90

5.1078 1.95

5.3500 2.00

5.5948 2.05

5.8422 2.10

6.0922 2.15

6.3448 2.20

6.6000 2.25

6.8578 2.30

7.1182 2.35

7.3812 2.40

7.6468 2.45

0.00

1.00

0.26

0.26

0.25

0.25

0.25

0.24

0.24

0.24

0.23

0.23

0.23

0.23

0.22

0.22

0.22

0.22

0.21

0.21

0.21

0.21

0.20

0.20

0.20

0.20

0.20

0.19

0.19

0.19

0.19

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

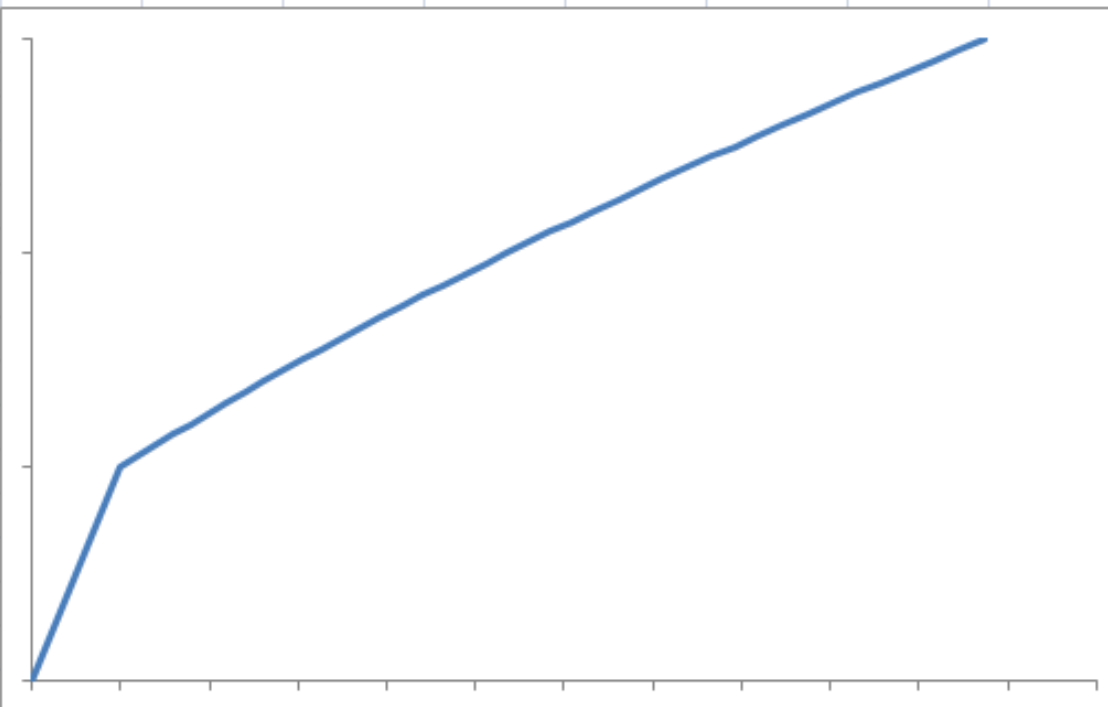


Diagramma di N/N_{cr} in funzione di σ_{max}/σ_{cr}

Si può ritenere che l'accorciamento ϵ_{ps} max sia proporzionale a σ_{max} quindi il diagramma mostra anche N in funzione di ϵ_{ps}

Si nota la brusca riduzione di rigidezza dopo N_{cr}

Il tratto post critico non è esattamente lineare (ma quasi)

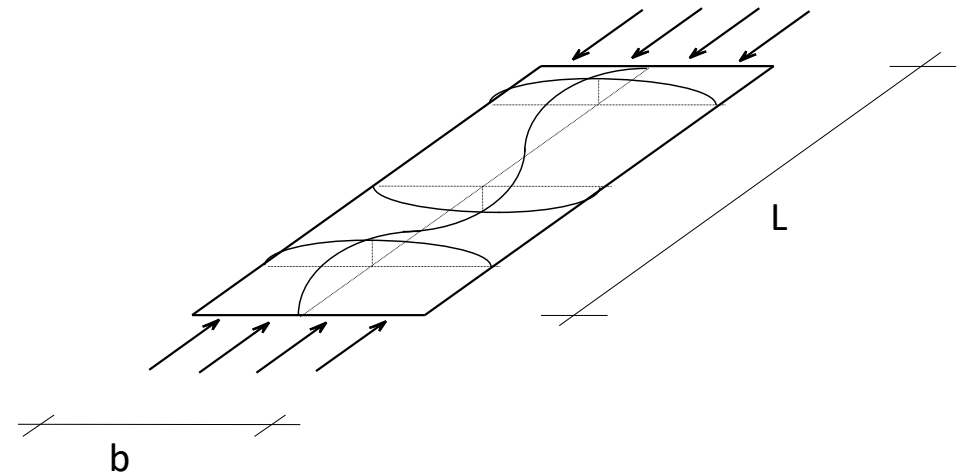
la pendenza (rigidezza) post-critica è qui circa il 20% di quella elastica

Vedi file Instabilità locale, foglio sigma max

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidità estensionale

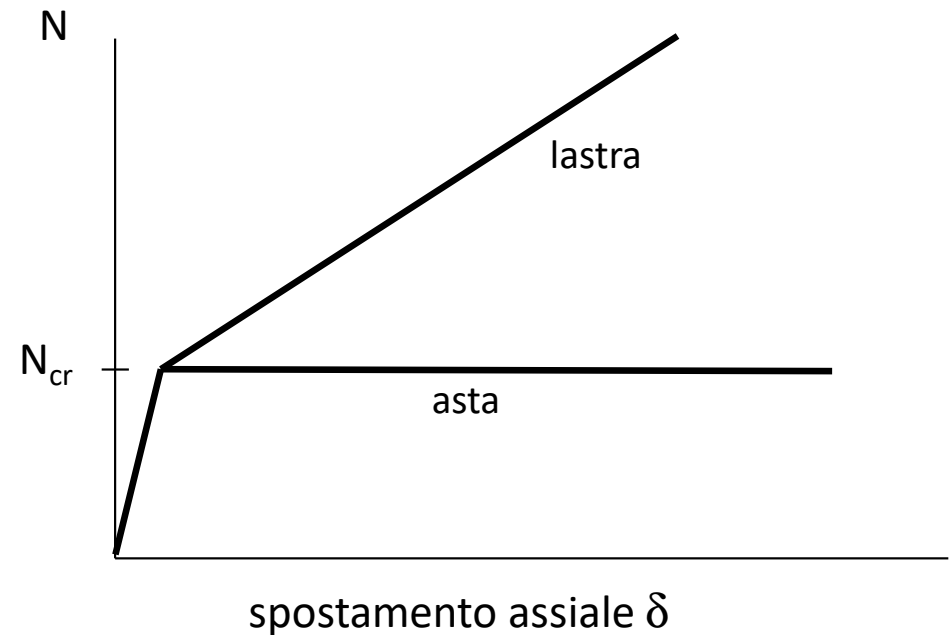


- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico
 - la rigidità assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla

Comportamento post-critico di una lastra compressa

lastra ideale priva di imperfezioni e costituita da materiale
linearmente elastico

- quando si raggiunge il carico critico lo sbandamento fuori piano causa l'allungamento delle fibre trasversali, che tendono quindi a limitarlo grazie alla loro rigidezza estensionale



- per questo motivo:
 - è possibile aumentare ulteriormente il carico
 - la rigidezza assiale della lastra si riduce (fino al 40% del valore iniziale) ma non si annulla

Carico massimo di una lastra compressa

lastra perfetta ma di materiale elastico-perfettamente
plastico

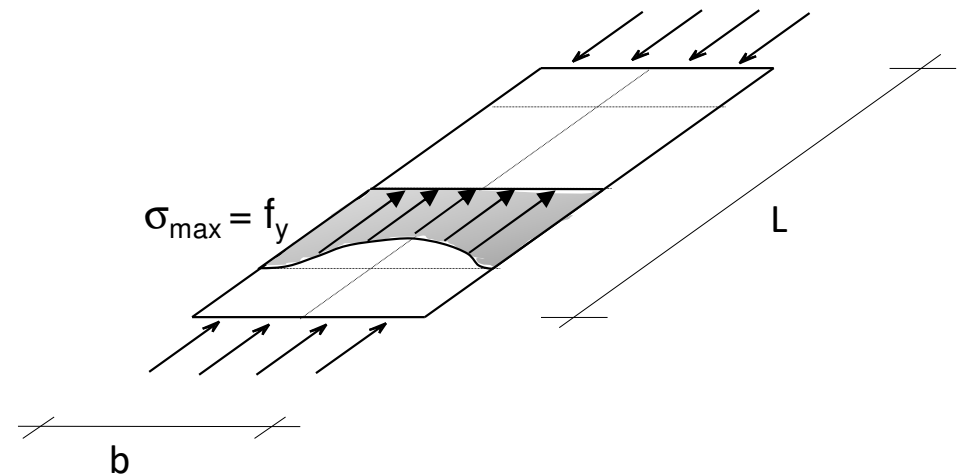
- il carico massimo corrisponde al raggiungimento della tensione di snervamento nella fibra più sollecitata

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{cr}} \cong \frac{N}{N_{cr}} + 2.83 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right) + 0.52 \left(\frac{N}{N_{cr}} - 1 \right)^2$$

$$\sigma_{\max} = f_y \quad N = N_{ult} \quad \downarrow$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

Walker, 1975



$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

Ncr/Ny	Nu/Ny	err	Nu/Ny
0.00	0.000		0.000
0.005	0.086	0.0000	0.086
0.01	0.116	-0.0008	0.116
0.02	0.153	-0.0001	0.154
0.05	0.219	0.0000	0.220
0.10	0.287	-0.0004	0.287
0.15	0.339	-0.0002	0.339
0.20	0.385	-0.0002	0.385
0.25	0.428	0.0010	0.428
0.30	0.469	0.0000	0.470
0.35	0.510	-0.0002	0.510
0.40	0.549	0.0000	0.549
0.45	0.588	0.0001	0.588
0.50	0.626	-0.0001	0.626
0.55	0.664	-0.0001	0.664
0.60	0.702	0.0000	0.702
0.65	0.740	-0.0003	0.739
0.70	0.777	0.0000	0.777
0.75	0.815	-0.0010	0.814
0.80	0.852	0.0000	0.851
0.85	0.889	0.0001	0.889
0.90	0.926	-0.0002	0.926
0.95	0.963	0.0000	0.963
1.00	1.000	0.0000	1.000

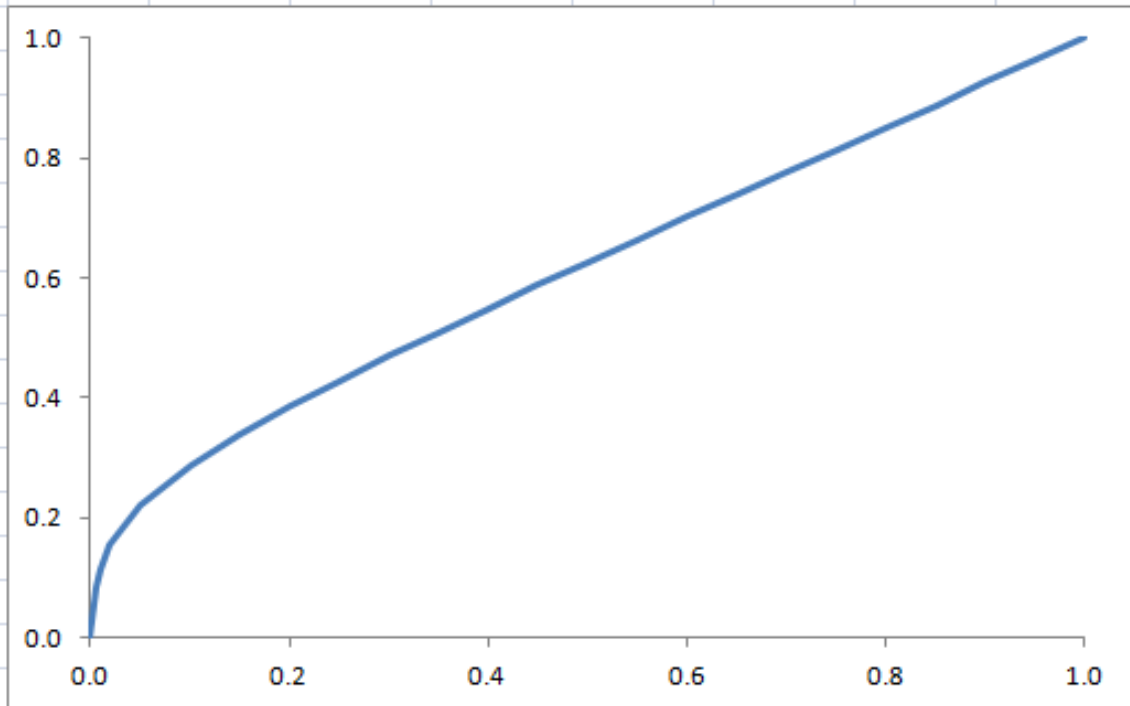


Diagramma di Nult/Ny in funzione di Ncr/Ny

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = 0.36 + 0.83 \frac{N_{cr}}{N_y} - 0.19 \frac{(N_{ult}/N_y)^2}{N_{cr}/N_y}$$

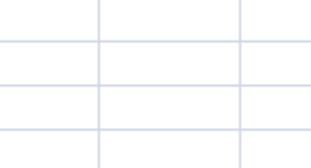
Esempio

Determinazione di Ncr e Nult		
b	200	mm
l	950	mm
t	2.5	mm
E	210000	MPa
v	0.3	
fy	235	MPa
l/b	4.75	
b/t	80.00	
m	5	
k	4.011	
σ _{cr}	118.9	
N _{cr}	59.5	kN
N _y	117.5	kN
N _{cr} /N _y	0.506	
N _{ult} /N _y	0.631	
N _{ult}	74.1	kN

$$k = \left(\frac{l}{m b} \right)^2 + 2 + \left(\frac{m b}{l} \right)^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b/t)^2}$$

$$\frac{N_{ult}}{N_y} = \frac{N_{cr}}{N_y} \left[-2.683 + \sqrt{11.639 + \frac{1.923}{N_{cr}/N_y}} \right]$$

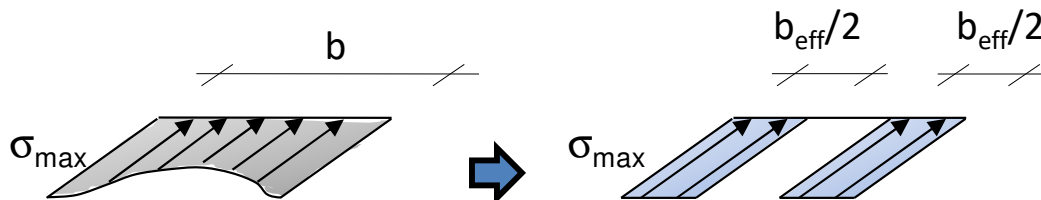
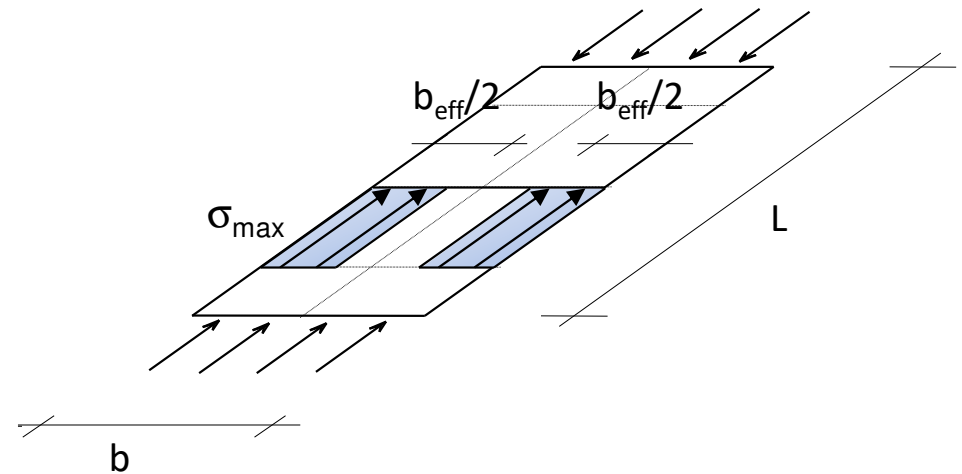


Vedi file Instabilità locale, foglio esempio

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932

- per $N > N_{cr}$
 - si assume che il diagramma delle tensioni sia costante (pari a σ_{max}) ma agisca solo su una parte b_{eff} della lastra
 - la larghezza b_{eff} è tale da mantenere invariata la risultante delle tensioni



b_{eff} è detta
larghezza efficace

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932
(asta perfetta)

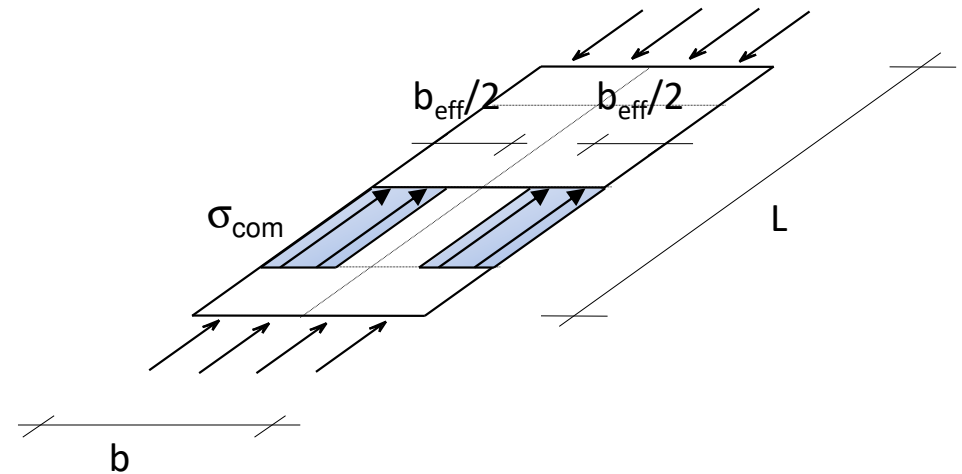
- la larghezza efficace potrebbe essere calcolata dalle espressioni mostrate in precedenza

es. per $N=N_{ult}$

$$\frac{b_{eff}}{b} = \frac{N_{ult}}{N_y}$$

- ma si preferisce assumere che, per un dato σ_{com} , b_{eff} sia la larghezza per la quale questa tensione è critica

$$\sigma_{cr}(b_{eff}) = \sigma_{com} \quad \sigma_{com} = \sigma_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b_{eff} / t)^2} \quad \Rightarrow \quad b_{eff}$$



Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3
(asta perfetta)

$$\sigma_{\text{com}} = \frac{k \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2) (b_{\text{eff}} / t)^2}$$



$$\sigma_{\text{com}} = \frac{k \pi^2 E (b / b_{\text{eff}})^2}{12 (1 - \nu^2) (b / t)^2}$$



$$\frac{b}{b_{\text{eff}}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2) \sigma_{\text{com}}}{k \pi^2 E}}$$

$$\rho = \frac{b_{\text{eff}}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$



$$\bar{\lambda}_p = \frac{b / t}{28.4 \varepsilon \sqrt{k}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$



$$\bar{\lambda}_p \quad (\text{per } \sigma_{\text{com}} = f_y)$$

Si noti che è anche

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{\text{cr}}}}$$

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3

lastra perfetta:

$$\rho = \frac{b_{\text{eff}}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}$$

lastra reale, con imperfezioni:

$$\rho = \frac{b_{\text{eff}}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.22}{\bar{\lambda}_p^2}$$

L'espressione viene
generalizzata nell'Eurocodice
3 (e nella Circolare)
per tener conto di vincoli
differenti e distribuzioni di
tensioni non uniformi

– internal compression elements:

$$\rho = 1,0$$

$$\text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,673, \text{ where } (3 + \psi) \geq 0$$

– outstand compression elements:

$$\rho = 1,0$$

$$\text{for } \bar{\lambda}_p \leq 0,748$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{for } \bar{\lambda}_p > 0,748$$

Indicazioni di normativa

Eurocodice 3, parte 1-5, punto 4.4

Table 4.1: Internal compression elements

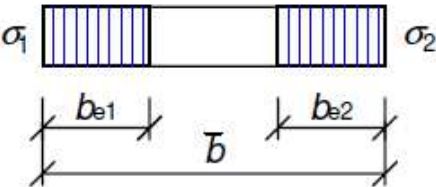
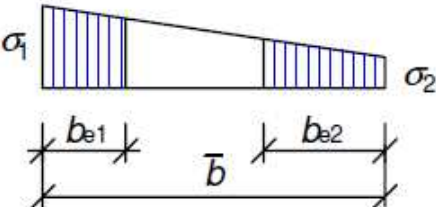
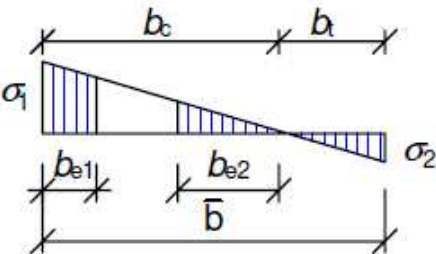
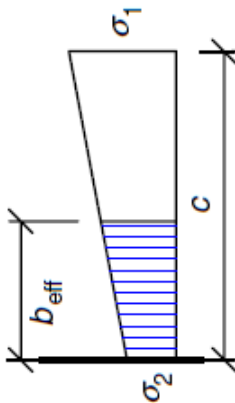
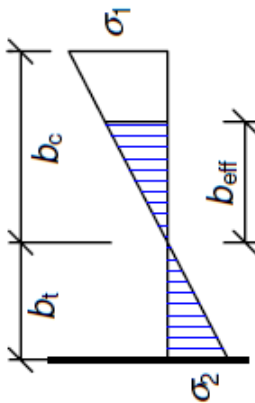
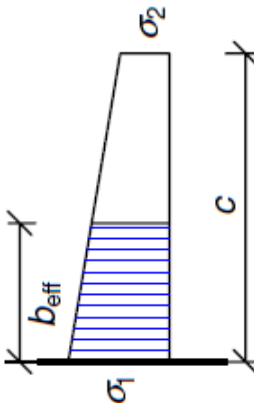
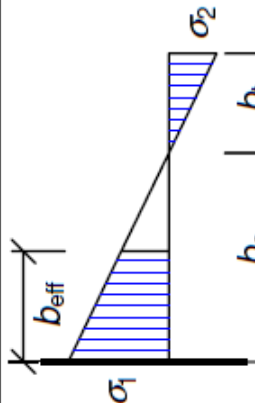
Stress distribution (compression positive)				Effective ^p width b_{eff}		
				$\psi = 1$: $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,5 b_{eff}$		
				$1 > \psi > 0$: $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Buckling factor k_σ	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$

Table 4.2: Outstand compression elements

Stress distribution (compression positive)		Effective ^p width b_{eff}			
		$1 > \underline{\psi} \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ c$			
		$\underline{\psi} < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ b_c = \rho \ c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$		1	0	$1 \geq \psi \geq -3$	
Buckling factor k_σ		0,43	0,57	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	
		$1 > \underline{\psi} \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ c$			
		$\underline{\psi} < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \ b_c = \rho \ c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$		1	$1 > \psi > 0$	$0 > \psi > -1$	
Buckling factor k_σ		0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	
			1,70	23,8	

Comportamento post-critico di una lastra compressa

Approccio semplificato: Von Karman, 1932 – EC3

Per elementi soggetti a tensioni $< f_y$ si usa

$$\bar{\lambda}_{p,red} = \bar{\lambda}_p \sqrt{\frac{\sigma_{com,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}}$$

con la stessa espressione di ρ

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2}$$

precedenti versioni dell'EC3 consideravano troppo cautelativa
l'espressione e suggerivano

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\bar{\lambda}_{p,red} - 0.22}{\bar{\lambda}_{p,red}^2} + 0.18 \frac{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p,red}}{\bar{\lambda}_p - 0.6}$$

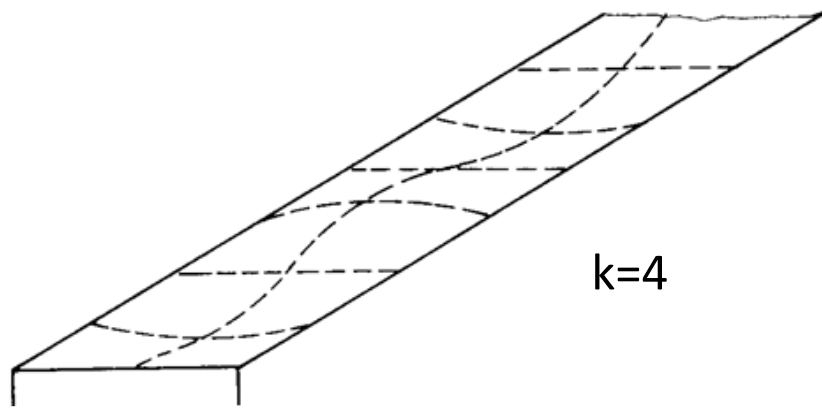
Comportamento post-critico di una lastra compressa

Differenti possibili approcci semplificati:

- larghezza efficace
 - è l'approccio base, il più utilizzato
- spessore efficace
 - è usato per ridurre il contributo degli irrigidimenti nella parte 1-3 dell'Eurocodice 3
 - è usato diffusamente nell'Eurocodice 9 (alluminio)
- area efficace
 - è citato come approccio generale nella parte 1-5 dell'Eurocodice 3
- tensione ridotta
 - era usato nel passato

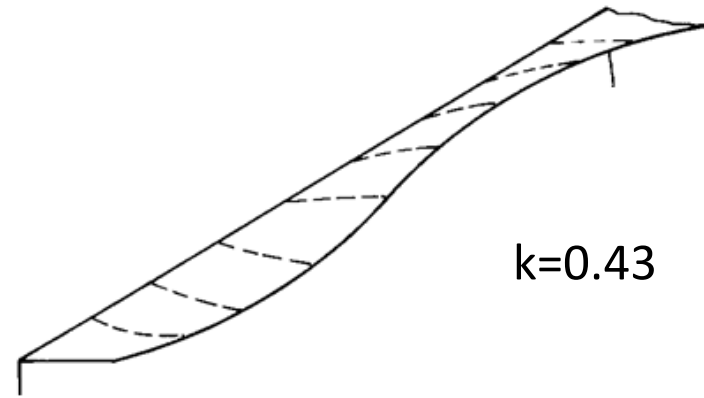
Lastra con un bordo longitudinale libero

- il comportamento è analogo a quello della lastra in cui entrambi i bordi longitudinali sono vincolati, ma il suo carico critico è molto più basso
- la tensione critica può essere calcolata con le stesse espressioni valide per lastra vincolata a entrambi i bordi, ponendo però $k=0.43$



$k=4$

vincolata su due lati



$k=0.43$

vincolata su un solo lato

Esempio

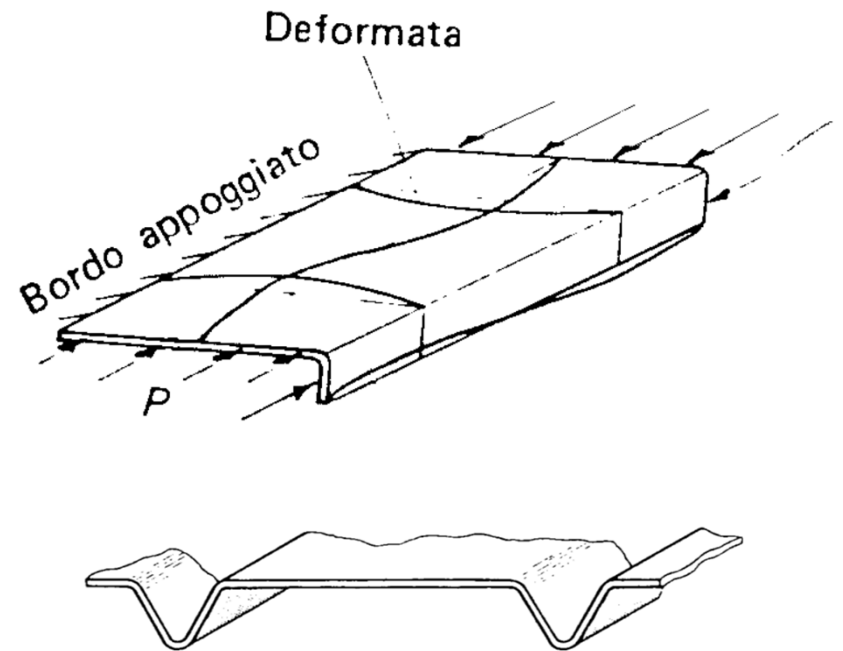
Larghezza efficace				
lastra vincolata su due bordi longitudinali				
b	200	mm		
t	2.5	mm		
k	4			
E	210000	MPa		
ν	0.3			
f_y	235	MPa		
b/t	80			
σ_{cr}	118.6	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
λ_p	1.408			
b_{eff}/b	0.710		0.599	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	0.996			
b_{eff}/b	1.000		0.782	

lastra con un bordo longitudinale libero				
b	100	mm		
t	2.5	mm		
k	0.43			
E	210000	MPa		
ν	0.3			
f_y	235	MPa		
b/t	40			
σ_{cr}	51.0	MPa		
EC3				
per $\sigma_{max}=f_y$				
in assenza di imperfezioni			con imperfezioni	
λ_p	2.148			
b_{eff}/b	0.466		0.418	
per $\sigma_{max}=0.5 f_y/\gamma_{M0}$				
$\lambda_{p,red}$	1.519			
b_{eff}/b	0.658		0.563	

Vedi file Instabilità locale, foglio b eff

Lastre molto snelle

- per annullare o limitare la riduzione del carico critico (e quindi della capacità portante) si possono aggiungere degli irrigidimenti
 - per lastre con un bordo libero: irrigidimenti di bordo
 - per tutte le lastre : irrigidimenti intermedi



occorre verificare l'efficacia degli irrigidimenti
(controllare che non vadano in carico critico)